1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen $v(r) = (x, y^2)$ egy kétdimenziós vektortér és F az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,1) és az (1,0) pontok. Számítsuk ki v fluxusát F–en mint egy kifelé irányított kétdimenzióbeli valódi felületen, kétféleleképpen:
a) a fluxus definíciója alapján közvetklenül a v–nek az F–en való felületmenti integrálásával
b) a Gauss-Osztrogradszkij tétel alapján

MO. a) A tengelyek mentén a fluxus nulla, mert a vízszintes tengely pontjaiban csak vízszintes, a függőleges tengely pontjaiban pedig csak függőleges komponense van a függvénynek, így itt a felületi normális és a függvény egymásra merőlegesek. Ami az F átfogót illeti, egy egyenlete (melynek esetén a térrészből kifele van irányítva: $r(t) = (t, (1-t))$, $t \in [0,1]$. Igy

$$\mathrm{CROSS}(\dot r(t)) = -\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1,1) \quad \text{(persze!)}$$

és így a fluxus

$$\int_F v\,df = \int_0^1 v(r(t)) \cdot \mathrm{CROSS}(\dot r(t))\,dt = \int_0^1 (t, (1-t)^2) \cdot (1,1)\,dt = \int_0^1 1 - t + t^2\,dt = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{4}{6}.$$

b) $\mathrm{div}\, v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 1 + 2y$, így Gauss-Osztogradszkij tétellel a fluxus (a háromszöglapot V-vel jelölve):

$$\int_F v\,df = \int_V \mathrm{div}\, v\,dV = \int_V 1 + 2y\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 + 2y\,dy\,dx = \int_0^1 y + y^2\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (1-x) + (1-x)^2 dx = \int_0^1 2 - 3$$

2. Számítsuk ki a $\mathrm{CROSS}(r\mathrm{div}\,(r|r|))$ $(r \in \mathbf{R})$ értékét a $P = (3,4)$ pontban!

MO. $\mathrm{div}\,(r|r|) = |r|\mathrm{div}\, r + r \cdot \mathrm{grad}\,|r| = 2|r| + r \cdot \frac{r}{|r|} = 3|r|$. (VAGY koordinátánként: $r|r| = (x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2})$, $\mathrm{div}\,(r|$

$$\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2}),$$

így $(r\mathrm{div}\,(r|r|)) = 3r|r|$, tehát $\mathrm{CROSS}(r\mathrm{div}\,(r|r|)) = \mathrm{CROSS}\,(3|r|(x,y)) = 3|r|\mathrm{CROSS}\,(r) = 3|r|(-y,x)|_P = 15(-4,3) = (-60,45)$.

3. Határozzuk meg a $v(x,y) = (x^2 + y^2, 2xy)$ vektorfüggvény potenciáját, ahol az létezik!

MO. $\mathrm{rot}\, v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 + y^2 & 2xy \end{pmatrix} = 2y - 2y = 0$, tehát mindenütt van potenciál. $u_x = x^2 + y^2$, $u_y = 2xy$,

tehát $u = xy^2 + c(x)$, azaz $x^2 + y^2 = u_x = y^2 + c'$, vagyis $c' = x^2$, így $c = \dfrac{x^3}{3}$, amiből $u = xy^2 + \dfrac{x^3}{3}$.

4. Legyen $f(z) = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$ ha $z \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol folytonos az f függvény?

MO. Mindenütt, mert $z \neq 0$ esetén folytonos függvényekből származik folytonosságot megőrző módon és
$$\left|\frac{\overline{z}^2}{z}\right| = \frac{|\overline{z}|^2}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} 0|z| \xrightarrow[z \to 0]{} 0.$$

5. K egységnyi sugarú, origó középpontú kör. Mekkora az
$$\int_K \frac{e^{2z}}{z^2}\,dz \quad \text{integrál ?}$$

MO. Cauchy integrálformulával $\displaystyle\int_K \frac{e^{2z} z^2\,dz}{=} \frac{2\pi j}{2} (e^{3z})''|_{z=0} = 9\pi j$.

6. Határozza meg a $f(z) = \frac{1}{z}$- függvény azon $z = -1$ pont körüli Laurent sorát mely a $z = 1$ pontban előállítja a függvényt!

MO. $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(z+1) - 1} = \dfrac{1}{z+1} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{z+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n}$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen $v(r) = (y, x^2)$ egy kétdimenziós vektortér és L az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,1) és az (1,0) pontok. Számítsuk ki v cirkulációját L–en mint egy pozitívan irányított kétdimenzióbeli görbén, kétféleleképpen:
a) a cirkuláció definíciója alapján közvetklenül a v–nek az L–en való görbementi integrálásával
b) a Stokes tétel alapján
MO. a) A tengelyek mentén a cirkuláció nulla, mert a vízszintes tengely pontjaiban csak függőleges, a függőleges tengely pontjaiban pedig csak vízszintes komponense van a függvénynek, így itt az érintő és a függvény egymásra merőlegesek. Ami az L átfogót illeti, egy egyenlete (melynek esetén, mint a térrész határa pozitívan van irányítva: $r(t) = ((1-t), t),\ t \in [0,1]$. Igy a cirkuláció:
$\int_L v\,dr = \int_0^1 v(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\,dt = \int_0^1 (t,(1-t)^2)\cdot(-1,1)\,dt = \int_0^1 -t+(1-t)^2\,dt = -\frac{t^2}{2} - \frac{(1-t)^3}{3}\big|_0^1 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$
b)

$$\mathrm{rot} v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ y & x^2 \end{vmatrix} = 2x-1$$

így Stokes tétellel a cirkuláció (a háromszöglapot V-vel jelölve):
$\int_L v\,dr = \int_V \mathrm{rot}\, v\,dV = \int_V 2x-1\,dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} 2x-1\,dy\,dx = \int_0^1 x^2 - x\big|_0^{1-x}\,dx = \int_0^1 (1-x)^2-(1-x)dx == -\frac{(1-}{3}$

2. Számítsuk ki a CROSS$(r(1+\mathrm{rot}\,(r|r|))$ $(r \in \mathbf{R}^2)$ értékét a $P = (3,4)$ pontban!
MO. $\mathrm{rot}\,(r|r|) = |r|\mathrm{rot}\, r - \mathrm{CROSS}\,(r)\cdot \mathrm{grad}\,|r| = 0 + \mathrm{CROSS}\,(r)\cdot \frac{r}{|r|} = 0$. (VAGY koordinátánként: $r|r| = (x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2}), \mathrm{rot}\,(r|r|) = \frac{\partial}{\partial x} y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y} x\sqrt{x^2+y^2} = \frac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0)$,
így $(\mathrm{rot}\,(r|r|)) = 0$, tehát CROSS$(r(1+\mathrm{rot}\,(r|r|)))|_P = \mathrm{CROSS}\,(r)|_P = (-y,x)|_P = (-4,3)$.

3. Határozzuk meg a $v(r) = r|r|,\ r \in \mathbb{R}^4$ vektorfüggvény potenciáját, ahol az létezik!
MO. $\mathrm{rot}\, v = 0$ (az előző példában már láttuk), tehát mindenütt van potenciál. Így $u(r) = \int_0^1 v(rt)\cdot r\,dt =$
$= \int_0^1 rt|rt|\cdot r dt = \int_0^1 |r|^2 t|rt| dt = \int_0^1 |r|^3 t|t| dt = |r|^3 \int_0^1 t^2 dt = |r|^3 \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{|r|^3}{3}.$

4. Legyen $f(z) = \dfrac{z^2}{\overline{z}}$ ha $z \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol folytonos az f függvény?
MO. Mindenütt, mert $z \neq 0$ esetén folytonos függvényekből származik folytonosságot megőrző módon és $\left|\frac{z^2}{\overline{z}}\right| = \frac{|z^2|}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \xrightarrow[z \to 0]{} 0$.

5. K egységnyi sugarú, origó középpontú kör. Mekkora az
$\int_K \frac{(\sin z^n)^n}{z^{2n}}\,dz$ integrál?
MO. $\int_K \frac{(\sin z^n)^n}{z^{2n}}\,dz = 0$ mert $\lim_{z\to 0} \frac{(\sin z^n)^n}{z^{2n}} = 0$, így megszüntethető szakadása van az origóban.

6. Határozza meg a $f(z) = \frac{1}{z}$- függvény azon $z = 1$ pont körüli Laurent sorát mely a $z = -1$ pontban előállítja a függvényt!
MO. $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-1)+1} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}}$

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen $v(r) = (x-y, x+y)$ egy kétdimenziós vektortér és L az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,1) és az (1,0) pontok. Számítsuk ki v fluxusát F–en mint egy kifelé irányított kétdimenzióbeli valódi felületen és v cirkulációját L–en mint egy pozitívan irányított kétdimenzióbeli görbén.

MO.

a) $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2$, így Gauss-Osztogradszkij tétellel a fluxus (a háromszöglapot V-vel jelölve): $\displaystyle\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_V 2\,dV = 2\int_V dV = 2|V| = 1.$

b) $\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x-y & x+y \end{vmatrix} = 2$

így Stokes tétellel a cirkuláció (a háromszöglapot V-vel jelölve): $\displaystyle\int_L v\,dr = \int_V \operatorname{rot} v\,dV = \int_V 2\,dV = 2\int_V dV = 1.$

2. Számítsuk ki a $\operatorname{rot}(r\operatorname{div}(r|r|))$ $(r \in \mathbb{R}^4)$ értékét a $P = (3,4)$ pontban!

MO. $\operatorname{div}(r|r|) = |r|\operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r| = 2|r| + r \cdot \frac{r}{|r|} = 3|r|$. (VAGY koordinátánként: $r|r| = (x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2})$, $\operatorname{div}(r|$ $\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2})$, így $\operatorname{div}(r|r|) = |r|\operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r| = 2|r| + r \cdot \frac{r}{|r|} = 3|r|$. Másrészt $\operatorname{rot}(r|r|) = |r|\operatorname{rot} r - \operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad}|r| = 0 + \operatorname{CROSS}(r) \cdot \frac{r}{|r|} = 0$. (VAGY koordinátánként: $r|r| = (x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2}), \operatorname{rot}(r|r|) = \dfrac{\partial}{\partial x} y\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} x\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0)$, így $(\operatorname{rot}(r\operatorname{div}(r|r|)) = \operatorname{rot}(3r|r|)) = 3\operatorname{rot}(r|r|)) = 0$.

3. Adjunk meg egy olyan $u = u(r)$, $r \in \mathbb{R}^4$ skalár-függvényt, melyre fennáll, hogy $\operatorname{grad} u = r|r|^2$ minden $r \in \mathbb{R}^4$ esetén!

MO. Legyen $v = r|r|^2 = (x(x+y, y(x+y))$.

$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(r|r|^2) = r|r|^2 \operatorname{rot}(r) - \operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad}(|r|^2) = 0 - \operatorname{CROSS}(r) \cdot 2|r|\dfrac{r}{|r|} = 0$

$$\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(x(x+y, y(x+y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x(x+y) & y(x+y) \end{pmatrix} = 2xy - 2xy = 0$$

tehát mindenütt van potenciál. Így

$u(r) = \displaystyle\int_0^1 v(rt) \cdot r\,dt = \int_0^1 rt|rt|^2 \cdot r dt = \int_0^1 |r|^2 t|rt|^2 dt = \int_0^1 |r|^4 t|t|^2 dt = |r|^4 \int_0^1 t^3 dt = |r|^4 \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{|r|^4}{4}$.

(VAGY: $u_x = x(x^2+y^2)$, $u_y = y(x^2+y^2)$, tehát $u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \cdot y^2 c(y)$, azaz $x^2y + c'(y) = u_y = y(x^2+y^2)$, vagyis $c' = y^3$, így $c = \dfrac{y^4}{4}$, amiből $u = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} \cdot y^2 + \dfrac{y^4}{4} = \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2 = \dfrac{|r|^4}{4}$.)

4. Legyen $f(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{\overline{z}}$ ha $z \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol folytonos az f függvény?

MO. Az origó kivételével mindenütt, mert $z \neq 0$ esetén folytonos függvényekből származik folytonosságot megőrző módon és $\dfrac{z+\overline{z}}{\overline{z}} = 1 + \dfrac{z}{\overline{z}}$ és $\dfrac{z}{\overline{z}}$– nek nincs határértéke az origóban, hiszen itt az x tengely mentén: $f(z) = f(x,0) = \dfrac{x}{x} = 1$, míg az y tengely mentén $f(z) = f(0,y) = \dfrac{jy}{-jy} = -1$.

5. K egységnyi sugarú, origó középpontú kör és c tetszőleges egész szám. Mekkora az $\displaystyle\int_K \frac{e^z}{z^c}\,dz$ integrál ?

MO. Ha c nem pozitív, akkor, mivel az integrandus reguláris, az integrál 0. Egyebként persze Cauchy integrál–formulával, vagy residuum-tétellel:

$\displaystyle\int_K \frac{e^z}{z^c}\,dz = \frac{2\pi j}{2} \frac{1}{(c-1)!}$

6. Határozza meg a $f(z) = \frac{1}{z}$- függvény azon $z = j$ pont körüli Laurent sorát mely a $z = -j$ pontban előállítja a függvényt!

MO. $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(z-j)+j} = \dfrac{1}{z-j} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{1}{z-j}} = \dfrac{1}{z-j}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-j)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(z-j)^{n+1}}$

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen F a z–tengelyű R sugarú m magasságú egyenes körhengerpalást. $\int_F r\,df = ?$

MO. $\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df| = \int_F R\,|df| = R\int_F |df| = R|F| = R\cdot 2R\pi m = 2R^2\pi m$

---

2. Számítsuk ki a $\operatorname{div}(|r|(k\times r))$ értékét minden $r\in\mathbb{R}^3$, $r\neq 0$ esetén!

MO. $\operatorname{div}(|r|(k\times r)) = |r|\operatorname{div}(k\times r) + (k\times r)\cdot\operatorname{grad}|r| = 0$, mert $\operatorname{div}(k\times r) = 0$ (pl. azért mert $k\times r$ antiszimmetrikus) és $\operatorname{grad}|r| = \frac{r}{|r|} \parallel r$, $k\times r\perp r$, így skalárszorzatuk 0.

---

3. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai a $(-a,0)$, $(0,b)$, $(c,0)$ pontok. Legyen $v(x,y) = (x^2-2y, 2x+y^2)$ minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$–re. $\int_H v\,dr = ?$

MO. $\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2-2y & 2x+y^2 \end{vmatrix} = 4$ így Stokes tétellel (F a H által bezárt háromszöglap):

$\int_H v\,dr = \int_F \operatorname{rot} v\,df = 4\int_F df = 4|F| = 2(c+a)b$.

---

4. A derivált definíciója alapján állapítsa meg, hogy hol deriválható az $f(z) = \overline{z}^2$ függvény!

MO.

Csak az origóban, mert $\dfrac{\overline{z+h}^2 - \overline{z}^2}{h} = \dfrac{\overline{z}^2 + 2\overline{z}\overline{h} + \overline{h}^2 - \overline{z}^2}{h} = 2\overline{z}\dfrac{\overline{h}}{h} + \overline{h}\dfrac{\overline{h}}{h} \rightsquigarrow \exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overline{z+h}^2 - \overline{z}^2}{h}$

IFF $z=0$ hiszen $|\dfrac{\overline{h}}{h}| = 1 \rightsquigarrow \overline{h}\dfrac{\overline{h}}{h} \xrightarrow[h\longrightarrow 0]{} 0$, továbbá $\nexists \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\overline{h}}{h}$ és két olyan függvény összegének nincs határértéke, melyek közül pontosan egynek van.

---

5. Adja meg az $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$ függvény $z=1$ és $z=0$ körüli összes Laurent sorát!

MO.

a) $z=1$: $f(z) = \dfrac{1}{z-1}$

b) $z=0$: 1) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{1-z} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 2) $f(z) = \dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}$

---

6. $\int_{|z|=1} z\sin\dfrac{3}{z^2}\,dz = ?$

MO.

Az $f(z) = z^3\cos\frac{3}{z^2}$ függvény origó körüli Laurent–sora: $z^3\cdot\big(1 - \dfrac{1}{2!}(\dfrac{3}{z^2})^2 \pm\ldots\big) = z^3 - \dfrac{9}{2!}\cdot\dfrac{1}{z}\pm\ldots$,

így $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -4,5$ tehát residuum tétellel:

$\int_{|z|=1} z^3\cos\dfrac{3}{z^2}\,dz = 2\pi j\cdot\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi j\cdot -4,5 = -9\pi j$

---

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél II. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen F az $[xy]$ síkban fekvő R sugarú origóközéppontú felfelé irányított körlap és k a z tengely irányú egységvektor. $\int_F \operatorname{rot}(k \times r)\, df = ?$

MO. F normálisa $n = k$, legyen $v = \operatorname{rot}(k \times r)$ erre eső vetülete v_n.

$\operatorname{rot}(k \times r) = 2\,k$ (pl. rot def.–ből) $\rightsquigarrow$ $v_n = |v| = 2$ $\rightsquigarrow$ $\int_F v\, df = \int_F v_n\, |df| = \int_F |v|\, |df| = \int_F 2\, |df| =$
$= 2 \int_F |df| = 2\, |F| = 2\, R^2 \pi$. VAGY $\int_F \operatorname{rot}(k \times r)\, df = \int_L (k \times r)\, dr = 2 \cdot R^2 \pi$, ahol L a körvonal (lásd Jegyzet 1.23(1)).

---

2. Számítsuk ki a $\operatorname{div}(\operatorname{grad}|r|^2)$ értékét minden $r \in \mathbb{R}^{100}$, $r \neq 0$ esetén!

MO. $\operatorname{grad}|r|^2 = 2\,|r|\, \frac{r}{|r|} = 2r$ $\rightsquigarrow$ $\operatorname{div}\operatorname{grad}|r|^2) = 2 \operatorname{div} r = 2 \cdot 100 = 200$.

---

3. Legyen H az a háromszögvonal (mint kétdimenzióbeli felület), melynek csúcsai a $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(c, 0)$ pontok. Legyen $v(x, y) = (2x + y^2, x^2 + 2y)$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ – re. $\int_H v\, df = ?$

MO. $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 2 + 2 = 4$, így Gauss–Osztrogradszkij tétellel (F a H által bezárt háromszöglap):

$$\int_H v\, df = \int_F \operatorname{div} v\, dV = 4 \int_F dV = 4|F| = 2(c + a)b .$$

---

4. Legyen $f(z) = f(x + jy) = x^2 \frac{j}{|x| + |y|}$. $\lim\limits_{z \to 0} f(z) = ?$

MO. $|f(z)| = |x|^2 \dfrac{1}{|x| + |y|} \leq |x|^2 \dfrac{1}{|x|} = |x| \xrightarrow[z \to 0]{} 0 \rightsquigarrow \lim\limits_{z \to 0} f(z) = 0$

---

5. Adja meg az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ függvény $z = 1$ és $z = 0$ körüli összes Laurent sorát!

MO.

a) $z = 0$: $f(z) = \dfrac{1}{z}$ $\quad |z| > 0$

b) $z = 1$: 1) $f(z) = \dfrac{1}{1 + (z - 1)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \quad (|z - 1| < 1)$

2) $f(z) = \dfrac{1}{z - 1 + 1} = \dfrac{1}{z - 1} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{z-1}} = \dfrac{1}{z - 1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(z - 1)^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(z - 1)^{n+1}} \quad (|z-1| > 1)$

---

6. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^3}{\sin^2 z}\, dz = ?$

MO. $\sin^2 z = 0$ iff $\sin z = 0$ iff $e^{jz} - e^{-jz} = 0$ iff $e^{jz} = e^{-jz}$ iff $jz = -jz$ $(2\pi j)$ iff iff $2jz = 0$ $(2\pi j)$ iff $z = 0$ (π) így

$$\int_{|z|=1} \frac{z^3}{\sin^2 z}\, dz = 0,$$

mert $f(z) = \dfrac{z^3}{\sin^2 z} = z \dfrac{z^2}{\sin^2 z} \xrightarrow[z \to 0]{} 0 \cdot 1 = 0 \rightsquigarrow f(z)$–nek az egyetlen a körlapon levő szingularitásában, az origóban megszüntethető szakadása van.

---

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél II. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen F az R sugarú origóközéppontú kifelé irányított gömb és $v(r) = r\,|r|^2$. $\int_F v\,df = ?$

MO. F normálisa $n \parallel r \parallel r\,|r|^2 = v(r)$, így $v(r)$ – nek a normálisra való vetülete: $v_n(r) = |v(r)| = |r|^3$. Másrészt a gömbön $|r| = R$, így a gömbön $v_n(r) = |v(r)| = R^3$. Mindezekkel

$$\int_F v\,df = \int_F v_n\,|df| = \int_F |R|^3\,df = |R|^3 \int_F |df| = R^3|F| = R^3 \cdot 4R^2\pi = 4R^5\pi$$

---

2. Számítsuk ki a $\operatorname{grad}\operatorname{div} r\,|r|^2$ értékét minden $r \in \mathbb{R}^{100}$, $r \neq 0$ esetén!

MO. $\operatorname{div} r\,|r|^2 = |r|^2 \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r|^2$, $\operatorname{grad}|r|^2 = 2\,|r| \cdot \dfrac{r}{|r|} = 2\,r$, $\operatorname{div} r = 100 \rightsquigarrow \operatorname{div} r|r|^2 =$
$= 100\,|r|^2 + 2\,|r|^2 = 102\,|r|^2 \rightsquigarrow \operatorname{grad}\operatorname{div} r|r|^2 = \operatorname{grad} 102\,|r|^2 = 102 \operatorname{grad}|r|^2 = 102 \cdot 2\,r = 204\,r$

---

3. Legyen K az $[xy]$ síkbeli origóközéppontú pozitívan irányított körvonal és $v(x,y) = (x^2\,y^2,\, x^3\,y)$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ – re. $\int_K v\,dr = ?$

MO. $\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2\,y^2 & x^3\,y \end{vmatrix} = 3x^2\,y - 2x^2\,y = x^2\,y$ így Stokes tétellel (F a K által bezárt körlap):

$\displaystyle\int_K v\,dr = \int_K \operatorname{rot} v\,dV = \int_F x^2\,y\,dV = \int\int_F x^2\,y\,dx\,dy = 0$, mert F az x tengelyre szimmetrikus és az integrandus y – ban páratlan.

---

4. Határozza meg azt a tartományt, melybe az $f(z) = \dfrac{j}{2-z}$ függvény a $T = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$ tartományt képezi!

MO. $T \xrightarrow{(-1)\cdot} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -1\} \xrightarrow{+2} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\} \xrightarrow{1/z} \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\} \xrightarrow{\cdot j} \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{j}{2}| < \frac{j}{2}\}$.

---

5. Számítsa ki az $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2}$ függvény 100. deriváltját az origóban!

MO. Az $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2}$ függvény origó körüli Taylor–sora: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(z) = \frac{z^2}{z-2} =$

$$= -\frac{z^2}{2-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{z^2}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+2}\,2^{-(n+1)} = -\sum_{n=2}^{\infty} z^n\,2^{-n+1} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \frac{f^{(100)}(0)}{100!} z^{100} = -2^{-99} z^{100} \rightsquigarrow f^{(100)}(0) = -2^{-99}\,100!$$

---

6. a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2}{z-2}\,dz = ?$ b) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2}\,dz = ?$

MO. a) Az integrandus a körön belül reguláris, tehát Cauchy integráltétellel az integrál 0.

b) z^2 mindenütt reguláris, tehát Cauchy integrálformulával: $\displaystyle z^2\big|_{z=2} = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2}\,dz \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \int_{|z|=3} \frac{z^2}{z-2}\,dz = 2\pi j \cdot z^2\big|_{z=2} = 8\pi j$$

---

4. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1999/2000 tél II. évf. 13.-18.tk.

1. Legyen F a z–tengelyű R sugarú m magasságú egyenes körhengerpalást. $\int_F (k \times r)\, df \;=\, ?$

MO. $\int_F (k \times r)\, df \;=\, 0$. Ugyanis F normálisa $n \in \mathcal{L}(k, r)$, azaz n benne van a k és r által kifeszített síkban, míg persze $k \times r \perp k, r \;\rightsquigarrow\; k \times r \perp n$. Következésképp az integrandus minden pontban merőleges a felületi normálisra, azaz az integrál 0.

VAGY: $v(r) = k \times r\,,\; F\,: r(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)\,,\; 0 \le u \le 2\pi\,,\; 0 \le v \le m \;\rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\; v(r) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-y, x, 0) \;\rightsquigarrow\; v(r(u,v)) = (-R\sin u, R\cos u, 0)\,,\; r_u = (-R\sin u, R\cos u, 0)\,,$$

$$r_v = (0,0,1) \;\rightsquigarrow\; n = r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R\sin u & R\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (R\cos u, R\sin u, 0) \;\rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow\; v(r(u,v)) \cdot (r_u \times r_v) = -R^2 \sin u\, \cos u + R^2 \cos u\, \sin u + 0 = 0 \;\rightsquigarrow$$

$$\int_F (k \times r)\, df \;=\, \int_0^{2\pi} \int_0^m v(r(u,v) \cdot (r_u \times r_v)\, du\, dv \;=\; 0$$

---

2. Számítsuk ki a $\operatorname{rot}\big((\operatorname{div} r)(k \times r)\big)$ értékét minden $r \in \mathbb{R}^3$, $r \neq 0$ esetén!

MO. $\operatorname{rot}(\operatorname{div} r\,(k \times r)) = \operatorname{rot}(3(k \times r)) = 3\operatorname{rot}(k \times r) = 6\,k$, mert $\operatorname{rot}(k \times r) = 2\,k$, mert $k \times r$ antiszimmetrikus lin. op., vagy mert ahogy a fenti pl.–ban láttuk $k \times r = (-y, x, 0)$, $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0,0,2)$.

---

3. Legyen K az $[xy]$ síkbeli origóközéppontú körvonal, mint kifele irányított kétdimenzióbeli felület és $v(x,y) = (x^2y^2,\, xy^3)$ minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ – re. $\int_K v\, df \;=\, ?$

MO. $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 2xy^2 + 3xy^2 = 5xy^2$ így Gauss–Osztrogradszkij tétellel (F a K által bezárt körlap):

$\int_K v\, df \;=\, \int_K \operatorname{div} v\, dV \;=\, \int_F 5xy^2\, dV = \int\!\!\int_F 5xy^2\, dx\, dy \;=0\,,$ mert F az y tengelyre szimmetrikus és az integrandus x – ben páratlan.

---

4. Legyen $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ az origón kívül és $g(0,0) = 0$, továbbá $f(z) = f(x+jy) = g(x,y) + jg(x,y)$.

Állapitsa meg, hogy az origóban:

a) fennállnak–e a Cauchy–Riemann differenciáegyenletek **b)** deriválható–e az f függvény!

MO. a) Igen: $u(x,y) \;=\; v(x,y) \;=\; g(x,y) \;\rightsquigarrow\; u(0,y) \;=\; u(x,0) \;=\; v(0,y) \;=\; v(x,0) \;=\; 0 \;\rightsquigarrow\; u_x(0,0) \;= = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0) = 0$. **b)** Nem: $u(x,y) = v(x,y) = g(x,y)$ nem deriválható az origóban, hiszen nem is folytonos itt: $\lim\limits_{x\to 0} g(x,x) = \dfrac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x,0)$.

---

5. Adja meg az $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$ függvény origó körüli azon Laurent sorait, melyek a a $z = \frac{1}{2}$ ill. a $z = 3$ pontokban előállítják a függvényt és mutassa is meg, hogy a megfelelő sor ott valóban előállítja a függvényt!

MO. a) $|z| < 1$: $f(z) = \dfrac{z}{z-1} = -\dfrac{z}{1-z} = -z \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$

b) $|z| > 1$: $f(z) = \dfrac{z}{z-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{z^n}$

c) $z = \frac{1}{2}$: $\displaystyle -\sum_{n=1}^{\infty} z^n \Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -1 = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \frac{z}{z-1}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = f\big(\frac{1}{2}\big)$

$z = 3$: $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}\Bigg|_{z=3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = \frac{3}{3-1} = \frac{z}{z-1}\Bigg|_{z=3} = f(3)$

---

6. $\displaystyle \int_{|z|=1} \frac{e^{z^2}-1}{z^2}\, dz = ?$

MO. Az integrál 0, mert $f(z) = \dfrac{e^{z^2}-1}{z^2} \xrightarrow[z\to 0]{} 1 \;\rightsquigarrow\; f(z)$–nek az egyetlen a körlapon levő szingularitásában, az origóban megszüntethető szakadása van.

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000/01 tél II. Villamosmérnök 13.–18.tk.

1. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai a (-2,0), (0,2) , (2,0) pontok a síkban. Legyen $v(x,y) = (2y - x^2, y^2 - 2x)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját H–n!

MO. $\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = -2 - 2 = -4$, így Stokes tétellel (F a H által bezárt háromszöglap):
$\int_H v\,dr = \int_F \operatorname{rot} v\,dV = -4\int_F dV = -4\,|F| = -16\,.$

2. Legyen G az origóközéppontú R sugarú gömbfelület a háromdimenziós térben. $\int_G \frac{r}{|r|}\,df = ?$

MO. Legyen $v(r) = \frac{r}{|r|}$, n a gömb normálisa, v_n pedig v–nek n–re eső vetülete. Ekkor $v \,||\, n \;\rightsquigarrow\; v_n = |v|$, így $\int_G v\,df = \int_G v_n\,|df| = \int_G \left|\frac{r}{|r|}\right|\,|df| = \int_G \frac{R}{R}\,|df| = \int_G |df| = |G| = 4R^2\pi\,.$

3. Számítsuk ki $\operatorname{div}\operatorname{grad}|r|^2$ értékét, mint r függvényét minden $r \in \mathbf{R}^4$–re ha $r \neq 0$!

MO. $\operatorname{grad}|r|^2 = 2|r|\cdot\operatorname{grad}|r| = 2|r|\cdot\frac{r}{|r|} = 2r \;\rightsquigarrow\; \operatorname{div}\operatorname{grad}|r|^2 = \operatorname{div} 2r = 2\operatorname{div} r = 2\cdot 4 = 8\,.$

4. Számítsuk ki a $\sin j + j\cos j$ értékét !

MO. $\sin j + j\cos j = \frac{e^{jj} - e^{-jj}}{2j} + j\,\frac{e^{jj} + e^{-jj}}{2} = \frac{j}{2}\left(-e^{jj} + e^{-jj} + e^{jj} + e^{-jj}\right) = j\,e$

5. $\lim\limits_{z\longrightarrow 0} \frac{\frac{e^z-1}{z} - 1}{z} = ?$

MO. e^z Taylor–sora:

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots \;\rightsquigarrow\; \frac{\frac{e^z-1}{z} - 1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \ldots \longrightarrow \frac{1}{2} \quad$ ha $\quad z \longrightarrow 0$

6. Legyen K egységnyi sugarú, origóközéppontú kör. Mennyi az $\int_K z^2 \sin\frac{1}{z}\,dz$ integrál értéke?

MO. $\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5} + \ldots \;\rightsquigarrow\; f(z) = z^2\sin\frac{1}{z} = z - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^3} - \ldots \;\rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\; \operatorname*{Res}_{z\,=\,0} f(z) = -\frac{1}{6} \;\rightsquigarrow\; \int_K f(z)\,dz = -\frac{1}{6}\,2\pi j = -\frac{1}{3}\pi j\,.$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000/01 tél II. Villamosmérnök 13.–18.tk.

1. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai a $(0{,}0)$, $(0{,}2)$, $(2{,}0)$ pontok a síkban. Legyen $v(x,y) = (x^2 - 2\,yx\,,\; y^2 - xy)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v felületmenti integrálját a kifelé irányított H–n!

MO. $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 2x - 2y + 2y - x = x$, így Gauss–Osztrogradszkij tétellel: (F a H által bezárt háromszöglap):

$$\int_H v\; df = \int_F \operatorname{div} v\; dV = \int_F x\, dV = \int_0^2 \int_0^{2-x} x\, dy\, dx = \int_0^2 xy\,\Big|_0^{2-x} dx = \int_0^2 x(2-x)\, dx = \int_0^2 2x - x^2\, dx =$$

$$= (\,x^2 - \frac{x^3}{3})\,\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

VAGY: a tengelyek mentén a felületi integrál 0, mert az x tengely mentén: $v(x,0) = (x^2, 0)$, melynek csak x irányú, tehát a normálisra merőleges komponense van és u.így a másik tengely esetén. Tehát csak az átfogóra kell kiszámítani a felületi integrált. Ennek egyenlete:

$r(t) = (t, 2-t)\,, (t \in [0,2]) \rightsquigarrow \dot r(t) = (1,-1) \rightsquigarrow \text{CROSS}\,(\dot r(t)) = (1,1) \rightsquigarrow$

$v(r(t)) = \big(t^2 - 2\,(2-t)t\,,\; (2-t)^2 - t(2-t)\big) = (3t^2 - 4t, 4 - 6t + 2t^2) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow v(r(t))\cdot \text{CROSS}\,(\dot r(t)) = 5t^2 - 10t + 4 \rightsquigarrow \int_L v\, df = \int_0^2 v(r(t))\cdot \text{CROSS}\,(\dot r(t))\, dt =$$

$$= \int_0^2 5t^2 - 10t + 4\, dt = (\,\frac{5t^3}{3} - \frac{10t^2}{2} + 4t)\,\Big|_0^2 = \frac{40}{3} - \frac{40}{2} + 8 = \frac{80}{6} - \frac{120}{6} + \frac{48}{6} = \frac{4}{3}$$

2. Legyen H az a z tengelyű R sugarú h magasságú (háromdimenzióbeli) egyenes körhengerpalást, melynek alapköre az $[x,y]$ síkban van. $\displaystyle\int_H r\; df = ?$

MO. Legyen $v(r) = r$, n a hengerpalást normálisa, v_n pedig v–nek n–re eső vetülete. Ekkor a hengerpaláston mindenütt $v_n = R$ így $\displaystyle\int_H v\; df = \int_H v_n\, |df| = \int_H R\, |df| = R \int_H |df| = R\cdot 2R\pi \cdot h = 2R^2 h\pi.$

VAGY: a hengerpalást egyenlete: $r(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v)$, $(u \in [0, 2\pi]\,,\; v \in [0,h]) \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow r_u \times r_v = (R\cos u, R\sin u, 0) \rightsquigarrow v(r(u,v)) = r(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow v(r(u,v))\cdot r_u \times r_v = R^2 \rightsquigarrow \int_H r\; df = \int_0^{2\pi}\int_0^h R^2\, du\, dv = R^2\cdot 2\pi \cdot h = 2R^2 h\pi.$$

3. Számítsuk ki $\operatorname{grad}\operatorname{div} r|r|^2$ értékét, mint r függvényét minden $r \in \mathbf{R}^4$–re ha $r \neq 0$!

MO. $\displaystyle\operatorname{div} r|r|^2 = |r|^2 \operatorname{div} r + r\cdot \operatorname{grad}|r|^2 = 4|r|^2 + r\cdot 2|r|\frac{r}{|r|} = 4|r|^2 + 2|r|^2 = 6|r|^2 \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \operatorname{grad}\operatorname{div} r|r|^2 = \operatorname{grad} 6|r|^2 = 12|r|\frac{r}{|r|} = 12\,r \quad (r \neq 0)\,.$$

4. Számítsuk ki a $j\sin j - \cos j$ értékét !

MO. $$j\sin j - \cos j = j\frac{e^{jj} - e^{-jj}}{2j} - \frac{e^{jj} + e^{-jj}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^{jj} - e^{-jj} - e^{jj} - e^{-jj}\right) = -e^{-jj} = -e\,.$$

5. $$\lim_{z\longrightarrow 0} \frac{\frac{\cos z - 1}{z^2} + \frac{1}{2}}{z^2} = ?$$

MO. Legyen f(z) a fenti függvény. $\cos z$ Taylor–sora: $\displaystyle\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} \pm \ldots \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \frac{\cos z - 1}{z^2} = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{24} - \frac{z^4}{720} \pm \ldots \rightsquigarrow f(z) = \frac{1}{24} - \frac{z^2}{720} \pm \ldots \longrightarrow \frac{1}{24} \quad \text{ha} \quad z \longrightarrow 0$$

VAGY: L'Hospitallal: $\displaystyle f(z) = \frac{2\cos z - 2 + x^2}{2x^4} \rightsquigarrow$ (3 deriválás után) $\displaystyle f(z) \sim \frac{2\sin z}{48z} \longrightarrow \frac{1}{24}$ ha $z \longrightarrow 0$

6. Legyen K egységnyi sugarú, origóközéppontú kör és $n > 0$ tetszőleges természetes szám. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{e^{2z}}{z^{n+1}}\, dz$ integrál értéke?

MO. A Cauchy integrálformula szerint: $\displaystyle f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi j}\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \rightsquigarrow \int_K \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz = 2\pi j\, \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Itt most $a = 0$ és $f(z) = e^{2z} \rightsquigarrow f^{(n)}(0) = 2^n \rightsquigarrow \displaystyle\int_K \frac{e^{2z}}{z^{n+1}}\, dz = \pi j\, \frac{2^{n+1}}{n!}$

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal
2000/01 tél II. Villamosmérnök 13.–18.tk.

1. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai a $(0{,}0)$, $(0{,}2)$, $(2{,}0)$ pontok a síkban. Legyen $v(x,y) = (y^2 + 2\,xy\,,\ x^2 + yx)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját a pozitívan irányított H–n!

MO. $\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2x + y - 2y - 2x = -y$, így Stokes tétellel: (F a H által bezárt háromszöglap):

$$\int_H v\,dr = \int_F \operatorname{rot} v\,dV = \int_F -y\,dV = -\int_0^2\int_0^{2-y} y\,dx\,dy = -\int_0^2 xy\,\Big|_0^{2-y}\,dy = -\int_0^2 y(2-y)\,dy = -\int_0^2 2y - y^2\,dx =$$

$$= \frac{y^3}{3} - x^2\,\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

VAGY: a tengelyek mentén a vonalintegrál 0, mert az x tengely mentén: $v(x,0) = (0, x^2)$, melynek csak y irányú, tehát az érintőre merőleges komponense van és u.így a másik tengely esetén. Tehát csak az átfogóra kell kiszámítani a felületi integrált. Ennek egyenlete ha L–et negatívan irányítjuk:
$r(t) = (t, 2-t)\,,\ t \in [0,2] \rightsquigarrow \quad \dot r(t) = (1,-1) \rightsquigarrow$
$v(r(t)) = \big((2-t)^2 + 2(2-t)t\,,\ t^2 + t(2-t)\big) = (4-t^2, 2t) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\ v(r(t))\cdot \dot r(t) = -t^2 - 2t + 4 \rightsquigarrow \int_{-L} v\,dr = \int_0^2 v(r(t))\cdot\dot r(t)\,dt =$$

$$= \int_0^2 -t^2 - 2t + 4\,dt = \left(-\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{8}{3} - 4 + 8 = -\frac{8}{3} - \frac{12}{3} + \frac{24}{3} = \frac{4}{3} \rightsquigarrow \int_L v\,dr = -\frac{4}{3}$$

2. Legyen $m > 0$ és K a háromdimenziós térben az a $z = m$ síkban elhelyezkedő R sugarú felfelé irányított körlap, melynek középpontja a z tengelyen van. $\displaystyle\int_H r\;df = ?$

MO. Legyen $v(r) = r$, $n = k$ a körlap normálisa, v_n pedig v–nek n–re eső vetülete. Ekkor a körlapon mindenütt $v_n = m$ így $\displaystyle\int_K v\;df = \int_K v_n\,|df| = \int_K m\,|df| = m\int_K |df| = m\cdot R^2\pi = R^2 m\,\pi.$
VAGY: a körlap egyenlete: $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, m)\,,\ (u \in [0,R]\,,\ v \in [0,2\pi]) \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ r_u \times r_v = (0,0,u)\,,\ v(r(u,v)) = r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, m) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\ v(r(u,v))\cdot r_u \times r_v = m\,u \rightsquigarrow \int_H r\;df = \int_0^R\int_0^{2\pi} m\,u\,dv\,du = m\,2\pi\,\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^R = m\,2\pi\,\frac{R^2}{2} = R^2 m\,\pi.$$

3. Adjunk meg egy olyan $\mathbb{R}^4$–en értelmezett $u = u(r)$ skalárfüggvényt, hogy $\operatorname{grad} u = r|r|^2$ legyen minden
$r \in \mathbb{R}^4$, $r \neq 0$ esetén!

MO. $v(r) = r|r|^2$ potenciálja: $\displaystyle u(r) = \int_0^1 rt|rt|^2\cdot r\;dt = |r|^4\int_0^1 t^3\;dt = \frac{|r|^4}{4}$. Valóban: $\displaystyle\operatorname{grad} u = 4\,\frac{|r|^3}{4}\cdot\frac{r}{|r|} = r|r|^2$.

4. Számítsuk ki a $j\operatorname{sh}(j\frac{\pi}{2}) - \operatorname{ch}(j\frac{\pi}{2})$ értékét !

MO. $\displaystyle j\operatorname{sh}(j\frac{\pi}{2}) - \operatorname{ch}(j\frac{\pi}{2}) = j\,\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{1}{2}(j(j-(-j)) - (j + -j)) = -1\,.$

5. Legyen minden $z \neq 0$ esetén $\displaystyle f(z) = \frac{\frac{e^z - 1}{z} - 1}{z}$. Folytonossá tehető–e az f függvény az origóban?

Ha igen, a folytonosított változat deriválható–e az origóban? Ha igen, mennyi a derivált értéke?

MO. e^z Taylor–sora: $\displaystyle e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots \rightsquigarrow f(z) = \frac{\frac{e^z-1}{z} - 1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \ldots$ ha $z \neq 0 \rightsquigarrow f(z) \mathrel{\mathring{=}} \frac{1}{2}$ esetén f egy mindenütt konvergens hatványsor határfüggvénye, így mindenütt akárhányszor deriválható, Taylor–sora az őt előállító hatványsor $\rightsquigarrow f'(0) = \dfrac{1}{6}$.

6. Legyen K az origóközéppontú $R = 2$ sugarú kör. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{1}{z^2 - 4z + 3}\,dz$ integrál értéke?

MO. Cauchy integrálformulával:

$$\int_K \frac{1}{z^2 - 4z + 3}\,dz = \int_K \frac{1}{(z-1)(z-3)}\,dz = \int_K \frac{\frac{1}{z-3}}{z-1}\,dz = 2\pi\,j\,\frac{1}{z-3}\Bigg|_{z=1} = 2\pi\,j(-\frac{1}{2}) = -\pi\,j\,.$$

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal*

B3* 2001/02 tél

1. Számítsa ki $\operatorname{div}\operatorname{grad}|r|^3$ értékét, mint r függvényét minden $r \in \mathbf{R}^5$–re ha $r \neq 0$!

MO. $\operatorname{grad}|r|^3 = 3|r|^2 \cdot \operatorname{grad}|r| = 3|r|^2 \cdot \dfrac{r}{|r|} = 3|r|r \rightsquigarrow \operatorname{div}\operatorname{grad}|r|^3 = \operatorname{div} 3|r|r = 3|r|\operatorname{div} r + 3r \cdot \operatorname{grad}|r| =$
$= 15|r| + 3r \cdot \dfrac{r}{|r|} = 15|r| + 3|r| = 18|r|$

---

2. Legyen N az [xy]–síkbeli $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$, $(2,0)$ csúcspontú négyzetvonal és $v(x,y) = (3x + 2y^2, 4y + 2x^2)$ kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v felületmenti integrálját N–en, mint egy kétdimenzióbeli valódi felületen!

MO. Mivel $\operatorname{div} v = 3 + 4 = 7$, így T–re alkalmazva a Gauss–Osztrogradszkij tételt (V a T határú négyzetlap): $\displaystyle\int_T v\, df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_V 7\, dV = 7\int_V dV = 7 \cdot |V| = 7 \cdot 4 = 28$.

---

3. Legyen G háromdimenziós térben az origóközéppontú R sugarú felső félgömbfelületből és az azt alulról lezáró origóközéppontú R sugarú $[x,y]$ síkbeli körlapból álló kifelé irányított zárt felület. $\displaystyle\int_G r|r|^2\, df =$?

MO. Legyen $v(r) = r|r|^2$, n a gömb normálisa, v_n pedig v–nek n–re eső vetülete. Ekkor a félgömbön:
$\displaystyle\int_G v\, df = \int_G v_n\, |df| = \int_G |r|^3\, |df| = \int_G R^3\, |df| = R^3 \int_G |df| = R^3|G| = R^3 \cdot 2R^2\pi = 2R^5\pi$
(VAGY: Gauss–Osztrogradszkijjal: $\operatorname{div} r|r|^2 = |r|^2 \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r|^2 = 3|r|^2 + r \cdot 2|r| \dfrac{r}{|r|} = 5|r|^2 \rightsquigarrow$
$\displaystyle\rightsquigarrow \int_G r|r|^2\, df = \int_V 5|r|^2\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^R\int_0^{2\pi} 5r^2 \cdot r^2 \sin\vartheta\, d\varphi\, dr\, d\vartheta = 5 \cdot 2\pi \frac{R^5}{5}\left(-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = R^5 \cdot 2\pi \cdot 1 = 2R^5\pi$).
A körön pdig az integrál 0, mert annak normálisa: $-k \perp r \,||\, v$, hisz $r \in [x,y]$ a körlapon.

---

4. Hol létezik határértéke az $f(z) = \dfrac{z^2}{z + \overline{z}}$ komplex függvénynek?

MO. Az y tengely kivételével (tehát ahol $z + \overline{z} \neq 0$) mindenütt, mert folytonosok hányadosa. Az y tengelyen nem, mert $f(z) = \dfrac{z^2}{z+\overline{z}} = \dfrac{x^2 - y^2 + j2xy}{2x} = \dfrac{x^2 - y^2}{2x} + jy$ és nyilván $\dfrac{x^2-y^2}{2x}$–nek nincs határértéke ha $x \longrightarrow 0$ mert valamely $y_0 \neq 0$ esetén $\dfrac{x^2 - y_0^2}{2x} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{y_0^2}{2x}$, aminek a második tagja nem korlátos ha $x \longrightarrow 0$. Az origóban pedig: pl. $f(x,x) = 0 \longrightarrow 0$ ill. $\operatorname{Re}(f(x,\sqrt{x})) = \dfrac{x^2 - x}{2x} = \dfrac{x-1}{2} \longrightarrow -\dfrac{1}{2} \neq 0$ ha $x \longrightarrow 0+$.

---

5. Legyen minden z–re $K(z)$ az egységnyi sugarú z középpontú kör a komplex síkon és $f(z) = \displaystyle\int_{K(z)} \frac{e^{3w}}{(w-z)^2}\, dw$.
Számítsuk ki az $f'(2)$ értékét (ha létezik)!

MO. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulával $n = 1$–re: $\displaystyle\frac{1!}{2\pi j}\int_{K(z)} \frac{e^{3w}}{(w-z)^2}\, dw = (e^{3w})'\Big|_{w=z} = 3e^{3z} \rightsquigarrow$
$\displaystyle\rightsquigarrow f(z) = \int_{K(z)} \frac{e^{3w}}{(w-z)^2}\, dw = 2\pi j \cdot 3e^{3z} = 6\pi j e^{3z} \rightsquigarrow f'(z) = 18\pi j e^{3z} \rightsquigarrow f'(2) = 18\pi j e^6$.

---

6. Legyen K az egységnyi sugar, origóközéppontú kör. Mennyi az $\displaystyle\int_K z \operatorname{ch}\frac{2}{z}\, dz$ integrál értéke?

MO. $\operatorname{ch} z$ Taylor–sora: $\operatorname{ch} z = 1 + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!} + \ldots \rightsquigarrow z \operatorname{ch}\dfrac{2}{z} = z(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{4}{z^2} + \ldots) = z + \dfrac{2}{z} + \ldots$, tehát a függvény
residuuma a nullában 2, vagyis az integrál értéke: $2\pi j \cdot 2 = 4\pi j$.

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal*

B3* 2001/02 tél

1. Határozzuk meg az $r = r(t) = (t, t^3)$, $t \in [0,2]$ kétdimenzióbeli valódi felület $P = (2,8)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

MO. $\dot{r}(t) = (1, 3t^2) \rightsquigarrow \dot{r}(2) = (1, 12) \rightsquigarrow \text{CROSS}(\dot{r}(2)) = (-12, 1) \rightsquigarrow -12(x-2) + (y-8) = 0 \rightsquigarrow -12\,x + y = -16$. (Valóban, az érintősík az $y = x^3$–nek az $x = 2$–beli érintője,vagyis (mivel $y'(2) = 12$) az $y - 8 = 12(x-2)$ egyenes.)

---

2. Adjunk meg egy olyan $u = u(r)$ skalárfüggvényt a síkban, hogy $\operatorname{grad} u = r\,|r|^2$ legyen minden síkbeli $r \neq 0$ esetén!

MO. $\displaystyle\int_0^1 (|r\,t\,|^2\, r\,t \cdot r) dt = |r|^4 \int_0^1 t^3\; dt = \frac{|r|^4}{4}$. (Valóban: $\displaystyle\left(\frac{|r|^4}{4})\right)' = 4\frac{|r|^3}{4} \cdot \operatorname{grad}|r| = |r|^3 \cdot \frac{r}{|r|} = r|r|^2$)

---

3. Legyen K a síkbeli pozitívan irányított origóközéppontú R sugarú körvonal. Számítsuk ki a $v(r) = \text{CROSS}(r|r|)$ síkvektorfüggvény vonalmenti integrálját K–n!

MO. K minden pontjában e érintőjére: $e \perp r \,||\, r|r| \perp \text{CROSS}(r|r| \,||\, v) \rightsquigarrow e \,||\, v$, azaz v e irányú, így párhuzamos a $v(r) = \text{CROSS}(r|r|)$–el, tehát v–nek az érintőre eső vetülete $v_e = |v| = |\text{CROSS}(r|r|)| = |r|^2 = R^2$, a körön, ezért $\displaystyle\int_K v\; dr = \int_K v_e\; |dr| = \int_K R^2\; |dr| = R^2 \int_K |dr| = R^2\,|K| = R^2 \cdot 2R\pi = 2R^3\pi$.
(Valóban: $\operatorname{rot}\text{CROSS}(r|r|) = \operatorname{rot}|r|\,\text{CROSS}(r) = |r|\operatorname{rot}\text{CROSS}(r) - \text{CROSS}(\text{CROSS}(r))\operatorname{grad}|r| = 2|r| - (-r)\,\frac{r}{|r|}$ =
$= 2|r| + |r| = 3|r|$ miatt Stokes tétellel (V a körlap): $\displaystyle\int_K v\; dr = \int_K \text{CROSS}(r|r|)\; df = \int_V \operatorname{rot}\text{CROSS}(r|r|)\; dV =$
$\displaystyle = \int_V 3\,|r|\; dV = \int_0^{2\pi}\int_0^R 3\,r\,r\; dr\; d\varphi = 3\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\; dr\; d\varphi = 2\pi R^3$.)

---

4. Határozzuk meg azt a tartományt, melybe a $T = \{z \in \mathbf{C} : |z| \le 1\}$ körlapot az $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$ komplex függvény képezi!

MO. $\displaystyle z : z - 1 = 1 + \frac{1}{z-1} \rightsquigarrow \frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}$.
$T \overset{-1}{\rightsquigarrow} \{z \in \mathbf{C} : |z+1| \le 1\} \overset{1/z}{\rightsquigarrow} \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \le -1/2\} \overset{+1}{\rightsquigarrow} \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z \le +1/2\}$

---

5. Legyen K egységnyi sugarú, origóközéppontú kör. Mennyi az $\displaystyle\int_K z e^{3/z^2}\; dz$ integrál értéke?

MO. e^z Taylor–sora: $\displaystyle e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \rightsquigarrow e^{3/z^2} = 1 + \frac{3}{z^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{z^4} + \frac{1}{6}\cdot\frac{27}{z^6} + \ldots \rightsquigarrow$
$\displaystyle\rightsquigarrow z e^{3/z^2} = z + \frac{3}{z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{z^3} + \ldots \rightsquigarrow \operatorname*{Res}_{z=0} z e^{3/z^2} = 3 \rightsquigarrow \int_K z\,e^{3/z^2}\; dz = 2\pi j \cdot 3 = 6\pi j$

---

6. Adjunk meg egy olyan $z = 0$ körüli Laurent-sort, mely előállítja az $f(z) = \dfrac{z^2}{z+1}$ függvényt a $z = 2$–ben!

MO. z–vel végigosztva: $\displaystyle f(z) = \frac{z^2}{z+1} = \frac{z}{1+\frac{1}{z}} = z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n-1}} = z - 1 + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \pm \ldots$
és ez konvergens ha $\displaystyle\left|\,\frac{1}{z}\,\right| < 1 \iff |z| > 1$.

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

B3* 2000/01 tél

1. Legyen $v(x,y)=(3x-2y, 2x+3y)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény és L az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,2) és a (2,0) pontok. Számítsuk ki v fluxusát L–en mint egy kifelé irányított kétdimenzióbeli valódi felületen és v cirkulációját L–en mint egy pozitívan irányított kétdimenzióbeli görbén.

MO. Jelöljük a háromszöglapot V-vel.

a) $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 3+3=6$, így Gauss-Osztogradszkij tétellel a fluxus:

$$\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\,dV = \int_V 6\,dV = 6\int_V dV = 6|V| = 6\cdot 2 = 12.$$

b) $\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 3x-2y & 2x+3y \end{vmatrix} = 2-(-2) = 4$ így Stokes tétellel a cirkuláció:

$$\int_L v\,dr = \int_V \operatorname{rot} v\,dV = \int_V 4\,dV = 4\int_V dV = 4|V| = 4\cdot 2 = 8.$$

---

2. Legyen F a háromdimenziós térben az a $z=3$ síkbeli $R=2$ sugarú felfelé irányított körlap, melynek középpontja a z tengelyre esik. $\displaystyle\int_F r\,df = \ ?$

MO. Legyen $(r)_k$ az r–nek az F normálisára, azaz k–ra eső vetülete (k a z irányú egységvektor). Ekkor

$$\int_F r\,df = \int_F (r)_k\,|df| = \int_F 3\,|df| = 3\int_F |df| = 3\,|F| = 3\cdot 2^2\,\pi = 12\,\pi$$

---

3. Határozzuk meg a $v(x,y)=(x^3+y^3, 3xy^2)$ kétdimenziós vektorfüggvény potenciálját, ahol az létezik!

MO. $\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^3+y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix} = 3y^2-3y^2=0$, tehát mindenütt van potenciál.

$u_x = x^3+y^3$, $u_y = 3xy^2$, tehát $u = xy^3 + c(x)$, azaz $x^3+y^3 = u_x = y^3 + c'$, vagyis $c' = x^3$, így $c = \dfrac{x^4}{4}$, amiből $u = xy^3 + \dfrac{x^4}{4}$. Valóban, $\operatorname{grad} u = (y^3+x^3, 3xy^2) = v(x,y)$.

---

4. Oldjuk meg a komplex számok körében a $\cos 4z = 0$ egyenletet!

MO. $\cos 4z = 0 \ \rightsquigarrow\ e^{4jz} = -e^{-4jz} \ \rightsquigarrow\ e^{4jz} = e^{j\pi}e^{-4jz} \ \rightsquigarrow\ e^{4jz} = e^{j\pi-4jz} \ \rightsquigarrow$
$\rightsquigarrow\ 4jz = j\pi - 4jz\ (2\pi j) \ \rightsquigarrow\ 8jz = j\pi\ (2\pi j) \ \rightsquigarrow\ z = \pi/8\ (\pi/4)$.

---

5. Legyen K egységnyi sugarú, origóközéppontú kör. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{\operatorname{sh} z}{z^6}\,dz$ integrál értéke ?

MO. A deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulával $n=5$–re:

$$\operatorname{sh}^{(5)} z\Big|_{z=0} = \frac{5!}{2\pi j}\int_K \frac{\operatorname{sh} z}{z^6}\,dz \ \rightsquigarrow\ \int_K \frac{\operatorname{sh} z}{z^6}\,dz = \frac{2\pi j}{120}\operatorname{sh}^{(5)} z\Big|_{z=0} = \frac{2\pi j}{120}\operatorname{ch}(0) = \frac{\pi j}{60}$$

---

6. Adjuk meg az $f(z) = \dfrac{2z}{z+1}$ függvény $z=-1$ körüli Laurent-sorát! Mennyi a függvény residuuma a $z=-1$ pontban?

MO. $f(z) = \dfrac{2z}{z+1} = 2\,\dfrac{z+1-1}{z+1} = 2 - \dfrac{2}{z+1}$ tehát a residuum a $z=-1$–ben -2.

1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal (B3* 2002/2003 tél Serény)

1. Legyen $v(r) = (x-y, x+y)$ egy kétdimenziós vektortér és L az a háromszögvonal, melynek csúcsai az origó, a (0,1) és az (1,0) pontok. Számítsuk ki v fluxusát F–en mint egy kifelé irányított kétdimenzióbeli valódi felületen és v cirkulációját L–en mint egy pozitívan irányított kétdimenzióbeli görbén.

MO. A háromszöglapot V-vel jelölve: **a)** $\operatorname{div} v = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2$, így Gauss-Osztogradszkij tétellel a fluxus $\displaystyle\int_F v\,df = \int_V \operatorname{div} v\, dV = \int_V 2\, dV = 2\int_V dV = 2|V| = 1.$

b) $\operatorname{rot} v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x-y & x+y \end{vmatrix} = 2$ így Stokes tétellel a cirkuláció $\displaystyle\int_L v\, dr = \int_V \operatorname{rot} v\, dV = \int_V 2\, dV = 2\int_V dV = 1.$

---

2. Számítsuk ki a $\operatorname{rot}(\,r \operatorname{div}(r|r|)\,)$ értékét minden $r \in \mathbb{R}^2$, $r \neq 0$ pontban!

MO. $\operatorname{div}(r|r|) = |r| \operatorname{div} r + r \cdot \operatorname{grad}|r| = 2|r| + r \cdot \frac{r}{|r|} = 3|r|$.

(VAGY koordinátánként: $r|r| = (x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2})$, $\operatorname{div}(r|r|) = \dfrac{\partial}{\partial x} x\sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{\partial}{\partial y} y\sqrt{x^2+y^2} =$

$= \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \sqrt{x^2+y^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2}$).

Másrészt $\operatorname{rot}(r|r|) = |r| \operatorname{rot} r - \operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad}|r| = 0 + \operatorname{CROSS}(r) \cdot \frac{r}{|r|} = 0$ hisz $\operatorname{CROSS}(r) \perp r$.

(VAGY koordinátánként: $r|r| = (x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2})$, $\operatorname{rot}(r|r|) = \dfrac{\partial}{\partial x} y\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} x\sqrt{x^2+y^2} =$

$= \dfrac{yx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$). Végülis tehát $\operatorname{rot}(r \operatorname{div}(r|r|) = \operatorname{rot}(3r|r|)) = 3\operatorname{rot}(r|r|)) = 0.$

---

3. Adjunk meg egy olyan $u = u(r)$, $r \in \mathbb{R}^2$ skalár-függvényt, melyre fennáll, hogy $\operatorname{grad} u = r|r|^2$ minden $r \in \mathbb{R}^2$ esetén!

MO. Legyen $v = r|r|^2 = (x(x^2+y^2, y(x^2+y^2))$. $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(r|r|^2) = r|r|^2 \operatorname{rot}(r) - \operatorname{CROSS}(r) \cdot \operatorname{grad}(|r|^2) =$

$= 0 - \operatorname{CROSS}(r) \cdot 2|r| \dfrac{r}{|r|} = 0$ (az origóban is, mert $v'(0) = \mathbf{0}$ hiszen $\dfrac{r|r|^2 - 0 - \mathbf{0}r}{|r|} = r|r| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$).

(VAGY: $\operatorname{rot} v = \operatorname{rot}(x(x^2+y^2, y(x^2+y^2)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x(x^2+y^2) & y(x^2+y^2) \end{pmatrix} = 2xy - 2xy = 0$).

Tehát mindenütt van potenciál. Így

$$u(r) = \int_0^1 v(rt) \cdot r\, dt = \int_0^1 rt|rt|^2 \cdot r dt = \int_0^1 |r|^2 t|rt|^2 dt = \int_0^1 |r|^4 t|t|^2 dt = |r|^4 \int_0^1 t^3 dt = |r|^4 \frac{t^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{|r|^4}{4}.$$

(VAGY: $u_x = x(x^2+y^2)$, $u_y = y(x^2+y^2)$, tehát $u = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}y^2 + c(y)$, azaz $x^2 y + c'(y) = u_y = y(x^2+y^2)$, vagyis $c' = y^3$, így $c = \dfrac{y^4}{4}$, amiből $u = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2}y^2 + \dfrac{y^4}{4} = \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)^2 = \dfrac{|r|^4}{4}$.) És ez valóban potenciál:

$\operatorname{grad} \dfrac{|r|^4}{4} = 4\dfrac{|r|^3}{4} \cdot \dfrac{r}{|r|} = r\,|r|^2$ (az origóban is, mert $\operatorname{grad} u|_{r=0} = 0$ hiszen $\dfrac{|r|^4 - 0 - 0 \cdot r}{|r|} = |r|^3 \xrightarrow[z\to 0]{} 0$).

---

4. Legyen $f(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{\overline{z}}$ ha $z \neq 0$ és $f(0) = 0$. Hol folytonos az f függvény?

MO. Az origó kivételével mindenütt, mert $z \neq 0$ esetén folytonos függvényekből származik folytonosságot megőrző módon és $\dfrac{z+\overline{z}}{\overline{z}} = 1 + \dfrac{z}{\overline{z}}$ és $\dfrac{z}{\overline{z}}$– nek nincs határértéke az origóban, hiszen itt az x tengely mentén: $f(z) = f(x,0) = \dfrac{x}{x} = 1$, míg az y tengely mentén $f(z) = f(0,y) = \dfrac{jy}{-jy} = -1$.

---

5. K egységnyi sugarú, origó középpontú kör és c tetszőleges egész szám. $\displaystyle\int_K \frac{e^z}{z^c}\, dz = ?$

MO. Ha c nem pozitív, akkor, mivel az integrandus reguláris, az integrál 0. Egyebként persze Cauchy integrál–formulával, vagy residuum-tétellel: $\displaystyle\int_K \frac{e^z}{z^c}\, dz = \frac{2\pi j}{(c-1)!}$

---

6. Határozza meg a $f(z) = \frac{1}{z}$ függvény azon $z = j$ pont körüli Laurent sorát mely a $z = -j$ pontban előállítja a függvényt!

MO. $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(z-j)+j} = \dfrac{1}{z-j} \cdot \dfrac{1}{1 + \frac{1}{z-j}} = \dfrac{1}{z-j} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-j)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z-j)^{n+1}}$

2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2002/03 tél B3*   Serény

1. Legyen H az a háromszögvonal, melynek csúcsai a $(0{,}0)$, $(0{,}2)$, $(2{,}0)$ pontok a síkban. Legyen $v(x,y) = (y^2 + 2\,xy\,,\ x^2 + yx)$ egy kétdimenziós vektorfüggvény. Számítsuk ki v vonalmenti integrálját a pozitívan irányított H–n!

MO. $\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2x + y - 2y - 2x = -y$, így Stokes tétellel: (F a H által bezárt háromszöglap):

$$\int_H v\,dr = \int_F \operatorname{rot} v\,dV = \int_F -y\,dV = -\int_0^2\int_0^{2-y} y\,dx\,dy = -\int_0^2 xy\,\Big|_0^{2-y} dy = -\int_0^2 y(2-y)\,dy = -\int_0^2 2y - y^2\,dx =$$

$$= \frac{y^3}{3} - x^2\,\Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

VAGY: a tengelyek mentén a vonalintegrál 0, mert az x tengely mentén: $v(x,0) = (0,x^2)$, melynek csak y irányú, tehát az érintőre merőleges komponense van és u.így a másik tengely esetén. Tehát csak az átfogóra kell kiszámítani a felületi integrált. Ennek egyenlete ha L–et negatívan irányítjuk:
$r(t) = (t, 2-t)\,,\ t \in [0,2] \rightsquigarrow \quad \dot r(t) = (1,-1) \rightsquigarrow$
$v(r(t)) = \big((2-t)^2 + 2(2-t)t\,,\ t^2 + t(2-t)\big) = (4-t^2, 2t) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\ v(r(t))\cdot \dot r(t) = -t^2 - 2t + 4 \rightsquigarrow \int_{-L} v\,dr = \int_0^2 v(r(t))\cdot \dot r(t)\,dt =$$

$$= \int_0^2 -t^2 - 2t + 4\,dt = \left(-\frac{t^3}{3} - t^2 + 4t\right)\Big|_0^2 = -\frac{8}{3} - 4 + 8 = -\frac{8}{3} - \frac{12}{3} + \frac{24}{3} = \frac{4}{3} \rightsquigarrow \int_L v\,dr = -\frac{4}{3}$$

2. Legyen $m > 0$ és K a háromdimenziós térben az a $z = m$ síkban elhelyezkedő R sugarú felfelé irányított körlap, melynek középpontja a z tengelyen van. $\displaystyle\int_H r\ df = ?$

MO. Legyen $v(r) = r$, $n = k$ a körlap normálisa, v_n pedig v–nek n–re eső vetülete. Ekkor a körlapon mindenütt $v_n = m$ így $\displaystyle\int_K v\ df = \int_K v_n\,|df| = \int_K m\,|df| = m\int_K |df| = m\cdot R^2\pi = R^2 m\,\pi.$
VAGY: a körlap egyenlete: $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, m)$, $(u \in [0,R]\,,\ v \in [0,2\pi]) \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow\ r_u \times r_v = (0,0,u)\,,\ v(r(u,v)) = r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, m) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow\ v(r(u,v))\cdot r_u\times r_v = m\,u \rightsquigarrow \int_H r\ df = \int_0^R\int_0^{2\pi} m\,u\,dv\,du = m\,2\pi\,\frac{u^2}{2}\Big|_0^R = m\,2\pi\,\frac{R^2}{2} = R^2 m\,\pi.$$

3. Adjunk meg egy olyan $\mathbb{R}^4$–en értelmezett $u = u(r)$ skalárfüggvényt, hogy $\operatorname{grad} u = r|r|^2$ legyen minden
$r \in \mathbb{R}^4$, $r \neq 0$ esetén!

MO. $v(r) = r|r|^2$ potenciálja: $\displaystyle u(r) = \int_0^1 rt|rt|^2\cdot r\ dt = |r|^4\int_0^1 t^3\ dt = \frac{|r|^4}{4}$. Valóban: $\displaystyle\operatorname{grad} u = 4\,\frac{|r|^3}{4}\cdot\frac{r}{|r|} = r|r|^2$.

4. Számítsuk ki a $j\operatorname{sh}(j\frac{\pi}{2}) - \operatorname{ch}(j\frac{\pi}{2})$ értékét !

MO. $\displaystyle j\operatorname{sh}(j\frac{\pi}{2}) - \operatorname{ch}(j\frac{\pi}{2}) = j\,\frac{e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{j\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{1}{2}(j(j-(-j)) - (j+-j)) = -1\,.$

5. Legyen minden $z \neq 0$ esetén $\displaystyle f(z) = \frac{\frac{e^z-1}{z} - 1}{z}$. Folytonossá tehető–e az f függvény az origóban?

Ha igen, a folytonosított változat deriválható–e az origóban? Ha igen, mennyi a derivált értéke?

MO. e^z Taylor–sora: $\displaystyle e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \rightsquigarrow f(z) = \frac{\frac{e^z-1}{z} - 1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{z}{6} + \dots$ ha $z \neq 0 \rightsquigarrow f(z) \mathrel{\mathring{=}} \frac{1}{2}$ esetén f egy mindenütt konvergens hatványsor határfüggvénye, így mindenütt akárhányszor deriválható, Taylor–sora az őt előállító hatványsor $\rightsquigarrow f'(0) = \dfrac{1}{6}$.

6. Legyen K az origóközéppontú $R = 2$ sugarú kör. Mennyi az $\displaystyle\int_K \frac{1}{z^2 - 4z + 3}\,dz$ integrál értéke?

MO. Cauchy integrálformulával:

$$\int_K \frac{1}{z^2-4z+3}\,dz = \int_K \frac{1}{(z-1)(z-3)}\,dz = \int_K \frac{\frac{1}{z-3}}{z-1}\,dz = 2\pi\,j\,\frac{1}{z-3}\Big|_{z=1} = 2\pi\,j(-\frac{1}{2}) = -\pi\,j\,.$$

3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2002/03 tél B3* Serény

1. Legyen $c \in \mathbf{R}^3$ rögzített vektor és $v(r) = c \times r$ minden $r \in \mathbf{R}^3$ −re. Határozza meg a $\operatorname{div} v$ és a $\operatorname{rot} v$ értékét!

MO. $\operatorname{div} v = 0$, $\operatorname{rot} v = 2c$ mert v antiszimmetrikus lineáris operátor $\rightsquigarrow$ $v' = v$ antiszimmetrikus lineáris operátor $\rightsquigarrow$ v skalárinvariánsa $= 0$, antiszimmetrikus része önmaga és vektorinvariánsa pont az a vektor, mellyel mint vektorális szorzat előáll, $\operatorname{rot} v$ pedig ezen vektorinvariáns duplája.

2. Legyen a háromdimenziós térben K az $[x, y]$ síkbeli pozitívan irányított origóközéppontú R sugarú körvonal és $v(r) = (k \times r) \times k$ minden $r \in \mathbf{R}^3$ −re, ahol k a z tengely irányú egységvektor. $\displaystyle\int_K v\,dr = ?$

MO. A K körvonal minden pontjában $v \perp k$ $\rightsquigarrow$ v benne van K síkjában. Másrészt $k \times r \perp k$ $\rightsquigarrow$ $k \times r$ is benne van K síkjában és $k \times r \perp r$ $\rightsquigarrow$ $k \times r \,||\, e$, ahol e K érintője. Következésképpen $v(r) = (k \times r) \times k \perp e \rightsquigarrow v_e = 0$ (v_e v−nek e−re eső vetülete) $\rightsquigarrow$ $\rightsquigarrow$ $\int_K v\,dr = \int_K v_e\,|dr| = 0$

3. Legyen V egy n dimenzióbeli V_0 térfogatú térrész, melynek határa az F pozitívan irányított mérhető felszínű zárt n dimenzióbeli valódi felület. Számítsa ki az $\displaystyle\int_F r\,df$ integrál értékét!

MO. Gauss–Osztrogradszkij: $\displaystyle\int_F r\,df = \int_V \operatorname{div} r\,dV = \int_V n\,dV = n\int_V dV = n\,V_0$

4. Határozza meg az $f(z) = \operatorname{sh} z$ függvény valós és képzetes részét!

MO. $\displaystyle \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+jy} - e^{-(x+jy)}}{2} = \frac{e^x(\cos y + j\,\sin y)}{2} - \frac{e^{-x}(\cos y - j\,\sin y)}{2} =$
$\displaystyle = \cos y\,\frac{e^x - e^{-x}}{2} + j\,\sin y\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x\,\cos y + j\operatorname{ch} x\,\sin y$

5. Hol deriválható az $f(x + jy) = |y| + j|x|$ komplex függvény?

MO. A második és negyedik síknegyed belsejében, azaz pontosan azon $z = x + jy$ komplex számokra, melyekre $x \cdot y < 0$, mert itt az $u(x, y) = |y|$ és a $v(x, y) = |x|$ deriválhatóak, továbbá $x > 0$, $y < 0$ $\rightsquigarrow$ $f(x + jy) = |y| + j|x| = -y + jx$ $\rightsquigarrow$ $u_x = 0 = v_y$, $u_y = -1 = -v_x$ és a másik eset analóg, így itt fennállnak a Cauchy–Riemann diff. egyenletek.

6. Hány olyan az egész komplex síkon reguláris komplex függvény van, melynek értéke az egységkör belsejében mindenütt 1 ?

MO. Egyetlen, az $f(z) = 1$ minden $z \in \mathbf{C}$ − re. Valóban, ha g reguláris az egész síkon, akkor $z = 0$ körüli Taylor–sora mindenütt előállítja így, ha $g(z) = 1$ az egységkörön belül, akkor $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = 0, \ldots, g^{(n)} = 0, \ldots$ $\rightsquigarrow$ $g(z) = 1 + g'(0)\,z + \frac{g''(0)}{2}\,z^2 + \ldots =$
$= 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$ minden $z \in \mathbf{C}$ − re.