1. Zárthelyi megoldásokkal

1994 ôsz

1. Igaz-e, hogy ha $a \times c = b \times c$ és $c \neq 0$, akkor $a = b$? Állítását indokolja!

MO. Nem: $a \times c = b \times c$ iff $(a-b) \times c = 0$ iff $a = b$ **VAGY** $a - b$ párhuzamos c–vel. Például két azonos c alapú és azonos magasságú háromszög esetén, melyeknek c kezdôpontjából kiinduló egy-egy oldalvektora a ill. $b \neq a$ (továbbá a és b c–nek ugyanabba a félsíkjába esnek) igaz, hogy $a \times c = b \times c$, hisz a két háromszög területe megegyezik és $a \times c$ valamint $b \times c$ irányai is azonosak.

2. Van-e az alábbi egyenletekkel megadott egyeneseknek közös síkja? Ha van, adja meg az egyenletét!

$\mathbf{e_1}$:

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= 2-t \\ z &= -1+2t \end{aligned}$$

$\mathbf{e_2}$:

$$\begin{aligned} x &= 3-t \\ y &= 2t \\ z &= 3+t \end{aligned}$$

MO. $1+t = 3-\lambda$, $2-t = 2\lambda \leadsto \lambda = 0$, $t = 2$ és $-1+2\cdot 2 = 3 = 3+0$, tehát az egyenesek metszik egymást az $e_1(2) = e_2(0) = P = (3,0,3)$ pontban. A keresett S sík normálvektora $n = e_{e_1} \times e_{e_2} = (1,-1,2) \times (-1,2,1) = (-5,-3,1)$, tehát $S\,:\, -5(x-3) - 3y + (z-3) = 0$.

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszôleges A, B és C halmazok esetén: $A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} = B \cap \overline{(B \cap \overline{A})}$!

MO. $a \cdot \overline{a\overline{b}} = a\,(\overline{a} + b) = ab = ba = b(\overline{b} + a) = b \cdot \overline{b\overline{a}}$.

4. Adja meg az $(1+j)^9$ komplex szám kanonikus alakját!

MO.

$$(1+j)^9 = (\sqrt{2})^9 \cdot e^{9(j\frac{\pi}{4})} = (\sqrt{2})^8 \cdot e^{8(j\frac{\pi}{4})} \cdot (1+j) = 16(1+j)$$

5. Határozza meg az összes olyan komplex számot, melyre fennáll, hogy

$$z^2 = \overline{z}\ !$$

MO. $z = e^{j\varphi}$ – vel: $e^{2j\varphi} = e^{-j\varphi}$ iff $e^{3j\varphi} = 1$ iff $3\varphi = 0 \pmod{2\pi}$ iff $z = e^{jn\frac{2\pi}{3}}$ $n = 0,1,2$.

6. Van-e olyan 0 – hoz konvergáló pozitív elemû sorozat, melyhez nincsen olyan küszöbindex, ami után már a sorozat monoton volna? Állítását indokolja!

MO. Van, például az $\frac{1}{n}$ és a $\frac{2}{n}$ sorozatok összefésülésébôl keletkezett sorozat.

7. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét !

$$a_n = \sqrt{\frac{2\cdot 3^n + 1}{n + 3^n}}$$

MO.

$$\sqrt{\frac{2\cdot 3^n + 1}{n + 3^n}} = \sqrt{\frac{2 + 3^{-n}}{n \cdot 3^{-n} + 1}} \longrightarrow \sqrt{2}$$

8. Legyenek (a_n) és (b_n) tetszôleges sorozatok.

a) Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$. Igaz-e, hogy (a_n) és (b_n) közül valamelyik 0 – hoz tart?

b) Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Igaz-e, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$?

Állítását indokolja!

MO.
a) Nem. Például $a_n = (-1)^n + 1$ és $b_n = a_{n+1}$ esetén $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$,
pedig sem (a_n) sem (b_n) nem konvergens.
b) Nem. Például ha $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ és $b_n = n$, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1$.

1. Zárthelyi megoldásokkal

1997 ősz I. évf. 13.-18.tk.

1. Határozza meg az összes olyan egyenes egyenletét, mely párhuzamos az $S:\ 2x+2y-z=1$ síkkal és átmegy a $P=(1,2,1)$ ponton!

MO. A kívánt tulajdonságú egyenesek irányvektorai $e=(a,b,1)$ vagy $e=(a,b,0)$ alakúak, melyek merőlegesek a sík normálvektorára, tehát $2a+2b-1=0$, azaz $b=1-a$, vagy $2a+2b=0$, azaz $b=-a$. Így (mivel P rajta van az egyeneseken) az $x=at+1$, $b=(1-a)t+2$, $c=t+1$ és az $x=at+1$, $y=-at+2$, $z=1$ egyenletű egyenesek a kívánt tulajdonságúak bármely $a\neq 0$ valós esetén.

2. Vektoralgebrai eszközökkel bizonyítsa be, hogy a rombusz átlói merőlegesek egymásra!

MO. $(a+b,a-b)=a^2+(a,b)-(b,a)-b^2=a^2-b^2=0$, mert $a^2=|a|^2=|b|^2=b^2$

3. Bizonyítsa be, hogy bármely A, B, C halmazok esetén fennáll, hogy

$$\text{ha}\quad A\subseteq B\cap C\quad\text{és}\quad \overline{A}\subseteq\overline{B}\cap\overline{C}\,,\ \text{akkor}\quad A=B=C\ !$$

MO. $A\subseteq B\cap C \rightsquigarrow A\subseteq B$ és $A\subseteq C$, másrészt $\overline{A}\subseteq\ \overline{B}\cap\ \overline{C}\ \rightsquigarrow\ \overline{A}\subseteq\ \overline{B}$ és $\overline{A}\subseteq\ \overline{C}$, mely utóbbiakból $B\subseteq A$ és $C\subseteq A$.

4. Határozza meg a $z=(1+j)\cdot(\frac{1+j}{j})^{16}$ komplex szám abszolút értékét és az x tengellyel bezárt szögét!

MO. $\frac{1+j}{j}=1-j=\sqrt{2}\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$, így $|z|=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2})^{16}=256\cdot\sqrt{2}$ és $\arg z=\frac{\pi}{4}+16\cdot(-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{4}\pmod{2\pi}$, tehát $\arg_0 z=\frac{\pi}{4}$

5. Mutasson példát olyan sorozatra (ha létezik ilyen) melynek

a) nincs divergens részsorozata
b) pontosan egy divergens részsorozata van
c) pontosan két divergens részsorozata van
d) végtelen sok divergens részsorozata van!

MO. a) Bármely konvergens sorozat. b) és c) nincs, mert ha van divergens részsorozat, akkor biztosan van végtelen sok különböző részsorozat. (Valóban, ha a sorozat korlátos és van egy divergens részsorozata, akkor annak van két különböző határértékhez konvergáló részsorozata, melyek összefésülésével kapunk egy olyan sorozatot, melyből például minden harmadik elemet elhagyva egy másik divergens részsorozatot kapunk és például minden ötödiket elhagyva egy harmadik divergens részsorozatot kapunk stb.), míg ha a sorozat nem korlátos, akkor abszolút értéke végtelenhez tart, melynek minden részsorozatára ugyanez igaz.) d) Bármely divergens sorozat (lásd az előzőekben mondottakat.)

6. Számítsa ki a következő hatérértéket! $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

MO. Számláló és nevező konjugáltjával való szorzással $\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\longrightarrow 1$

7. Tegyük fel, hogy $a_n\longrightarrow+\infty$. Mely valós r számokra lesz igaz, hogy ${a_n}^r\longrightarrow+\infty$?

MO. ${a_n}^r\longrightarrow 0$ ha $r<0$, ${a_n}^r\longrightarrow 1$ ha $r=0$, ${a_n}^r\longrightarrow+\infty$ ha $r>0$, hiszen $a_n\geq K^{\frac{1}{r}}\rightsquigarrow {a_n}^r\geq K$ ha $r>0$, és $\frac{1}{a_n}\longrightarrow 0$ ha ${a_n}^r\longrightarrow+\infty$.

8. Határozzuk meg a kiovetkező f függvény jobb– és baloldali határértékét az $x=0$ helyen! Létezik–e a függény határértéke itt? $f(x)=e^{-e^{-e^{-\frac{1}{x}}}}$

MO. Összetett függvény határértéke: $\lim\limits_{x\longrightarrow 0+}e^{-e^{-e^{-\frac{1}{x}}}}=\lim\limits_{y\longrightarrow-\infty}e^{-e^{-e^{y}}}=\lim\limits_{z\longrightarrow 0}e^{-e^{z}}=\lim\limits_{z\longrightarrow-1}e^{w}=\dfrac{1}{e}$ és $\lim\limits_{x\longrightarrow 0-}e^{-e^{-e^{-\frac{1}{x}}}}=\lim\limits_{y\longrightarrow+\infty}e^{-e^{-e^{y}}}=\lim\limits_{z\longrightarrow-\infty}e^{-e^{z}}=\lim\limits_{z\longrightarrow 0}e^{w}=1$ (röviden, de informálisan: egyrészt $e^{-e^{-e^{-\frac{1}{+0}}}}=e^{-e^{-e^{-\infty}}}=e^{-e^{0}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$, másrészt $e^{-e^{-e^{-\frac{1}{-0}}}}=e^{-e^{-e^{+\infty}}}=e^{-e^{-\infty}}=e^{0}=1$.)

A két oldali határérték nem egyezik meg, tehát nem létezik a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}f(x)$.

1. ZÁRTHELYI

Megoldásokkal

1998 ősz I. évf. 13.-18.tk.

1. Határozza meg azon f egyenes egyenletét, mely átmegy az $e:\ x=-2t+1,\ y=t+1,\ z=-t$ egyenes és az $S:\ 2x+2y-z=1$ sík közös pontján és merőleges a síkra!
MO. f irányvektora az S normálvektora: $n=(2,2,-1)$ és egy pontja a döféspont, $P=S\cap e$, azaz $2(-2t+1)+2(t+1)+t=1 \rightsquigarrow t=3 \rightsquigarrow P=(-5,4,-3) \rightsquigarrow f: x=-5+2t,\ y=4+2t,\ z=-3-t.$

2. Vektoralgebrai eszközökkel bizonyítsa be, hogy az egyenlőszárú háromszög alapjához tartozó súlyvonal egybeesik az alaphoz tartozó magasságvonallal !
MO. Legyen a két szár b és c egymáshoz csatlakozva irányítva. Ekkor az alap: $a=b+c$ és a hozzá tartozó súlyvonal: $s=b-\frac{a}{2}$. Ezekkel $s\cdot a=(b-\frac{b+c}{2})\cdot(b+c)=\frac{1}{2}(2b-(b+c))\cdot(b+c)=\frac{1}{2}(b-c)(b+c)=$ $=\frac{1}{2}(b^2-c^2)=0$ (mert $b^2=|b|^2=|c|^2=c^2$), vagyis s merőleges a-ra, azaz magasságvonal.

3. Bizonyítsa be, hogy bármely A és B halmazok esetén fennáll, hogy ha $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})=\emptyset$, akkor $A\subseteq C$.
MO. $(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{C})=\emptyset \rightsquigarrow A\cap\overline{B}=\emptyset$ és $B\cap\overline{C}=\emptyset \rightsquigarrow A\subseteq B$ és $B\subseteq C \rightsquigarrow A\subseteq C$, hiszen tetszőleges D és E halmazok esetén $D\cap\overline{E}=\emptyset$ iff $D\subseteq E$.

4. Oldja meg a $z^4=-1$ egyenletet a komplex számok körében!
MO. $z_{1,2,3,4}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm j)$

5. Melyik igaz, melyik nem? Igenlő válaszát bizonyítsa, a nem nemleges válasz esetén mutasson ellenpéldát!
a) Két korlátos pozitív tagú divergens sorozat összege divergens
b) Két korlátos sorozat összege korlátos
c) Két monoton sorozat összege monoton
d) Két nem monoton sorozat összege nem monoton
MO. a) Nem: $x_n=(-1)^n,\ a_n=2+x_n,\ b_n=2-x_n,\ a_n+b_n=4$. b) Igen: a két korlát összege korlátja az összegnek, hiszen minden n-re $|a_n+b_n|\le|a_n|+|b_n|\le K_1+K_2$. c) Nem, még szigorú monotonitás esetén sem: $a_n=(1,3,4,6,7,9,\ldots),\ b_n=(-1,-2,-4,-5,-7,-8\ldots),\ (a_n+b_n)=(0,1,0,1,0,1,\ldots)$.
d) Nem, még szigorúan monoton is lehet: $a_n=(0,1,0,2,0,3,\ldots)$,
$b_n=(0,0,2,1,4,2,6,3,8,\ldots n-1,2n,\ldots),\ (a_n+b_n)=(0,1,2,3,4,\ldots,2n-1,2n,\ldots)$.

6. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n-1}}{n+1}$$

MO.

$$\frac{\sqrt{2n^2+1}-\sqrt{n-1}}{n+1}=\frac{2n^2+1-(n-1)}{\sqrt{2n^2+1}+\sqrt{n-1}}\cdot\frac{1}{n+1}\longrightarrow\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

(Mind a számlálóra mind a nevezőre igaz, hogy $\sim n^2$, és az n^2–es tag együtthatója a számlálóban 2 míg a nevezőben $\sqrt{2}$.)

1. Zárthelyi megoldásokkal

1999 ősz I. évf. 13.-18.tk.

1. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B halmazok esetén: $\overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A}$

MO. Legyen $A, B \subseteq E$. $\overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap \overline{B}} = \overline{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})} = \overline{A \cap (B \cup \overline{B})} = \overline{A \cap E} = \overline{A}$

2. Határozza meg az $x - y - z = 1$ és $x + 2y + z = 0$ egyenletű síkok metszésvonalának egyenletét és mutassa meg, hogy ez valóban metszésvonal!

MO. $S_1 : x - y - z = 1$, $S_2 : x + 2y + z = 0$, $e \in S_1 \cap S_2 \rightsquigarrow 2x + y = 1 \rightsquigarrow y = 1 - 2x \rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow e : x = t,\ y = 1 - 2t,\ z = -x - 2y = -t - 2(1 - 2t) = 3t - 2$. $e \in S_1 \cap S_2 :$ $t - (1 - 2t) - (3t - 2) = 1$ és $t + 2(1 - 2t) + (3t - 2) = 0$.

3. Határozza meg azokat a komplex számokat, melyekre fennáll, hogy $j \cdot \overline{z} = -z$.

MO. $j \cdot \overline{z} = r \cdot e^{j(\pi/2 - \varphi)} = r \cdot e^{j(\pi + \varphi)} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \pi + \varphi \pmod{2\pi} \rightsquigarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

4. Melyik igaz, melyik nem? (Válaszait indokolja!)

1. Ha egy sorozat konvergens, akkor minden részsorozata monoton
2. Ha egy sorozat minden részsorozata monoton, akkor a sorazat konvergens
3. Ha egy sorozat konvergens, akkor minden részsorozata korlátos
4. Ha egy sorozat minden részsorozata korlátos, akkor a sorozat konvergens.

MO. 1. Nem: $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ összefésülése 2. Nem: $a_n = n$ 3. Igen: konvergens sorozat korlátos, így minden részsorozata is az 4. Nem: $0, 1, 0, 1, 0, 1 \ldots$.

5. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{11n^9 + 7n! - 5 \cdot 3^n}{10n^8 - 6n! + 4 \cdot 2^n} = ?$

MO. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{11n^9 + 7n! - 5 \cdot 3^n}{10n^8 - 6n! + 4 \cdot 2^n} = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{11n^9/n! + 7 - 5 \cdot 3^n/n!}{10n^8/n! - 6 + 4 \cdot 2^n/n!} = -\dfrac{7}{6}$ mert $n^k \lhd a^n \lhd n!$ ha $a > 1$.

6. Ábrázolja vázlatosan a $\pm\infty$–ben és a szakadási helyeken vett jobb– és baloldali határértékei, gyökhelyei és az $x = 0$ helyen felvett értéke alapján az $f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$ függvényt!

MO. $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = +0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1-} f(x) = -\infty$, $f(0) = 0$ $\rightsquigarrow$