

8. Feladatsor

Többdimenziós eloszlások

I. Diszkrét eloszlások

1. A (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását a következő táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
1	1/6	1/4	1/6
2	1/12	1/12	1/4

- a.) Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt!
 b.) Adja meg a két változó kovarianciáját!
2. Két kockával dobunk. Jelentse X az egyik, Y a másikon dobott számot. Írjuk fel a (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét!
3. A sík következő koordinátájú pontjaiból kaphatunk rádióüzeneteket, a megadott valószínűségekkel. Készítsen rajzot hozzá!

$X \backslash Y$	0	0.5	4
-1	1/12	1/12	1/6
2	1/6	1/6	1/3

- a.) Adjuk meg az X és Y koordináták eloszlását!
 b.) Függetlenek-e a koordináták?
4. Egy dobozban 30 darab 40 wattos, 30 darab 60 wattos és 40 darab 100 wattos villanykörte van. Kiveszünk véletlenszerűen, visszatérés nélkül 20 villanykörtét. Jelentse ξ a mintában szereplő 40 wattos égők számát, η pedig a 60 wattos égők számát!
- a.) Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó valószínűség-eloszlását!
 b.) Számítsuk ki ξ peremeloszlását!
5. A (ξ, η) lehetséges értékeit és együttes valószínűség-eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.
- a.) Adja meg a p paraméter értékét!
 b.) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:
 $P(\xi = i, \eta = 0)$ ahol $(i = 0, 1, 2)$; $P(\xi < 2 \mid \eta = 0)$; $P(\xi \geq 1 \mid \eta = 1)$; $P(\eta = 1 \mid \xi \geq 1)$!

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	p	p
1	p	$3p$
2	$2p$	$4p$

- c.) Írja fel $M(\eta \mid \xi)$ eloszlását!
6. Egy piros és egy kék kockával dobunk. Legyen X a piros kockán dobott szám, Y pedig a két szám összege! Számítsuk ki Y -nak az $X = 3$ eseményre vonatkoztatott feltételes várható értékét!
7. ξ és η együttes valószínűség-eloszlását a következő táblázat tartalmazza. Írja fel $M(\eta \mid \xi)$ eloszlását!

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
1	1/12	0	2/12
2	2/12	1/12	3/12
3	0	2/12	1/12

8. Az (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

$\xi \backslash \eta$	1	0	2
-1	p	q	p
1	q	p	q

- a.) Határozza meg p és q paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy a valószínűségi változók korrelálatlanok!
 b.) Függetlenek-e a változók?

9. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

X \ Y	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	0

- a.) Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt, és a perem eloszlásokat!
 b.) Független-e a két változó? Hanem, akkor adja meg a korrelációs együttható értékét!

10. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a $(0, 0)$; $(0, 4)$; $(4, 0)$; $(4, 4)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében levő egész koordinátájú pontok alkotják. Az (X, Y) bármelyik értékét egyenlő valószínűséggel veszi fel a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját, és állapítsa meg, független-e ez a két valószínűségi változó.

11. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

- a.) Milyen értékeket vehet fel ϵ ?
 b.) Írja fel az együttes eloszlásfüggvényt, ha $\epsilon = 1/8$.
 c.) Függetlenek-e a változók?

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{4} - \epsilon$	$\frac{1}{4} + \epsilon$
0	$\frac{1}{4} + \epsilon$	$\frac{1}{4} - \epsilon$

II. Folytonos eloszlások

- Határozzuk meg, hogy az A paraméter milyen értéke mellett lehet az $f(x, y) = x^2 + Ay^2$ függvény a $(0 < x < 1, 0 < y < 2)$ tartományban egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.
 - Írjuk fel a perem sűrűségfüggvényeket!
 - Határozza meg az $M(X|Y = y)$ feltételes várható értéket!

- Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}), & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{különbén} \end{cases}$$

- Mutassuk meg, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!
 - Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket és perem-eloszlásfüggvényeket!
 - Adjuk meg a $P(\xi > 0.5, \eta < 1)$ valószínűséget!
 - Függetlenek-e a valószínűségi változók?
- A ξ valószínűségi változó jelentse egy kémiai anyag felületi feszültségét, η a savasságát. A skálázást úgy végezzük, hogy ξ 0 és 2 között, η 2 és 4 között vesz fel értékeket. A valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda(6 - x - y) & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \text{ és } 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{különbén} \end{cases}$$

- Határozza meg a λ paraméter értékét.
 - Adja meg a feltételes sűrűségfüggvényt.
 - Függetlenek-e a valószínűségi változók?
- Adja meg az X valószínűségi változó perem eloszlásfüggvényét, ha az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye adott: $f(x, y) = \frac{y^3 + y}{6} e^{1-x}$ ha $1 < x$ és $0 < y < 2$ különben 0!
 - Adott két független, örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó. Az egyik várható értéke 2, a másiké 4. Írja fel az együttes sűrűségfüggvényüket!

III. Vegyes feladatok

- Mi lesz a ξ valószínűségi változó saját magával vett kovarianciája, korrelációs együtthatója?
- Az X_1, X_2 , valószínűségi változókról tudjuk, hogy a korrelációs együtthatójuk 0,5. Mennyi lesz a $2X_1$ és $3X_2$ valószínűségi változók korrelációs együtthatója?
- Ha minden nő nála 5 évvel idősebb férfhoz menne feleségül, akkor mennyi lenne a férjek és a feleségek életkora közötti korreláció értéke?
- Mi lesz a ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatója, ha $\eta = a\xi + b$?