Valószínűségszámítás
2. RÉSZ
Egydimenziós folytonos valószínűségi változók

jegyzet

Vetier András

2018. február 1.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "***Extra feladat***", "***Extra tananyag***" cimkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az *"Extra feladat"*, *"Extra tananyag"* cimkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 15 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a vizsga utáni napon délig a szándékét emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején deklarálja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 10 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat. iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhetnek, ha a megtanult anyag mennyisége 25 oldal. A küldendő email címzettje: **vetier@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2017. augusztus 21.

Vetier András

1. Folytonos eloszlások

1.1. Ismétlés kalkulusból

Válasszunk egy olyan $f(x)$ függvényt, melyre az alábbi két feltétel teljesül:

- $f(x) \geq 0$ minden x -re
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Az első feltétel miatt beszélhetünk az $f(x)$ függvény alatti és az x tengely feletti T tartományról. A második feltétel miatt a T tartomány területe 1-gyel egyenlő. Kalkulusból jól ismerjük **az** $f(x)$ **terület-függvénye**-ként adódó **primitív függvény**ét:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

aminek deriváltjaként – minden olyan x helyen, ahol az f függvény folytonos – az $f(x)$ -et kapjuk vissza:

$$F'(x) = f(x)$$

A derivált – mint tudjuk – különbségek határértéke: $a < x < b$ fennállása mellett $a \to x,\ b \to x$ esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \to f(x)$$

Ezt a tény hétköznapi nyelven úgy lehet mondani, hogy $a < x < b$ fennállása mellett x -hez közeli a és b esetén:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \approx f(x)$$

vagy átárendezéssel:

$$F(b) - F(a) \approx f(x)\ (b - a)$$

A primitív függvény jól ismert tulajdonsága, hogy segítségével egy határozott integrál értékét egyszerűen különbségként kaphatjuk meg:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ez a jól ismert Newton-Leibniz formula. Hangsúlyozzuk, hogy a Newton-Leibniz formulában a és b nem kell hogy közel legyenek egymáshoz.

1.2. Folytonos valószínűségi változók

Az élet szinte mindenhol produkál olyan valószínűségi változókat, melyek lehetséges értékei külön-külön nulla valószínűségűek, de ennek ellenére a lehetséges értékek együttesen egy intervallumot tesznek ki. Mivel az intervallumok több mint megszámlálhatóan végtelen sok elemet tartalmaznak, az ilyen valószínűségi változók nem tekinthetőek diszkréteknek. Példák:

- $X =$ a hőmérséklet (mondjuk Celsius fokokban mérve) egy adott helyen éjfélkor

- $X =$ amennyi időt reggelente várnom kell a villamosra
- $X =$ egy véletlenszerűen választott ember testmagassága
- $X =$ egy véletlenszerűen választott ember testsúlya
- $X =$ a tényleges áramerősség egy áramkörben egy adott pontban

Ezekre a valószínűségi változókra teljesül, hogy minden lehetséges értéküket nulla valószínűséggel veszik fel. Ha egy valószínűségi változó lehetséges értékei egy intervallumot tesznek ki, és a valószínűségi változó minden lehetséges értékét nulla valószínűséggel veszi fel, akkor a valószínűségi változót **folytonos**nak mondjuk.

Emlékeztetünk rá, hogy – a fentiekkel ellentétben – egy diszkrét valószínűségi változó a lehetséges értékeit pozitív valószínűséggel veszi fel.

1.3. Eloszlásfüggvény és sűrűségfüggvény

Egy X valószínűségi változó **eloszlásfüggvény**ének nevezzük azt az F függvényt, melynek egy x helyen vett értékét (vagyis az $F(x)$ -szel jelölt számot) így definiáljuk:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \leq x\right)$$

Az eloszlásfüggvények egy x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó milyen valószínűséggel vesz fel az x valós számnál kisebb vagy egyenlő értéket. Folytonos valószínűségi változó esetén minden x érték valószínűsége 0-val egyenlő, ezért a definícióban "kisebb vagy egyenlő" helyett "kisebb" is írható:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X < x\right)$$

Megjegyezzük, hogy ha X diszkrét valószínűségi változó, akkor minden pozitív valószínűségű x lehetséges érték esetén a $\mathrm{P}\left(X \leq x\right)$ valószínűség nagyobb a $\mathrm{P}\left(X < x\right)$ valószínűségnél éppen annyival, amennyi a x valószínűsége:

$$\mathrm{P}\left(X \leq x\right) - \mathrm{P}\left(X < x\right) = \mathrm{P}\left(X = x\right)$$

Könnyű látni, hogy teljesülnek az alábbiak:

Egy **diszkrét** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0 -hoz
3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1 -hez
4. az eloszlásfüggvény grafikonja vízszintes vonalakból és ugrásokból áll: az ugrások azoknál az x értékeknél vannak, melyeket a valószínűségi változó pozitív valószínűséggel vesz fel. Egy ilyen x helyen az ugrás nagysága pedig megegyezik az x érték valószínűségével.

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **diszkrét** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Egy **folytonos** valószínűségi változó eloszlásfüggvényének jellemzői:

1. monoton növekvő
2. ha x tart a $(-\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart a 0 -hoz

3. ha x tart a $(+\infty)$ -hez, akkor $F(x)$ tart az 1 -hez
4. mindenhol folytonos

Igaz a következő állítás: *Ha egy $F(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan **folytonos** valószínűségi változót definiálni, melynek eloszlásfüggvénye ez a függvény.*

Vegyük észre, hogy a diszkrét és a folytonos esetek az 1-3. pontokban megegyeznek, és csak a 4. pontban térnek el.

A jobboldali eloszlásfüggvény is definiálható a

$$T(x) = \mathrm{P}\left(X \geq x\right)$$

képlettel. A jobboldali eloszlásfüggvény tulajdonságait itt nem soroljuk fel. A tulajdonságok kigondolása az Olvasó dolga lesz a gyakorló feladatok között.

A jegyzetnek ebben a részében a folytonos esetre fókuszálunk. Az $F(x)$ függvény deriváltját jelöljük $f(x)$ -szel:

$$F'(x) = f(x)$$

Az $f(x)$ függvény neve: **sűrűségfüggvény**.

A sűrűségfüggvény jellemzői:

1. $f(x) \geq 0$ minden x -re
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Igaz a következő állítás: *Ha egy $f(x)$ függvény rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal, akkor lehet olyan valószínűségi változót definiálni, melynek sűrűségfüggvénye ez a függvény.*

Nyilvánvaló tény, hogy ha egy sűrűségfüggvény egy intervallumban mindenhol pozitív, akkor ebben az intervallumban az eloszlásfüggvény szigorúan monoton növekszik.

Tekintsünk most az x pont körül egy pici intervallumot, ami lehet például az $[x; x + \Delta x]$ intervallum, ahol Δx egy pici pozitív szám. Az előbbieket az $a = x$, $b = x + \Delta x$ szereposztás mellett alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \Delta x\right) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\, dt$$

A jobboldalon álló integrált $f(x)\Delta x$ -szel közelíthetjük, ezért

$$\mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \Delta x\right) \approx f(x)\Delta x$$

vagyis

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}\left(x \leq X \leq x + \Delta x\right)}{\Delta x}$$

Jól jegyezzük meg: *a sűrűségfüggvény értéke egy x helyen megadja azt, hogy egy x körüli pici intervallum valószínűsége körülbelül hányszorosa az intervallum hosszának.*

Hangsúlyozzuk, hogy a sűrűségfüggvény értéke semminek sem a valószínűsége. A sűrűségfüggvény értéke lehet 1 -nél nagyobb is, de egy valószínűség nem. Mint néhány sorral feljebb már említettük, a sűrűségfüggvény értéke egy közelítő arányt jelent.

1.4. Intervallum valószínűsége

Tetszőleges $[a, b]$ intervallum esetén az intervallumba esés

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b)$$

valószínűsége az $F(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett megváltozásával adható meg:

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$$

Az $F(x)$ megváltozása pedig – a Newton-Leibniz szabály szerint – az $f(x)$ -nek az $[a, b]$ intervallumon vett határozott integráljával egyenlő:

$$\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Mivel most csak folytonos valószínűségi változókról beszélünk, ha a zárt $[a, b]$ intervallum helyett a nyílt (a, b) intervallumot tekintettük volna, ugyanezt az értéket kaptuk volna:

$$\mathrm{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx$$

1.5. Feltételes sűrűségfüggvény egy eseményen belül

Jön majd ide

1.6. Medián

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás esetén az

$$F(x) = \frac{1}{2}$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész és és a tőle jobbra lévő rész is pontosan $\frac{1}{2}$ valószínűségű:

$$\mathrm{P}(\,(-\infty; x]\,) \;=\; \mathrm{P}(\,[x; +\infty)\,) \;=\; \frac{1}{2}$$

Ilyenkor az x számot **medián**nak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy olyan eloszlásnak, mely szimmetrikus valamilyen pontra, a szimmetriapont a mediánja is.

Megjegyzés. Bár gyakorlati jelentősége nincs, megemlítjük, hogy ha x_1 és x_2 olyan számok, hogy $(-\infty; x_1]$ és $[x_2; +\infty)$ intervallumok mindegyikének $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, akkor az $[x_1; x_2]$ intervallum minden pontja medián.

1.7. Kvantilis, kvartilis és percentilis

Adott folytonos valószínűségi változó vagy eloszlás és 0 és 1 közötti akármilyen p esetén az

$$F(x) = p$$

egyenlet megoldása olyan x számot ad, ami úgy osztja ketté a számegyenest, hogy a tőle balra lévő rész valószínűsége p, és a tőle jobbra lévő rész valószínűsége $(1-p)$:

$$\mathrm{P}(\,(-\infty\,;\,x)\,) = p \qquad\qquad \mathrm{P}(\,(x\,;\,+\infty)\,) = 1-p$$

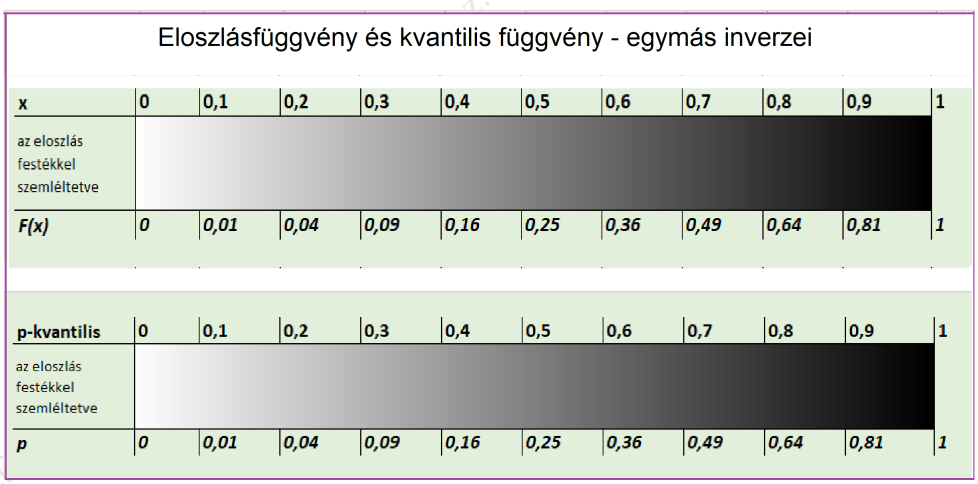
Ilyenkor az x számot **a** p **értékhez tartozó kvantilis**nek, vagy rövidebben mondva p **-kvantilis**nek nevezzük. Azt a függvényt, ami a 0 és 1 közötti p számokhoz hozzárendeli a p-kvantilis értékét, **kvantilis függvény**nek nevezhetjük.

Nyilvánvaló, hogy a p-kvantilis értéke megegyezik az eloszlásfüggvény inverzének a p helyen vett értékével:

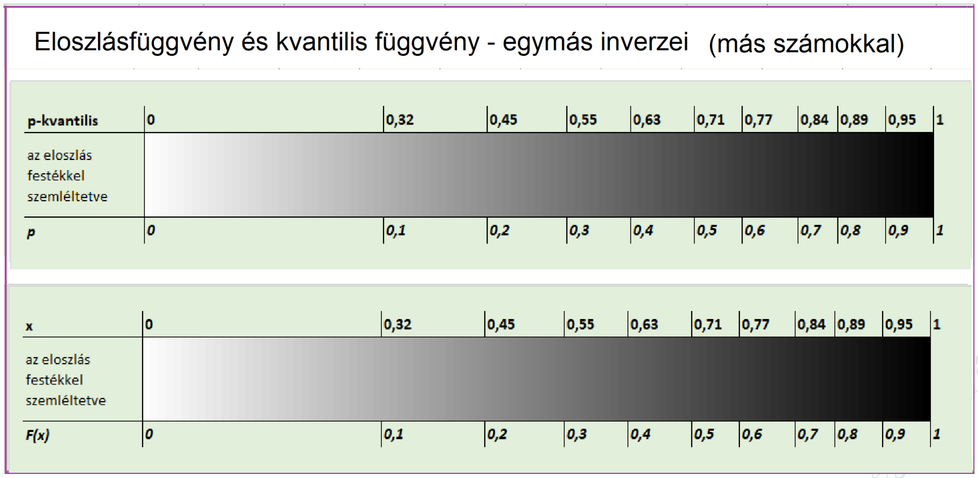
$$p\text{-kvantilis} = F^{-1}(p)$$

Tehát *a kvantilis függvény megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével*. Azok számára, akiknek a kvantilis fogalma tetszik, az értékeit jól látják, segítség lehet az eloszlásfüggvény inverzének értéséhez, látásához, ha kimondjuk az előbbi állítás megfordítását is: *az eloszlásfüggvény inverzének az értéke egy akármilyen* p *helyen egyenlő a* p *-kvantilis értékkel.*

Az alábbi ábrán az $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$ sűrűségfüggvényű, $F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$ eloszlásfüggvényű eloszlással kapcsolatban szemléltetjük az eloszlásfügényt, illetve annak inverzét, a kvantilis függvényt:



1. ábra. *Eloszlásfüfggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei*



2. ábra. *Eloszlásfüfggvény és kvantilis függvény – egymás inverzei (más számokkal)*

A szóbanforgó eloszlásra a kvantilis függvény képletét így adhatjuk meg: $F^{-1}(p) = \sqrt{p} \quad (0 < p < 1)$.

Vegyük észre, hogy tetszőleges eloszlásra $p = 0.5$ *esetén a* p *-kvantilis éppen a medián*. A 0.25 -kvantilis neve: **alsó kvartilis**, a 0.75 -kvantilis neve: **felső kvartilis**. (Figyelem: a kvantilis és kvartilis szavak csak egyetlen betűben különböznek. Ne keverjük őket össze!) Az ábrán szemléltetett eloszlásra

- az alsó kvartilis $\sqrt{0.25} \approx 0.5$,
- a medián $\sqrt{0.5} \approx 0.71$,
- a felső kvartilis $\sqrt{0.75} \approx 0.87$.

Azok, akik törtek helyett százalákokban szeretnek gondolkodni, a p -kvantilis helyett a megfelelő százalék értéket és **percentilis** értéket mondhatnak. Például:

- 0.1 -kvantilis helyett 10 százalékos percentilist,
- 0.9 -kvantilis helyett 90 százalékos percentilist,
- 0.99 -kvantilis helyett 99 százalékos percentilist

lehet mondani.

1.8. Várható érték, variancia, szórás

Egy folytonos X valószínűségi változó, illetve egy eloszlás *várható értéke*:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

tetszőleges $t(X)$ *függvényének várható értéke*:

$$\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\, f(x)\, dx$$

speciálisan, *második momentuma*:

$$\mathrm{E}(\ X^2\ ) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

szórásnégyzete (*varianciája)*:

$$\sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(X))^2\, f(x)\, dx$$

szórása:

$$\sigma = \mathrm{SD}(X) = \sqrt{\mathrm{VAR}(X)}$$

Látható, hogy egy valószínűségi változó várható értéke a folytonos esetben is ott van, ahol a megfelelő tömegeloszlás tömegközéppontja, a varianciája pedig annyi, amennyi a tömegeloszlásnak a tömegközéppontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka. A szórásnégyzet (variancia), kiszámítása a folytonos esetben is a (diszkrét esetből már ismert)

$$\mathrm{VAR}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\ \mathrm{E}(X)\ )^2$$

szabály alapján történhet.

Példa: Csónak bérlése és bérbe adása haszonnal. Siófoki barátom leleményes fickó. Jól ismeri a Balatoni időjárási viszonyokat, a csónakkölcsönző nemtörődömségét, a külföldi túristák lelkületét, és egyetemista korában jól megtanulta a valószínűségszámítást. És ebből jól megél. Lássuk csak hogyan. Így:

Bérbe vesz egy csónakot reggel 9 -kor 2000 Ft/óra bérleti díjért valamilyen időtartamra, és azonnal bérbe adja egy külföldinek 3000 Ft/óra bérleti díjért ugyanerre az időtartamra azzal a kedvezménnyel, hogy ha közben kitör a vihar, akkor visszaveszi tőle a csónakot úgy, hogy ilyenkor a visszamaradó, elveszett időtartamra a külföldinek nem kell már fizetnie bérleti díjat. Ez az ajánlat fölöttébb csábítónak tűnik a külföldinek!

Ha például barátom 3.25 (három és egynegyed) óra időtartamra bérli ki a csónakot, de a vihar megjön 2.25 (kettő és egynegyed) óra múlva, akkor barátom fizet a csónakkölcsönzőnek $3.25 \cdot 2000 = 6500$ Ft-ot, de beszed a külfölditől $2.25 \cdot 3000 = 6750$ Ft -ot, ami neki 250 Ft hasznot hoz.

Ha a vihar – barátom nagy szerencséjére – csak késő délután jön meg, akkor a külfölditől $3.25 \cdot 3000 = 9750$ Ft -ot szed be, és ez neki 3250 Ft hasznot jelent.

Ha viszont a vihar – barátom balszerencséjére – már fél óra múlva kitör, akkor barátom jól ráfizet az ügyeskedésére: ebben az esetben az ő költsége 6500 Ft, de a külfölditől csak $0.5 \cdot 3000 = 1500$ Ft jár neki, ami -5000 Ft hasznot, azaz 5000 Ft veszteséget jelent neki.

Vegyük észre, hogy a haszon attól függ, hogy mikor jön a vihar. Ha a vihar érkezésére 9 órától számítva x órát kell várni, akkor barátom bevétele a külfölditől

- $x < 3.25$ óra esetén $3000 \cdot x$ Ft
- $x > 3.25$ óra esetén $3000 \cdot 3.25 = 9750$ Ft

A két képletet egybe is olvaszhatjuk:

- $3000 \cdot \min(x, 3.25)$ Ft

Barátom kiadása nem függ x -től: a kiadás mindenképpen $2000 \cdot 3.25 = 6500$ Ft.

Tehát barátom haszna (= bevétel – kiadás) így függ x -től: $t(x) = 3000 \cdot \min(x, 3.25) - 6500$ Ft.

A vihar jövetele véletlentől függ. Tegyük fel, hogy 9 órától számítva X óra múlva jön a vihar, ahol X exponenciális eloszlást követő valószínűségi változó 5 óra várható értékkel. Barátom – aki jól megtanulta a valószínűségszámítást – ki tudja számolni a haszon várható értékét:

$$\int_0^{\infty} t(x) \cdot f(x)\ dx \ = \ \int_0^{\infty} \ (3000 \cdot \min(x, 3.25) - 6500)\, \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\ dx \ = \ 669.3$$

Ha tehát barátom rendszeresen úgy taktikázik, ahogy fentebb leírtuk, akkor átlagosan kb. 670 Ft -ot nyer csónakonként.

Felmerül a kérdés: A 3.25 óra helyett lehetne-e olyan c időtartamot találni, ami nagyobb átlagos hasznot hoz.

Még jobb kérdés: Mennyi az a c időtartam, ami legnagyobb átlagos hasznot hozza?

Megoldás: Általánosabban kezeljük a problámát:

- Barátom A Ft/óra bérleti díjat fizet a csónakkölcsönzőnek.
- Barátom B Ft/óra bérleti díjat kap a külfölditől.
- Ha a vihar érkezésére 9 órától számítva x órát kell várni, akkor barátom haszna

$$t(x) \;=\; B\cdot \min(x,c) - A\cdot c \qquad \text{Ft}$$

- 9 órától számítva a vihar jöveteléig eltelt X időtartam – mint valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$
- Barátom hasznának a várható értéke – természetesen – függ c -től, ezért $\text{BHV}(c)$ -vel jelöljük:

$$\text{BHV}(c) \;=\; \int_0^\infty t(x)\cdot f(x)\,dx \;=\; \int_0^\infty (\,B\cdot\min(x,c) - A\cdot c\,)\cdot f(x)\,dx \;=$$
$$=\; \int_0^\infty B\cdot\min(x,c)\cdot f(x)\,dx \;-\; A\cdot c \;=$$
$$=\; \int_0^c B\cdot x\cdot f(x)\,dx \;+\; \int_c^\infty B\cdot c\cdot f(x)\,dx \;-\; A\cdot c$$
$$=\; B\cdot\int_0^c x\cdot f(x)\,dx \;+\; B\cdot c\cdot\int_c^\infty f(x)\,dx \;-\; A\cdot c$$

Idáig tartott a feladat megoldásának az a része, ami a valószínűségszámítási gondolkodásmódot mutatta be. A hátralévő rész a calculus eszközeivel megkeresi a BHV(c) függvény maximumhelyét.

- A $\text{BHV}(c)$ függvény deriváltjának meghatározását segítendő emlékeztetünk az alábbi (itt most c szerinti) deriválási szabályokra:

$$\left(\int_0^c x\cdot f(x)\,dx\right)' \;=\; c\cdot f(c)$$
$$\left(\int_c^\infty f(x)\,dx\right)' \;=\; -f(c)$$
$$\left(c\cdot\int_c^\infty f(x)\,dx\right)' \;=\; 1\cdot\int_c^\infty f(x)\,dx \;+\; c\cdot(\,-f(c)\,)$$

Ezeknek a szabályoknak a felhasználásával a

$$\text{BHV}(c) \;=\; B\cdot\int_0^c x\cdot f(x)\,dx \;+\; B\cdot c\cdot\int_c^\infty f(x)\,dx \;-\; A\cdot c$$

kifejezés tagonkénti deriválása azt adja, hogy

$$\text{BHV}'(c) \;=\; B\cdot(\,c\cdot f(c)\,) \;+\; B\cdot\left(1\cdot\int_c^\infty f(x)\,dx \;+\; c\cdot(\,-f(c)\,)\right) \;-\; A\cdot 1 \;=$$
$$=\; B\cdot T(c) \;-\; A$$

ahol a $T(c)$ függvény az X valószínűségi változó a jobboldali eloszlásfüggvényét jelenti a c helyen:

$$T(c) \;=\; \int_c^\infty f(x)\,dx$$

- A deriváltat nullával egyenlővé téve a
$$B \cdot T(c) \;-\; A \;=\; 0$$
egyenletből azt kapjuk, hogy barátom számára a legkedvezőbb c érték eleget tesz a
$$T(c) \;=\; \frac{A}{B}$$
egyenletnek.

- Nyilvánvaló, hogy
  - az egyenlet megoldásánál kisebb c esetén $\text{BHV}'(c) > 0$
  - az egyenlet megoldásánál nagyobb c esetén $\text{BHV}'(c) < 0$

  ezért az egyenlet megoldása a $\text{BHV}(c)$ függvény maximumhelyét adja.

- Ha az X valószínűségi változó exponenciális eloszlást követ λ paraméterrel, akkor a jobboldali eloszlásfüggvény
$$T(c) = \mathrm{e}^{-\lambda c}$$
Az
$$\mathrm{e}^{-\lambda c} \;=\; \frac{A}{B}$$
egyenlet megoldása:
$$c \;=\; \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{B}{A}\right)$$

- Ha X exponenciális eloszlást követ 5 óra várható értékkel, akkor $\lambda = \frac{1}{5}$. Ha még $A = 2000$, $B = 3000$, akkor
$$c \;=\; \frac{1}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{B}{A}\right) \;=\; 5 \cdot \ln\left(\frac{3000}{2000}\right) \;=\; 2.03 \text{ óra} \;\approx\; 2 \text{ óra } 2 \text{ perc} \;\approx\; 2 \text{ óra}$$
Ezt a $c = 2.03$ értéket behelyettesítve a $\text{BHV}(c)$ függvénybe haszon várható értékének a maximumát kapjuk:
$$\text{BHV}(2.03) \;=\; 945.3 \quad \text{Ft}$$

- Tehát ha barátom 2 óra 2 perc időtartamra bérli ki és adja bérbe a csónakokat – a fentebb vázolt feltételek mellett –, akkor csónakonként átlagosan 945 Ft haszna van csónakonként. (A dolog erkölcsi tartalmáról itt most nem ejtünk szót.)

1.9. Gyakorló feladatok

1. Legyen X egyenletes eloszlású valószínűségi változó
   - a $[0, 1]$ intervallumon
   - a $[0, B]$ intervallumon
   - az $[A, B]$ intervallumon

   Mennyi az X
   - mediánja?
   - várható értéke?
   - második momentuma?

- varianciája?
- szórása?
- Mennyi X^3 a várható értéke?

2. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket a sűrűségfüggvényükkel adunk meg.

   (a) $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$

   (b) $f(x) = 2x/a^2 \quad (0 < x < a)$

   (c) $f(x) = 1/(2\sqrt{x}) \quad (0 < x < 1)$

   (d) $f(x) = 0.5 + x \quad (0 < x < 1)$

   (e) $fx) = 2e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

   Rajzolja le a sűrűségfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

   - a mediánja?
   - a várható értéke?
   - a második momentuma?
   - a varianciája?
   - a szórása?
   - Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!

3. Tekintsük a következő folytonos eloszlásokat, melyeket az eloszlásfüggvényükkel adunk meg.

   (a) $F(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$

   (b) $F(x) = x^2/a^2 \quad (0 < x < a)$

   (c) $F(x) = 1 - e^{-2x} \quad (x \geq 0)$

   (d) $F(x) = \sqrt{x} \quad (0 < x < 1)$

   Rajzolja le az eloszlásfüggvények grafikonjait! Mennyi ezeknek az eloszlásoknak

   - a mediánja?
   - a várható értéke?
   - a második momentuma?
   - a varianciája?
   - a szórása?
   - Határozza meg a sűrűségfüggvény képletét!

4. Egy Bergengóc DVD napokban kifejezett élettartamának sűrűségfüggvénye

   $$f(x) = \frac{2}{x^3} \quad \text{ha } x > 1$$

   Mi annak a valószínűsége, hogy ha január 26-án hoztuk haza a boltból, akkor február 1-én még működik? Melyik DVD-t érdemesebb megvenni, a Dél-Szaharait, aminek sűrűségfüggvénye

   $$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ha } x > 1$$

   vagy a Bergengócot?

5. Választunk egy véletlen számot egyenletes eloszlás szerint az $(1, 4)$ intervallumon, majd szerkesztünk egy egyenlő szárú derékszögő háromszöget, melynek ekkora a befogója. Mennyi a háromszög területének a várható értéke?

6. Tekintünk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számot. Jelöljük X -szel a nagyobbikat.

   (a) Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!
   (b) Az eloszlásfüggvény deriválásával határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!
   (c) *Az eloszlásfüggvény használata nélkül*, az

   $$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1} \qquad (x_1 \le x \le x_2, \quad x_1 \text{ és } x_2 \text{ közel vannak } x \text{ -hez})$$

   képletből kiindulva határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

7. Tekintünk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számot. Jelöljük X -szel a kisebbiket.

   (a) Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!
   (b) Az eloszlásfüggvény deriválásával határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!
   (c) *Az eloszlásfüggvény használata nélkül*, az

   $$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1} \qquad (x_1 \le x \le x_2, \quad x_1 \text{ és } x_2 \text{ közel vannak } x \text{ -hez})$$

   képletből kiindulva határozza meg X sűrűségfüggvényének képletét!

8. Ahhoz hasonlóan, ahogy az $F(x)$ eloszlásfüggvény tulajdonságai és $f(x)$ -szel való kapcsolatát megvilágítottuk, keresse meg a $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvény tulajdonságait és $f(x)$ -szel való kapcsolatát!

9. A vihar X idő múlva tör ki a Balatonon, ahol X egy exponenciális eloszlást követő valószínűségi változó λ paraméterrel. Bérbe veszek egy csónakot A Ft/óra bérleti díjért c óra időtartamra ($c > 0$ valós konstans), és azonnal bérbe adom egy "albérlőnek" B Ft/óra bérleti díjért ($A < B$) ameddig csak lehet, tehát $\min(X, c)$ időtartamra azzal a feltétellel, hogy

   - ha a vihar előbb jön mint a c időtartam letelte, akkor a visszamaradó $c - X$ időrész elvesztéséért én D Ft/óra vigaszdíjat fizetek az "albérlőm"-nek.

   (a) Hogyan függ a hasznom az X tényleges értékétől?
   (b) Írja fel a haszon várható értékét képlet formájában!
   (c) Mennyi legyen a c konstans értéke, hogy a hasznom várható értéke a lehető legnagyobb legyen?

2. Nagy számok törvényei újra – folytonos eset

Fontosságuk miatt folytonos valószínűségi változókra – kis módosításokkal – elismételjük a diszkrét valószínűségi változókra már megfogalmazott nagy számok törvényeit.

2.1. NSZT a kísérleti eredmények átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha kísérleti eredményeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül az X várható értékével egyenlő:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \mathrm{E}(\,X\,)$$

Emlékeztetőül:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Vázlatos bizonyítás. *(Extra tananyag.)* Vegyük fel a számegyenesen az x_i , $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ pontokat úgy, hogy szomszédos x_i, x_{i+1} pontok távolsága, amit Δx_i -vel jelölünk, kicsi legyen minden i -re. Az X valószínűségi változó megfigyelt értékét az $[x_i, x_{i+1})$ intervallumban kerekítsük le x_i -re, és a kapott értéket jelöljük X^* -gal:

$$X^* = x_i \quad \text{ha} \quad x_i \le X < x_{i+1}$$

Az X^* diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei az x_i , $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ számok, és minden egyes i -re az x_i valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\,X^* \;=\; x_i) \;=\; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx$$

X^* várható értéke:

$$\mathrm{E}(\,X^*\,) = \sum_i x_i\, \mathrm{P}(\,X^* \;=\; x_i) \;=\; \sum_i\ x_i\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx$$

Mivel X^* értéke és X értéke csak kicsit tér el, a kísérleti eredmények átlagai is csak kicsit térnek el:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \frac{X_1^* + X_2^* + \ldots + X_N^*}{N}$$

Mivel Δx_i minden i -re kicsi, az alábbi közelítésekkel élhetünk:

$$\mathrm{P}(\,X^* \;=\; x_i) \;=\; \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx \;\approx\; f(x_i)\cdot \Delta x_i \qquad\qquad (i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

$$\mathrm{E}(\,X^*\,) = \sum_i\ x_i\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\ dx \;\approx\; \sum_i\ x_i\ f(x_i)\cdot \Delta x_i \;\approx\; \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx$$

Mindezt felhasználva kapjuk, hogy az X -re végzett kísérleti eredmények átlaga közel van X várható értékéhez:

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \approx \frac{X_1^* + X_2^* + \ldots + X_N^*}{N} \approx \mathrm{E}(\,X^*\,) \approx \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx = \mathrm{E}(\,X\,)$$

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\;dx$ integrál értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül, ha

   - az integrál abszolút konvergens, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\; f(x)\;dx < \infty$.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az
   $$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; \mathrm{E}(\,X\,)$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\;dx$ integrál értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - az $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\;dx$ integrál konvergens, és
   - az $\int_{0}^{\infty} x\,f(x)\;dx$ integrál divergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az
   $$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; +\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\,X\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\;dx$ integrál értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - az $\int_{-\infty}^{0} x\,f(x)\;dx$ integrál divergens, és
   - az $\int_{0}^{\infty} x\,f(x)\;dx$ integrál convergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén az
   $$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N} \;\to\; -\infty$$
   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2.2. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

Heurisztikus megfogalmazás: Képzeljük el, hogy egy X folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számok, jelölje $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Ha a kísérleti eredményeket egy $t(x)$ folytonos függvénybe helyettesítjük, majd az így kapott

$$t(X_1)\;,\; t(X_2)\;,\;\ldots, t(X_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \;\approx\; \mathrm{E}\,(\;t(X)\;)$$

Emlékeztetőül:

$$\mathrm{E}\,(\;t(X)\;) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x)\,f(x)\,dx$$

Vázlatos bizonyítás. *(Extra tananyag.)* Vegyük fel a számegyenesen az x_i , $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ pontokat úgy, hogy szomszédos x_i, x_{i+1} pontok távolsága, amit Δx_i -vel jelölünk, kicsi legyen minden i -re. Az X valószínűségi változó megfigyelt értékét az $[x_i, x_{i+1})$ intervallumban kerekítsük le x_i -re, és a kapott értéket jelöljük X^* -gal:

$$X^* = x_i \quad \text{ha} \quad x_i \le X < x_{i+1}$$

Az X^* diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei az x_i , $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ számok, és minden egyes i -re az x_i valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\ X^* \ = \ x_i) \ = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \ dx$$

$t(X^*)$ várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ t(X^*)\ ) = \sum_i \ t(x_i)\ \mathrm{P}(\ X^* \ = \ x_i) \ = \sum_i \ t(x_i) \ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \ dx$$

Mivel X^* értéke és X értéke csak kicsit tér el, $t(X)$ értéke is csak kicsit tér el $t(X^*)$ -tól, ezért a kísérleti eredmények átlagai is csak kicsit térnek el:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \ \approx \ \frac{t(X_1^*) + t(X_2^*) + \ldots + t(X_N^*)}{N}$$

Mivel Δx_i minden i -re kicsi, az alábbi közelítésekkel élhetünk:

$$\mathrm{P}(\ X^* \ = \ x_i) \ = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \ dx \ \approx \ f(x_i) \cdot \Delta x_i \qquad\qquad (i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

$$\mathrm{E}(\ t(X^*)\ ) = \sum_i \ t(x_i) \ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \ dx \ \approx \ \sum_i \ t(x_i) \ f(x_i) \cdot \Delta x_i \ \approx \ \int_{-\infty}^{\infty} \ t(x) \ f(x) \ dx$$

Mindezt felhasználva kapjuk, hogy az X -re végzett kísérleti eredmények t -be való helyettesítésekor adódó értékeinek az átlaga közel van $t(X)$ várható értékéhez:

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \ \approx \ \frac{t(X_1^*) + t(X_2^*) + \ldots + t(X_N^*)}{N} \ \approx \ \mathrm{E}(\ t(X^*)\ ) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \ t(x) \ f(x) \ dx = \ \mathrm{E}(\ t(X)\ )$$

Precíz megfogalmazás *(Extra tananyag)*

1. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \sum_x t(x) \ p(x)$ sor értéke egyértelműen definiált véges szám, ami teljesül,

   - ha a sor véges sok tagból áll, azaz az X valószínűségi változónak csak véges sok lehetséges értéke van, vagy
   - végtelen sok tag esetén – ha a sor abszolút konvergens, azaz $\sum_x |t(x)| \ \ p(x) < \infty$.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a

   $$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \ \to \ \mathrm{E}(\ t(X)\ )$$

   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \sum_x t(x) \ p(x)$ sor értéke egyértelműen plusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

   - pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0} \ x \ p(x)$ divergens, és
   - a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0} \ x \ p(x)$ konvergens.

   Ekkor $N \to \infty$ esetén a

   $$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \ \to \ +\infty$$

   esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

3. Tegyük fel, hogy a várható értéket definiáló $\mathrm{E}(\ t(X)\ ) = \sum_i t(x_i) \ p_i = \sum_i t(x) \ p(x)$ sor értéke egyértelműen mínusz végtelen, ami akkor teljesül, ha

- pozitív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)>0} \; x\, p(x)$ kovergens, és
- a negatív tagokat tartalmazó $\sum_{t(x)<0} \; x\, p(x)$ divergens.

Ekkor $N \to \infty$ esetén a

$$\frac{t(X_1) + t(X_2) + \ldots + t(X_N)}{N} \; \to \; -\infty$$

esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő.

2.3. NSZT a második momentumra

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények második momentumára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X második momentumával egyenlő:

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N} \; \approx \; \mathrm{E}(\, X^2 \,)$$

Emlékeztetőül:

$$\mathrm{E}(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

Bizonyítás: Ha az előző részben a $t(x) = x^2$ speciális függvényt vesszük akkor azonnal megkapjuk az állítást.

2.4. NSZT a varianciára

Az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N}$$

varianciájára igaz, hogy nagy kísérletszám esetén körülbelül az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N} \approx \mathrm{VAR}(X)$$

Vázlatos bizonyítás. *(Extra tananyag.)* Ugyanis, ha az $\overline{X}_N$ átlag helyére az $\mathrm{E}(\, X \,)$ várható értéket írjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \ldots + (X_N - \overline{X})^2}{N} \approx$$

$$\approx \frac{(X_1 - \mathrm{E}(\, X \,))^2 + (X_2 - \mathrm{E}(\, X \,))^2 + \ldots + (X_N - \mathrm{E}(\, X \,))^2}{N}$$

A jobb oldalon álló átlag az $(X - \mathrm{E}(\, X \,))^2$ valószínűségi változó várható értékéhez van közel, ami éppen az X varianciájával egyenlő:

$$\frac{(X_1 - \mathrm{E}(\, X \,))^2 + (X_2 - \mathrm{E}(\, X \,))^2 + \ldots + (X_N - \mathrm{E}(\, X \,))^2}{N} \approx \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(\, X \,))^2\right) = \mathrm{VAR}(X)$$

Emlékeztetőül:

$$\mathrm{VAR}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathrm{E}(\, X \,))^2 \, f(x)\, dx$$

2.5. NSZT a szórásra

Így aztán nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \dots, X_N$ kísérleti eredmények szórása – igen általános feltételek mellett – körülbelül az X szórásával egyenlő:

$$\sqrt{\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\ldots+(X_N-\overline{X})^2}{N}} \approx \mathrm{SD}(X)$$

Emlékeztetőül:

$$\mathrm{SD}(X) = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{E}(\,X\,))^2\, f(x)\, dx}$$

2.6. NSZT a mediánra

A mediánra vonatkozó NSZT a folytonos esetre is ugyanúgy érvényes, mint a diszkrét esetre:

Nagy kísérletszám esetén az $X_1, X_2, \dots, X_N$ kísérleti eredményekből számított medián körülbelül az X eloszlásából számított (elméleti) mediánnal egyenlő.

1. Példa: Ha Excelben az `=NORM.S.INVERZ(RAND())` utasítással standard normális eloszlást követő valószínűségi vááltozót szimulálunk jó sok cellában, és a `=MEDIAN(...)` utasítással megkeressük a szimulált eredmények mediánját, akkor körülbelül 0 -t fogunk kapni, hiszen a standard normális eloszlás elméleti mediánja a 0.

2. Példa: Egy városban a közlekedési "piros-sárga-zöld" lámpák élettartama (a zavartalan működés időtartama) exponenciális eloszlást követ, és az élettartam mediánja 7.5 hónap, akkor sok lámpa élettartamát összegyűjtve a kapott adathalmaz mediánja körükbelül 7.5 hónap lesz.

2.7. Gyakorló feladatok

1. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$. Képzeljük el, hogy valaki X -re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

$$X_1, X_2, \dots, X_N$$

   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

     kifejezés értéke?
   - Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}$$

     kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 0.8 -től való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1 - 0.8)^2 + (X_2 - 0.8)^2 + \ldots + (X_N - 0.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számoknak a 0.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük.

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma.

2. Tegyük fel, hogy az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x) = \sqrt{x} \quad (0 < x < 1)$. Képzeljük el, hogy valaki X -re sok kísérletet végez. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, amelyek véletlen számok, jelölje

$$X_1, X_2, \ldots, X_N$$

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredmények négyzetének átlaga, vagyis az

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2}{N}$$

kifejezés értéke?

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek egy valamilyen konstanstól, például a 0.8 -től való eltérése négyzetének az átlaga, vagyis az

$$\frac{(X_1 - 0.8)^2 + (X_2 - 0.8)^2 + \ldots + (X_N - 0.8)^2}{N}$$

kifejezésnek az értéke? (Az itt szereplő kifejezést az $X_1, X_2, \ldots, X_N$ számoknak a 2.8 -re vonatkozó második momentumának nevezzük.

- Becsülje meg, hogy körülbelül mennyi lesz a kísérleti eredményeknek az átlagukra vonatkozó második momentuma.

3. Random számok transzformációi

3.1. Néhány konkrét transzformáció

3.1.1. Random szám négyzete, négyzetgyöke, reciproka

1. Példa: Random szám négyzete

$$X = \mathrm{RND}^2$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \sqrt{x} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

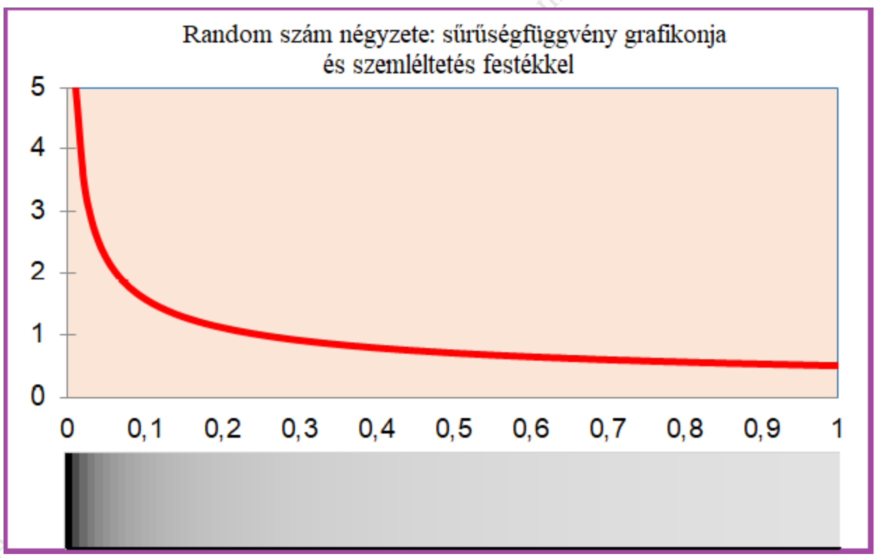
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

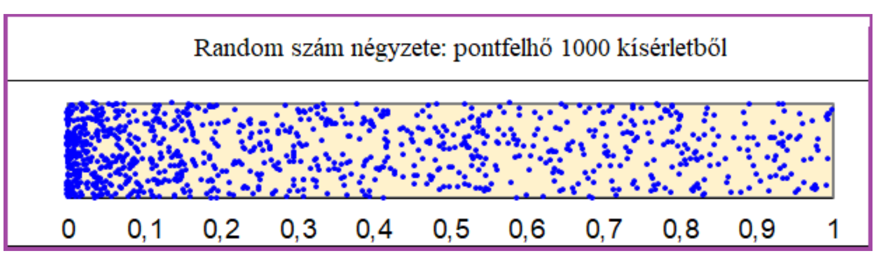
Tehát egy $[a; b]$ intervallum valószínűsége:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \sqrt{b} - \sqrt{a} \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

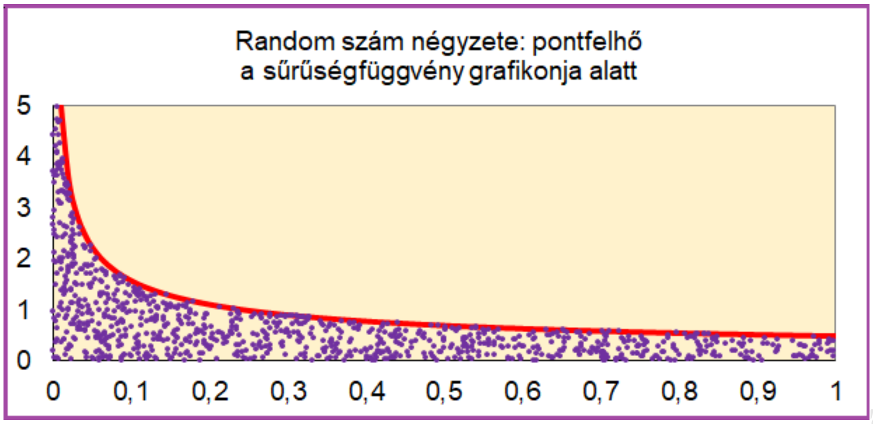
$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$



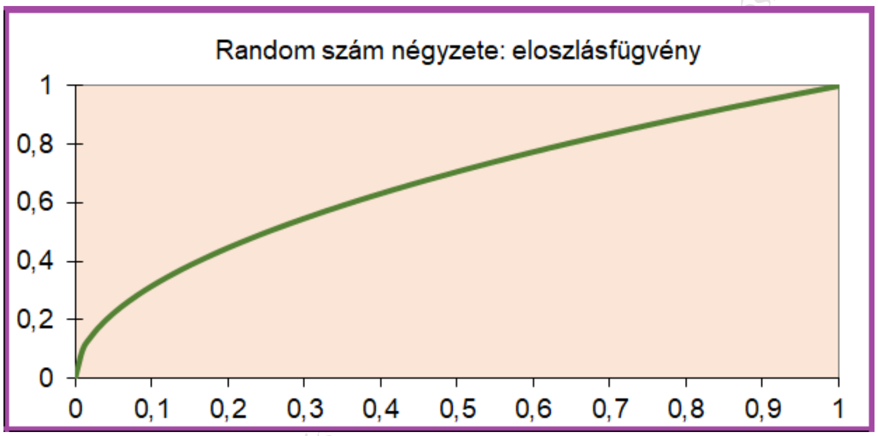
3. ábra. *Random szám négyzete: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



4. ábra. *Random szám négyzete: pontfelhő 1000 kísérletből*



5. ábra. *Random szám négyzete: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



6. ábra. *Random szám négyzete: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: RND^2 lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \text{P}\left(X \le x\right) = \text{P}\left(\text{RND}^2 \le x\right) = \text{P}\left(\text{RND} \le \sqrt{x}\right) = \sqrt{x} \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

2. Példa: Random szám négyzetgyöke

$$X = \sqrt{\text{RND}}$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = x^2 \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

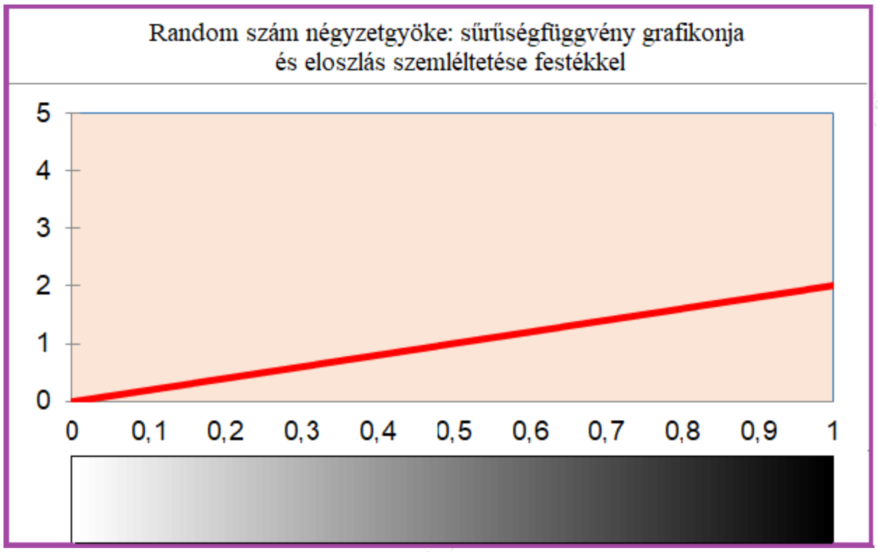
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = 2x \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

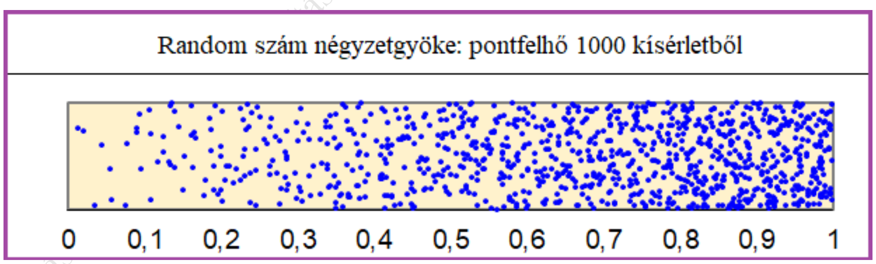
Tehát egy $[a;b]$ intervallum valószínűsége:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = b^2 - a^2 \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

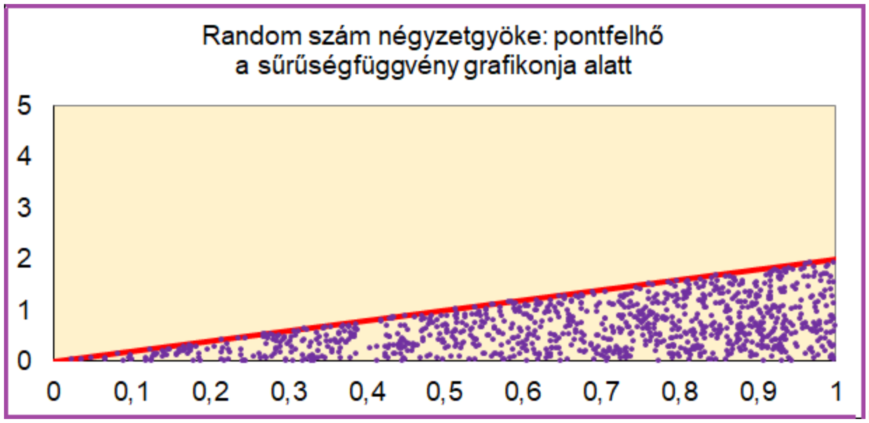
$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b 2x \ dx \qquad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$



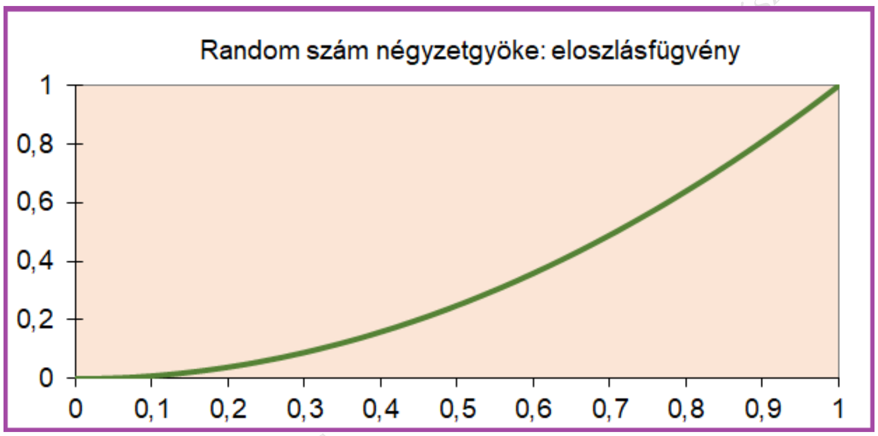
7. ábra. *Random szám négyzetgyöke: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



8. ábra. *Random szám négyzetgyöke: pontfelhő 1000 kísérletből*



9. ábra. *Random szám négyzetgyöke: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



10. ábra. *Random szám négyzetgyöke: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $\sqrt{\mathrm{RND}}$ lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < 1$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \le x\right) = \mathrm{P}\left(\sqrt{\mathrm{RND}} \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND} \le \ x^2\right) = x^2 \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x \qquad \text{ha } 0 < x < 1$$

3. Példa: Random szám reciproka

$$X = 1 \,/\, \mathrm{RND}$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{x} \qquad \text{ha} \quad 1 < x < \infty$$

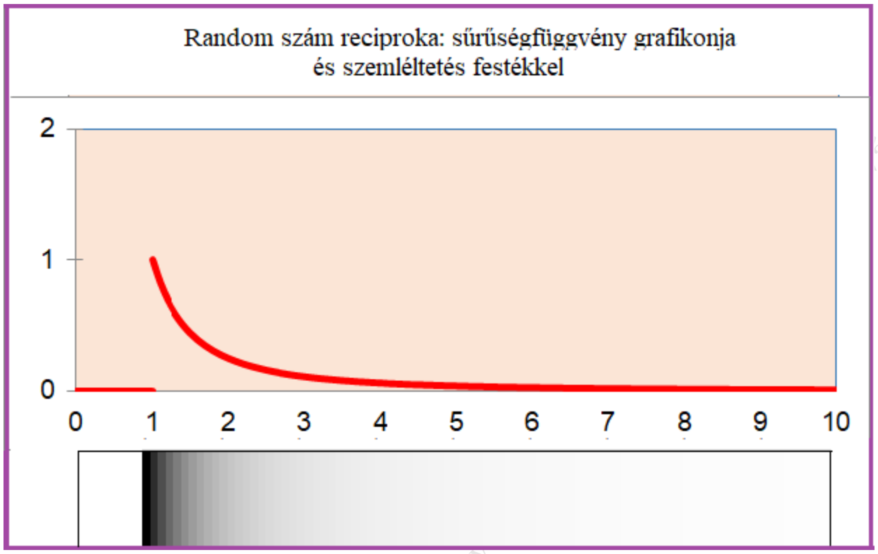
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{ha} \quad 1 < x < \infty$$

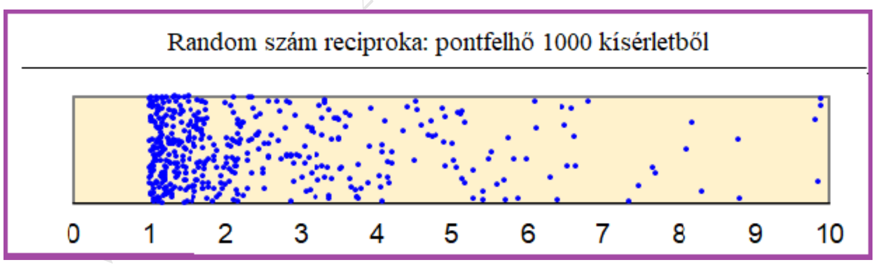
Tehát egy $[a; b]$ intervallum valószínűsége:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \left(1 - \frac{1}{b}\right) - \left(1 - \frac{1}{a}\right) \qquad \text{ha} \quad 1 \le a < b < \infty$$

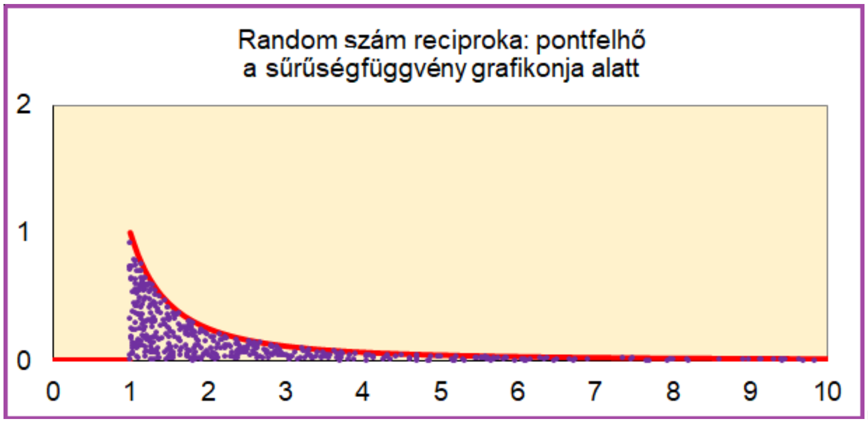
$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx \qquad \text{ha} \quad 1 \le a < b < \infty$$



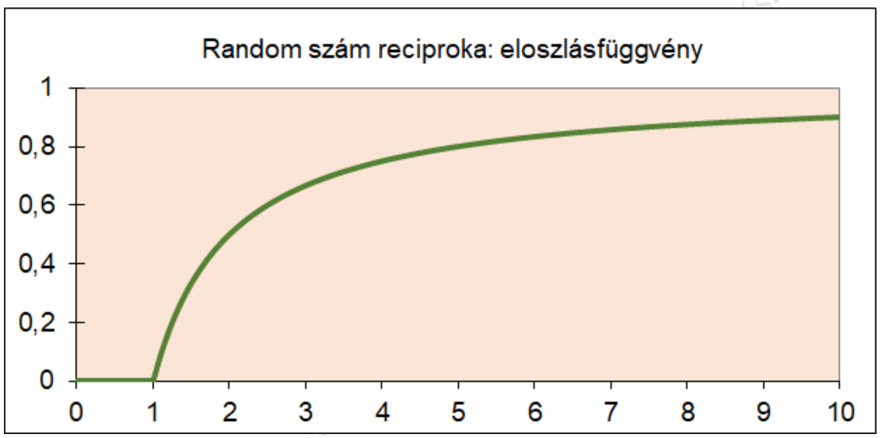
11. ábra. *Random szám reciproka: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



12. ábra. *Random szám reciproka: pontfelhő 1000 kísérletből*



13. ábra. *Random szám reciproka: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



14. ábra. *Random szám reciproka: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $1/\mathrm{RND}$ lehetséges értékei az $(1, \infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $1 < x < \infty$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{RND}} \le x\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{x} \le \mathrm{RND}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND} \ge \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x} \qquad (x > 1)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \left(1 - x^{-1}\right)' = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \qquad (x > 1)$$

3.1.2. Random számok szorzata, hányadosa

1. Példa: Random számok szorzata

$$X = \mathrm{RND}_1\ \mathrm{RND}_2$$

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = x - x \ln x \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

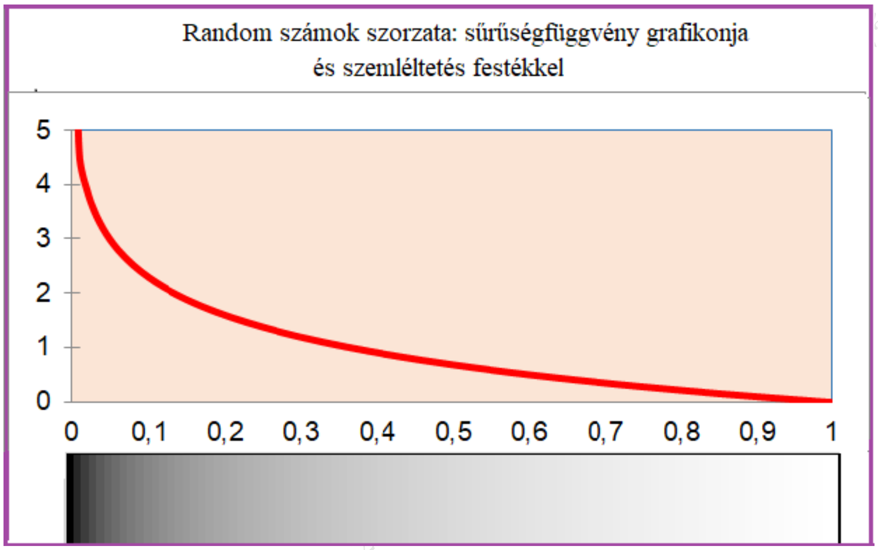
Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = -\ln x \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

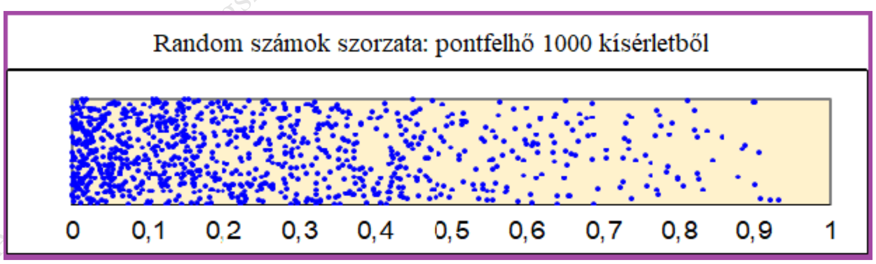
Tehát egy $[a; b]$ intervallum valószínűsége:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = (b - b \ln b) - (a - a \ln a) \quad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$

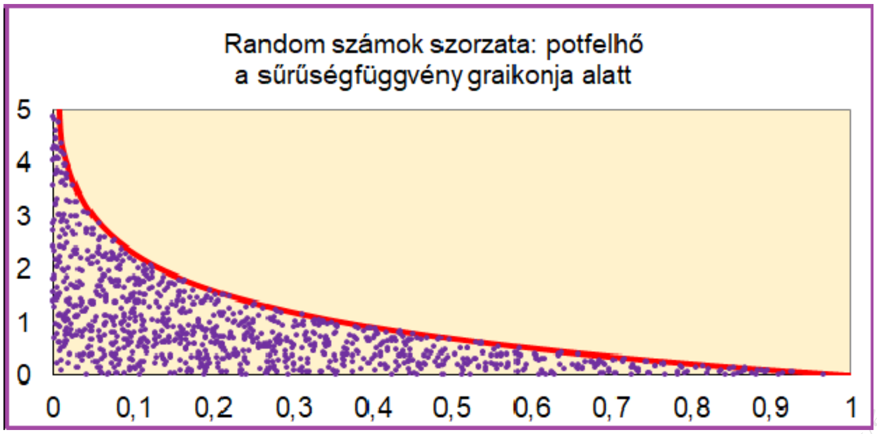
$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = \int_a^b (-\ln x) \; dx \quad \text{ha} \quad 0 \le a < b \le 1$$



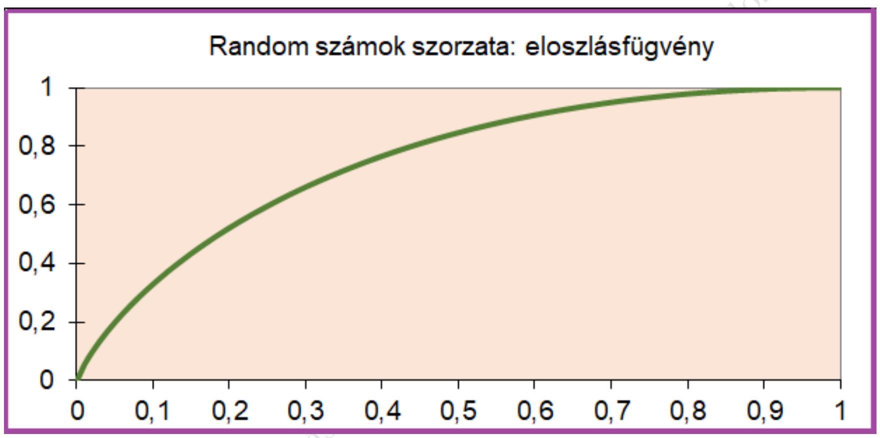
15. ábra. *Random számok szorzata: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



16. ábra. *Random számok szorzata: pontfelhő 1000 kísérletből*



17. ábra. *Random számok szorzata: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



18. ábra. *Random számok szorzata: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $\mathrm{RND}_1\ \mathrm{RND}_2$ lehetséges értékei a $(0,1)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < 1$.

Eloszlásfüggvény: Mivel a $(\mathrm{RND}_1, \mathrm{RND}_2)$ véletlen pont az egységnégyzeten egyenletes eloszlást követ, egy vele kapcsolatos esemény valószínűsége területek hányadosaként számítható: az eseménynek megfelelő területet kell osztani a négyzet területével. A négyzet területe egyenlő 1-gyel, ezért az osztástól el is lehet tekinteni. A $\{\mathrm{RND}_1\ \mathrm{RND}_2 \le x\}$ esemény két egymást kizáró esemény úniója:

$$\{\mathrm{RND}_1\ \mathrm{RND}_2 \le x\} =$$

$$\{\mathrm{RND}_1 \le x\} \cup \{x < \mathrm{RND}_1 \text{ és } \mathrm{RND}_1\ \mathrm{RND}_2 \le x\}$$

Így azt kapjuk, hogy

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_1\ \mathrm{RND}_2 \le x\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_1 \le x\right) + \mathrm{P}\left(x < \mathrm{RND}_1 \text{ és } \mathrm{RND}_1\ \mathrm{RND}_2 \le x\right) =$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_1 \le x\right) + \mathrm{P}\left(x \le \mathrm{RND}_1 \text{ és } \mathrm{RND}_2 \le x/\mathrm{RND}_1\right) =$$

Az első tag x -szel egyenlő. A második pedig

$$\text{az } \{(u,v):\ \ x \le u \le 1 \text{ és } 0 \le v \le x/u\} \text{ halmaz területe } =$$

$$\int_{u=x}^{u=1} \left(\int_{v=0}^{v=x/u} 1 \, dv \right) du = \int_{u=x}^{u=1} x/u \;\; du = -x \ln x$$

A két tag összege éppen $F(x) - t$ adja.

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = (x - x \ln x)' = 1 - \ln x - x \, \frac{1}{x} = - \ln x \qquad (0 < x < 1)$$

2. Példa: Random számok hányadosa

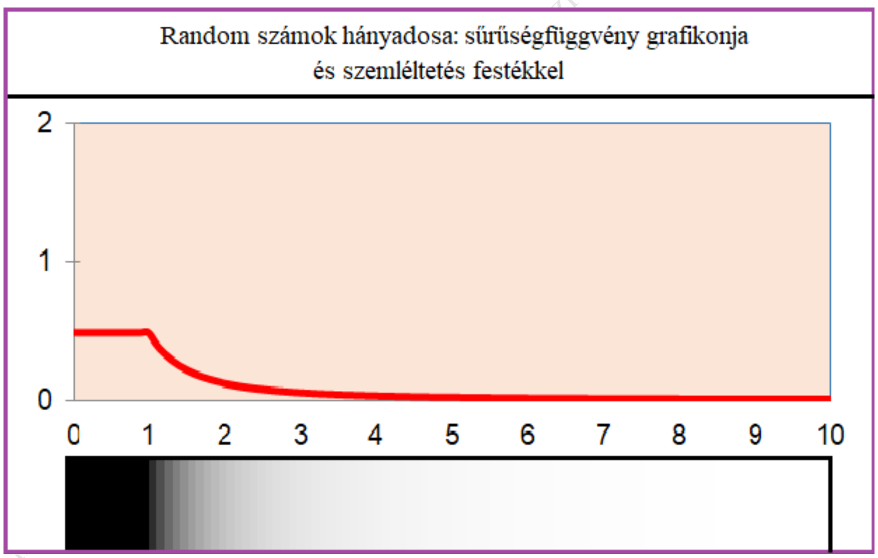
$$X = \mathrm{RND}_2 / \mathrm{RND}_1$$

Eloszlásfüggvény:

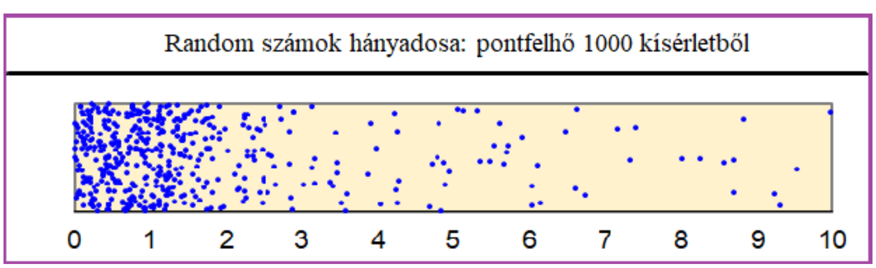
$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \\ 1 - \frac{1}{2x} & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvény:

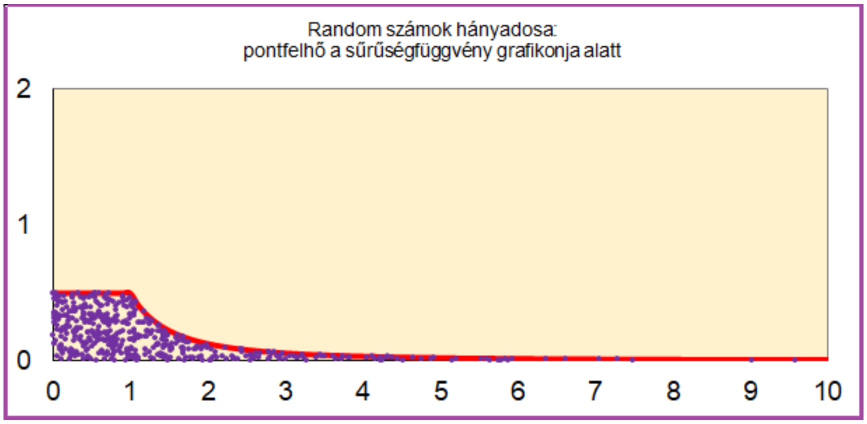
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2x^2} & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$



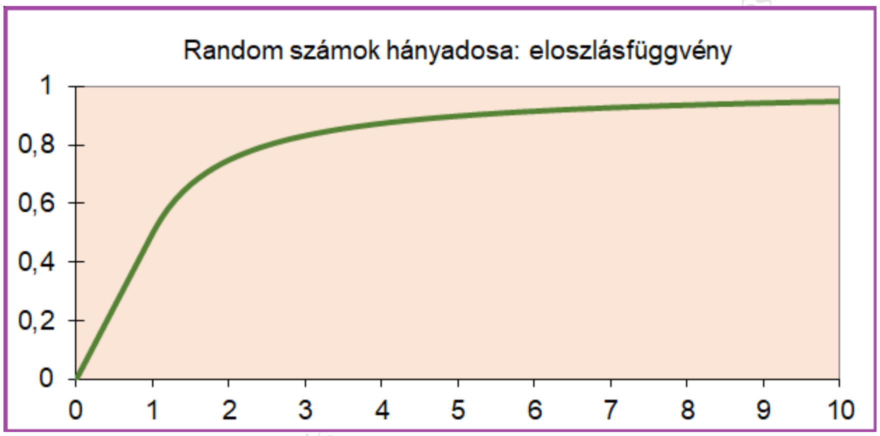
19. ábra. *Random számok hányadosa: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



20. ábra. *Random számok hányadosa: pontfelhő 1000 kísérletből*



21. ábra. *Random számok hányadosa: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



22. ábra. *Random számok hányadosa: eloszlásfüggvény*

A képletek meghatározása: $\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1$ lehetséges értékei a $(0,\infty)$ intervallumot teszik ki. Ezért az alábbi számításokban feltesszük, hogy $0 < x < \infty$.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \mathrm{P}\left(X \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1 \le x\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2 \le x\ \mathrm{RND}_1\right)$$

Két esetet kell most szétválasztanunk:

1. eset: $x \le 1$

$x \le 1$ esetén ez a valószínűség az alábbi halmaz területével egyenlő:

$$\{(u,v):\ \ 0 \le u \le 1,\ \ 0 \le v \le 1\ \text{ és }\ 0 \le \frac{v}{u} \le x\}$$

azaz

$$\{(u,v):\ \ 0 \le u \le 1,\ \ 0 \le v \le 1\ \text{ és }\ 0 \le v \le\ x\,u\}$$

Ez a halmaz nem más, mint egy háromszög az alábbi csúcsokkal $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,x)$, így a területe $x/2$. Ezért

$$F(x) = x/2$$

2. eset: $x > 1$

$x > 1$ esetén érdemes a komplementer eseménnyel dolgozni:

$$1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2/\mathrm{RND}_1 \geq x\ \right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2 \geq x\ \mathrm{RND}_1\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2/x \geq\ \mathrm{RND}_1\right) =$$

$$= 1 - \text{az } \{(u,v):\ \ 0 \leq u \leq 1,\ \ 0 \leq v \leq 1 \ \text{ és } \ u \leq v/x\} \text{ halmaz területe}$$

Az itt fellépő halmaz egy háromszög a $(0,0)$, $(0,1)$, $(1/x,1)$ csúcsokkal, aminek területe $1/(2x)$. Ezért

$$F(x) = 1/(2x)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} (\frac{x}{2})' = \frac{1}{2} & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \\ \\ (1 - \frac{1}{2x})' = \frac{1}{2x^2} & \text{ha} \quad x > 1 \end{cases}$$

3.2. Béta eloszlások

Válasszunk egy n és egy k számot úgy, hogy $1 \leq k \leq n \leq$ teljesüljön. Ezek után tekintsünk n darab egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyság szerinti k -ik legkisebbet!

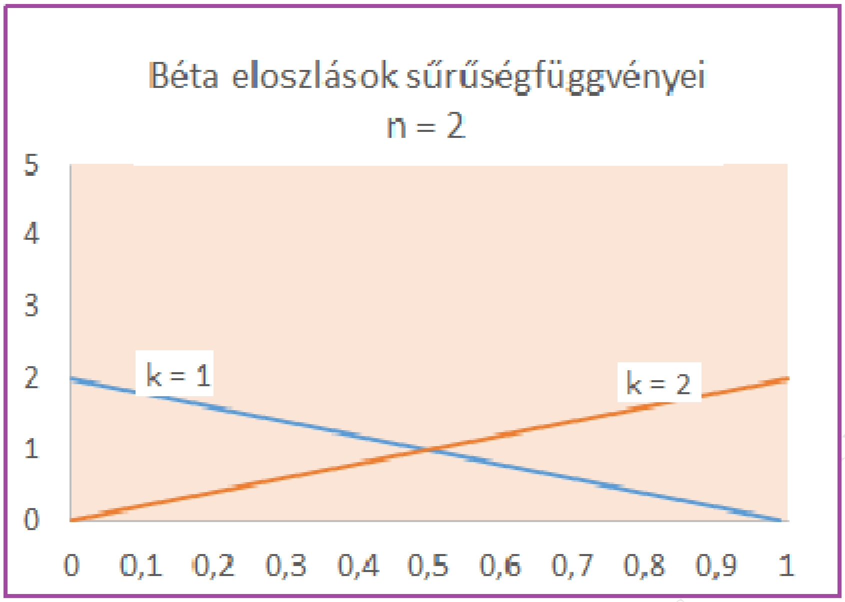
Ugyanez a probléma kicsit életszerűbben:
Tegyük fel, hogy egy n tagú társaság tagjai egymástól függetlenül egyenletes eloszlás szerint érkeznek a menzára dél és 1 óra között. Aki elsőnek megjön leül és vár a többire. Amikor a második megjön, kezet fognak. Amikor a harmadik megjön, udvariasan köszön a már ottlévő két barátjának. Amikor pedig a k -ik is megjön, hangos csatakiáltással üdvözlik őt. Jelöljük X -szel azt a pillanatot, amikor felhangzik a csatakiáltás! Az ilyen módon értelmezett valószínűségi változók eloszlásait nevezzük **béta eloszlás**oknak.

3.2.1. A sűrűségfüggvény képletének levezetése

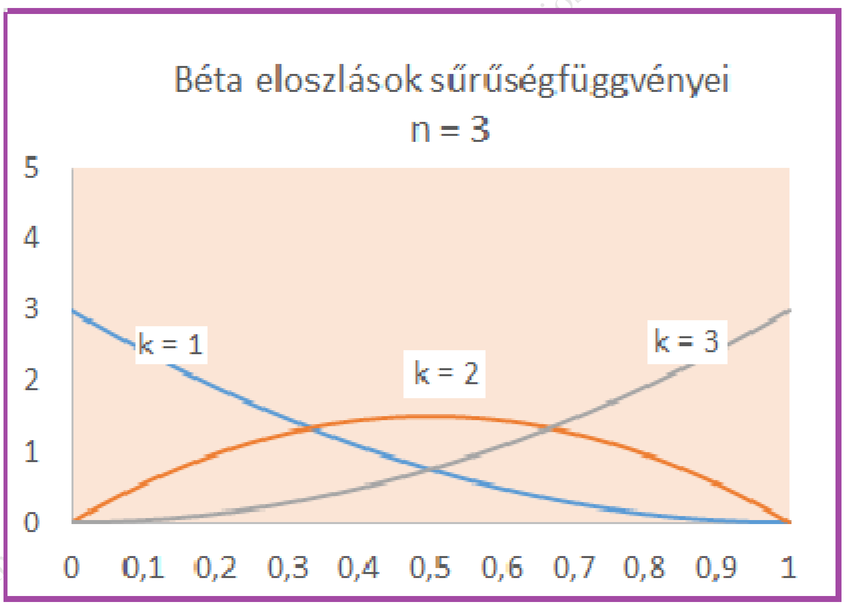
Memutatjuk, hogy X sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ \ x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

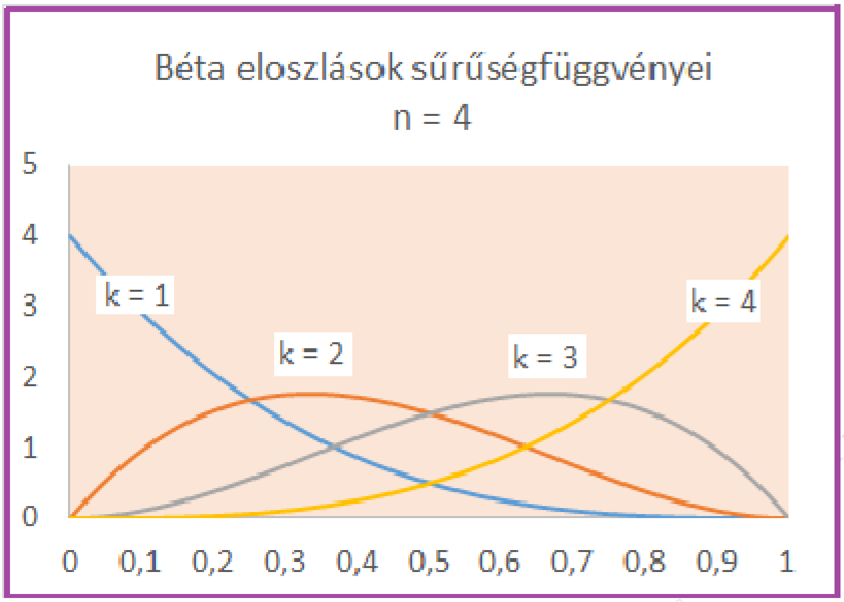
Megjegyzés: A béta eloszlásokat tetszőleges n -re és k -ra vezettük be. A kezdő számára ez így ijesztő lehet. Ennek kivédésére tanácsoljuk, hogy – fáradságot és időt nem kímélve – először néhány speciális esetre gondolja át a definíciót, végezzen kísérleteket, értse meg, hogy miről is van szó. Az következő négy ábrán $n = 2, 3, 4, 5$ és a lehetséges k értékekre a megadjuk a sűrűségfüggvények grafikonjait :



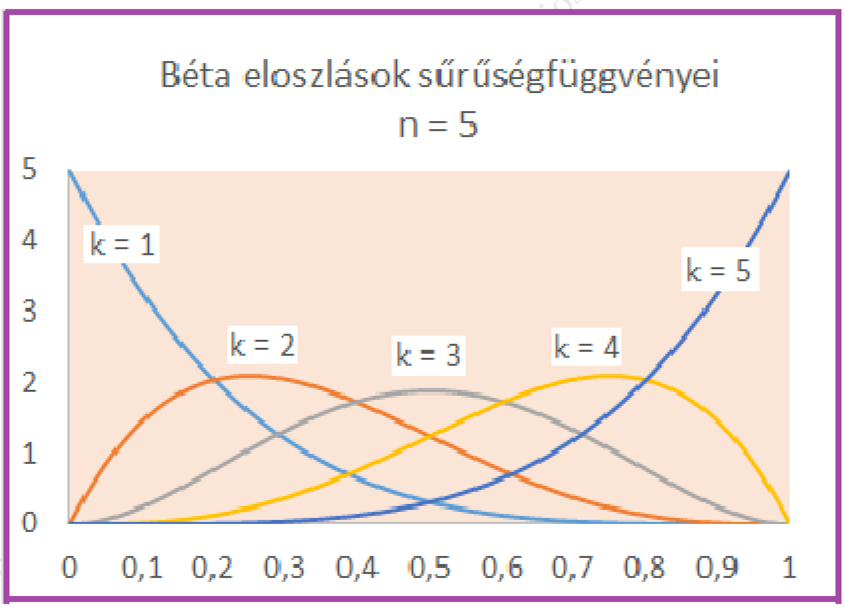
23. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 2,\ k = 1,\ k = 2)$



24. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 3,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3)$

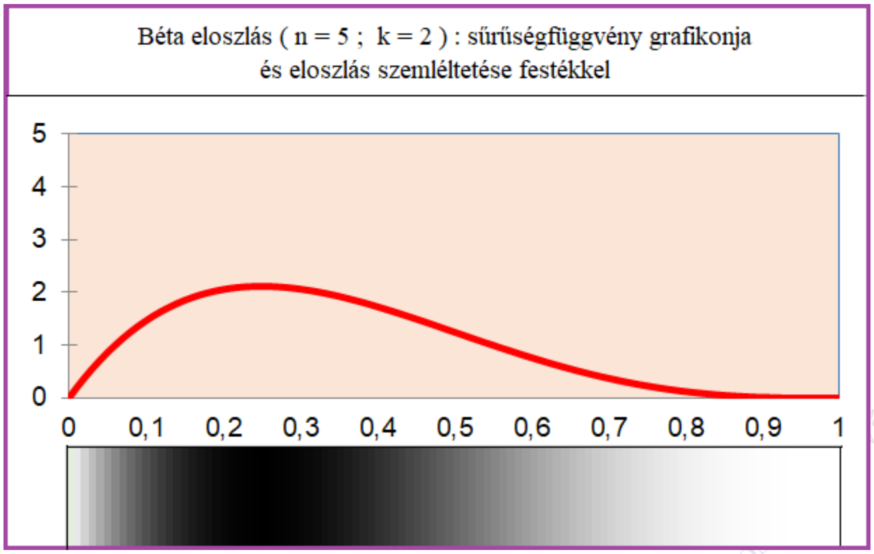


25. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 4,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4)$

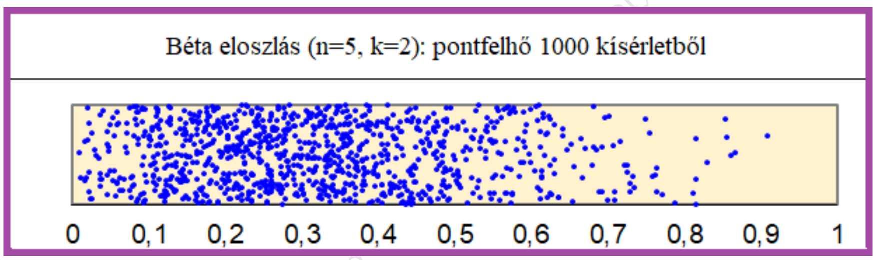


26. ábra. *Béta eloszlások sűrűségfüggvényeinek grafikonjai,* $n = 5,\ k = 1,\ k = 2,\ k = 3,\ k = 4,\ k = 5)$

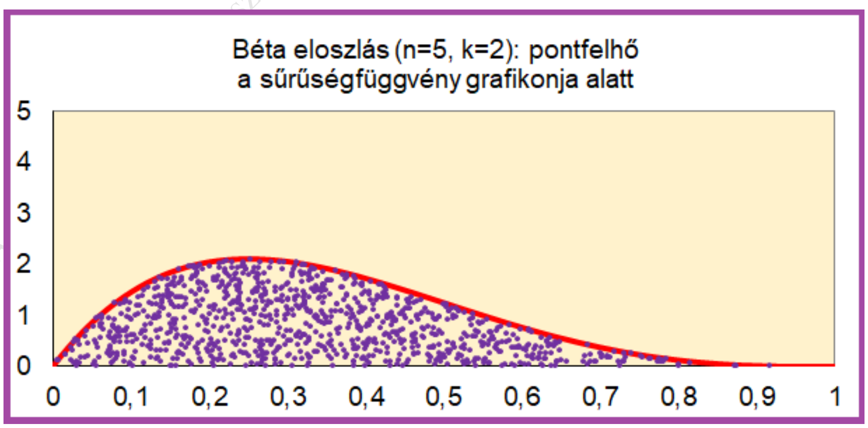
Az $(n = 5,\ k = 2)$ paraméter értékekre több ábrát is megadunk:



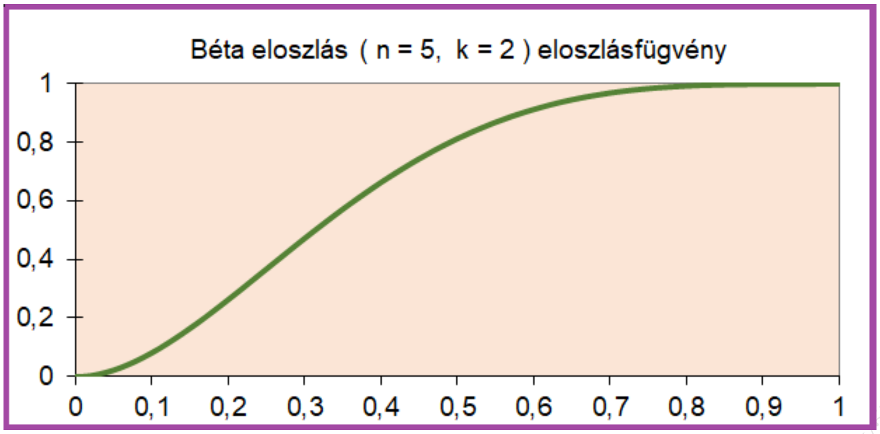
27. ábra. *Béta eloszlás* $(n = 5,\ k = 2)$*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



28. ábra. *Béta eloszlás* $(n = 5,\ k = 2)$*: pontfelhő 1000 kísérletből*



29. ábra. *Béta eloszlás* $(n = 5,\ k = 2)$*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



30. ábra. *Béta eloszlás* $(n = 5,\ k = 2)$*: eloszlásfüggvény*

A sűrűségfüggvény képletének levezetése: Válasszunk egy x pontot 0 és 1 között, és legyen az $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül. A sűrűség jelentése miatt:

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1}$$

A számlálóban álló $x_1 \le X \le x_2$ esemény azt jelenti, hogy a nagyság szerinti k -ik random szám az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba esik, vagyis

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ X\ ]$ intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ X\ ;\ 1\ ]$ intervallumba	

Mindez közelítőleg ezt jelenti:

valamelyik	random szám beleesik	az	$[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	random szám esik	a	$[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba,	és
$n-k$ darab	random szám esik	az	$[\ x_2\ ;\ 1\ ]$ intervallumba	

Az $[\ x_1\ ;\ x_2\ ]$ intervallumba eső random szám az n darab random szám akármelyike lehet. Ez ad n lehetőséget. A $[\ 0\ ;\ x_1\ ]$ intervallumba eső $k-1$ darab random szám az $n-1$ darab többi random szám közül kerül ki. Ez sokszorozza a lehetőségek számát $\binom{n-1}{k-1}$ -gyel, vagyis a random számok elhelyezkedésével kapcsolatban a lehetőségek száma:

$$n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}$$

Eme lehetőségek mindegyikének a valószínűsége

$$x_1^{k-1}\ (x_2 - x_1)\ (1 - x_2)^{n-k}$$

Ezért a számlálóban álló valószínűség közelítőleg:

$$\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}\ \ x_1^{k-1}\ (x_2 - x_1)\ (1 - x_2)^{n-k}$$

Ha ezt elosztjuk $(x_2 - x_1)$ -gyel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{n!}{(k-1)!\ (n-k)!}\ \ x_1^{k-1}\ (1 - x_2)^{n-k}$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy az [x_1 , x_2] intervallum mindkét végpontja x -hez közeli, és ezért x_1 és x_2 helyett is x -t írunk, akkor a sűrűségfüggvényre kijön, hogy

$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ x^{k-1}\,(1-x)^{n-k} \qquad (0<x<1)$$

1. Példa: 5 random szám közül a 2 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \ = \ \frac{5!}{1!\,3!}\, x^1\,(1-x)^3 \ = \ 20\,x\,(1-x)^3 \qquad (0<x<1)$$

2. Példa: 5 random szám közül a 3 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \ = \ \frac{5!}{2!\,2!}\, x^2\,(1-x)^2 \ = \ 30\,x^2\,(1-x)^2 \qquad (0<x<1)$$

3. Példa: 10 random szám közül a 7 -ik legkisebb sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \ = \ \frac{10!}{6!\,3!}\, x^6\,(1-x)^3 \ = \ 840\,x^6\,(1-x)^3 \qquad (0<x<1)$$

3.2.2. Az eloszlásfüggvény képletének levezetése

Válasszunk egy x pontot 0 és 1 között. Meghatározzuk az eloszlásfüggvény értékét az x helyen:

$$F(x) \ = \ \mathrm{P}(X \le x) \ =$$

$= \mathrm{P}($ a k -ik legkisebb random szám x -től balra van $) \ =$

$= \mathrm{P}($ az x -től balra lévő random számok száma legalább k $) \ =$

$= \mathrm{P}($ az x -től balra lévő random számok száma pontosan k $) +$
$+ \ \mathrm{P}($ az x -től balra lévő random számok száma pontosan $k+1$ $) +$

$\vdots$

$+ \ \mathrm{P}($ az x -től balra lévő random számok száma pontosan $n-1$ $) +$
$+ \ \mathrm{P}($ az x -től balra lévő random számok száma pontosan n $) \ =$

$$= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \ + \ \binom{n}{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-(k+1)} \ + \ \ldots + \ \binom{n}{n-1} x^{n-1} (1-x)^1 \ + \ \binom{n}{n} x^n (1-x)^0$$

4. Példa: 5 random szám közül a 2 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \ =$$

$$= \binom{5}{2} x^2(1-x)^3 \ + \ \binom{5}{3} x^3(1-x)^2 \ + \ \binom{5}{4} x^4(1-x)^1 \ + \ \binom{5}{5} x^5(1-x)^0 \ =$$

$$= \ 10\, x^2(1-x)^3 \ + \ 10\, x^3(1-x)^2 \ + \ 5\, x^4(1-x)^1 \ + \ \ x^5$$

5. Példa: 5 random szám közül a 3 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \ =$$

$$= \binom{5}{3} x^3(1-x)^2 \ + \ \binom{5}{4} x^4(1-x)^1 \ + \ \binom{5}{5} x^5(1-x)^0 \ =$$

$$= \ 10\, x^3(1-x)^2 \ + \ 5\, x^4(1-x)^1 \ + \ \ x^5$$

6. Példa: 10 random szám közül a 7 -ik legkisebb eloszlásfüggvénye:

$$F(x) \ =$$

$$= \binom{10}{7} x^7(1-x)^3 \ + \ \binom{10}{8} x^8(1-x)^2 \ + \ \binom{10}{9} x^9(1-x)^1 \ + \ \binom{10}{10} x^{10}(1-x)^0 \ =$$

$$= \ 120\, x^7(1-x)^3 \ + \ 45\, x^8(1-x)^2 \ + \ 10\, x^9(1-x)^1 \ + \ x^{10}$$

Megjegyzés: A sűrűségfüggvény képletét természetesen megkaphatjuk az eloszlásfüggvény deriválásával. Gyakorlásképpen tessék bátran deriválni!

3.2.3. Várható érték, második momentum, variancia, szórás *(Extra tananyag)*

Mivel minden sűrűségfüggvénynek a teljes értelmezési tartományán vett integrálja 1 -gyel egyenlő, ezért fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\int_0^1 \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \ \ x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = 1$$

Ha valaki ezt az egyenlőséget közvetlenül integrálással szeretné megkapni akkor ennek sincs különösebb akadálya, hiszen parciális integrálásokkal és kellő türelemmel az $\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx$ integrál értékére kijön:

$$\int_0^1 x^{k-1}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{(k-1)!\,(n-k)!}{n!} \qquad \textit{(nulladik formula)}$$

Érdemes ebben a nulladiknak nevezett formulában k és n helyett $(k+1)$ -et és $(n+1)$ -et, illetve $(k+2)$ -t és $(n+2)$ -t is írni. Hasznos összefüggéseket kapunk:

1. Írjunk k és n helyett először $(k+1)$ -et és $(n+1)$ -et! Ezt kapjuk:

$$\int_0^1 x^{(k+1)-1}\,(1-x)^{(n+1)-(k+1)}\,dx = \frac{((k+1)-1)!\,((n+1)-(k+1))!}{(n+1)!}$$

amiből egyszerűsítésekkel ez jön ki:

$$\int_0^1 x^{k}\,(1-x)^{n-k}\,dx = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!} \qquad \textit{(első formula)}$$

2. Írjunk most k és n helyett $(k+2)$ -t és $(n+2)$ -t! Most ezt kapjuk:

$$\int_0^1 x^{(k+2)-1}\;(1-x)^{(n+2)-(k+2)}\;dx = \frac{((k+2)-1)!\;((n+2)-(k+2))!}{(n+2)!}$$

amiből egyszerűsítésekkel ez jön ki:

$$\int_0^1 x^{k+1}\;(1-x)^{n-k}\;dx = \frac{(k+1)!\;(n-k)!}{(n+2)!} \qquad \textit{(második formula)}$$

A béta eloszlások **várható érték**ének meghatározásánál az *első formula* segít nekünk:

$$\text{várható érték} = \int_0^1 x \;\cdot\; \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!}\; x^{k-1}\;(1-x)^{n-k}\;dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!} \;\cdot\; \int_0^1 x \;\cdot\; x^{k-1}\;(1-x)^{n-k}\;dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!} \;\cdot\; \int_0^1 x^{k}\;(1-x)^{n-k}\;dx =$$

(Ennél a lépésnél használjuk fel az első formulát)

$$= \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!} \;\cdot\; \frac{k!\;(n-k)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{k}{n+1}$$

Az eredmény azt mutatja, hogy ha n random szám közül tekintjük a k -ik legkisebbet, akkor – sok kísérlet esetén – a tekintett a számoknak az átlaga körülbelül $\frac{k}{n+1}$ -nel egyenlő.

Például ha 9 random szám közül az 5 -ik legkisebbet (a középsőt, a tapasztalati mediánt) tekintjük, és sok kísérletet végzünk, akkor a tekintett számok átlaga közel lesz $\frac{5}{9+1} = 0.5$ hez.

A **második momentum** meghatározásánál a *második formula* képlet segít nekünk:

$$\text{második momentum} = \int_0^1 x^2 \;\cdot\; \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!}\; x^{k-1}\;(1-x)^{n-k}\;dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!} \;\cdot\; \int_0^1 x^2 \;\cdot\; x^{k-1}\;(1-x)^{n-k}\;dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!} \;\cdot\; \int_0^1 x^{k+1}\;(1-x)^{n-k}\;dx =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\;(n-k)!} \;\cdot\; \frac{(k+1)!\;(n-k)!}{(n+2)!} =$$

(Ennél a lépésnél használjuk fel a második formulát)

$$= \frac{k\,(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

A **variancia** és a **szórás** innen már egyszerűen adódik:

$$\text{variancia} = \text{második momentum} - (\text{várható érték})^2 = \frac{k\,(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 = \frac{k}{n+1} \cdot \left(\frac{k+1}{n+2} - \frac{k}{n+1}\right)$$

$$\text{szórás} = \sqrt{\text{variancia}} = \sqrt{\frac{k}{n+1} \cdot \left(\frac{k+1}{n+2} - \frac{k}{n+1} \right)}$$

A szórás képletekből látszódik, hogy *ha k és n úgy tart a végtelenhez, hogy a $\frac{k}{n}$ arányuk egy c konstanshoz tart, akkor a szórás 0 -hoz tart.*

A két dőlt betűvel írt tény együttesen azt fejezi ki, hogy *ha nagy n szám esetén n random szám közül tekintjük a nagyság szerinti k -ik legkisebbet, ahol k a cn -hez legközelebbi egész szám, és ezt sokszor megcsináljuk, akkor a tekintett számoknak nem csak az átlaga lesz közel a c értékhez, hanem maguk a tekintett számok is a c érték körül fognak tömörülni.*

Például 999 random szám közül az 500 -ik legkisebbet (a középsőt, a tapasztalati mediánt) tekintjük, és sok kísérletet végzünk, akkor a tekintett számoknak nem csak az átlaga, hanem a számok döntő többsége közel lesz $\frac{5}{9+1} = 0.5$ hez.

3.2.4. Nem-egyenletes alap-eloszlás esete *(Extra tananyag)*

Tegyük fel, hogy a pontokat a $[0,1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlás helyett egy $s(x)$ sűrűségfüggvényű, $S(x)$ eloszlásfüggvényű folytonos *"alap"-eloszlás* szerint választjuk, ahol $A < x < B$ és $-\infty < A < B < \infty$. Jelöljük X -szel a nagyság szerinti k -ik legkisebbet.

A sűrűségfüggvény képletének levezetése. Most erre az általánosabb esetre is levezetjük az X valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvényének a képletét. E célból – ugyanúgy, mint korábban – felveszünk egy x pontot 0 és 1 között, és legyen az $[x_1, x_2]$ egy picike intervallum x körül. A sűrűség jelentése miatt:

$$f(x) \approx \frac{\mathrm{P}(x_1 \le X \le x_2)}{x_2 - x_1}$$

A számlálóban álló $x_1 \le X \le x_2$ esemény azt jelenti, hogy a nagyság szerinti k -ik random szám az $[\, x_1 \,;\, x_2 \,]$ intervallumba esik, vagyis

valamelyik	pont beleesik	az	$[\, x_1 \,;\, x_2 \,]$ intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	pont esik	a	$[\, 0 \,;\, X \,]$ intervallumba,	és
$n-k$ darab	pont esik	az	$[\, X \,;\, 1 \,]$ intervallumba	

Mindez közelítőleg ezt jelenti:

valamelyik	pont beleesik	az	$[\, x_1 \,;\, x_2 \,]$ intervallumba (ő adja X értékét),	és
$k-1$ darab	pont esik	a	$[\, 0 \,;\, x_1 \,]$ intervallumba,	és
$n-k$ darab	pont esik	az	$[\, x_2 \,;\, 1 \,]$ intervallumba	

Az $[\, x_1 \,;\, x_2 \,]$ intervallumba eső pont az n darab pont akármelyike lehet. Ez ad n lehetőséget. A $[\, 0 \,;\, x_1 \,]$ intervallumba eső $k-1$ darab pont az $n-1$ darab többi pont közül kerül ki. Ez sokszorozza a lehetőségek számát $\binom{n-1}{k-1}$ -gyel, vagyis a pontok elhelyezkedésével kapcsolatban a lehetőségek száma:

$$n \binom{n-1}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}$$

Eme lehetőségek mindegyikének a valószínűsége közelítőleg

$$(\, S(x_1)\,)^{k-1} \;\cdot\; s(x)\,(x_2 - x_1) \;\cdot\; (\, 1 - S(x_2)\,)^{n-k}$$

Ezért a számlálóban álló valószínűség közelítőleg:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \;\cdot\; (\, S(x_1)\,)^{k-1} \;\cdot\; s(x)\,(x_2 - x_1) \;\cdot\; (\, 1 - S(x_2)\,)^{n-k}$$

Ha ezt elosztjuk $(x_2 - x_1)$ -gyel, akkor ezt kapjuk:

$$\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \;\cdot\; (\,S(x_1)\,)^{k-1} \;\cdot\; s(x) \;\cdot\; (\,1 - S(x_2)\,)^{n-k}$$

Ha most figyelembe vesszük, hogy az $[\ x_1\ ,\ x_2\ ]$ intervallum mindkét végpontja x -hez közeli, és ezért x_1 és x_2 helyett is x -t írunk, akkor a sűrűségfüggvényre kijön, hogy

$$f(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \;\cdot\; (\,S(x)\,)^{k-1} \;\cdot\; s(x) \;\cdot\; (\,1 - S(x)\,)^{n-k} \qquad (A < x < B)$$

1. Példa: Ha egymástól függetlenül 5 pontot választunk az $S(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$ eloszlásfüggvényű, $s(x) = 2x \quad (0 < x < 1)$ sűrűségfüggvényű eloszlás szerint, és tekintjük balról a 2 -ik pontot, akkor az így kapott X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; 20 \;\cdot\; x^2 \;\cdot\; 2x \;\cdot\; \left(1 - x^2\right)^3 \qquad (0 < x < 1)$$

2. Példa: Az 5 pont közül a balról 3 -ik pont sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; 30\, x^2 \;\cdot\; 2x \;\cdot\; \left(1 - x^2\right)^2 \qquad (0 < x < 1)$$

3. Példa: 10 pont közül a balról 7 -ik pont sűrűségfüggvénye:

$$f(x) \;=\; 840\, \left(x^2\right)^6 \;\cdot\; 2x \;\cdot\; \left(1 - x^2\right)^3 \qquad (0 < x < 1)$$

Az eloszlásfüggvény képletének levezetése. Az eloszlásfüggvény képletét is levezetjük. E célból felveszünk egy x pontot 0 és 1 között. Az eloszlásfüggvény jelentése miatt:

$$F(x) \;=\; \mathrm{P}(X \le x) \;=$$

$= \;$ P(a $\,k\,$ -ik legkisebb pont $\,x\,$ -től balra van) $\;=$

$= \;$ P(az $\,x\,$ -től balra lévő pontok száma legalább $\,k\,$) $\;=$

$= \;$ P(az $\,x\,$ -től balra lévő pontok száma pontosan $\,k\,$) $+$
$+ \;$ P(az $\,x\,$ -től balra lévő pontok száma pontosan $\,k+1\,$) $+$
$\vdots$
$+ \;$ P(az $\,x\,$ -től balra lévő pontok száma pontosan $\,n-1\,$) $+$
$+ \;$ P(az $\,x\,$ -től balra lévő pontok száma pontosan $\,n\,$) $\;=$

$$= \binom{n}{k} \,(\,S(x)\,)^k\,(\,1 \,-\, S(x)\,)^{n-k} \;+\; \binom{n}{k+1}\,(\,S(x)\,)^{k+1}\,(\,1 \,-\, S(x)\,)^{n-(k+1)} \;+\; \dots$$

$$\dots \;+\; \binom{n}{n-1}\,(\,S(x)\,)^{n-1}\,(\,1 \,-\, S(x)\,)^{1} \;+\; \binom{n}{n}\,(\,S(x)\,)^{n}\,(\,1 \,-\, S(x)\,)^{0}$$

4. Példa: Ha egymástól függetlenül 5 pontot választunk az $S(x) = x^2 \quad (0 < x < 1)$ eloszlásfüggvényű eloszlás szerint, és tekintjük balról a 2 -ik pontot, akkor az így kapott X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$F(x) == \binom{5}{2} \left(x^2 \right)^2 \left(1 - x^2 \right)^3 + \binom{5}{3} \left(x^2 \right)^3 \left(1 - x^2 \right)^2 + \binom{5}{4} \left(x^2 \right)^4 \left(1 - x^2 \right)^1 + \binom{5}{5} \left(x^2 \right)^5 \left(1 - x^2 \right)^0$$

5. Példa: Az 5 pont közül a balról 3 -ik pont eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$F(x) = \binom{5}{3} \left(x^2 \right)^3 \left(1 - x^2 \right)^2 + \binom{5}{4} \left(x^2 \right)^4 \left(1 - x^2 \right)^1 + \binom{5}{5} \left(x^2 \right)^5 \left(1 - x^2 \right)^0$$

6. Példa: 10 pont közül a balról 7 -ik pont eloszlásfüggvénye $0 < x < 1$ esetén:

$$F(x) = \binom{10}{7} \left(x^2 \right)^7 \left(1 - x^2 \right)^3 + \binom{10}{8} \left(x^2 \right)^8 \left(1 - x^2 \right)^2 + \binom{10}{9} \left(x^2 \right)^9 \left(1 - x^2 \right)^1 + \binom{10}{10} \left(x^2 \right)^{10} \left(1 - x^2 \right)^0$$

3.3. Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások

Tegyük fel, hogy egy pontszerű test körpályán mozog konstans szögsebességgel, és mi egy véletlen időpillanatban tekintjük a részecske helyét a kör kerületén. Mivel a mi időpillanatnk véletlenszerű, az észlelt hely egy véletlenszerű pont a kör kerületén. Ha a mi véletlenszerű időpillanatunk semmi módon nincs kapcsolatban a pont mozgásával, akkor azígy választott véletlen pont eloszlást ésszerű egyenletes eloszlásnak elfogadni.

3.3.1. Arkusz-színusz eloszlás

Szeretem távcsővel nézegetni a Jupiter holdjait, melyeket Galileo Galilei fedezett fel a 17. század elején. A neveik:

- Io
- Európa
- Ganümédész (latinul: Ganymedes)
- Kallisztó (latinul: Callisto)

A holdak a Jupiter körül keringenek közelítőleg körpályán egyenletes sebességgel, majdnem egy síkban. A síkban a Föld is benne van, ezért a körlapot úgy látom, mintha egy lapostányért az éle felől néznék. A holdacsakák mozgását nem körmozgásnak látom: olyan mintha egy szakaszon mozognának jobbra-balra. A szakasz egyik vége a Jupiter baloldalán, a másik a jobboldalán van, és a holdacskák ezen a szakaszon mászkálnak. Ha a körpálya sugarát választjuk egységnek, és a szakasz középpontját 0 -nak, akkor a szóbanforgó szakasz a $(-1; 1)$ intervallum.

Tegyük fel, hogy olyan jó távcsövem van, hogy felismerem a holdakat, és – mondjuk – mindig csak az Io helyzetét figyelem, a másik három holdacskával nem törődök. Ha egy véletlenszerű időpontban tekintem az Io helyzetét, akkor a helyzetét jellemezhetem egy -1 és $+1$ közötti valós számmal. A -1 és a $+1$ a két szélsőséges helynek felel meg, a 0 pedig annak, amikor az Io éppen középen, a Jupiter előtt vagy mögött van. Az Io véletlenszerű időpontban tekintett helyzete egy folytonos X valószínűségi változót definiál. Felmerül a kérdés: milyen eloszlást követ az X valószínűségi változó? A válasz:

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{arcsin}(x) \qquad (-1 < x < 1)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$$

Az eloszlás a nevét az eloszlásfüggvény képletében szereplő arkusz-színusz fügvénytől kapta: **arkusz-színusz eloszlás**.

A képletek meghatározása: A Jupiter körüli körpálya kapcsán kitüntett szerepet adunk annak sugárnak, melyet a szemem irányából nézve a Jupiterből indítva kapunk. A Jupiterből az Io-hoz húzott sugárnak a kitüntetett sugárral bezárt szöge legyen ϕ.

A ϕ szög nyilván egyenletes eloszlást követ $-\pi$ és π között. Mivel a "hozzám közelebbi" félkör és a "tőlem távolabbi" félkör egyforma súllyal rúg a latba, elég csak a "tőlem távolabbi" félkörre szorítkozni, vagyis vehetjűk úgy, mintha a ϕ szög egyenletes eloszlást követne $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között.

X és ϕ között nyilván fennáll az

$$X = \text{sin}(\phi)$$

összefüggés.

Eloszlásfüggvény: Az alábbi lépések – az utolsó előtti kivételével – nyilvánvalóak. Az utolsó előtti lépés megértéséhez egy egyszereű rajz segít: a ϕ - re nézve kedvező kimenetelek halmazát kell megtalálni, amí egy körív, és annak hosszát kell x -szel kifejezni, majd a kapott ívhosszat elosztani a teljes eseménytér, a "tőlem távolabbi" félkör π hosszával:

$$F(x) = \text{P}(\ X \le x\ ) = \text{P}(\ \text{sin}(\phi) \le x\ ) = \text{P}(\ \phi \le \text{arcsin}(x)\ ) = \frac{\frac{\pi}{2} + \text{arcsin}(x)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{arcsin}(x)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{arcsin}(x)\right)' = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Megjegyzés: Egy színuszosan váltakozó váltóáram pillanatnyi feszültségét véletlenszerű pillanatban véve nyilván arkusz-színusz eloszlású valószínűségi változót kapunk.

3.3.2. Cauchy eloszlás

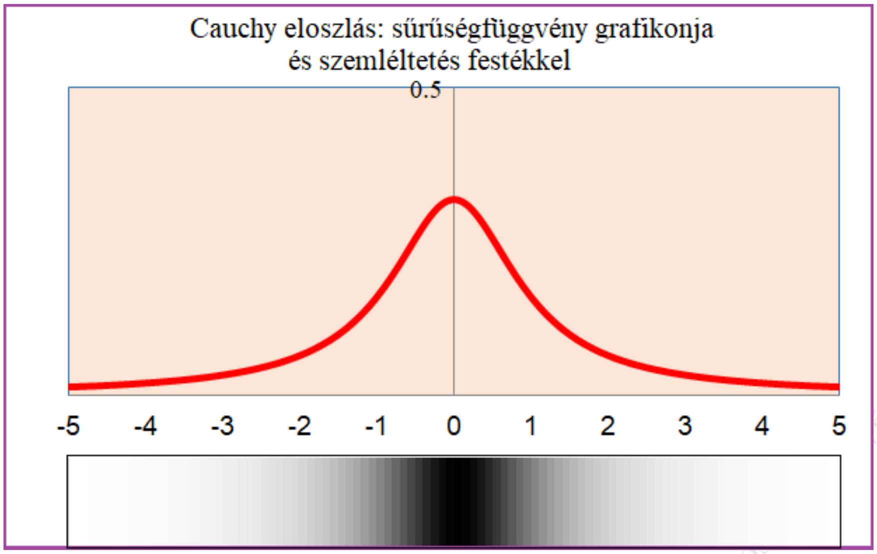
Képzeljük el, hogy valaki egy hosszú egyenes fal elé letesz a földre egy hagyományos, kör alakú órát, és azt vizsgálja, hogy az egyenletes szögsebességgel forgó (tehát nem ugra-bugráló) másodperc mutató által definiált egyenes hol metszi a falat. Az óra középpontjának a faltól való távolságát vesszük hosszegységnek. Ezzel a hosszegységgel a falon elképzeljük a számegyenest. Ha véletlenszerű időpontban tekintjük a metszéspont, akkor a metszéspontnak a helyzete a falra rajzolt számegyenesen egy számot definiál, ami számunkra egy X valószínűségi változót jelent. Felmerül a kérdés: milyen eloszlást követ az X valószínűségi változó? A válasz:

Eloszlásfüggvény:

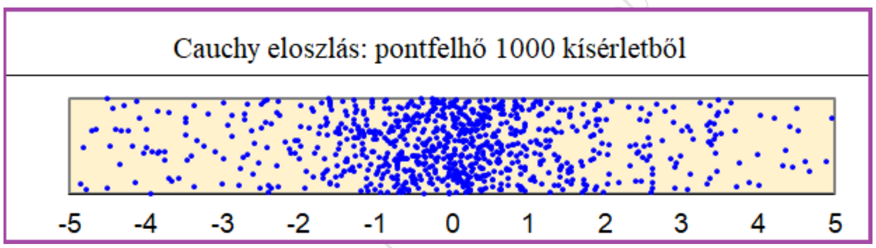
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\text{arctan}(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Sűrűségfüggvény:

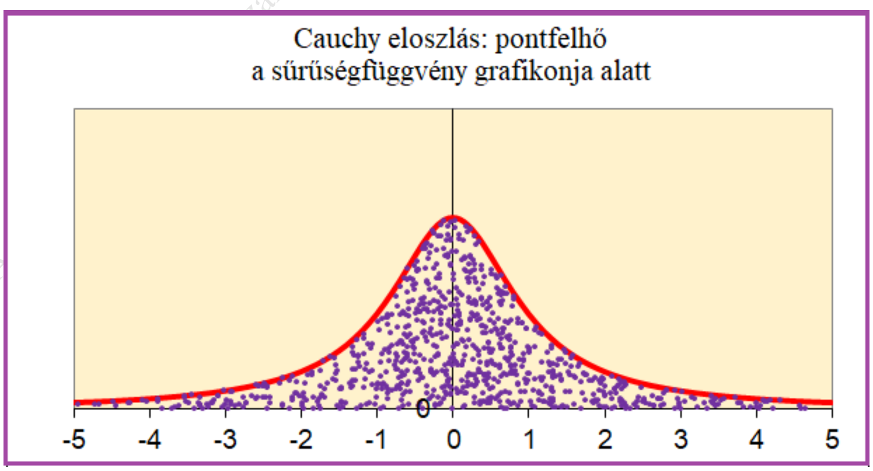
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$



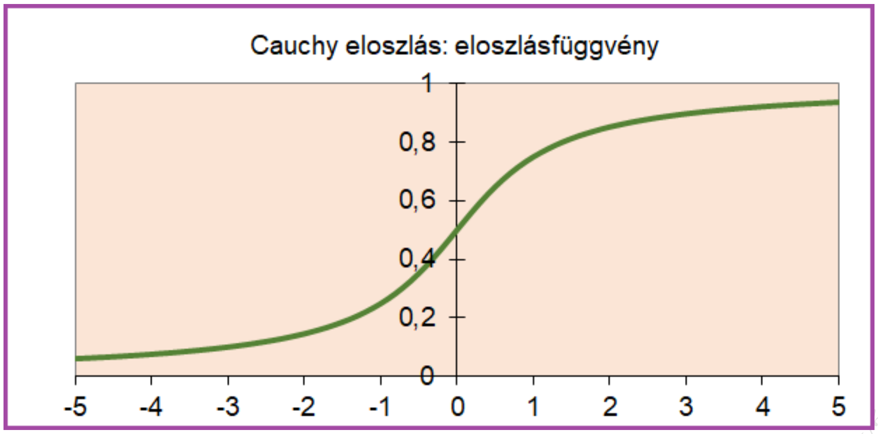
31. ábra. *Cauchy eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



32. ábra. *Cauchy eloszlás: pontfelhő 1000 kísérletből*



33. ábra. *Cauchy eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



34. ábra. *Cauchy eloszlás: eloszlásfüggvény*

Az eloszlást jogos lenne arkusz-tangens eloszlásnak hívni, de a neve mégis: **Cauchy eloszlás**.

A képletek meghatározása: Kitüntett szerepet adunk annak sugárnak, melyet az óra középpontjából a fal irányába, falra merőlegesen húzhatunk. A mutató egyenesének ezzel a kitüntetett sugárral bezárt ϕ szöge nyilván folytonos egyenletes eloszlást követ $-\pi$ és π között.

Mivel az "faltól távolabbi" félkör és a "falhoz közelebbi félkör" egyforma súllyal rúg a latba, elég csak a "falhoz közelebbi" félkörre szorítkozni, vagyis vehetjük úgy, mintha a ϕ szög egyenletes eloszlást követne $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között.

X és ϕ között nyilván fennáll az

$$X = \tan(\phi)$$

összefüggés.

Eloszlásfüggvény: Az alábbi lépések – az utolsó előtti kivételével – nyilvánvalóak. Az utolsó előtti lépés megértéséhez egy egyszereű rajz segít: a ϕ - re nézve kedvező kimenetelek halmazát, amí egy körív, kell megtalálni, és annak hosszát kell x -szel kifejezni, majd a kapott ívhosszat elosztani a teljes eseménytér, a "falhoz közelebbi" félkör π hosszával:

$$F(x) = \mathrm{P}(\ X \le x\ ) = \mathrm{P}(\ \tan(\phi) \le x\ ) = \mathrm{P}(\ \phi \le \arctan(x)\ ) = \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan(x)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x)\right)' = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

1. Megjegyzés: A Cauchy eloszlásnak nincs(!) várható értéke, hiszen az

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

integrál pozitív része $(+\infty)$ -nel, negatív része $(-\infty)$ -nel egyenlő:

$$\int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x \, \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\, \ln(1+x^2)\, \right]_0^{\infty} = \infty$$

$$\int\limits_{-\infty}^{0} x\, f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{0} x\, \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2\,\pi} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2\,\pi} \left[\, \ln(1+x^2)\, \right]_{-\infty}^{0} = -\infty$$

Ez a tény nem azt jelenti, hogy a Cauchy eloszlás egy becstelen, csúnya eloszlás, hanem azt, hogy ha sok kísérletet végzünk Cauchy eloszlást követő valószínűségi változóra, akkor a kísérleti eredmények átlagáról nem állíthatjuk azt, hogy közel lesz valamilyen (véletlentől nem függő) értékhez. Más szóval: Cauchy eloszlást követő valószínűségi változó esetén a kísérleti eredmények átlaga nem stabilizálódik.

2. Megjegyzés: Ha valakinek kedve támad ahhoz, hogy számítógépes szimulációval ellenőrizze, hogy Cauchy eloszlást követő valószínűségi változóra végzett kísérleti eredmények átlaga nem stabilizálódik, akkor ennél látványosabb élményben lesz része, ha nem Cauchy eloszlású valószínűségi változóval játszik, hanem – például – a sokkal "vadabbul viselkedő"

$$\frac{1}{(\text{ RND } - \ 0.5\ )^5}$$

valószínűségi változóval. Sokk kísérlet kapcsán az átlagok sorozata őrületes módon fog viselkedni. Jó szórakozást!

És tessék a józan ész logikájával meggondolni, hogy miért vontunk ki RND -ből 0.5 -öt, miért emeltük a különbséget az 5. hatványra, és miért vettük mindennek a reciprokát!

3.4. Monoton transzformációk

Legyen $y = t(x)$ egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton növekedő függvény, melynek $x = t^{-1}(y)$ -nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha egy random számot behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet $t(\text{RND})$ -vel szokás jelölni. Az Y, vagyis $t(\text{RND})$ eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$ -nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$ -nal.

1. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) = t^{-1}(y)$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} < t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \text{P}(Y < y) = \text{P}\,(\ t(\text{ RND}) < y\ ) = \text{P}\left(\ \text{RND} < t^{-1}(y)\ \right) = t^{-1}(y)$$

2. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$g(y) = \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Bizonyítás. A $G(y) = t^{-1}(y)$ összefüggésből y szerinti deriválással:

$$g(y) = \left(t^{-1}(y)\right)'$$

A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése. Az eloszlásfüggvény nélkül adunk egy közvetlen levezetést is a sűrűségfüggvény képletére.

Legyenek x és y, illetve $x + \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \;=\; t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y \;=\; t(\Delta x)$$

Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x < \text{RND} < x + \Delta x$$

eseménnyel. Ezért

$$\text{P}(y < Y < y + \Delta y) = \text{P}(x < \text{RND} < x + \Delta x)$$

Felhasználva, hogy

$$\text{P}(x < \text{RND} < x + \Delta x) = \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\text{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \frac{\text{P}(x < \text{RND} < x + \Delta x)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx \left(t^{-1}(y)\right)'$$

3. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) = 1 - t^{-1}(y)$$

Bizonyítás. Az alábbi egyenlőségek mindegyike nyilvánvaló. A $t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonságát akkor használjuk fel, amikor az első sor végéről a második sor elejére lépünk, kihasználva azt a tényt, hogy a $t(\text{ RND}) < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $\text{RND} > t^{-1}(y)$ esemény:

$$G(y) = \text{P}(Y < y) = \text{P}\,(\; t(\text{ RND}) < y\;) =$$

$$= \text{P}\left(\;\text{RND} > t^{-1}(y)\;\right) = 1 - \text{P}\left(\;\text{RND} < t^{-1}(y)\;\right) = 1 - t^{-1}(y)$$

4. Állítás: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$g(y) = -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

Bizonyítás. A $G(y) = 1 - t^{-1}(y)$ összefüggésből y szerinti deriválással:

$$g(y) = -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

A sűrűségfüggvény képletének közvetlen levezetése. Az eloszlásfüggvény nélkül adunk egy közvetlen levezetést is a sűrűségfüggvény képletére.

Az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y$$

esemény ekvivalens az

$$x - \Delta x < \text{RND} < x$$

eseménnyel, ahol x és y, illetve $x - \Delta x$ és $y + \Delta y$ egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \;=\; t(x) \qquad \text{illetve} \qquad y + \Delta y \;=\; t(x - \Delta x)$$

Ezért

$$\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y) = \mathrm{P}(x - \Delta x < \mathrm{RND} < x)$$

Felhasználva, hogy

$$\mathrm{P}(x - \Delta x < \mathrm{RND} < x) = \Delta x$$

kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} = \frac{\mathrm{P}(x - \Delta x < \mathrm{RND} < x)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} =\approx -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

Az utolsó lépés azért igaz, mert a függvény szigorúan monoton csökkenő mivolta miatt

$$\left(t^{-1}(y)\right)' \approx -\frac{\Delta x}{\Delta y} \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \approx -\left(t^{-1}(y)\right)'$$

3.5. Folytonos szimuláció

Tegyük fel, hogy előírnak egy folytonos eloszlást, és nekünk elő kell állítani számítógép segítségével egy olyan X valószínűségi változót, ami a megadott eloszlást követi. Egyenletes eloszlás esetén egyszerű a helyzet, hiszen a az Excelben angolul a `RAND()`, illetve magyarul a `VÉL()` utasítás olyan véletlen számot állít elő, ami a $[0;1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást követi. Ezért

- ha a $[0;1]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás: $X = \mathrm{RND}$
- ha az $[5;15]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás : $X = 5 + 10 \cdot \mathrm{RND}$
- ha az $[A;B]$ intervallumon vett egyenletes eloszlást írják elő, akkor a megoldás : $X = A + (B - A) \cdot \mathrm{RND}$

Ha az előírt eloszlás nem egyenletes, akkor a módszer nem ennyire egyszerű. A következőképpen lehet eljárni:
Meghatározzuk az előírt eloszlás $F(x)$ eloszlásfüggvényének az inverzét, majd az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$X = F^{-1}(\mathrm{RND})$$

Az eljárás igazolásául az előző alfejezetben tárgyaltakra lehet hivatkozni, mely szerint ha egy RND számot egy szigorúan monoton növekedő transzformációnak vetünk alá, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a transzformációs függvény inverze. Ezért, ha a transzformáció a megadott eloszlásfüggvény inverzével történik, akkor a kapott valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a megadott eloszlásfüggvény lesz.

Megjegyzés: Az itt megadott módszer nem az egyetlen módszer, más módszerekkel is elő lehet állítani a kívánt eloszlást követő valószínűségi változót. Példaképpen említjük, hogy az alábbiak szerint is eljárhatunk:
Meghatározzuk az előírt eloszlás $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvényének az inverzét, majd az inverz függvénybe egy random számot helyettesítünk:

$$X = T^{-1}(\mathrm{RND})$$

3.6. Gyakorló feladatok

1. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyobbikat. Ha X -re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   (a) átlaga?
   (b) négyzetének az átlaga?
   (c) varianciája?
   (d) szórása?

2. Generálunk két egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a kisebbiket. Ha X -re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   (a) átlaga?
   (b) négyzetének az átlaga?
   (c) varianciája?
   (d) szórása?

3. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel

   - a legnagyobbat.
   - a nagyság szerint középsőt.
   - a legkisebbet.

   Mind a három esettel kapcsolatban végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.

4. Generálunk tíz egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel a nagyság szerint harmadik legkisebbet. Végezze el ugyanazokat a számításokat, amiket az előző feladatokban kellett.

5. Generálunk három egymástól független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlású random számot. Jelöljük X -szel

   - a legnagyobbat.
   - a nagyság szerint középsőt.
   - a legkisebbet.

   Mind a három esettel kapcsolatban határozza meg, hogy ha X -re 1000 kísérletetet hajtanánk végre, körülbelül mennyi lenne a kísérleti eredmények

   (a) átlaga?
   (b) négyzetének az átlaga?
   (c) varianciája?
   (d) szórása?

4. Folytonos eloszlás szemléltetése

4.1. Szemléltetés tömeggel, festékkel

A folytonos valószínűségi változókat modellező *folytonos eloszlások* fogalmának megértése nem könnyű. Sok embernek nehézséget okoz. Remélhetőleg sokaknak segít, hogy az alábbiakban a *folytonos eloszlás*okat **tömegeloszlások, festékeloszlások** segítégével lehet szemléltetni.

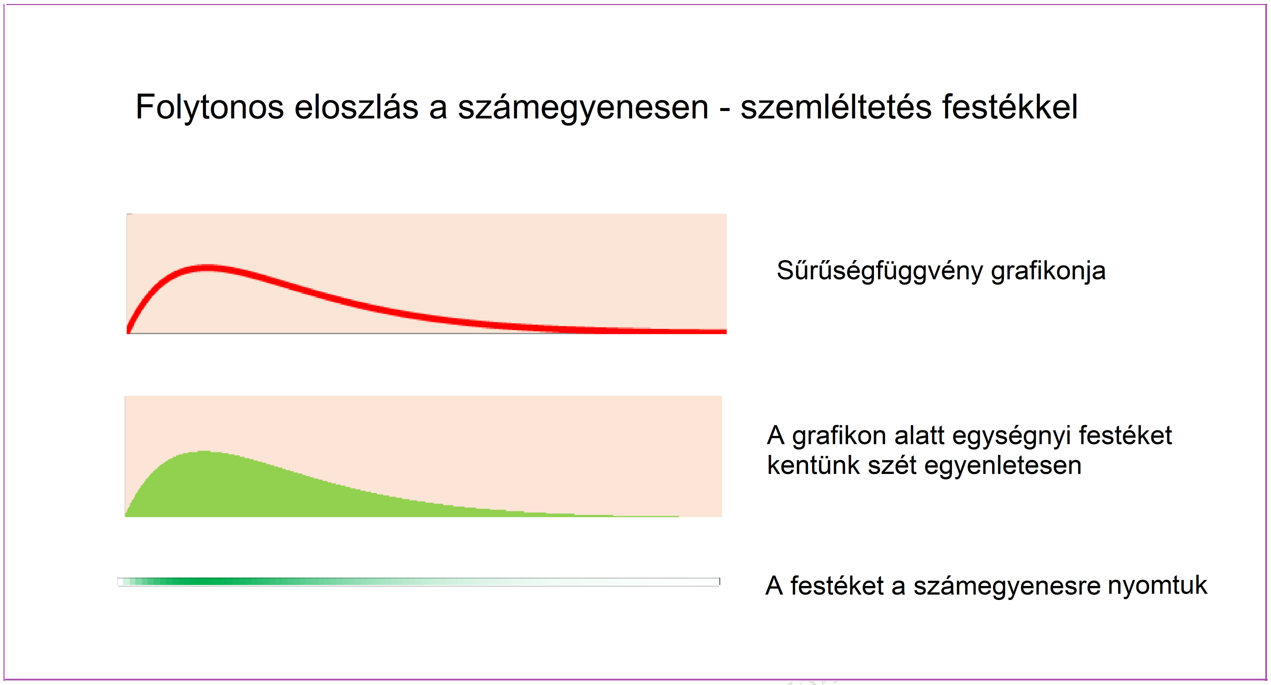
A tömegsűrűség fogalma fizikából jól ismert. Igaz, leginkább a térben vett sűrűség fogalmát szoktuk meg, de a felületi és a vonal menti sűrűségről is hallhattunk, talán tanultunk is. Ha nem, akkor "jobb most, mint soha".

Ha egy valószínűségszámítási probléma kapcsán egy folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvényével van dolgunk, könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a számegyenesen, aminek a vonal menti sűrűségét a szóbanforgó sűrűségfüggvény írja le: minden x -re teljesül, hogy az x helyen a tömegsűrűség $f(x)$. Ilyen tömegeloszlást az alábbiak szerint elő is állíthaunk egy "úthenger" segítségével.

Rajzoljuk le az $f(x)$ sűrűségfüggvény grafikonját az (x, y) síkon. A grafikon alatti terület 1 -gyel egyenlő. Kérjünk meg egy szépen dolgozó festő mestert, hogy a grafikon alatti tartományon egyenletesen kenjen el egységnyi össztömegű festéket. A jó festő ezt tökéletesen megcsinálja. Az egyenletesség azt jelenti, hogy a tartomány minden részhalmazára annyi festék kerül, mint amekkora a tartomány területe. És akkor most jöjjön az úthenger, és a tartományra kent festéket az y tengellyel párhuzamos préseléssel nyomja az x tengelyre! A préselés eredményeként a számegyenesen (az x -tengelyen) egy tömegeloszlást kapunk, ami festékből készült, és így a szín árnyalat jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább a festék. Nyilvánvaló (tessék meggondolni!), hogy a számegyenes minden x pontjában a vonalmenti tömegsűrűség éppen $f(x)$.

Természetesen mindezt csak gondolatban lehet megcsinálni, hiszen a valóságban nem lehet a 0 vastagságú egyenesre tömeget préselni. De a fantáziánk – remélhetőleg – elbírja a leírtakat.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme: amikor a jegyzet következő részében a többdimenziós eloszlásokról fogunk tanulni, akkor egzakt módon is beláthatjuk, hogy egy $f(x)$ sűrűségfüggvény grafikonja alatti síktartományon vett egyenletes eloszlás vetülete az x -tengelyen olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x)$.



35. ábra. *Folytonos eloszlás a számegyenesen – szemléltetés festékkel*

Vegyük észre, hogy

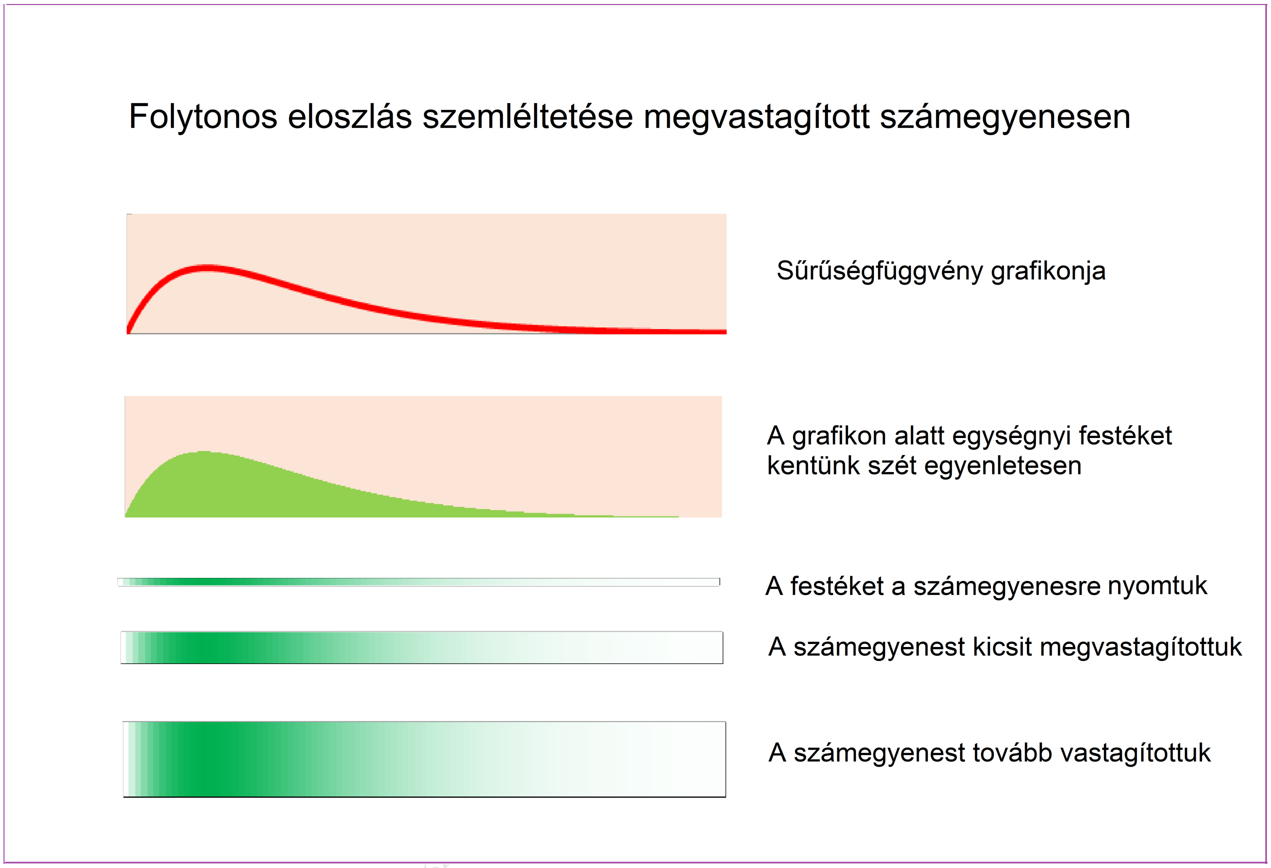
- egy intervallum valószínűsége megfelel az intervallumon lévő tömeg mennyiségének,
- a medián megfelel annak a pontnak, amire igaz az, hogy tőle jobbra is és balra is $\frac{1}{2}$ mennyiségű tömeg van,
- a várható érték megfelel a tömegeloszlás súlypontjának,
- egy c pontra vonatkozó második momentum megfelel a tömegeloszlás c pontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának,
- a variancia pedig megfelel a tömegeloszlásnak a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékának.

4.1.1. Festék a megvastagított számegyenesen

A könnyebb szemléltethetőség kedvéért a 0 vastagságú számegyenest érdemes kicsit "megvastagítani", azaz az egyenes helyett egy keskeny sávot venni, és sávon elképzelni a festéket úgy, hogy

- a sávon belül minden függőleges szakasz mentén a (síkbeli) sűrűség állandó legyen, tehát
- a (síkbeli) sűrűség csak x -től függjön úgy, hogy
- x -irányban az adott $f(x)$ függvény szerint változzon, vagyis
- minden (x, y) pontban a festék (síkbeli) sűrűsége $f(x)$ -szel legyen egyenlő.

Ennél a szemléltetésnél a megvastagított számegyenes vastagságának, a sáv szélességének nincs jelentősége. Ha a sáv keskeny, akkor jobban hasonlít, jobban emlékeztet a 0 vastagságú igazi számegyenesre. De ha sávot nagyon keskenyre vesszük, akkor a szétkent festék sáűrűsége, színányalata nem látszik túl jól. Izlés dolga, hogy milyen széles sávot veszünk a 0 vastagságú igazi számegyenes helyett. E könyv szerzője szerint valahol fél és egy centiméter között van a legjobb szélesség.



36. ábra. *Folytonos eloszlás a számegyenesen – szemléltetés a megvastagított sávon festékkel*

4.2. Szemléltetés pontfelhővel

4.2.1. Pontfelhő a számegyenesen

Örvendetes és fontos tény, hogy egy folytonos valószínűségi változó eloszlását szemléltető tömeg- vagy festékeloszlást a valószínűségi változóra végzett kísérleti eredményekből lehet közelíteni. Eléggé kézenfekvő ötlet a következő: kísérletet végzünk a valószínűségi változóra, és a számegyenesen a kísérleti eredményeknek megfelelő pontokba apró korongokat rajzolunk, illetve rajzoltatunk a számítógéppel. Természetesen a korongocskák ott lesznek sűrűbben, ahol a valószínűségi változó sűrűségfüggvényének értéke nagyobb, és ott lesznek ritkábban, ahol a sűrűségfüggvény értéke kisebb.

Azonban ezzel az egyszerű módszerrel gondok lépnek fel:

1. Ha kevés kísérletet végzünk, és így kevés korongocskát rakunk ki, akkor nem igazán lehet megmondani, hogy a korongocskák, hol helyezkednek el sűrűbben, és hol ritkábban.
2. Ha sok korongot teszünk a számegyenesre, akkor a korongok átfedik egymást, egybe olvadnak és a korongocskákból egy semmitmondó megvastagodott számegyenes kapunk. A számegyenes szinte mindenhol olyan vastag lesz, mint a korongocskák átmérője, és megint nem lehet látni, hogy a korongocskák, hol helyezkednek el sűrűbben, és hol ritkábban.

4.2.2. Pontfelhő egy keskeny sávban

A korongok átfedésének gondja drasztikusan lecsökken, szinte meg is szűnik, ha a korongokat nem a számegyenesre rakjuk, hanem egy keskeny sávba, melyet a számegyenes fölött veszünk fel. Ha a számegyenes a papíron, vagy a képernyőn vízszines, akkor a kísérleti eredmények adják a korongok közepének a vízszintes koordinátáit, a függőleges koordinátákat pedig az alábbi két lehetőség valamelyike szerint vesszük fel:

- ha mondjuk 1000 kísérleti eredményünk van, akkor
  az első korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{1}{1000}$ -ed része
  a második korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{2}{1000}$ -ed része
  a harmadik korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{3}{1000}$ -ed része
  és így tovább
  az ezredik korong középpontjának függőleges koordinátája a sáv szélességének $\frac{1000}{1000}$ -ed része

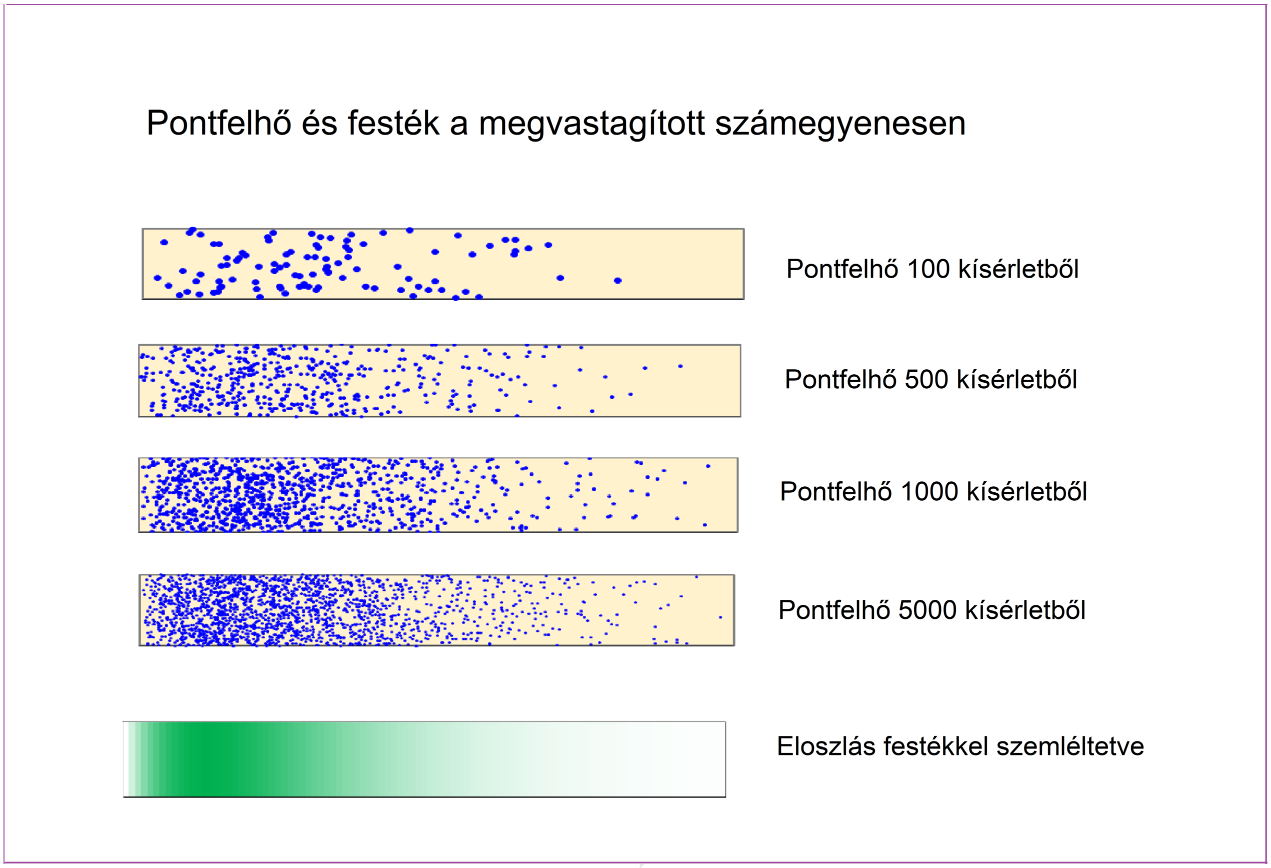
  vagy

- minden korong függőleges koordinátáját úgy állítjuk elő,
  hogy a sáv szélességét beszorozzuk egy (0 és 1 között egyenletes eloszlást követő), mindentől független RND véletlen számmmal

A két lehetőség mindegyike ugyanazt a szép és látványos eredményt adja:

- a sávban keletkező pontfelhő sűrűsége ránézésre jól érzékelhető, jól értelmezhető
- függőleges irányban a sűrűség mindenhol állandó, ezért nem is kell a függőleges iránnyal törődni
- a valójában kétdimenziós ábrát úgy értelmezhetjük, mintha egydimenziós ábra lenne,
  mintha a 0 vastagságú számegyenes csak éppen megvastagodott volna
- vízszintes irányban a pontfelhő sűrűsége tökéletesen követi a valószínűségi változó elméleti sűrűségfüggvényét

Ha kísérletek számát elég nagyra növeljük, a korongocskák átmérőjét pedig elég kicsire csökkentjük, és hunyorított szemmel nézünk a pontfelhőre, akkor a pontfelhő annak a folytonos festékeloszlásnak a benyomását adja, melyet a "Festék a megvastagított számegyenesen" című alpontban készítettünk:



37. ábra. *Pontfelhő és festék a megvastagított számegyenesen*

4.2.3. Pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt

Továbbra is az $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{1000}$ kísérleti eredmények adják a korongok közepeinek a vízszintes koordinátáit, de a függőleges koordinátákatt az alábbi két lehetőség valamelyike szerint vesszük fel:

- az első korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_1) \cdot \frac{1}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_1 helyen szorozva $\frac{1}{1000}$ -del

  a második korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_2) \cdot \frac{2}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_2 helyen szorozva $\frac{2}{1000}$ -del

  a harmadik korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_3) \cdot \frac{3}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_3 helyen szorozva $\frac{3}{1000}$ -del

  és így tovább

  az ezredik korong középpontjának függőleges koordinátája $f(X_{1000}) \cdot \frac{1000}{1000}$, vagyis a sűrűségfüggény értéke az X_{1000} helyen szorozva $\frac{1000}{1000}$ -del

  tehát a korongok középpontjainak koordinátái:

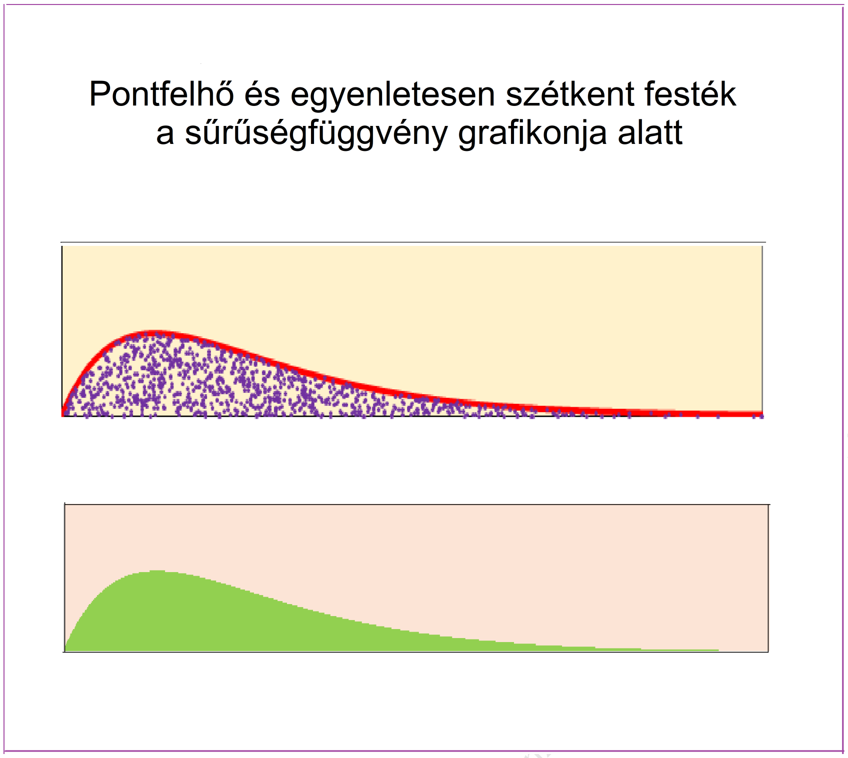
$$\left(X_1 \,,\; f(X_1) \cdot \frac{1}{1000} \right)$$
$$\left(X_2 \,,\; f(X_2) \cdot \frac{2}{1000} \right)$$
$$\left(X_3 \,,\; f(X_3) \cdot \frac{3}{1000} \right)$$
$$\vdots$$
$$\left(X_{1000} \,,\; f(X_{1000}) \cdot \frac{1000}{1000} \right)$$

vagy

- mindent ugyanúgy csinálunk, mint az előbb, de a függőleges koordinátákat úgy állítjuk elő, hogy a sűrűségfüggény értékét beszorozzuk egy (0 és 1 között egyenletes eloszlást követő), mindentől független RND véletlen számmal, tehát a korongok középpontjainak koordinátái:

$$(\ X_1 \,,\; f(X_1) \cdot \mathrm{RND}_1\ )$$
$$(\ X_2 \,,\; f(X_2) \cdot \mathrm{RND}_2\ )$$
$$(\ X_3 \,,\; f(X_3) \cdot \mathrm{RND}_3\ )$$
$$\vdots$$
$$(\ X_{1000} \,,\; f(X_{1000}) \cdot \mathrm{RND}_{1000}\ )$$

Ha kísérletek számát elég nagyra növeljük, a korongocskák átmérőjét pedig elég kicsire csökkentjük, és hunyorított szemmel nézünk a pontfelhőre, akkor a sűrűségfüggvény grafikonja alatt olyan pontfelhőt kapunk, melynek síkbeli sűrűsége egyenletes, mintha valaki a sűrűségfüggvény alatti síkrészt véletlenszerűen, de egyenletesen pöttyözné be.



38. ábra. *Pontfelhő és egyenletesen szétkent festék a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*

A módszer egzakt háttere: Ha az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x)$, akkor az

$$(\ X \ , \ f(X) \cdot \text{RND} \ )$$

kétdimenziós valószínűségi változó egyenletes eloszlást követ az $f(x)$ grafikonja alatti síktartományon.

A következő fejezetben a legfontosabb folytonos eloszlások mindegyikével kapcsolatban

- megadjuk a sűrűségfüggvény grafikonját,
- szemléltetjük az eloszlást festékkel,
- ábrázolunk egy pontfelhőt a megvastagított számegyenesen
- és egy pontfelhőt a sűrűségfüggvény grafikonja alatt is,
- és végül lerajzoljuk az eloszlásfüggvény grafikonját.

4.3. Gyakorló feladatok

1.
2.

5. Nevezetes folytonos eloszlások

5.1. Exponenciális eloszlás

A λ paraméterű *exponenciális eloszlást* a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

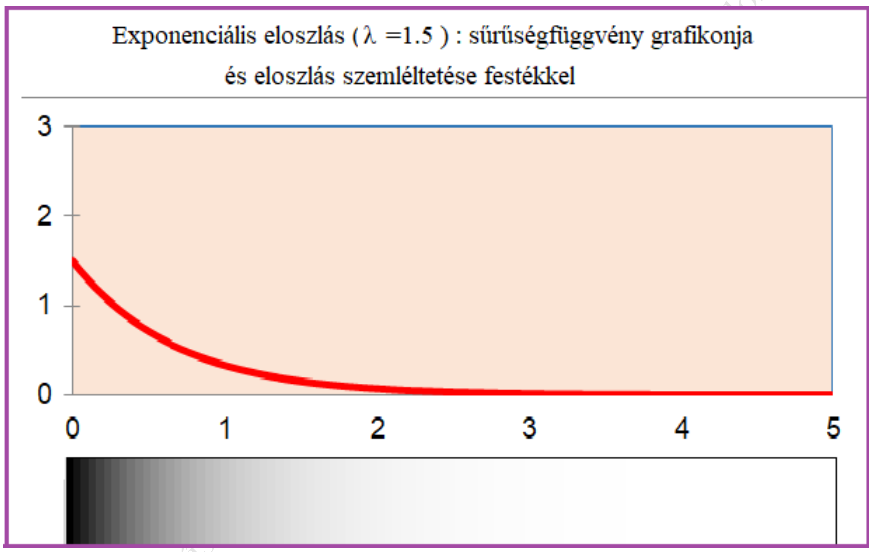
Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

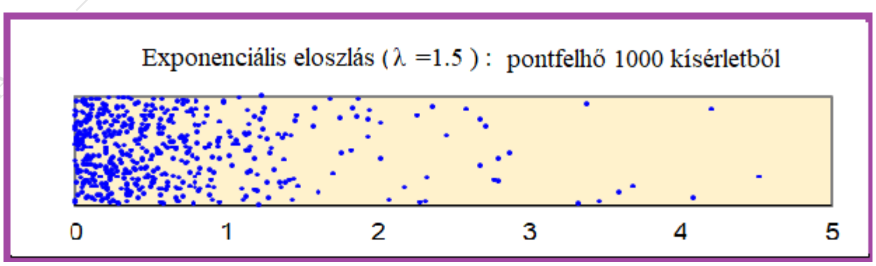
Jobboldali eloszlásfüggvény:

$$F(x) = e^{-\lambda x} \qquad (x > 0)$$

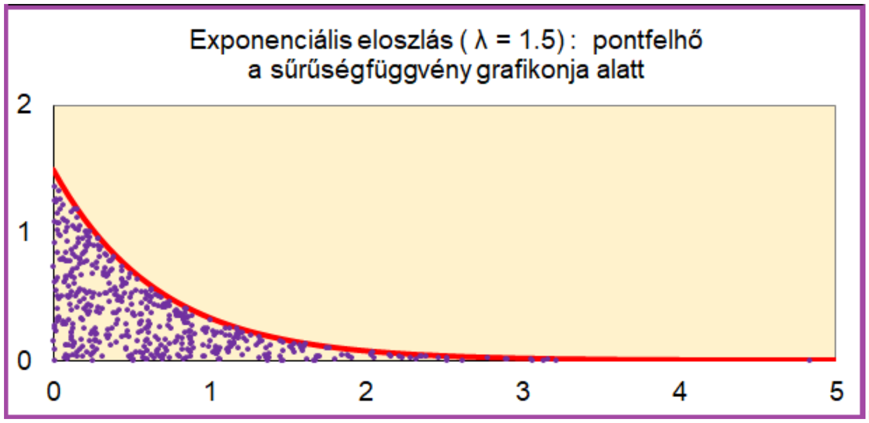
A λ paraméterű exponenciális eloszlás eloszlás várható értéke is és szórása is $1/\lambda$.



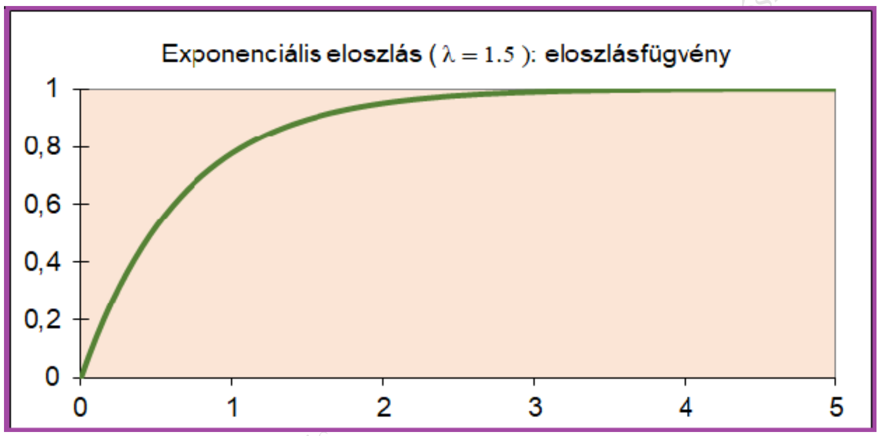
39. ábra. *Exponenciális eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



40. ábra. *Exponenciális eloszlás: pontfelhő 1000 kísérletből*



41. ábra. *Exponenciális eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



42. ábra. *Exponenciális eloszlás: eloszlásfüggvény*

5.1.1. Örökifjú tulajdonság

Egy X valószínűségi változóra, illetve egy folytonos eloszlásra azt mondjuk, hogy *örökifjú* tulajdonságú (más néven: *memória nélküli*), ha teljesül rá a következő:

$$\mathrm{P}(\ X > s + t \mid X > t\ ) = \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

minden $s, t \geq 0$ esetén. Fontossága miatt szavakban is elmondjuk a képlet értelmét: feltéve, hogy X nagyobb, mint t, annak a valószínűsége, hogy $X > s + t$ ugyanannyi, mint annak a (feltétel nélküli) valószínűsége, hogy $X > s$

Példa: Poharak élettartama. Ha például X egy pohár élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság

> *"az élettartamnak a múltra vonatkozó érzéketlenségét fejezi ki"*:
>
> ha egy pohár már valamennyi – mondjuk t ideig – élt már (eddig még nem tört össze),
> akkor annak az esélye, hogy
> még további bizonyos – mondjuk s – ideig élni fog (addig nem fog összetörni)

ugyanannyi, mint annak az esélye, hogy
egy vadonatúj pohár ezt a bizonyos s időt túléli.

Tehát egy élő pohár kora nincs befolyással az ő további életének alakulására. Egy élő pohár – a további élethosszát illetően – olyan mint egy új pohár.

Állítás: Egy pozitív értékű folytonos valószínűségi változó akkor és csak akkor örökifjú tulajdonságú, ha exponenciális eloszlású.

Bizonyítás:

1. Az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

Be akarjuk látni, hogy exponenciális eloszlás esetén fennáll az örökifjú tulajdonságot definiálló

$$\mathrm{P}(X > s + t | X > t) = \mathrm{P}(X > s)$$

összefüggés. Az egyenlőség baloldalán álló feltételes valószínűséget törtként írjuk fel:

$$\frac{\mathrm{P}(X > s + t)}{\mathrm{P}(\ X > t\ )} = \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

Ha az egyenletben a valószínűségeket mindhárom helyen átírjuk a $\mathrm{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$ összefüggés alapján, akkor az igazolandó egyenlőség az alábbi egyenlsőségbe megy át:

$$\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Ez az egyenlőség pedig nyilván igaz, hiszen a baloldalon $e^{-\lambda t}$ -val egyszerűsítve kiadódik a jobboldal.

2. Csak az exponenciális eloszlás rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal.

A $\mathrm{P}(X > x)$ valószínűséget jelöljük $T(x)$ -szel. $T(x)$ -szel kapcsolatban leszögezünk néhány egyszerű tényt:

- $T(x) = 1 - F(x)$, azaz $F(x) = 1 - T(x)$
- $T(x)$ csökkenő függvény
- $T'(0)$ értéke negatív

Legyen $\lambda = -T'(0)$, azaz $T'(0) = -\lambda$. A

$$\frac{\mathrm{P}(X > s + t)}{\mathrm{P}(\ X > t\ )} = \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

egyenletet így írhatjuk:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} = T(s)$$

Mindkét oldalon s szerint deriválva a

$$\frac{T'(s+t)}{T(t)} = T'(s)$$

egyenletet adódik. Ha most s helyére 0 -t helyettesítünk, akkor a

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$$

differenciál egyenletet kapjuk. A differenciál egyenlet mindkét oldalát t szerint integálva ezt kapjuk:

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t + C$$

Mivel $T(0) = 1$, ezért $C = 0$. Így

$$\ln(\ T(t)\ ) = -\lambda t$$

azaz

$$T(t) = e^{-\lambda t}$$

amiből kiadódik az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye:

$$F(t) = 1 - T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

5.1.2. Az exponenciális eloszlás alkalmazásai

1. Élettartamok: Ha a valószínűségi változó valaminek az élettartamát jelenti, akkor az örökifjú tulajdonság jelentése a következő: ha egy adott pillanatban a szóbanforgó dolog „él”, akkor a további jövőjét illetőleg esélyei olyanok, mint egy „újszülött” dolognak. Amíg él, addig a múltja nincs hatása a jövőjére. Ameddig él, olyan, mint egy újszülött.

2. Várakozási idők: Bizonyos (eléggé általános, itt nem részletezendő) feltételek mellett a várakozási időkre is teljesül az örökífú tulajdonság. Ezért a várakozási időket is gyakran modellezzük exponenciális eloszlással.

Az Excelben az $f(x)$ sűrűségfüggvényt az

$$\texttt{EXPON.DIST(}\ x\ ;\ \lambda\ ;\ \texttt{FALSE}\ )$$

képlet adja, az $F(x)$ eloszlásfüggvényt

$$\texttt{EXPON.DIST(}\ x\ ;\ \lambda\ ;\ \texttt{TRUE}\ )$$

függvény.

5.1.3. Öregedő tulajdonság

Egy X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy rendelkezik az *öregedő tulajdonsággal*, ha

$$\mathrm{P}(\ X > s + t \mid X > t\ )\ <\ \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

teljesül rá minden $s, t \geq 0$ esetén.

Példa az életből: Ilyen öregedő valószínűségi változó például egy elhasználódó alkatrész (például gumiabroncs) élettartama. Egy használt abroncs nyilván rosszabb esélyekkel néz a jövő elébe, mint egy új.

Matematikai példa: Ha az X valószínűségi változó jobboldali eloszlásfüggvénye $T(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\quad (x \geq 0)$, akkor – mint néhány sorban mindjárt belátjuk – teljesül rá az öregedő tulajdonság. Az igazolandó

$$\mathrm{P}(\ X > s + t \mid X > t\ )\ <\ \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

állítást – ekivalens lépéseken át – visszavezetjük egy triviálisan teljesülő egyenlőtlenségre:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)}\ <\ T(s)$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-(s+t)^2}}{\mathrm{e}^{-t^2}}\ <\ \mathrm{e}^{-s^2}$$

$$\mathrm{e}^{-(s+t)^2} < \mathrm{e}^{-t^2} \cdot \mathrm{e}^{-s^2}$$

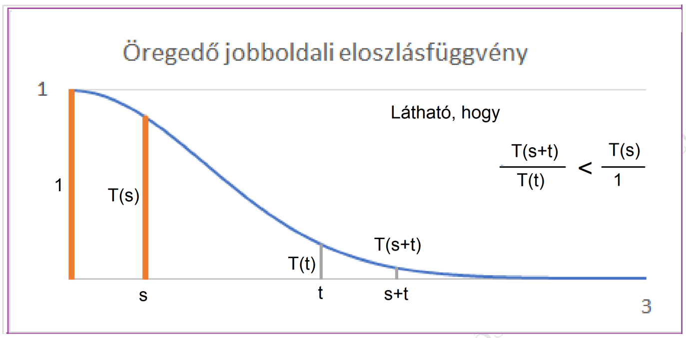
$$-(s+t)^2 < -t^2 - s^2$$

$$(s+t)^2 > t^2 + s^2$$

$$s^2 + t^2 + 2st > t^2 + s^2$$

$$2st > 0$$

A függvény grafikonján is szemléltetjük az öregedés tényét:



43. ábra. *A* $T(x) = e^{-x^2}$ $(x \geq 0)$ *öregedő jobboldali eloszlásfüggvény grafikonja*

5.1.4. Fiatalodó tulajdonság

Egy X valószínűségi változóról azt mondjuk, hogy rendelkezik a *fiatalodó tulajdonsággal*, amennyiben

$$\mathrm{P}(\ X > s+t \mid X > t\ ) \ > \ \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

minden $s, t \geq 0$ esetén.

Életből vett példa: Ilyen fiatalodó valószínűségi változó például egy elmaradott országban született csecsemő életének hossza. Ahogy a sorozatos veszélyeken túljut, egyre nő a további életbenmaradásának az esélye. Egy öregebb gyermek jobb esélyekkel bír a jövőre nézve, mint egy újszülött.

Matematikai példa: Ha az X valószínűségi változó jobboldali eloszlásfüggvénye $T(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$, akkor – mint néhány sorban mindjárt belátjuk – teljesül rá a fiatalodó tulajdonság. Az igazolandó

$$\mathrm{P}(\ X > s+t \mid X > t\ ) \ > \ \mathrm{P}(\ X > s\ )$$

állítást – ekivalens lépéseken át – visszavezetjük egy triviálisan teljesülő egyenlőtlenségre:

$$\frac{T(s+t)}{T(t)} > T(s)$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{s+t}}}{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}} > \mathrm{e}^{-\sqrt{s}}$$

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{s+t}} > \mathrm{e}^{-\sqrt{t}} \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{s}}$$

$$-\sqrt{s+t} > -\sqrt{t} - \sqrt{s}$$

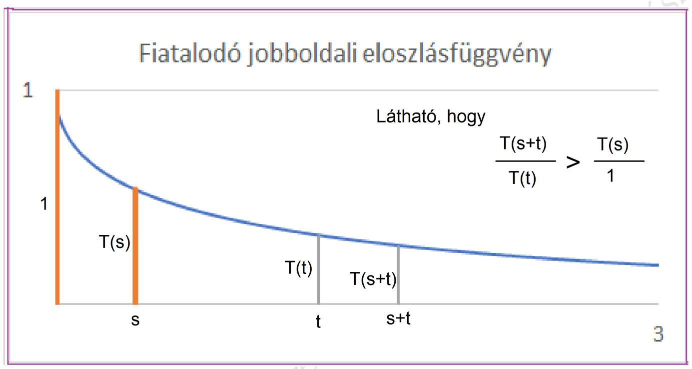
$$\sqrt{s+t} < \sqrt{t} + \sqrt{s}$$

$$\left(\sqrt{s+t}\right)^2 < \left(\sqrt{t} + \sqrt{s}\right)^2$$

$$s+t < s+t+2\sqrt{t}\sqrt{s}$$

$$0 < 2\sqrt{t}\sqrt{s}$$

A függvény grafikonján is szemléltetjük a fiatalodás tényét:



44. ábra. *A* $T(x) = e^{-\sqrt{x}}$ $(x \geq 0)$ *fiatalodó jobboldali eloszlásfüggvény grafikonja*

5.2. Feltételes várható érték egy eseményen belül

Jön majd ide

5.3. Exponenciális eloszlás jellemzése feltételes várható értékekkel *(Extra tananyag)*

1. Állítás: Ha egy pozitív értékű, folytonos X valószínűségi változóra teljesül, hogy az

$$\mathrm{E}(\,X\, - \,s\,|\,X\, \geq \,s\,)$$

feltételes várható érték nem függ s -től, akkor X exponenciális eloszlást követ.
Megjegyzés: Az örökifjú tulajdonságból nyilván következik az a tény, hogy a

$$\mathrm{E}(\,X\, - \,s\,|\,X\, \geq \,s\,)$$

feltételes várható érték nem függ s -től. Tehát a fentebb megfogalmazott örökifjú tulajdonságnál gyengébb feltételből fogjuk most levezetni az exponenciális eloszlást. A mostani állításunk többet mond, mint a korábbi, fentebbi, ezért örülni kell neki. És valóban örülni kell neki, mert a tételünkből például az derül ki, hogy *ha egy bizonyos fajta pohárral kapcsolatban csak annyit tudunk a tapasztalatok alapján, hogy a még élő poharak további élettartamának az átlaga lényegében sosem függ a poharak élettartamától, akkor az ilyen poharak élettartama exponenciális eloszlást követ.*

Bizonyítás: Az $\mathrm{E}(X - s|X \geq s$ feltételes várható értéket integrál alakban felírhatjuk:

$$\mathrm{E}(\, X - s \,|\, X \,\geq\, s \,) \,= \mathrm{E}(\, X \,|\, X \,\geq\, s \,) -\, s \,=\, \frac{\int_s^\infty x\, f(x)\, dx}{\int_s^\infty f(x)\, dx} \,-\, s$$

A feltételeink szerint ez a kifejezés egy s -től nem függő konstanssal egyenlő:

$$\frac{\int_s^\infty x\, f(x)\, dx}{\int_s^\infty f(x)\, dx} \,-\, s \,=\, c$$

Az egyenletet átrendezve ezt kapjuk:

$$\int_s^\infty x\, f(x)\, dx = (\, c + \, s\,) \int_s^\infty f(x)\, dx$$

s szerint deriválva mindkét oldalt, az alábbi egyenlet adódik:

$$-s\, f(s) \,=\, \int_s^\infty f(x)\, dx \,+\, (\, c + \, s\,)\, \left(-f(s)\right)$$

azaz

$$0 \,=\, \int_s^\infty f(x)\, dx \,+\, c\, \left(-f(s)\right)$$

A $T(x) \,=\, \int_s^\infty f(x)\, dx$ képlettel bevezetett függvényre az egyenlet az alábbi differenciál egyenletet adja:

$$0 \,=\, T(x) \,+\, c\, T'(x)$$

Mivel a $T(0) = 1$ kezdeti feltétel is teljesül, a differenciál egyenlet megoldása:

$$T(s) \,=\, e^{-\frac{1}{c}s}$$

és így

$$F(s) = 1 - T(s) = 1 - e^{-\lambda s} \qquad (x > 0)$$

ahol $\lambda = \frac{1}{c}$.

2. Állítás: Ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és Y úgy adódik X -ből, hogy az X valós értéket egész értékekre

- lefelé kerekítjük, akkor Y pesszimista geometriai eloszlást követ.
- felfelé kerekítjük, akkor Y optimista geometriai eloszlást követ.

A geometriai eloszlás jogossága az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonságából – remélhetőleg – az Olvasó számára sejthető, érezhető. A bizonyítás lépéseinek kigondolása és a számítások elvégzése is maradjon az Olvasó feladata.

5.4. Gamma eloszlás

Az n -ed rendű, λ paraméterű *gamma eloszlást* az eloszlás- és a sűrűségfüggvény képletével definiáljuk.

Eloszlásfüggvény:

$$F(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

Sűrűségfüggvény:

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} \, e^{-\lambda x} \quad \text{ha} \quad x \geq 0$$

Paraméterek: n pozitív egész, $\lambda > 0$.

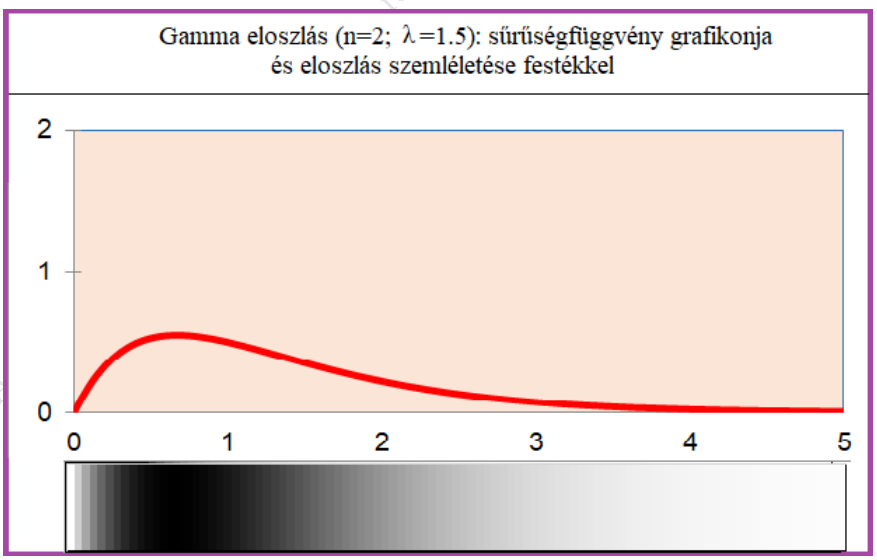
A könyebb érthetőség kedvéért az eloszlásfüggvények képleteit egyszerűsítve, szumma jel alkalmazása nélkül is felírjuk $n = 1, 2, 3$ -ra:

1.
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

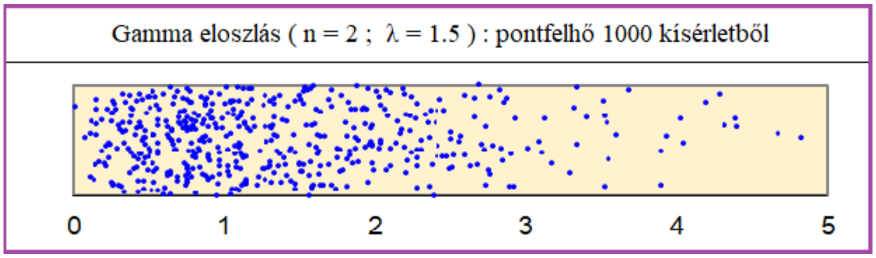
2.
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x) \, e^{-\lambda x}$$

3.
$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x) \, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2} \, e^{-\lambda x}$$

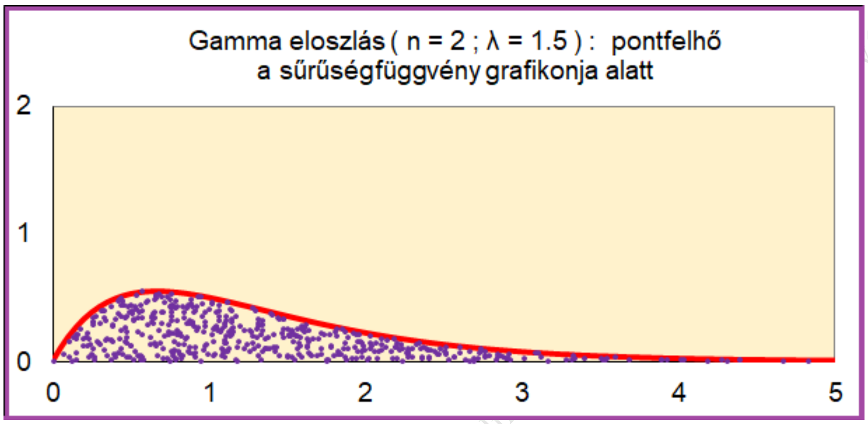
Megjegyzés: Ha $n = 1$, akkor – mint a képletből látjuk – a gamma eloszlás exponenciális eloszlásra redukálódik.



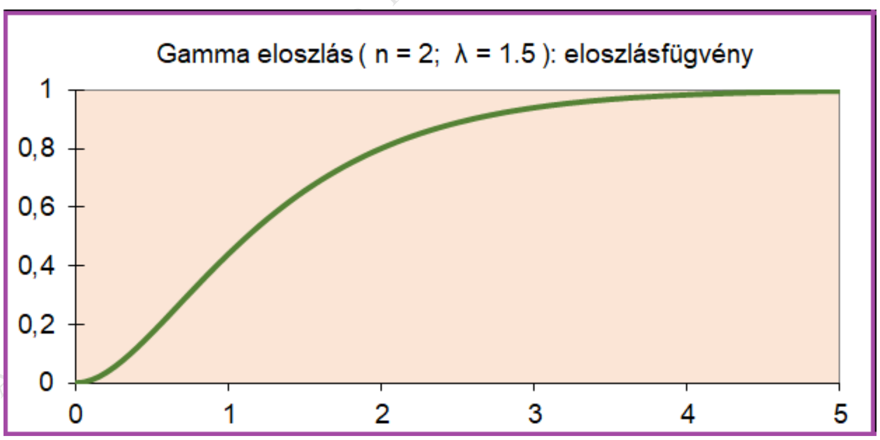
45. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



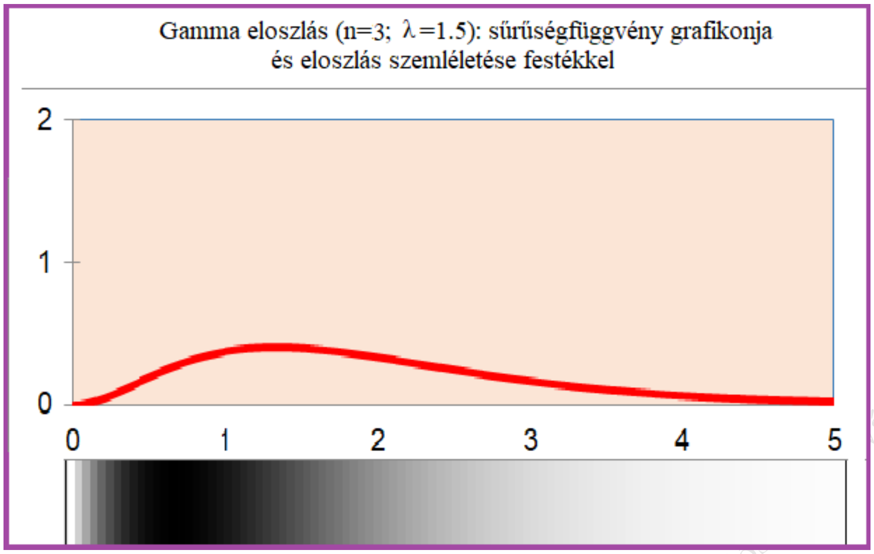
46. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$*: pontfelhő 1000 kísérletből*



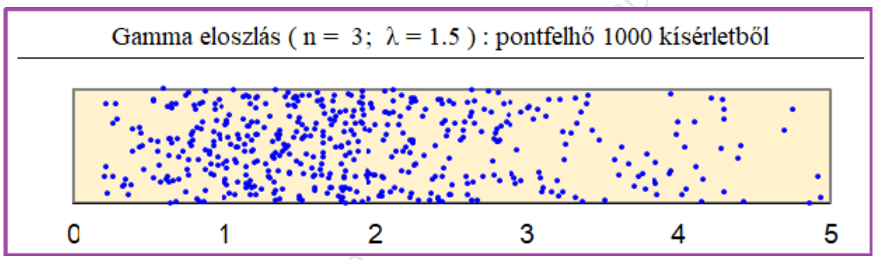
47. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



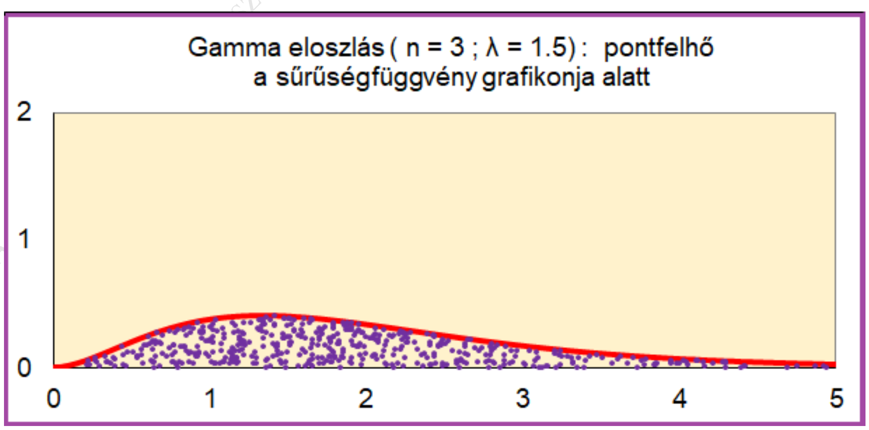
48. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 2; \lambda = 1.5)$*: eloszlásfüggvény*



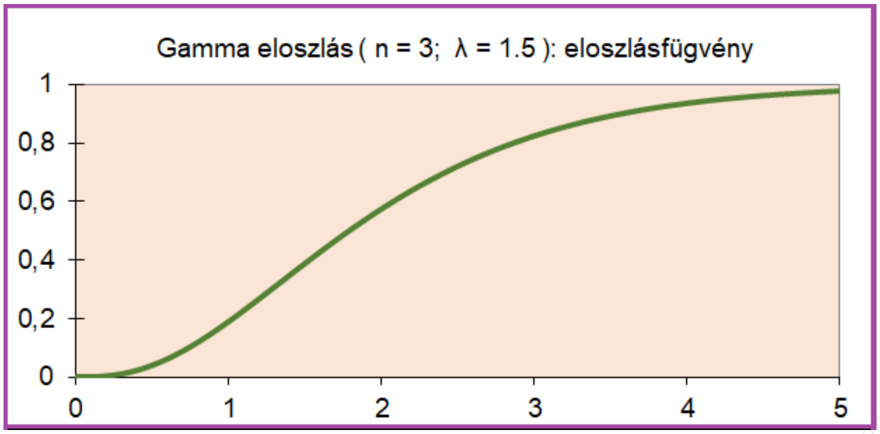
49. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



50. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$*: pontfelhő 1000 kísérletből*



51. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



52. ábra. *Gamma eloszlás* $(n = 3; \lambda = 1.5)$*: eloszlásfüggvény*

A gamma eloszlások alkalmazásai: Képzeljünk el egy nagy várost, ahol a forgalom éjjel-nappal egyforma intenzitással zajlik. Állítjuk, hogy :

1. az az időtartam, amennyit várni kell az **első** baleset bekövetkezésére, exponenciális eloszlást követ,
2. az az időtartam, amennyit várni kell a **második** baleset bekövetkezésére, 2 -od rendű gamma eloszlást követ,
3. az az időtartam, amennyit várni kell a **harmadik** baleset bekövetkezésére, 3 -ad rendű gamma eloszlást követ,

   és így tovább

Az eloszlásfüggvények képletének levezetése ***(Extra tananyag.)*****:** Minden x időtartammal kapcsolatban tekinthetjük azt a valószínűségi változót, ami azt mutatja, hogy a $[0; x]$ időintervallumban hány baleset történik. Világos, hogy adott x mellett ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ. A Poisson eloszlás paramétere nyilván függ a $[0; x]$ időintervallum hosszától. Ha a forgalom folyamatosan ugyanolyan körülmények között zajlik, akkor ennek a valószínűségi változónak a várható értéke arányos az x időtartam hosszával, vagyis λx -szel egyenlő, ahol λ az egységnyi hosszúságú időtartam alatti balesetek számának a várható értékét jelöli. Ezért annak a valószínűsége, hogy a $[0; x]$ időintervallumban pontosan k baleset történik, egyenlő

$$\frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}$$

-szel. Erre a képletre támaszkodnak a következő számítások:

1.
$$\begin{aligned} &\text{P(az \textbf{első} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} \\ &= 1 - \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont után történik)} \\ &= 1 - \text{P(a } [0, x] \text{ időintervallumban 0 baleset történik)} \\ &= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} \\ &= 1 - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

   Tehát az első balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \text{P(az első baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x}$$

   vagyis *az első balesetig eltelt időtartam expoenciális eloszlást (első rendű gamma) követ* λ *paraméterrel.*

2.

$$
\begin{aligned}
&\text{P(a \textbf{második} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} \\
&= 1 - \text{P(a második baleset az } x \text{ időpont után történik)} \\
&= 1 - \text{P(a } [0, x] \text{ időintervallumban 0 vagy 1 baleset történik)} \\
&= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!}\, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^1}{1!}\, e^{-\lambda x} \\
&= 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$

Tehát a második balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$
F(x) = \text{P(a második baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x}
$$

vagyis *a második balesetig eltelt időtartam másod rendű gamma eloszlást követ λ paraméterrel.*

3.

$$
\begin{aligned}
&\text{P(a \textbf{harmadik} baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} \\
&= 1 - \text{P(a harmadik baleset az } x \text{ időpont után történik)} \\
&= 1 - \text{P(a } [0, x] \text{ időintervallumban 0 vagy 1 vagy 2 baleset történik)} \\
&= 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!}\, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^1}{1!}\, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2!}\, e^{-\lambda x} \\
&= 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2}\, e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$

Tehát a harmadik balesetig eltelt időtartam eloszlásfüggvénye

$$
F(x) = \text{P(a harmadik baleset az } x \text{ időpont előtt történik)} = 1 - e^{-\lambda x} - (\lambda x)\, e^{-\lambda x} - \frac{(\lambda x)^2}{2}\, e^{-\lambda x}
$$

vagyis *a harmadik balesetig eltelt időtartam harmad rendű gamma eloszlást követ λ paraméterrel.*

És így tovább, kiadódik, hogy az n -ik balesetig eltelt időtartam n -ed rendű gamma eloszlást követ λ paraméterrel.

Sűrűségfüggvények: A sűrűségfüggvények képletei deriválással és egyszerűsítéssel könnyen adódnak. Ez a számolás legyen az Olvasó feladata!

Várható értékek:

- A fenti gondolatmenetben szerepelt az a valószínűségi változó, ami azt mutatta, hogy a $[0; x]$ időintervallumban hány baleset történik. Mint már megbeszéltük, a mondott feltételek mellett ennek a valószínűségi változónak a várható értéke λx -szel egyenlő.
- A λ paraméter jelentése: átlagosan hány baleset történik egy egységnyi hosszúságú időintarvallumban.
- Az exponenciális eloszlás tárgyalásánál már említettük, hogy a várható értéke egyenlő a λ paraméter reciprokával. Ha például egy óra alatt a balesetek számának a várható értéke 2.5, akkor az első balesetre átlagosan $\frac{1}{2.5} = 0.4$ órát kell várni.
- Az n -ed rendű λ paraméterű gamma eloszlás várható értéke egyenlő a λ paraméter reciprokának n -szeresével.

Excel-függvény: `GAMMADIST` (magyarul: `GAMMA.ELOSZLÁS`)

5.5. Normális eloszlások

5.5.1. Standard normális eloszlás

Ismert tényként fogadjuk el, hogy

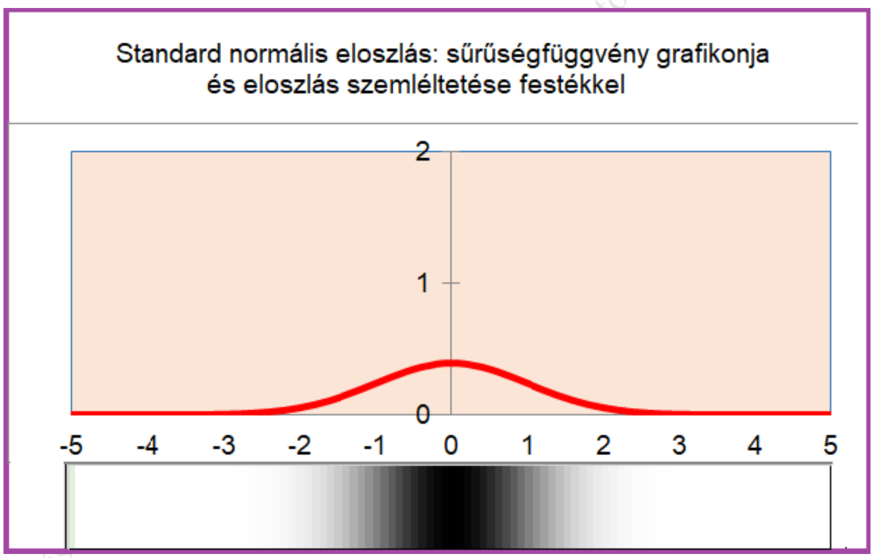
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$

A *standard normális eloszlást* a sűrűségfüggvényének képletével definiáljuk:

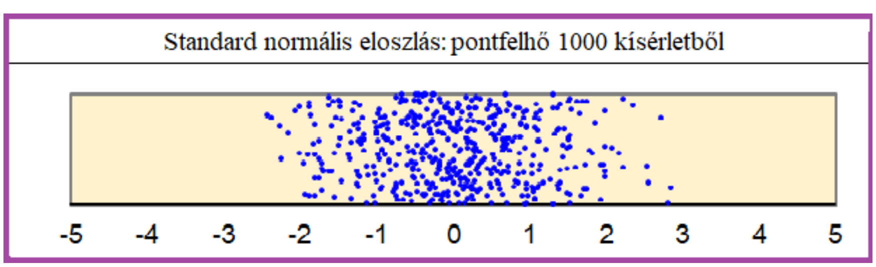
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (-\infty < x < \infty)$$

Az eloszlásfüggvény:

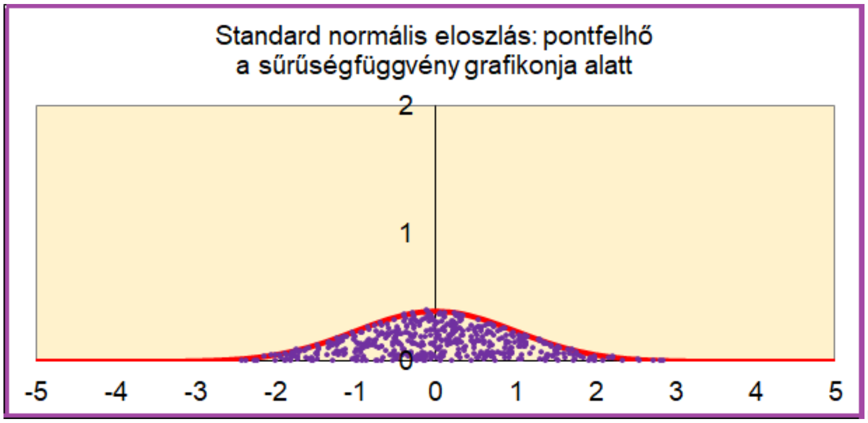
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\ dt \quad (-\infty < x < \infty)$$



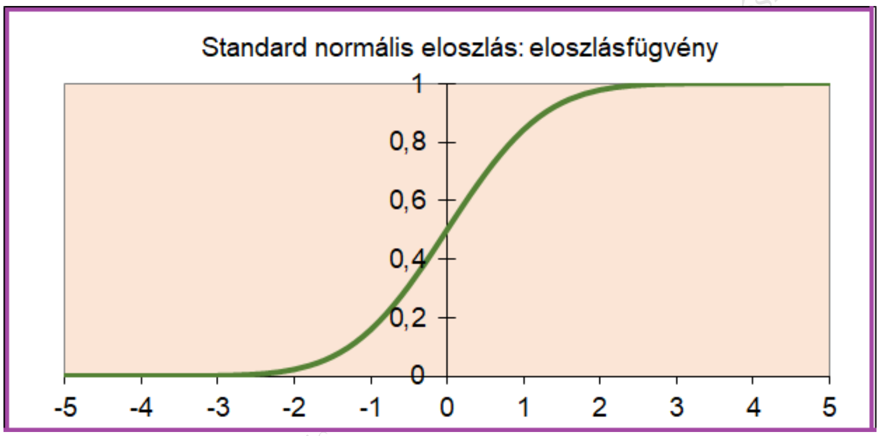
53. ábra. *Standard normális eloszlás: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



54. ábra. *Standard normális eloszlás: pontfelhő 1000 kísérletből*



55. ábra. *Standard normális eloszlás: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



56. ábra. *Standard normális eloszlás: eloszlásfüggvény*

A megfelelő integrálok kiszámolásával adódik, hogy a standard normális eloszlás várható értéke 0, szórása 1.

Megjegyzés: A standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét és annak inverzét is jól és biztonságosan kell tudni használni! Az eloszlásfüggvény és az inverz értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Íme a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének egy egyszerű táblázata:

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.500	1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.9987
0.1	0.540	1.1	0.864	2.1	0.982	3.1	0.9990
0.2	0.579	1.2	0.885	2.2	0.986	3.2	0.9993
0.3	0.618	1.3	0.903	2.3	0.989	3.3	0.9995
0.4	0.655	1.4	0.919	2.4	0.992	3.4	0.9997
0.5	0.691	1.5	0.933	2.5	0.994	3.5	0.9998
0.6	0.726	1.6	0.945	2.6	0.995	3.6	0.9998
0.7	0.758	1.7	0.955	2.7	0.997	3.7	0.9999
0.8	0.788	1.8	0.964	2.8	0.997	3.8	0.9999
0.9	0.816	1.9	0.971	2.9	0.998	3.9	1.0000
1.0	0.841	2.0	0.977	3.0	0.999	4.0	1.0000

A standard normális eloszlás szimmetriája. A standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye – páros függvény léven – szimmetikus az origóra. Ezért a $(-\infty; -x]$ és az $[x; +\infty)$ intervallumok valószínűségi egyenlők:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \qquad (x > 0)$$

Az előző táblázatban ezért nincsenek negatív argumentumok. Negatív argumentum esetén a Φ függvény értékei – például – így számolhatók ki:

$$\Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.841 = 0.159 \qquad (x > 0)$$

$$\Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.977 = 0.23 \qquad (x > 0)$$

Origóra szimmetrikus intervallumok. Gyakran van szükség arra, hogy origóra szimmetrikus intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$\Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - [1 - \Phi(x)] = 2\,\Phi(x) - 1 \qquad (x > 0)$$

Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan $[-x\,;\,x]$ intervallumot, melynek valószínűsége q. Ehhez a

$$2\,\Phi(x) - 1 = q$$

egyenletet kell megoldani, melynek megoldása

$$x = \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

A következő táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk standard normális eloszlással kapcsolatos számításokban:

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$\varphi(x)$	NORM.S.DIST(x ; FALSE)
Eloszlásfüggvény	$\Phi(x)$	NORM.S.DIST(x ; TRUE)
Eloszlásfüggvény inverze	$\Phi^{-1}(y)$	NORM.S.INV(y)

Bizonyos Excel verziókban

NORM.S.DIST **helyett** NORMSDIST
NORM.S.INV **helyett** NORMSINV

is írható.

5.5.2. Normális eloszlás μ, σ paraméterekkel

Ha μ tetszőleges valós szám és σ tetszőleges pozitív szám, akkor a μ, σ *paraméterű normális eloszlást* a sűrűségfüggvényével definiáljuk:

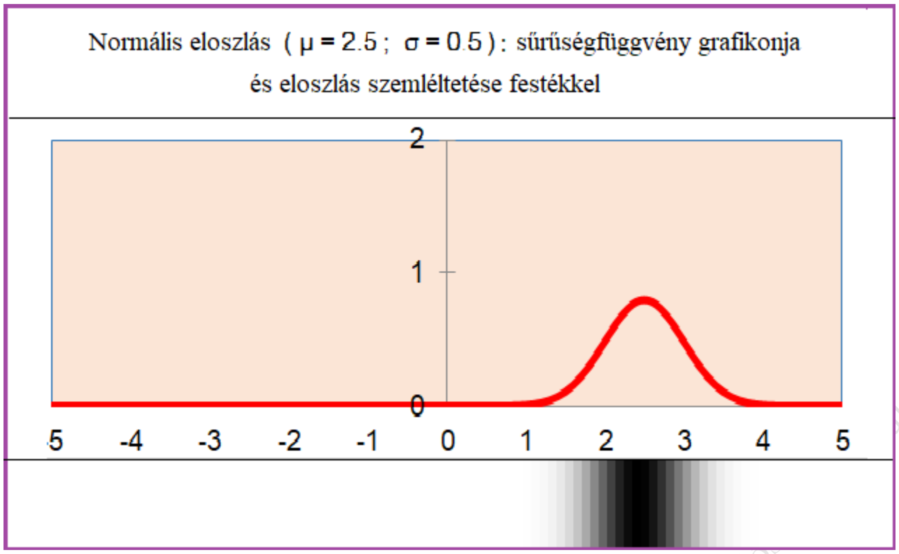
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Az eloszlásfüggvény:

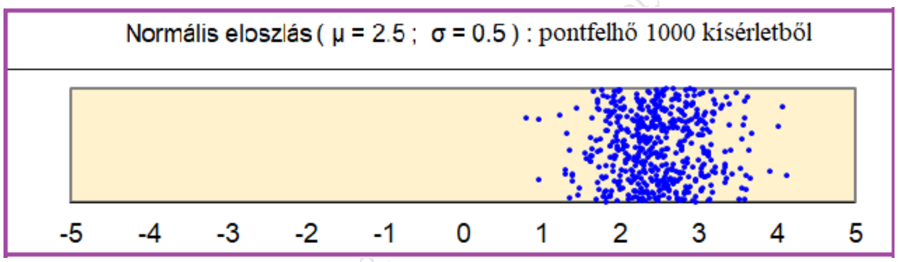
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)^2}\, du \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Ugyanezt kicsit pongyola, de előnyös módon úgy is írhatjuk, hogy az u integrálási változót is x -szel jelöljük:

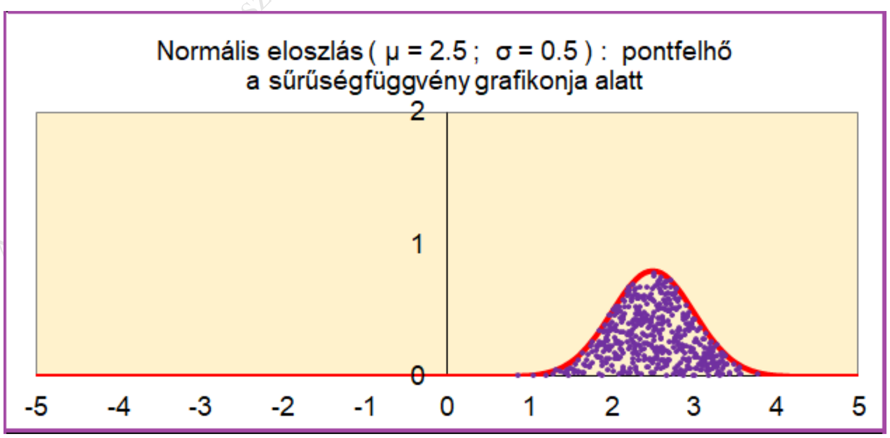
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx \qquad (-\infty < x < \infty)$$



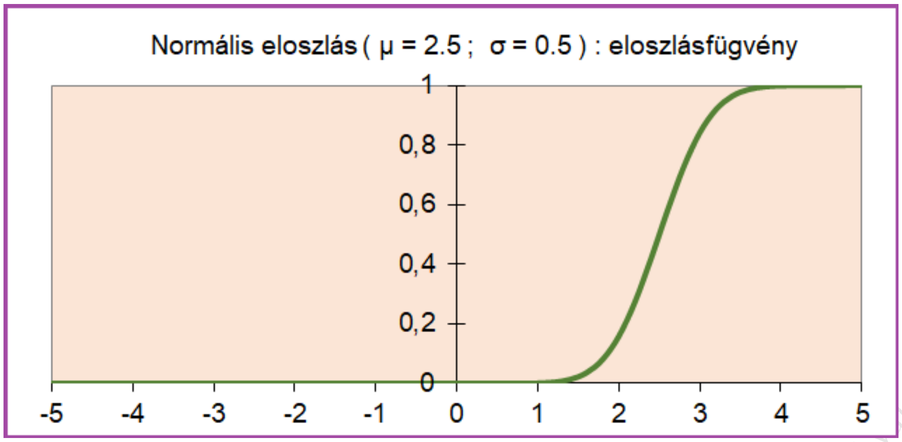
57. ábra. *Normális eloszlás* $(\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5)$*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



58. ábra. *Normális eloszlás* $(\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5)$*: pontfelhő 1000 kísérletből*



59. ábra. *Normális eloszlás* $(\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5)$*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



60. ábra. *Normális eloszlás* $(\mu = 2.5;\ \sigma = 0.5)$*: eloszlásfüggvény*

Az μ, σ paraméterű normális eloszlás várható értéke μ, szórása pedig σ.

A standard és nem standard normális eloszlások kapcsolata. Ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó, és X -et megszorozzuk σ -val, majd hozzáadunk μ -t, akkor μ, σ paraméterű normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk. Megfordítva is igaz: ha az Y valószínűségi változó μ, σ paraméterű normális eloszlást követ, és Y -ból kivonunk μ -t, majd pedig az eredményt elosztjuk σ -val, akkor standard normális eloszlást követő valószínűségi változóhoz jutunk.

Standardizált érték, standardizált. Tetszőleges normális eloszlás eloszlásfüggvényének valamilyen x helyen vett $F(x)$ értéke visszavezethető a standard normális eloszlás Φ -vel jelölt eloszlásfüggvényére:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Az $\frac{x-\mu}{\sigma}$ értéket az x érték *standardizált értékének, standardizáltjának* nevezzük. Tehát az $F(x)$ értékét úgy számoljuk ki, hogy vesszük az x érték standardizáltját, és standardizált értéknél megnézzük a Φ táblázatában a megfelelő értéket.

Várható értékre szimmetrikus intervallumok. Gyakran van szükség arra, hogy a várható értékre szimmetrikus $(\mu - x\,\sigma\,;\ \mu + x\,\sigma)$ intervallumok valószínűségét kiszámoljuk. Ez így történhet:

$$F(\mu + x\,\sigma) - F(\mu - x\,\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu + x\,\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - x\,\sigma - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(x) - \Phi(-x) = 2\,\Phi(x) - 1$$

Jegyezzük meg, hogy

- $x = 1$ esetén $2\,\Phi(x) - 1 = 2\,(0.841) - 1 = 0.682 \approx 0.68 = 68\%$
- $x = 2$ esetén $2\,\Phi(x) - 1 = 2\,(0.977) - 1 = 0.954 \approx 0.95 = 95\%$

vagyis a

- $(\mu - 1\,\sigma\,;\ \mu + 1\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.68 = 68\%$
- $(\mu - 2\,\sigma\,;\ \mu + 2\,\sigma)$ intervallum valószínűsége körülbelül $0.95 = 95\%$

Ezért ezekre a szabályokra mint "1-szigma szabály", illetve "2-szigma-szabály" szokás hivatkozni. Nyilván 1-től és 2-től különböző z értékekre is meg lehet fogalmazni "z -szer szigma szabály"-okat, de ettől eltekintünk.

Előfordul, hogy adott q valószínűséghez keresünk olyan $(\mu - x\,\sigma\,;\ \mu + x\,\sigma)$ intervallumot, melynek valószínűsége q . Ehhez is a

$$2\,\Phi(x) - 1 = q$$

egyenletet kell megoldani, melynek megoldása

$$x = \Phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

Lineáris transzformációk. Ha X normális eloszlású valószínűségi változó μ, σ paraméterekkel, a, b konstans számok, és X -et megszorozzuk a -val, majd hozzáadunk b -t:

$$Y \;=\; a\,X \;+\; b$$

akkor normális eloszlást követő Y valószínűségi változóhoz jutunk. Y várható értéke nyilván $a\mu + b$, szórása pedig $|a|\sigma$.

Centrális határeloszlás tétel. A centrális határeloszlás tétel egzakt tárgyalása messze meghaladja kereteinket, ezért az egzakt tárgyalásról lemondunk. Kárpótlásul – kissé pongyola, de egyszerű és jól érthető formában – kétféleképpen is megfogalmazzuk meg a centrális határeloszlás tétel lényegét:

1. **Kis értékű valószínűségi változók összege:** Ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis értékeket felvevő* valószínűségi változó összegeként áll elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

   A következő állítás rámutat, hogy nem az a lényeg, hogy a tagok kis értékűek. Az is elég, hogy minden tag szórása kicsi.

2. **Kis szórású valószínűségi változók összege:** Ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó összegeként áll elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

   Megjegyzések:

   (a) A "sok" itt általában nem is kell hogy igazán sok legyen. Például 12 darab (0 és 1 között egyenletes eloszlású) random szám összege már nagyon nagy pontossággal normális eloszlásúnak vehető. 12 darab random szám összegének a várható értékét és szórását könnyű kiszámolni, nemsokára megtanuljk, hogy hogyan lehet. A várható értékre nyilvánvalóan 6, a szórásra pedig 1 jön ki. Ezért az

   $$X \;=\; \mathrm{RND}_1 \,+\, \mathrm{RND}_2 \,+\, \mathrm{RND}_3 \,+\, \mathrm{RND}_4 \,+\, \mathrm{RND}_5 \,+\, \mathrm{RND}_6 \,+$$

   $$+\,\mathrm{RND}_7 \,+\, \mathrm{RND}_8 \,+\, \mathrm{RND}_9 \,+\, \mathrm{RND}_{10} \,+\, \mathrm{RND}_{11} \,+\, \mathrm{RND}_{12} \;-\; 6$$

   (12 darab random szám összege mínusz 6) képlettel definiált valószínűségi változó – még kényes, pontos szimulációkban is – standard normális eloszlásúnak vehető.

   (b) Az, hogy mit tekinthetünk kicsinek, relatív fogalom. Itt a tagok szórásainak az összeg szórásához képest kell kicsinek lenni. Ezt a matematikailag pongyola kijelentést a centrális határeloszlás tétel egzakt tárgyalása precízen megfogalmazza, de erre itt nem tudunk kitérni.

Normális eloszlások alkalmazásai:

1. A centrális határeloszlás tétel alapján normális eloszlást használhatunk, ha egy valószínűségi változóról tudható, érezhető, hogy *sok kis szórású vagy kis értékű, független tag összege*ként áll elő.

2. Sokszor csak *kényelmi okokból* használjuk a normális eloszlásokat, mert – különösebb elméleti magyarázat nélkül! – elfogadjuk, hogy a normális eloszlás jó közelítése az igazi eloszlásnak, és a normális eloszlás egyszerű lehetőséget kínál fel arra, hogy a várható érték, a szórás és bennünket érdeklő intervallumok valószínűségeivel numerikus számításokat végezzünk.

   (Ezt a munka stílust – hogy valamit csak kényelmi okokból használunk – nem szabad leszólni! Például az egyenletes eloszlásokat is – különösen többdimenziós problémák esetén – gyakran csak kényelmi okokból részesítjük előnyben a nem egyenletesekkel szemben.)

3. Mint látni fogjuk, *többdimenziós problémák* esetén, amikor vetület és feltételes eloszlásokkal kapcsolatban kell számításokat végeznünk, normális eloszlásokkal nagyon kényelmesen – integrálások nélkül! – lehet dolgozni.

A normális eloszlás paramétereit vagy elméleti úton lehet kigondolni, vagy kísérleti eredmények átlagával, illetve szórásával kell közelíteni. A paraméterek elméleti kigondolásában segít, ha tájékozottak vagyunk a várható érték, a variancia és a szórás tulajdonságaival.

Megjegyzés: A normális eloszlások eloszlásfüggvényeit és azok inverzeit *jól és biztonságosan kell tudni használni*! Az eloszlásfüggvény és az inverz függvény értékeit táblázatból is, kalkulátorból is, Excelből is ki kell tudni olvasni. Az alábbi táblázatban összegyűjtöttük, hogy Excelben milyen függvényeket használhatunk normális eloszlásokkal kapcsolatos számításokban:

Függvény neve	Matematikai képlet	Excel képlet
Sűrűségfüggvény	$f(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `FALSE )`
Eloszlásfüggvény	$F(x)$	`NORM.DIST(` x ; μ ; σ ; `TRUE )`
Eloszlásfüggvény inverze	$F^{-1}(y)$	`NORM.INV(` y ; μ ; σ `)`

Bizonyos Excel verziókban

`NORM.DIST` helyett `NORMDIST`
`NORM.INV` helyett `NORMINV`

is írható.

1. Feladat: Deszkák hossza. Egy faüzemben deszkákat gyártanak, melyek hossza normális eloszlást követ 200 cm várható értékkel és – egyelőre – ismeretlen σ szórással. Tapasztalatból tudjuk, hogy a deszkák 75 % -ának a hossza 195 és 205 cm közé esik. Hány százalékot tesznek ki azok a deszkák, melyek hossza 190 és 210 cm közé esik?

Megoldás: Ha egy véletlenszerűen választott deszka hosszát X -szel jelöljük, akkor a feladat szövege alapján:

$$\mathrm{P}(195 < X < 205) = 0.75$$

Ez azt jelenti, hogy

$$F(205) - F(195) = 0.75$$

amiből néhány egyszerű lépéssel megkapjuk σ értékét:

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\frac{205-200}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{195-200}{\sigma}\right) = 0.75 \\
&\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{5}{\sigma}\right) = 0.75 \\
&2\,\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) - 1 = 0.75 \\
&\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right) = \frac{1+0.75}{2} = 0.875 \\
&\frac{5}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.875) = 1.15 \\
&\sigma = \frac{5}{1.15} = 4.35
\end{aligned}$$

Ezek után:

$$\mathrm{P}(190 < X < 210) = F(210) - F(190) = \Phi\left(\frac{210-200}{4.35}\right) - \Phi\left(\frac{190-200}{4.35}\right) = \Phi(2.30) - \Phi(-2.30) = 2\,\Phi(2.30) - 1 = 0.98$$

Tehát a deszkák kb. 98 % -ának a hossza esik 190 és 210 cm közé.

2. Feladat: A sarki zöldséges kerekítésekből adódó haszna (vesztesége). A sarki zöldségesnél csak készpénzzel lehet fizetni. A fizetendő összeget fel- vagy lekerekítik úgy, hogy a fizetendő összeg 5 -tel osztható legyen. Felmerül a kérdés: vajon a kerekítésekből a zöldségesnek mennyi extra haszna (vagy vesztesége) jöhet össze – mondjuk – egy nap alatt? A kérdést árnyaltabban kell feltenni, hiszen a napi extra haszon egyrészt függ a vásárlók számától, másrészt nyilván a véletlentől.

Árnyaltabban megfogalmazott kérdés: Mennyi annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – napi 1000 vásárló esetén a bolt kerekítésekből adódó extra haszna 100 forintnál több?

Megoldás: Egy-egy vevő esetében a kerekítésből adódó extra haszon a -2, -1, 0, 1, 2 (forint) lehetséges értékeket veheti fel. A zöldségesnél ezek az értékek egyforma esélyűeknek vehetők. (Nem így lenne, ha "Óra és ékszer" boltot vizsgálnánk!) A -2, -1, 0, 1, 2 értékeken vett egyenletes eloszlás várható értéke 0, szórása pedig $\sqrt{2}$ -vel egyenlő – tessék utánaszámolni! Ezért 1000 vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon normális eloszlásúnak vehető 0 várható értékkel és $\sqrt{1000}\cdot\sqrt{2}$ szórással. Annak a valószínűsége, hogy ez az extra haszon több, mint 100 forint, egyszerűen számolható:

$$1 - \Phi\left(\frac{100}{\sqrt{1000}\cdot\sqrt{2}}\right) = 0.013$$

Hasonlóan kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy N vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon több, mint x forint:

$$1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{N}\cdot\sqrt{2}}\right)$$

Az extra haszon eloszlásának a 0 -ra vonatkozó szimmetriája miatt ugyanennyi annak a valószínűsége is, hogy bolt vesztesége több, mint x forint.

A következő táblázatban néhány N és x értékre három tizedes pontossággal megadjuk ennek a valószínűségnek az értékét:

Vásárlók száma:	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
10 Ft haszon	0.013	0.240	0.412	0.472	0.491	0.497
100 Ft haszon	0.000	0.000	0.013	0.240	0.412	0.472
1 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	0.013	0.240
10 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

A táblázatból látszik az, amit mindennapos tapasztalatunkból is érzünk: a kerekítésekből adódó extra haszon vagy veszteség olyan kis eséllyel lépi túl az irigységre vagy aggodalomra okot adó forint határokat, hogy nyugodt szívvel eltekinthetünk az 1 és 2 forintos érmék használatától.

Köszönet: A kerekítésekből adódó extra haszonra, mint mindennapi életünkben felbukkanó valószínűségi változóra egy kedves (nevét közzé tenni nem akaró) hallgató hívta fel figyelmemet. Ezúton fejezem ki köszönetemet.

3. Feladat: Mi lenne, ha az 5 forintos érmét is kivonnák a forgalomból? Nyilvánvaló, hogy a zöldséges számára kedvező lenne, ha fizetéskor az 5-re végződő számokat felkerekítenék, a vevő számára pedig az lenne kedvező, ha lekerekítenék. De vajon az ebből a kerekítésből adódó extra nyereségek is az elhanyagolható kategóriába esnek, vagy már nem? Vajon a felkerekítéses esetben mennyi lenne annak a valószínűsége, hogy – mondjuk – 1000 vásárló kapcsán a bolt extra haszna 100 forintnál több? (Ennek az eseménynek a valószínűségére az előző példában 0.013 jött ki.) És hogy is nézne ki ebben az esetben az előbbi táblázat?

Megoldás: A felkerekítéses esetben egy-egy vevőre vonatkoztatva a zöldséges kerekítésből adódó haszna a -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 (forint) lehetséges értékeket venné fel egyforma esélyekkel. Ennek az eloszlásnak a várható értéke 0.5, a szórása 2.87. Tessék utánaszámolni! Ezért 1000 vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon normális eloszlásúnak vehető $1000 \cdot 0.5 = 500$ várható értékkel és $\sqrt{1000} \cdot \sqrt{2.87}$ szórással. Annak a valószínűsége, hogy ez az extra haszon több, mint 100 forint, így számolható:

$$1 - \Phi\left(\frac{100 - 500}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{2.87}}\right) = 0.999\,999\,9999\,9996$$

ami egy elég nagy valószínűség érték, ahhoz, hogy a szóbanforgó eseményt gyakorlatilag biztosnak tekintsük! Hasonlóan kapjuk, hogy annak a valószínűsége, hogy N vásárló kapcsán az összegződő kerekítésekből a bolt számára adódó extra haszon több, mint x forint:

$$1 - \Phi\left(\frac{x - N \cdot 0.5}{\sqrt{N} \cdot \sqrt{2.87}}\right)$$

Néhány N és x értékre három tizedes pontossággal megint megadjuk ennek a valószínűségnek az értékét:

Vásárlók száma:	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
10 Ft haszon	0.175	0.991	1.000	1.000	1.000	1.000
100 Ft haszon	0.000	0.002	1.000	1.000	1.000	1.000
1 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000	1.000
10 000 Ft haszon	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	1.000

A táblázatból is látszik az, amit józan eszünk is súg: felkerekítés esetén a zöldséges extra haszna, és így a vevők extra vesztesége mindenképpen több lenne annál, mint amit etikusan el lehet fogadni! Ha mégis meg kellene szüntetni az 5 forintos érmét, akkor valamit tenni kellene az igazságosság megőrzése érdekében.

5.6. Gyakorló feladatok

1.
2.

6. A várható érték, variancia és szórás általános tulajdonságai

Ebben a fejezetben csak felsoroljuk a várható érték, a variancia és a szórás általános tulajdonságait. Ezek a tulajdonságok diszkrét és folytonos valószínűségi változókra, eloszlásokra egyaránt igazak. A matematikai bizonyításaikra csak ésőbb kerül sor, amikor már megismerkedünk a többdimenziós valószínűségi változókkal, eloszlásokkal. Arra bíztatom a Kedves Olvasót, hogy a tulajdonságokat

- gondolja meg,
- értelmezze őket a saját szemlélete szerint (jól!), és
- ellenőrizze konkrét példákra készített szimulációkkal!

A szimulációk készítésének élménye a tulajdonságok megtapasztalását teszi lehetővé, ami nagy mértékben megkönnyíti a szabályok megértését, megjegyzését.

A lentebbi képletekben X, Y, X_1, X_2, ..., X_n valószínűségi változókat a, b, c, n, a_1, a_2, ..., a_n, konstansokat jelentenek.

6.1. Várható érték tulajdonságai

1. **Összeadás – általános eset:**

   Összeg várható értéke egyenlő a tagok várható értékeinek az összegével:

   (a) Két tagra:
   $$\mathrm{E}(X+Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$$

   (b) Több tagra:
   $$\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)$$

2. **Konstanssal való szorzás:**

   Ha egy valószínűségi változót egy konstanssal szorzunk, akkor a várható érték is a konstanssal szorzódik:
   $$\mathrm{E}(\,c\,X\,) = c\,\mathrm{E}(X)$$

3. **Linearitás:**

   Egy lineáris kombináció várható értéke egyenlő a tagok várható értékeinek ugyanolyan lineáris kombinávióját-val:

   (a) Két tagra:
   $$\mathrm{E}(a\;X + b\;Y) = a\;\mathrm{E}(X) + b\;\mathrm{E}(Y)$$

   (b) Több tagra:
   $$\mathrm{E}(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n) = a_1\mathrm{E}(X_1) + a_2\mathrm{E}(X_2) + \ldots + a_n\mathrm{E}(X_n)$$

4. **Összeadás – azonos várható értékek esetén:**

   Ha a tagok várható értékei egyenlők, akkor az összeg várható értéke egyenlő a várható értékek (μ -vel jelölt) közös értéke szorozva a tagok számával:
   $$\mathrm{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = n\,\mu$$

5. **Átlagolás – azonos várható értékek esetén:**
   Ha a tagok várható értékei egyenlők, akkor az átlag várható értéke egyenlő a várható értékek (μ -vel jelölt) közös értékével:
   $$\mathrm{E}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\mu$$
6. **Független valószínűségi változók szorzata:**
   Független valószínűségi változók szorzatának várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával:
   (a) Két tényezőre:
   $$\mathrm{E}(\ X\ Y\ )\ =\ \mathrm{E}(\ X\ )\ \mathrm{E}(\ Y\ )$$
   (b) Több tényezőre:
   $$\mathrm{E}(\ X_1\ X_2\ \ldots\ X_n\ )\ =\ \mathrm{E}(X_1)\ \mathrm{E}(X_2)\ \ldots\ \mathrm{E}(X_n)$$

6.2. Variancia tulajdonságai

1. **Összeadás (két tagra) – általános eset:**
   Összeg varianciája egyenlő a varianciák összegével plusz a kovariancia kétszerese:
   $$\mathrm{VAR}(X+Y)=\mathrm{VAR}(X)+\mathrm{VAR}(Y)+2\,\mathrm{COV}(X,Y)$$
   ahol $\mathrm{COV}(X,Y)$ az X és Y közötti kovarianciát jelentik. A kovariancia fogalmát később tanuljuk.
2. **Összeadás (két tagra) – független tagok esetén:**
   Független valószínűségi változók összegének a varianciája egyenlő a tagok varianciáinak az összegével:
   $$\mathrm{VAR}(X+Y)=\mathrm{VAR}(X)+\mathrm{VAR}(Y)$$
3. **Konstanssal való szorzás:**
   Ha egy valószínűségi változót egy konstanssal szorzunk, akkor a variancia a konstans négyzetével szorzódik:
   $$\mathrm{VAR}(\,c\,X\,)=c^2\ \mathrm{VAR}(X)$$
4. **Összeadás – független tagok és azonos varianciák esetén:**
   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az összeg varianciája egyenlő varianciák (σ^2 -val jelölt) közös értéke szorozva a tagok számával:
   $$\mathrm{VAR}(X_1+X_2+\ldots+X_n)=n\ \sigma^2$$
5. **Átlagolás – – független tagok és azonos varianciák esetén:**
   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az átlag varianciája egyenlő varianciák (σ^2 -val jelölt) közös értéke osztva a tagok számával:
   $$\mathrm{VAR}\left(\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$$

6.3. Szórás tulajdonságai

1. **Konstanssal való szorzás:**

   Ha egy valószínűségi változót egy konstanssal szorzunk, akkor a szórás a konstans abszolút értékével szorzódik:

   $$\mathrm{SD}(\, c\, X\,) = |c|\ \mathrm{SD}(X)$$

2. **Négyzetgyök szabály az összegre:**

   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az összeg szórása egyenlő szórások (σ -val jelölt) közös értéke szorozva a tagok számának a négyzetgyökével.

   $$\mathrm{SD}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sqrt{n}\, \sigma$$

3. **Négyzetgyök szabály az átlagra:**

   Ha a tagok függetlenek, és varianciáik egyenlők, akkor az átlag szórása egyenlő szórások (σ -val jelölt) közös értéke osztva a tagok számának a négyzetgyökével.

   $$\mathrm{SD}\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

6.4. Gyakorló feladatok

1. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya (pontosabban: tömege) egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba. Mennyi a várható értéke, illetve a szórása a zsákban lévő zsömlék összsúlyának?

7. Közelítések normális eloszlással

7.1. Moivre-Laplace tétel

Tekintsük az alábbi valószínűségi változókat:

- szabályos érmével 5-ször dobva a dobott fejek száma
- szabályos dobókockával 25-ször dobva a dobott hatosok száma
- független, azonos valószínűségű események kapcsán nézzük azt, hogy közülük hány következik be

Nyilvánvaló, hogy ezek a valószínűségi változók egyrészt mind binomiális eloszlást követnek, másrészt **előállnak független valószínűségi változók összegeként**. Ezért – a centrális határ eloszlás tétel – nem meglepő a következő tétel:

Moivre-Laplace tétel. *Egy binomiális eloszlás közelíthető normális eloszlással, ha a binomiális eloszlás* n *paramétere nagy, és a* p *paramétere se a* 0 *-hoz se az* 1 *-hez nincs túl közel. A normális eloszlás paramétereit úgy kell a binomiális eloszláshoz igazítani, hogy a várható értékeik és a szórásaik megegyezzenek, vagyis*

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

Ha n értéke legalább 25 , és p értéke 0.1 és 0.9 közé esik, akkor már jó a közelítés.

A gyakoriság eloszlása. *Ezért, ha egy esemény valószínűsége* p *, és az eseményre* n *kísérletet végzünk, akkor (a fentebb mondott feltételek mellett) az esemény gyakoriságának eloszlását (ami – mint tudjuk – binomiális eloszlás) normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei:*

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

A valószínűségek számolásakor az intervallum megválasztására is figyelmet kell fordítani!

Mint tudjuk, az $\{A; A+1, \ldots B\}$ halmaz binomiális eloszlás szerinti valószínűsége:

$$\sum_{k=A}^{B} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ugyanez a valószínűség Excellel felírva:

$$\texttt{BINOMDIST}\,(B\,;\,n\,;\,p\,;\,\texttt{TRUE}\,) - \texttt{BINOMDIST}\,(A-1\,;\,n\,;\,p\,;\,\texttt{TRUE}\,)$$

(A képletben az $A-1$ nem sajtóhiba! Ha A -t írnánk, akkor az $\{A+1; A+2, \ldots B\}$ halmaz valószínűségét kapnánk!) A felírt valószínűségnek a normális eloszlással való közelítésekor az $\left[A-\frac{1}{2}; B+\frac{1}{2}\right]$ intervallumot kell venni, ugyanis közelítő érték:

$$\int_{A-0.5}^{B+0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx$$

Ugyanez a valószínűség Excellel felírva:

$$\texttt{NORMDIST}\,(B+\tfrac{1}{2}\,;\,\mu\,;\,\sigma;\texttt{TRUE}\,) - \;\texttt{NORMDIST}\,(A-\tfrac{1}{2}\,;\,\mu\,;\,\sigma\,;\,\texttt{TRUE})$$

$$\sum_{k=A}^{B} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;\approx \int_{A-0.5}^{B+0.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \; dx$$

A "*Moivre-Laplace tétel szemléltetése*" feliratú ábrán az $n = 25$, $p = 0.3,$ $A = 5,$ $B = 10$ értékek mellett

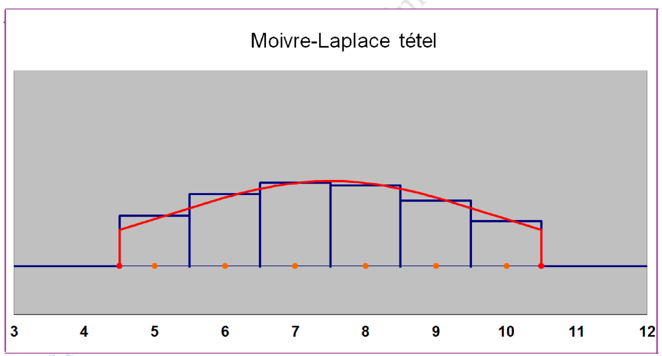
- minden téglalap területe a binomiális eloszlás megfelelő tagjának a valószínűségével egyenlő
- a téglalapok összterülete egyenlő az $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmaznak a binomiális eloszlás szerinti valószínűségé-vel
- a görbe a normális eloszlás sűrűségfüggvénye a $\mu = 25 \cdot 0.3 = 7.5$, $\sigma = \sqrt{25 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 2.29$ paraméterekkel
- a görbe alatti területe egyenlő a $[\;4.5\;;\;10.5\;]$ intevallumnak a normális eloszlás szerinti valószínűségével

és az ábra akarja érzékeltetni, hogy

- az $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ halmaznak a binomiális eloszlás szerinti valószínűsége (melynek értéke 3 tizedesre kere-kítve egyenlő 0.812 -del)

közelítőleg egyenlő

- a $[\;4.5\;;\;10.5\;]$ intevallumnak a normális eloszlás szerinti valószínűségével (melynek értéke 3 tizedesre kerekítve egyenlő 0.811 -del)



61. ábra. *Moivre-Laplace tétel szemléltetése*

Ha az Olvassó megnyitja a

`http://math.bme.hu/~vetier/2016_osz/A4_vill_2016_osz.html` címen a lap felső részé-ben a mellékletek között található

`Binomialis_eloszlas--Normalis_eloszlas_HONLAPRAx` című Excel fájlt, akkor a paraméterek változtatásával tovább mélyítheti a Moivre-Laplace tétel kínálta közelítés szemléletét.

A relatív gyakoriság eloszlása. *A fentieknek nyilvánvaló következménye, hogy ha egy esemény valószínűsége* p *, és az eseményre* n *kísérletet végzünk, akkor (a fentebb mondott feltételek mellett) az esemény relatív gyakorságának, vagyis az* $\frac{X}{n}$ *valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei*

$$\mu = p \qquad \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

A relatív gyakoriság és a valószínűség eltérésének eloszlása. *Következésképpen az esemény* $\frac{X}{n}$ *relatív gyakorisága és az esemény* p *valószínűsége eltérésének, vagyis az* $\frac{X}{n} - p$ *valószínűségi változónak az eloszlását normális eloszlással közelíthetjük, ahol a normális eloszlás paraméterei*

$$\mu = 0 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

7.2. Hány kísérlet kell ahhoz, hogy ... ?

- Már a jegyzet elején – a tapasztalatra hivatkozva – leszögeztük, hogy egy eseménnyel kapcsolatban sok kísérlet végezve a relatív gyakoriság közelíti az esemény valószínűségét
- Később tanultak, hogy egy valószínűségi változóval kapcsolatban sok kísérlet végezve az átlag közelíti a valószínűségi változó várható értékét

Természetesen felmerül az emberben a kérdés: mennyire sok ez a sok? Pontosabban feltéve a kérdést: adott pontosság és megbízhatóság eléréséhez hány kísérletet kell elvégezni? Ezekre a kérdésekre kapjuk meg a választ az alábbiakban.

7.2.1. Valószínűség közelítése relatív gyakorisággal

Tekintsünk egy eseményt. Az esemény (általunk nem ismert) valószínűségét jelöljük p -vel. Vegyünk fel egy ε -nal jelölt hibahatárt is. Ha az eseményre több kísérletet végzünk, és kiszámítjuk az esemény relatív gyakoriságát, akkor a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való eltérése kisebb is lehet ε -nál és nagyobb is lehet ε -nál. Tehát van értelme arról beszélni, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a relatív gyakoriságnak a valószínűségtől való eltérése kisebb ε -nál.

Fontos tudni, hogy adott q (1- hez közeli) valószínűség érték esetén hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy ennek az események a valószínűsége legalább q legyen?

A kérdést megismétlejük tömörebben formában is: Hány kísérlet kell ahhoz, hogy egy adott esemény ismeretlen valszínűségét a relatív gyakoriság ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett?

A fentiek fényében a választ nem nehéz megadni, mert annak a valószínűségét, hogy az $\frac{X}{n}$ relatív gyakoriság a p valószínűséget ε -nál kisebb hibával közelíti, így fejezhetjük ki a normális eloszlás ϕ eloszlásfüggvényének segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X}{n} - p \right| \le \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \le \frac{X}{n} - p \le \varepsilon \right) =$$

$$= \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) - \phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) = 2\ \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) - 1$$

Következésképpen ahhoz, hogy a relatív gyakoriság a valószínűséget ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett, annak kell teljesülnie, hogy

$$2\ \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \right) - 1 \ge q$$

Ebből, az egyenlőtlenség egyszerű átrendezéseivel kapjuk, hogy

$$\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) \geq \frac{1+q}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq \phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)$$

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{p(1-p)}\ \frac{\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)}{\varepsilon}$$

$$n \geq\ p(1-p)\ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

Mivel a jobboldalon szereplő $p(1-p)$ tényező legfeljebb $\frac{1}{4}$ lehet, az

$$n \geq \frac{1}{4}\ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség élesebb a korábbinál.

Tehát *az*

$$n \geq \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{4\,\varepsilon^2}$$

egyenlőtlenség teljesülése esetén az $\frac{X}{n}$ *relatív gyakoriság a* p *valószínűséget* ε *-nál kisebb hibával közelíti legalább* q *biztonság mellett, azaz*

$$\mathrm{P}\left(\ \left|\ \frac{X}{n} - p\ \right| \leq \varepsilon\right)\ \geq\ q$$

A képletre támaszkodva egy táblázatot készítettünk, mely azt mutaja, hogy a táblázat bal oldalán megadott pontosság (ε) és a tetején megadott biztonság (q) teljesítéséhez hány kísérlet elvégzése elegendő:

$\varepsilon \setminus q$	0.90	0.91	0.92	0.93	0.94	0.95	0.96	0.97	0.98	0.99
0.10	68	72	77	83	89	97	106	118	136	166
0.09	84	89	95	102	110	119	131	146	168	205
0.08	106	113	120	129	139	151	165	184	212	260
0.07	139	147	157	168	181	196	216	241	277	339
0.06	188	200	213	228	246	267	293	328	376	461
0.05	271	288	307	329	354	385	422	471	542	664
0.04	423	450	479	513	553	601	660	736	846	1 037
0.03	752	799	852	912	983	1 068	1 172	1 309	1 504	1 844
0.02	1 691	1 797	1 916	2 052	2 211	2 401	2 637	2 944	3 383	4 147
0.01	6 764	7 186	7 663	8 208	8 844	9 604	10 545	11 774	13 530	16 588

Érdemes a táblázat sorait és oszlopait kicsit tanulmányozni.

- Ha akármelyik soron végigmegyünk, észrevehetjük, hogy a biztonság jelentősen nő (közeledik 1-hez), miközben a kísérletszám aránylag keveset nő: az utolsó elem kb. csak két és félszerese az elsőnek.

- Ha pedig akármelyik oszlopon megyünk végig, láthatjuk, hogy a pontosság javításához (ε csökkentéséhez) a kísérletszám jelentős növelésére van szükség: az utolsó elem kb. százszorosa az elsőnek.

Példa: A krumplis tészta népszerűsége Magyarországon. Ha valaki arra kíváncsi, hogy a magyar felnőttek hányad része szereti a krumplis tésztát, akkor elvileg megkérdezhetné az összes felnőttet, és a válaszok alapján a kérdezett arányt pontosan ki tudná számolni. Ez eléggé költséges és hosszú munka lenne! De ha megelégszünk azzal, hogy az igazi arányt 0.05 pontossággal közelítsük 0.95 biztonság mellett, akkor – a táblázatból látjuk – ehhez elég

$$385 \text{ embert}$$

megkérdezni, és a válaszokból a krumlis tésztát kedvelők relatív gyakoriságát kiszámolni.

7.2.2. Várható érték közelítése átlaggal

Egy valószínűségi változóra végzett kísérleti eredmények átlaga – sok kísérlet esetén – általában közel van a valószínűségi változó várható értékéhez. Kevés kísérlet esetén ez nem így van, gyakran adódhatnak jelentős eltérések is.

Természetes kérdés:

Hány kísérletet kell végrehajtani ahhoz, hogy egy X valószínűségi változó várható értékét a kísérleti eredményekből adódó átlag egy adott ε -nál kisebb hibával közelítse legalább q biztonság mellett?

Így okoskodhatunk: Ha az X valószínűségi változó várható értéke μ és szórása σ, továbbá $X_1, X_2, \ldots, X_N$ jelöli az X -re végzett kísérleti eredményeket, akkor a kísérleti eredmények átlagának a μ -től való eltérése

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu$$

Tudjuk, hogy ennek a különbségnek a várható értéke 0, szórása pedig $\sigma/\sqrt{n}$. Azt is tudjuk, hogy – elég nagy n esetén – a centrális határeloszlás tétel miatt az átlag és ez a különbség is (közelítőleg) normális eloszlásúnak vehető. Ezért annak a valószínűségét, hogy az

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu$$

különbség ε -nál kisebb – elég nagy n esetén – közelítőleg így fejezhető ki a normális eloszlás ϕ eloszlásfüggvényének és a σ szórásnak segítségével:

$$\mathrm{P}\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \right| \le \varepsilon \right) = \mathrm{P}\left(-\varepsilon \le \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{n} - \mu \le \varepsilon \right) =$$

$$\approx \phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - \phi\left(\frac{-\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = 2\,\phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma/\sqrt{n}} \right) - 1 = 2\,\phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma} \right) - 1$$

Ebből látjuk, hogy *ha*

$$2\,\phi\left(\frac{\sqrt{n}\,\varepsilon}{\sigma} \right) - 1 \ge q$$

egyenlőtlenség fennáll, vagyis

$$n \ge \sigma^2 \; \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

akkor az átlag legalább q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelíti a várható értéket.

1. Megjegyzés: Ha az X valószínűségi változó normális eloszlást követ, akkor a kísérleti eredmények átlaga normális eloszlást követ. Ebben az esetben nem kell a centrális határeloszlás tételre sem hivatkozni a fenti számolásban, és a kísérletek számának sem kell nagynak lenni, a kísérletek száma akármilyen kicsi is lehet.

2. Megjegyzés: A korábban levezetett

$$n \geq \; p(1-p) \;\; \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képlet speciális esete a most levezetett

$$n \geq \; \sigma^2 \;\; \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

általánosabb képletnek, hiszen egy esemény relatív gyakorisága nem más, mint az eseményre végzett kísérletek kapcsolódó indikátor változók átlaga, és – mint tudjuk – egy p valószínűségű esemény indikátor változójának a szórása $\sqrt{p(1-p)}$, szórásnégyzete (varianciája) $p(1-p)$.

Példa: Hány kilós az "egy kilós" kenyér? (Pontosítva: mennyi az átlagos tömege az "egy kilós" kenyérnek?) Senki sem gondolja, hogy minden "egy kilós" kenyér tömege pontosan 1 kg. De vajon az összes "egy kilós" kenyér tömegének átlaga mennyi? Ha az összes "egy kilós" kenyeret megmérnénk, pontosan válaszolhatnánk a kérdésre. Ámde az összes kenyeret megmérni gyakorlatilag megvalósíthatalan.

Ezért meg kell elégednünk azzal, hogy a kérdéses átlagot – mondjuk – 0.95 biztonság mellett 0.05 kg-nál kisebb hibával közelítjük. Kérdés, hogy ehhez hány kenyeret kell lemérnünk?

A válasz – a fentiek fényében – egyszerű, ha ismerjük a kenyerek tömegének a σ szórását, vagy a szórásnak egy felső becslését. Tegyük fel, hogy – mondjuk – ez a felső becslés a szórásra 0.1 kg (mert 0.9 kg-nál kisebb vagy 1.1 kg-nál nagyobb tömegű "egy kilós" kenyér sosem bukkan fel a boltokban.) A szükséges kísérletek számát megadó

$$\sigma^2 \;\; \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

képletbe behelyettesítve a $q = 0.95$, $\varepsilon = 0.05$, $\sigma = 0.1$ értékeket 15.4 -et kapunk, ami azt jelenti, hogy legalább 0.95 a valószínűsége annak, hogy

16 kenyér

tömegének az átlaga az összes kenyér tömegének az átlagát 0.05 kg pontosságnál kisebb hibával közelíti.

Ha a pontosságot növeljük, akkor a kísérletszám nő: ha a 0.05 kg-os hibahatár helyett a kisebb, 0.01 kg-os hibahatárt vesszük (a 0.95 -ös biztonsági szint megtartása mellett), akkor 385 mérésre van szükség, ami léynegesen több 16-nál.

Ha biztonságot növeljük, akkor is nő a kísérletszám, de sokkal kisebb mértékben: ha a 0.95 helyett 0.99 biztonsággal akarunk közelíteni (a 0.05 kg-os hibahatár megtartása mellett), akkor ehhez csak 27 mérésre van szükség, ami a 16-nál nem sokkal több.

7.3. Gyakorló feladatok

1. Egy árverésen a műkincsek élettartama exponenciális eloszlású, 100 év várható értékkel. Eladási áruk négyzetesen nő az idővel. Mi az eladási ár várható értéke?

2. Tegyük fel, hogy egy villanykörte élettartama (évben) $\frac{1}{2}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.

   (a) Mennyi a várható élettartama?

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy kevesebb, mint 2 évig ég?

   (c) Mi a valószínűsége, hogy több, mint 1 évig nem ég ki?

   (d) Mi a valószínűsége, hogy mostantól kezdve egy napig ég, de utána a következő nap folyamán kiég?

   (e) Feltéve, hogy 1 évig nem ég ki, mi a valószínűsége, hogy utána még legalább negyed évig működni fog?

3. Annak a valószínűsége, hogy egy buszmegállóban, hogy a kövekező t percen belül jön busz $1 - e^{-8t}$. Mi annak a valószínűsége, hogy több mint 10 percet kell várakoznunk? És annak, hogy kell várnunk legalább 5 percet, de legfeljebb 10-et? Mi a várakozási időnk várható értéke? Mi annak a valószínűsége, hogy ha már sikertelenül vártunk 4 percet, akkor kell még várnunk legalább 10 percet?

4. Egy irodában átlag 5 percenként cseng a telefon. Az utolsó hívás 4 perce volt. Mi a valószínűsége, hogy az utolsó hívás és a következő hívás közti időtartam 5 és 10 perc közé esik?

5. Tegyük fel, hogy a zsömlék súlya (pontosabban: tömege) egyenletes eloszlást követ 5 dkg várható értékkel és 1 dkg szórással. Kirándulni megy a család: 20 zsömlét tesznek a zsákba.

   (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya meghaladja a 105 dkg -ot?

   (b) Mekkora az az x érték, amire teljesül, hogy a zsákban lévő zsömlék összsúlya 0.99 valószínűséggel haladja meg az x dkg -ot?

6. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra? Mi a helyzet akkor, ha tudjuk, hogy odaérkezésünkkor már 2 perce tart a beszélgetés?

7. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ.

   (a) Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

   (b) Hány óra garanciát vállaljunk, ha a garanciális időn belül átlagosan csak 5% garanciaigényt akarunk kielégíteni?

8. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

9. A menzai poharak kirakásuktól számított törési ideje exponenciális eloszlást követ 6 hónap várható értékkel. Határozza meg annak valószínűségét, hogy 50 kirakott pohárból legfeljebb 30 törik el egy év alatt!

10. Egy számítógépes programozási nyelvben RND függvény előállít egy véletlen egyenletes eloszlású valószínűségi változót a $(0, 1)$ intervallumon. Milyen transzformációnak vessük alá ezt a számot ahhoz, hogy a kapott szám egy 7 paraméterű exponenciális legyen?

11. Bizonyítsuk be, hogy az

    - $F(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha $x \geq 0$
    - $G(y) = 1 - e^{-\sqrt{y}}$ ha $y \geq 0$

    eloszlásfüggvényekkel megadott X és Y valószínűségi változók közül az egyik öregedő, a másik fiatalodó!

12. Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek?

    (a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$

    (b) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\, \varphi(x)\, dx$

    (c) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\, \varphi(x)\, dx$

    (d) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\, \varphi(x)\, dx$

    (e)

13. Bizonyítsuk be, hogy $\Phi(-x) + \Phi(x) \equiv 1$

14. Számítsuk ki a következő valószínűségeket, ha X standard normális eloszlású valószínűségi változó!
    (a) $\mathrm{P}(-1 < X < 1)$
    (b) $\mathrm{P}(-2 < X < 2)$
    (c) $\mathrm{P}(-3 < X < 3)$

15. Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!

16. Tegyük fel, hogy X eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. Számold ki a következő valószínűségeket:
    (a) $\mathrm{P}(X > 225)$
    (b) $\mathrm{P}(215 < X < 229)$
    (c) $\mathrm{P}(215 < X < 229 | X > 225)$
    (d) $\mathrm{P}(X > 225 | 215 < X < 229)$

17. Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb 2 méternél? Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kérdezett események valószínűségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)? Szimuláljuk Excelben egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát!

18. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású, $\sigma = 5$ perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik? Szimuláljuk Excelben imserősünk megérkezési idejét!

19. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórás 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban
    (a) 50 fő alatt
    (b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?

20. Egy X valószínűségi változó várható értéke 0, szórása 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy $X > \frac{1}{2}$; akkor, ha X eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlás szórása $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.)

21. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő? A gyertyák működési idejének Excelben való szimulálásával ellenőrizzük le az előző rész megoldását!

22. Egyszerre feldobunk öt különböző szabályos "dobóizét": egy tertaédert, egy kockát, egy oktaédert, egy dodekaédert, egy ikozaédert. Mindegyik izével a számok 1-től kezdődően jöhetnek ki. Az dobott számokat így szimulálhatjuk Excellel:

tertaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;4)`
kocka esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;6)`
oktaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;8)`
dodekaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;12)`
ikozaéder esetén:	`VÉL.KÖZÖTT(1;20)`

Az öt izével dobott számok összege X. Határozza meg X
    (a) várható értékét!

(b) szórását!

(c) Az $X > 35$ esemény valószínűségét!

23. Van 25 izzóm, melyek élettartamai egymástól függetlenek, és (napokban mérve) exponenciális eloszlást követnek 0.4 paraméterrel. Az izzókat egymás után használom a sötét pincénk folyamatos világítására. Legyen X az az az időtartam, ameddig a 25 izzóval a világosság a pincében biztosítható, tehát $X =$ az izzók élettartamainak az összege. Határozza meg X

   (a) várható értékét!

   (b) szórását!

   (c) az $X > 60$ esemény valószínűségét!

   (d) Mennyi az az x időtartam, amire 0.9 biztonsággal garantálható a világosság? Vagyis mennyi az az x időtartam, hogy az $X > x$ esemény valószínűsége 0.9 ?

8. Folytonos eloszlások lineáris transzformációi

A hőmérséklet egy adott helyen különböző időpillanatokban más és más lehet, ezért egy adott helyen a hőmérsékletet folytonos valószínűségi változónak tekinthetjük. A hőmérsékletet mérhetjük Celsius fokokban is és Fahrenheit fokokban is. Ami a Celsius skálán x fok, az a Fahrenheit y fok. x és y között a következő lineáris összefüggés áll fenn:

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$

Ezért a Celsius fokokban mért X és a Fahrenheit fokokban Y véletlen értékek között is fennáll, hogy

$$Y = \frac{9}{5}X + 32$$

Sok más esetben is előfordul, hogy két valószínűségi változó között egy lineáris kapcsolat áll fenn. Fontos, hogy ilyen esetekre megtaláljuk a kapcsolatot a valószínűségi változók eloszlás- és sűrűségfüggvényei között. Erről lesz szó ebben a fejezetben.

Ha a és b konstansokat jelölnek, akkor az $y = ax + b$ képlet egy lineáris transzformációt jelent:

- Ha $a > 0$, akkor a számegyenes pontjait először a -szoros nyújtásnak vetjük alá, majd az eltolással kapott pontokat ezután még b -vel eltoljuk. Ilyenkor a transzformáció egy növekedő függvényt jelent.
- Ha $a < 0$, akkor a nyújtást megelőzi egy tükrözés az origóra, majd ezt követi egy nyújtás $|a|$ -szoros mértékben, és ezután jön az eltolás b -vel. Ilyenkor a transzformáció egy csökkenő függvényt jelent.
- Ha $a = 0$, akkor a számegyenes összes pontja a b pontba képződik. Ilyenkor a lineáris transzformációt elfajulónak nevezzük.

A transzformáció inverzét nyilván az $x = \frac{y-b}{a}$ képlet adja meg.

Tekintsünk egy X folytonos valószínűségi változót. Ha az X valószínűségi változó értékeit és egy nem elfajuló (tehát $a \neq 0$) lineáris transzformációnak vetjük alá, azaz X helyett tekintjük az $Y = aX + b$ értéket, akkor egy új Y valószínűségi változóhoz jutunk. Fontos tudnunk, hogy milyen kapcsolat áll fenn X és Y eloszlás-, illetve sűrűségfüggvényei között.

A kiindulásul vett X valószínűségi változó "régi" eloszlásfüggvényét jelöljük $F(x)$ -szel, sűrűségfüggvényét $f(x)$ -szel. A transzformációval kapott $Y = aX + b$ valószínűségi változó "új" eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$ -nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$ -nal.

8.1. Növekedő eset ($a > 0$)

Az eloszlásfüggvényre is és a sűrűségfüggvényre is két formulát mondunk ki. Legyenek x és y a transzformációnál egymásnak megfelelő pontok, azaz

$$y = ax + b \qquad \text{illetve} \qquad x = \frac{y-b}{a}$$

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat:

$$G(y) = F(x) \qquad \text{illetve} \qquad G(y) = F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) \;=\; f\,(x)\;\cdot\;\frac{1}{a} \qquad \text{illetve} \qquad g(y) \;=\; f\left(\frac{y-b}{a}\right)\;\cdot\;\frac{1}{a}$$

Levezetés: Ha x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y = a\,x + b$, akkor az

$$Y < y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad X < x \quad \text{eseménnyel}$$

Ezért

$$\mathrm{P}(\,Y < y\,) = \mathrm{P}(\,X < x\,)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$G(y) \;=\; F\,(x)$$

Mivel $x = \frac{y-a}{b}$, az is kiadódik, hogy:

$$G(y) \;=\; F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

A sűrűségfüggvényre vonatkozó állítások y szerinti deriválással adódnak:

$$g(y) \;=\; (\,G(y)\,)' \;=\; \left(F\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)' \;=\; f\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\;\frac{1}{a} \;=\; f\,(x)\;\cdot\;\frac{1}{a}$$

Másik levezetés: A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is.

Legyenek az

$$[\,x\,;\,x + \Delta x\,]\;\;,\;\;[\,y\,;\,y + \Delta y\,]$$

intervallumok a transzformációnál egymásnak megfelelő intervallumok, azaz

$$a\,x + b = y \;\;,\;\; a\,(\,x + \Delta x\,) + b = y + \Delta y$$

Vegyük észre, hogy

$$a\,\Delta x \;=\; \Delta y \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; \frac{1}{a}$$

is igaz. Az transzformáció szigorúan monoton növekedő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad x < X < x + \Delta x \quad \text{eseménnyel}$$

és így

$$\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y) \;=\; \mathrm{P}(x < X < x + \Delta x)$$

Ebből kapjuk:

$$g(y) \;\approx\; \frac{\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} \;=\; \frac{\mathrm{P}(x < X < x + \Delta x)}{\Delta y} \;\approx$$

Most felhasználva a

$$\mathrm{P}(x < X < x + \Delta x) \;\approx\; f(x)\cdot\Delta x$$

közelítést ezt kapjuk:

$$\approx\; \frac{f(x)\cdot\Delta x}{\Delta y} \;=\; f(x)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta y} \;=\; f\,(x)\;\cdot\;\frac{1}{a}\;=$$

Végül az $x = \frac{y-b}{a}$ helyettesítéssel a levezetés végéhez jutunk:

$$=\; f\left(\frac{y-b}{a}\right)\;\cdot\;\frac{1}{a}$$

8.2. Csökkenő eset ($a < 0$)

Az eloszlásfüggvényre is és a sűrűségfüggvényre is két formulát mondunk ki. Legyenek x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y = ax + b$, illetve $x = \frac{y-b}{a}$.

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat:

$$G(y) = 1 - F(x) \qquad \text{illetve} \qquad G(y) = 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) = -f(x) \cdot \frac{1}{a} = f(x) \cdot \frac{1}{|a|}$$

illetve

$$g(y) = -f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Levezetés: Ha x és y a transzformációnál egyásnak megfelelő pontok, azaz $y = ax + b$, akkor az

$$Y < y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad X > x \quad \text{eseménnyel}$$

Ezért

$$\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(X > x)$$

ami pontosan azt jelenti, hogy

$$G(y) = 1 - F(x)$$

Mivel $x = \frac{y-a}{b}$, az is kiadódik, hogy:

$$G(y) = 1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

A sűrűségfüggvényre vonatkozó állítások y szerinti deriválással adódnak:

$$g(y) = G'(y) = \left(1 - F\left(\frac{y-b}{a}\right)\right)' = -f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = f\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Mivel $\frac{y-a}{b} = x$, az is kiadódik, hogy:

$$g(y) = -f(x) \cdot \frac{1}{a} = f(x) \cdot \frac{1}{|a|}$$

Másik levezetés: A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. A levezetésnél oda kell figyelni arra tényre, hogy most a negatív. Legyenek az x és y pontok egymásnak megfelelő pontok, azaz

$$y = ax + b$$

Mivel a negatív, az $y + \Delta y$ pontnak megfelelő pont az x pont baloldalán van, jelöljük $x - \Delta x$ -szel:

$$y + \Delta y = a(x - \Delta x) + b$$

Tehát most az

$$[\, x \,-\, \Delta x \,;\, x \,] \ , \qquad [\, y \,;\, y \,+\, \Delta y \,]$$

intervallumok felelnek meg a transzformációnál egymásnak. Vegyük észre, hogy most

$$-\, a\, \Delta x \,=\, \Delta y \qquad \text{azaz} \qquad \frac{\Delta x}{\Delta y} \,=\, -\,\frac{1}{a}$$

A transzformáció szigorúan monoton csökkedő tulajdonsága miatt az

$$y < Y < y + \Delta y \quad \text{esemény ekvivalens az} \quad x \,-\, \Delta x < X < x \quad \text{eseménnyel}$$

és így

$$\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y) \,=\, \mathrm{P}(x \,-\, \Delta x < X < x)$$

Ebből kapjuk:

$$g(y) \,\approx\, \frac{\mathrm{P}(y < Y < y + \Delta y)}{\Delta y} \,=\, \frac{\mathrm{P}(x \,-\, \Delta x < X < x)}{\Delta y} \,\approx$$

Most felhasználva a

$$\mathrm{P}(x \,-\, \Delta x < X < x) \,\approx\, f(x) \cdot \Delta x$$

közelítést, ezt kapjuk:

$$\approx\, \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta y} \,=\, f(x) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta y} \,=\, f\,(x) \,\cdot\, \left(-\frac{1}{a}\right) \,=\, f\,(x) \,\cdot\, \left(\frac{1}{|a|}\right) \,=$$

Végül az $x \,=\, \frac{y-b}{a}$ helyettesítéssel a levezetés végéhez jutunk:

$$=\, -\, f\left(\frac{y-b}{a}\right) \,\cdot\, \frac{1}{a} \,=\, f\left(\frac{y-b}{a}\right) \,\cdot\, \frac{1}{|a|}$$

8.3. Két képlet egységesítése

A sűrűségfüggvényre vonatkozó képleteket egységesen is fel lehet írni, hiszen a

$$g(y) \,=\, f\,(x) \,\cdot\, \frac{1}{|a|}$$

$$g(y) \,=\, f\left(\frac{y-b}{a}\right) \,\cdot\, \frac{1}{|a|}$$

képletek pozitív és negatív a esetén is helyesek.

8.4. Gyakorló feladatok

1. Tegyük fel, hogy egy speciális kemencében a hőmérséklet Celsius fokokban mérve egyenletes eloszlást követ 1000 és 1200 között. Milyen eloszlást követ a hőmérséklet Fahrenheit fokokban? Adja meg a sűrűségfüggvény képletét mindkét esetben! (Mint ismeretes: x Celsius fok $y \,=\, \frac{9}{5}\,x \,+\, 32$ Fahrenheit foknak felel meg.)

2. Tegyük fel, hogy X exponenciális eloszlást követ 2.5 paraméterrel. Milyen eloszlású az $Y \,=\, 3X$ képletel értelmezett Y valószínűségi változó? Adja meg Y

   (a) sűrűségfüggvényének

(b) eloszlásfüggvényének

a képletét!

3. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlást követ 12.5 nap várható értékkel. Mostantól számoljuk a napokat, de az alkatrészt csak fél nap múlva kezdjük el használni. Azt az időpontot jelöljük X -szel, amikor az alkatrész elromlik. Adja meg X

   (a) sűrűségfüggvényének

   (b) eloszlásfüggvényének

   a képletét!

4. Tegyük fel, hogy X standard normális eloszlást követ. Milyen eloszlást követ az

   (a) $Y = 2X$

   (b) $Y = -2X$

   (c) $Y = 2X + 3$

   valószínűségi változó?

5. Tegyük fel, hogy X standard normális eloszlást követ. Milyen eloszlást követ az

   (a) $Y = 20X$

   (b) $Y = -20X$

   (c) $Y = 20X + 30$

   valószínűségi változó?

6. Tegyük fel, hogy X normális eloszlást követ 100 és 10 paraméterekkel. Milyen eloszlást követ az

   (a) $Y = 20X$

   (b) $Y = -20X$

   (c) $Y = 20X + 30$

   valószínűségi változó?

9. Folytonos eloszlások transzformációi

Tekintsünk egy X folytonos valószínűségi változót. Az eloszlásfüggvényét jelöljük $F(x)$ -szel, sűrűségfüggvényét $f(x)$ -szel. Legyen

$$y = t(x)$$

egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton függvény, melynek

$$x = t^{-1}(y)$$

-nal jelölt inverze is folytonosan differenciálható. Ha az X valószínűségi változót behelyettesítünk a $t(x)$ függvénybe, akkor egy új Y valószínűségi változót kapunk, melyet logikus $t(\mathrm{X})$ -szel jelölni. Az Y, vagyis $t(\mathrm{X})$ eloszlásfüggvényét jelöljük $G(y)$ -nal, sűrűségfüggvényét $g(y)$ -nal.

9.1. Növekedő transzformációk

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton növekedő, akkor

$$G(y) \;=\; F\,(x) \qquad \text{azaz} \qquad G(y) \;=\; F\left(t^{-1}(y)\right)$$

Tehát az új eloszlásfüggvény nem más, mint a régi eloszlásfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett *összetett függvény*.

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) \;=\; f\,(x) \cdot \frac{dx}{dy} \qquad \text{azaz} \qquad g(y) \;=\; f\left(t^{-1}(y)\right) \;\cdot\; \left(t^{-1}(y)\right)'$$

Tehát az új sűrűségfüggvény nem más, mint a régi sűrűségfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett *összetett függvény megszorozva* a transzformációs függvény inverzének a deriváltjával.

Levezetés. Az $y = t(x)$ függvény szigorú monoton növekedő mivolta miatt az $Y < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X < x$ esemény, és ezért $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}\,(\; t(X) < y \;)$. Ezt felhasználva:

$$G(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}\,(\; X < x \;) = F\,(\; x \;) = F\left(\; t^{-1}(y) \;\right)$$

y szerinti deriválással – az összetett fügvényekre vonatkozó lánc-szabály alapján:

$$g(y) = f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left(\; t^{-1}(y) \;\right)' \;=\; f\,(x) \cdot \frac{dx}{dy}$$

Direkt levezetés a sűrűségfüggvényre. A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. Legyenek x és y egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y \;=\; t(x) \qquad \text{illetve} \qquad x \;=\; t^{-1}(y)$$

Legyenek I és J egymásnak megfelelő kis intervallumok az x illetve y pontok körül. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az $X \in I$ esemény ekvivalens az $Y \in J$ eseménnyel, és így

$$\mathrm{P}(Y \in J) = \mathrm{P}(X \in I)$$

másrészt

$$\frac{I\ hossza}{J\ hossza} \approx \frac{dx}{dy} = \left(t^{-1}(y) \right)'$$

Mivel $\mathrm{P}(X \in I) \approx f(x) \cdot I$ hossza, azt kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\mathrm{P}(Y \in J)}{J\ hossza} = \frac{\mathrm{P}(X \in I)}{J\ hossza} \approx \frac{f(x) \cdot I\ hossza}{J\ hossza} = f(x) \cdot \frac{I\ hossza}{J\ hossza} \approx$$

$$\approx f(x) \cdot \frac{dx}{dy} = f\left(t^{-1}(y) \right) \cdot \left(t^{-1}(y) \right)'$$

9.2. Csökkenő transzformációk

Eloszlásfüggvények közötti kapcsolat: Ha $y = t(x)$ szigorúan monoton csökkenő, akkor

$$G(y) = 1 - F(x) \qquad \text{azaz} \qquad G(y) = 1 - F\left(t^{-1}(y)\right)$$

Tehát az új eloszlásfüggvény úgy áll elő a régi segítségével, hogy a régi eloszlásfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett *összetett függvényt* 1 *-ből kivonjuk.*

Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat:

$$g(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| \qquad \text{azaz} \qquad g(y) = f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(t^{-1}(y)\right)'\right|$$

Tehát az új sűrűségfüggvény nem más, mint a régi sűrűségfüggvényből (mint külső függvényből) és a transzformációs függvény inverzéből (mint belső függvényből) képzett *összetett függvény megszorozva* a transzformációs függvény inverze a deriváltjának az abszolút értékével.

Levezetés. Az $y = t(x)$ függvény szigorú monoton csökkenő mivolta miatt az $Y < y$ esemény ugyanazt jelenti, mint az $X > x$ esemény, és ezért $\mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(\ X > x\ )$. Ezt felhasználva:

$$G(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \mathrm{P}(\ X > x\ ) = 1 - \mathrm{P}(\ X < x\ ) = 1 - F(\ x\ ) = 1 - F\left(t^{-1}(y) \right)$$

y szerinti deriválással – az összetett fügvényekre vonatkozó lánc-szabály alapján:

$$g(y) = -f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left(t^{-1}(y) \right)' = f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(t^{-1}(y) \right)'\right| = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Direkt levezetés a sűrűségfüggvényre. A sűrűségfüggvény képletét levezetjük az eloszlásfüggvények használata nélkül is. Legyenek x és y egymásnak megfelelő értékek, azaz

$$y = t(x) \qquad \text{illetve} \qquad x = t^{-1}(y)$$

Legyenek I és J egymásnak megfelelő kis intervallumok az x illetve y pontok körül. Ez egyrészt azt jelenti, hogy az $X \in I$ esemény ekvivalens az $Y \in J$ eseménnyel, és így

$$\mathrm{P}(Y \in J) = \mathrm{P}(X \in I)$$

másrészt

$$\frac{dx}{dy} = \left(t^{-1}(y) \right)' \approx -\frac{I\ hossza}{J\ hossza}$$

A derivált azért negatív, mert a $t^{-1}(y)$ függvény monoton csökkenő. Tehát

$$\frac{I\ hossza}{J\ hossza} \approx -\frac{dx}{dy} = -\left(\, t^{-1}(y)\,\right)'$$

Mivel $\mathrm{P}(X \in I) \approx f(x) \cdot I\ hossza,$ azt kapjuk, hogy

$$g(y) \approx \frac{\mathrm{P}(Y \in J)}{J\ hossza} = \frac{\mathrm{P}(X \in I)}{J\ hossza} \approx \frac{f(x) \cdot I\ hossza}{J\ hossza} = f(x) \cdot \frac{I\ hossza}{J\ hossza} \approx$$

$$\approx f(x) \cdot \left(-\frac{dx}{dy}\right) = f\left(\, t^{-1}(y)\,\right) \cdot \left(-\left(\, t^{-1}(y)\,\right)'\right) =$$

$$= f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = f\left(\, t^{-1}(y)\,\right) \cdot \left|\left(\, t^{-1}(y)\,\right)'\right|$$

Az abszolút érték jel azért tudta felváltani a mínusz jelet, mert a derivált értéke negatív.

9.3. Két képlet egységesítése

A sűrűségfüggvényre vonatkozó képleteket egységesen is fel lehet írni, hiszen az abszolút értékjellel írt

$$g(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$g(y) = f\left(t^{-1}(y)\right) \cdot \left|\left(t^{-1}(y)\right)'\right|$$

képletek növekedő és csökkenő esetben is érvényesek.

9.4. Lognormális eloszlások

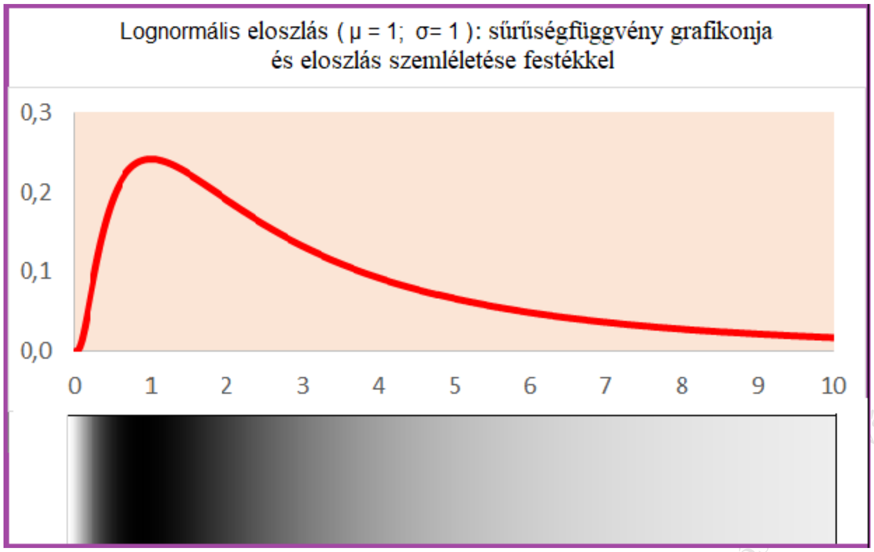
Ha a (μ, σ) paraméterű normális eloszlást az $y = \mathrm{e}^x$ transzformációnak vetjük alá, akkor a (μ, σ) paraméterű **lognormális eloszlás**hoz jutunk.

Eloszlásfüggvény:

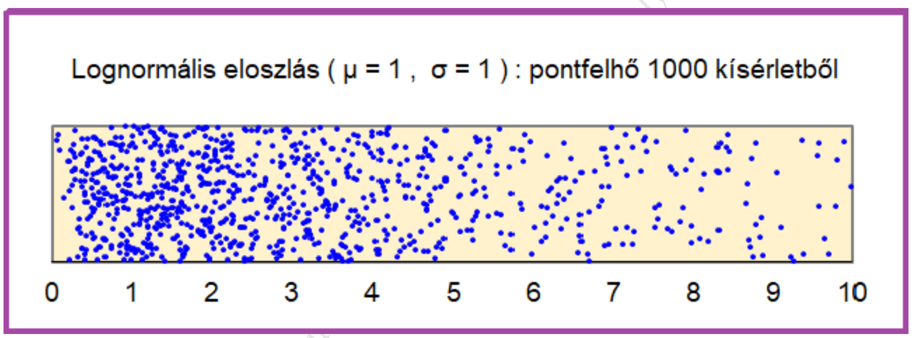
$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$

Sűrűségfüggvény:

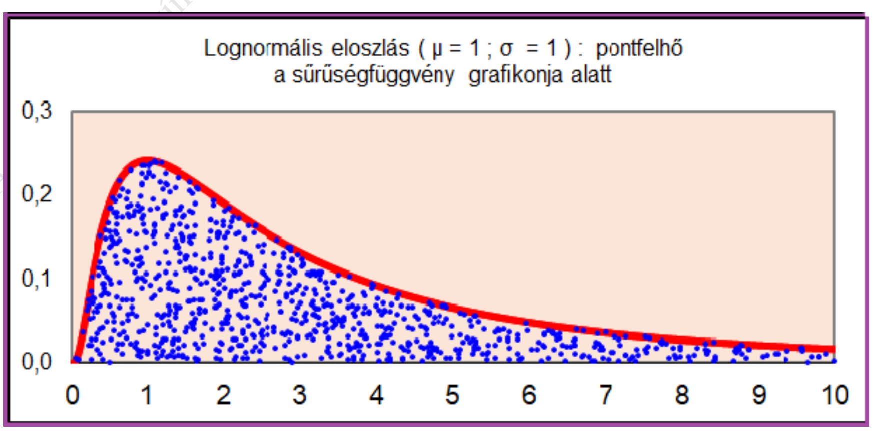
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma x}\ \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



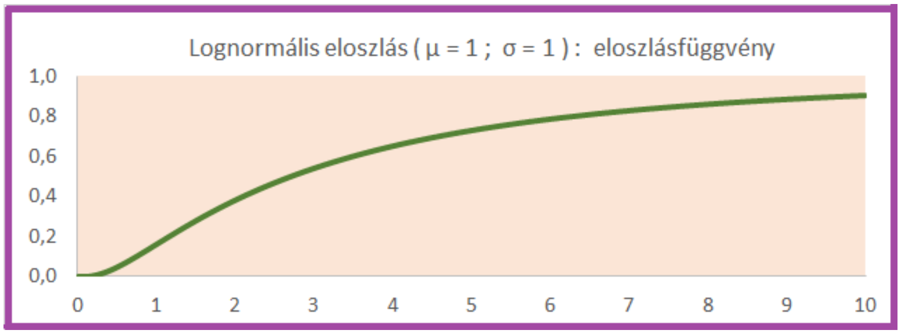
62. ábra. *Lognormális eloszlás* $(\mu = 1;\ \sigma = 1)$*: sűrűségfüggvény grafikonja és szemléltetés festékkel*



63. ábra. *Lognormális eloszlás* $(\mu = 1;\ \sigma = 1)$*: pontfelhő 1000 kísérletből*



64. ábra. *Lognormális eloszlás* $(\mu = 1;\ \sigma = 1)$*: pontfelhő a sűrűségfüggvény grafikonja alatt*



65. ábra. *Lognormális eloszlás* $(\mu = 1;\ \sigma = 1)$*: eloszlásfüggvény*

Igazolható, hogy a (μ, σ) paraméterű lognormális eloszlás várható értéke

$$e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

varianciája

$$\left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2}$$

szórása pedig

$$\sqrt{\left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2}}$$

Lognormális eloszlások alkalmazása:

A lognormális eloszlás definíciója szerint ha egy normális eloszlású valószínűségi változót az exponenciális függvénybe helyettesítünk, akkor lognormális eloszlású valószínűségi változóhoz jutunk. Másképpen mondva: egy valószínűségi változó akkor követ lognormális eloszlást, ha a valószínűségi változó logaritmusa normális eloszlást követ.

Emlékeztetünk rá, hogy

1. ha egy valószínűségi változó sok, független, *0 -hoz közeli értékeket felvevő* valószínűségi változó összegekéntként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel; illetve
2. ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó össegeként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Mivel a logaritmus függvény szorzatot összegbe visz, az exponenciális függvény pedig összeget szorzatba visz, világos, hogy

1. ha egy valószínűségi változó sok, független, *1 -hez közeli értékeket felvevő* valószínűségi változó szorzataként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó lognormális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel; illetve
2. ha egy valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* valószínűségi változó szorzataként állítható elő, akkor ez a valószínűségi változó lognormális eloszlásúnak vehető valamilyen μ és σ paraméterekkel.

Tehát lognormális eloszlást használhatunk, ha egy valószínűségi változóról tudható, érezhető, hogy sok 1 -hez közeli értékeket felvevő vagy kis szórású, független tényező szorzataként áll elő.

9.5. Monoton darabokból összetevődő transzformációk (KIDOLGOZÁS ALATT)

Tekintsünk egy folytonos eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$. Tegyük fel, hogy az $y = t(x)$ függvény szigorúan monoton folytonosan differenciálható darabokból tevődik össze. Ezen azt értjük, hogy a függvény értelmezési tartományát olyan egymásba nem nyúló $I_1; I_2; \cdots$ intervallumokra lehet bontani, hogy minden ilyen intervalumon a függvény megszorítása folytonosan differenciálható és szigorúan monoton növekedő vagy csökkenő.

Példák ilyen függvényekre:

- **Abszolút érték függvény:** $t(x) = |x|$. Az abszolút érték függvény a 0 -tól balra szigorúan monoton csökkenő, a 0 -tól jobbra szigorúan monoton növekedő.
- **Négyzetre emelés függvénye:** $t(x) = x^2$. A négyzetre emelés függvénye a 0 -tól balra szigorúan monoton csökkenő, a 0 -tól jobbra szigorúan monoton növekedő.
- **Színusz függvény:** $t(x) = \sin(x)$. A színusz függvény π hosszúságú intervallumokon váltakozva szigorúan monoton csökkenő, illetve szigorúan monoton növekedő.
- **Törtész függvény:** $t(x) = \{x\}$, mely a azt mutatja, hogy egy valós szám mennyivel nagyobb a nála kisebb vagy egyenlő egész számok legnagyobbikánál. Pozitív x -ekre a formula:

$$\begin{array}{lll} \{x\} = x & \text{ha} & x \in [\,0;1\,) \\ \{x\} = x-1 & \text{ha} & x \in [\,1;2\,) \\ \{x\} = x-2 & \text{ha} & x \in [\,2;3\,) \\ \vdots & & \end{array}$$

  Negatív x -ekre pedig:

$$\begin{array}{lll} \{x\} = x+1 & \text{ha} & x \in [\,-1;0\,) \\ \{x\} = x+2 & \text{ha} & x \in [\,-2;-1\,) \\ \vdots & & \end{array}$$

  A törtrész függvény a szomszédos egész számok közötti 1 hosszúságú intervallumokon szigorúan monoton növekedő.

- **Mantissza függvény:** $t(x) = \text{mantissza}(x)$, az x szám mantisszája, mely
  1 -nél nagyobb x -re így értelmezett:

$$\begin{array}{lll} \text{mantissza}(\,x\,) = x & \text{ha} & x \in [\,1;10\,) \\ \text{mantissza}(\,x\,) = x/10 & \text{ha} & x \in [\,10;100\,) \\ \text{mantissza}(\,x\,) = x/100 & \text{ha} & x \in [\,100;1000\,) \\ \vdots & & \end{array}$$

  1 -nél kisebb pozitív x -re:

$$\begin{array}{lll} \text{mantissza}(\,x\,) = x & \text{ha} & x \in [\,0.1;1\,) \\ \text{mantissza}(\,x\,) = 10 \cdot x & \text{ha} & x \in [\,0.01;0.1\,) \\ \text{mantissza}(\,x\,) = 100 \cdot x & \text{ha} & x \in [\,0.001;0,01\,) \\ \vdots & & \end{array}$$

  negatív x -re, illetve 0 -ra:

$$\begin{array}{lcl} \text{mantissza}(\,x\,) & = & =\text{mantissza}(|x|) \\ \text{mantissza}(\,0\,) & = & 0 \end{array}$$

Néhány konkrét függvényérték bizonyára segíti a mantissza függvény jelentésének megértését:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{mantissza}(\,4.07\,) & = & 4.07 \\
\text{mantissza}(\,40.7\,) & = & 4.07 \\
\text{mantissza}(\,407\,) & = & 4.07 \\
\text{mantissza}(\,4070\,) & = & 4.07 \\
 & & \\
\text{mantissza}(\,2.56\,) & = & 2.56 \\
\text{mantissza}(\,0.256\,) & = & 2.56 \\
\text{mantissza}(\,0.0256\,) & = & 2.56 \\
\text{mantissza}(\,0.00256\,) & = & 2.56 \\
 & & \\
\text{mantissza}(\,-0.00256\,) & = & 2.56
\end{array}
$$

A számok mantisszáját akkor használjuk a gyakorlatban, amikor a számokat ún. exponenciális alakban írjuk fel, ami pozitív számok esetén egy 1 és 10 közötti szám és 10 -nek egy egész kitevős hatványa szorzatát jelenti:

$$
\begin{array}{lcl}
4.07 & = & 4.07 \cdot 10^0 \\
40.7 & = & 4.07 \cdot 10^1 \\
407 & = & 4.07 \cdot 10^2 \\
4070 & = & 4.07 \cdot 10^3 \\
 & & \\
2.56 & = & 2.56 \cdot 10^0 \\
0.256 & = & 2.56 \cdot 10^{-1} \\
0.0256 & = & 2.56 \cdot 10^{-2} \\
0.00256 & = & 2.56 \cdot 10^{-3} \\
 & & \\
-0.00256 & = & -2.56 \cdot 10^{-3}
\end{array}
$$

A mantissza függvény a 0-tól jobbra a szomszédos 10 -hatványok közötti intervallumokon szigorúan monoton növekedő, a 0-tól balra a szomszédos 10 -hatványok közötti intervallumokon szigorúan monoton csökkenő.

Ha az $f(x)$ sűrűségfügggvényű eloszlást az $y = t(x)$ transzformációval transzformáljuk, akkor egy új eloszlást kapunk, melynek sűrűségfüggvényét jelöljük $g(y)$ -nal. $g(y)$ megadása céljából jelöljük a $t(x)$ transzformációnak az egyes $I_1, I_2, \cdots$ intervallumokra való megszorítását $t_1(x), t_2(x), \cdots$ -szel. Mivel az $y = t_1(x), y = t_2(x), \cdots$ függvények mindegyike invertálható, beszélhetünk az ő $x = t_1^{-1}(y), x = t_2^{-1}(y), \cdots$ inverzeikről.

Ekkor az új $g(y)$ sűrűségfüggvény így áll elő a régi $f(x)$ -ből:

$$g(y) = \sum_k f\left(t_k^{-1}(y)\right) \cdot \left(t_k^{-1}(y)\,|\right)'\big|$$

ahol az összegzés azokra a k indexekre vonatkozik, melyekre az y érték benne van az $y = t_k(x)$ függvény értékkészletében, azaz a $t_k^{-1}(y)$ inverz-függvényérték definiált.

A transzformációval kapott eloszlás ...
FOLYT. JÖN MAJD IDE

9.6. Gyakorló feladatok

1. A λ -paraméterű exponenciális eloszlást az $y = \sqrt{x}$ transzformációval transzformáljuk. Mi lesz a transzformációval kapott eloszlás
   - eloszlásfüggvénye?
   - sűrűségfüggfüggvénye?
2. A λ -paraméterű exponenciális eloszlást az $y = x^2$ transzformációval transzformáljuk. Mi lesz a transzformációval kapott eloszlás
   - eloszlásfüggvénye?
   - sűrűségfüggfüggvénye?
   - várható értéke?
3. A standard normális eloszlást az $y = x^2$ transzformációval transzformáljuk.
   - eloszlásfüggvénye?
   - sűrűségfüggfüggvénye?
   - várható értéke?

   A kapott eloszlás neve: **elsőrendű khínégyzet eloszlás**. *(Figyelem: Az $y = x^2$ függvény a $-\infty, 0$ intervallumon csökken, a $0, \infty$ intervallumon nő!)*
4. Tegyük fel, hogy egy Y valószínűségi változó sok független 1-közeli értékeket felvevő valószínűségi változó szorzata. Y logaritmusát jelöljük X -szel: $X = \ln(Y)$. Mivel a logaritmus képzése szorzatot összegbe visz, az X valószínűségi változó sok független 0-közeli értékeket felvevő valószínűségi változó összege. Ezért X eloszlást normálisnak vehetjük valamilyen μ, σ paraméterekkel. Mivel $Y = e^X$, az Y eloszlását úgy kaphajuk meg, hogy a normális eloszlást az $y = e^y$ transzformációnak vetjük alá. A transzformációval kapott eloszlás neve: **lognormális eloszlás** μ, σ paraméterekkel. Határozza meg a lognormális eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

10. Diszkrét és folytonos eloszlások keverése *(Extra tananyag)*

Az alábbi első feladat kissé erőltetett, de – amiről szól – könnyen elképzelhető és elmagyarázható, és – szimulációval – a kísérlet könnyen meg is valósítható. A második feladat talán életszerűbb.

1. Feladat: Valaki – játékos vidám jó kedvében – feldob egy dobókockát. Ezután

- ha hatos jön ki, akkor generál egy valós 0 és 7 közötti, egyenletes eloszlást követő véletlen számot a `7*RAND()`, magyarul `7*VÉL()` Excel utasítással,
- ha nem hatos jön ki, akkor a `RANDBETWEEN(1;5)`, magyarul `VÉLKÖZÖTT(1;5)` Excel utasítással generál egy egész számot 1 és 5 között egyenletes eloszlás szerint.

Legyen X a generált szám. Milyen eloszlást követ X?

Megoldás: Nem szorul különösebb magyarázatra, hogy X eloszlása egy folytonos és egy diszkrét eloszlásból keveréssel adódik:

- a folytonos eloszlás az egyenletes eloszlás a $(0;7)$ intervallumon, melynél a sűrűségfüggvény értéke $1/7$ -del egyenlő a $(0;7)$ intervallumban,
- a diszkrét eloszlás az egyenletes eloszlás az $1,2,3,4,5$ számok halmazán, melynél mind az öt pontban a súlyfüggvény értéke $1/5$ -del egyenlő.

A keverésnél

- a folytonos rész $1/6$ súlyt kap, hiszen a hatos $1/6$ valószínűséggel jön ki,
- a diszkrét rész $5/6$ súlyt kap, hiszen a nem-hatos valószínűsége $5/6$.

Ha az eloszlását szétkent egységnyi festékkel szemléltetjük, akkor ez az eloszlás így képzelhető el:

- először $1/6$ festékmennyiséget szétkenünk a $(0;7)$ intervallumon egyenletesen, vagyis úgy, hogy a festéksűrűség $(0;7)$ intervallumban mindenhol $1/6 \cdot 1/7 = 1/42$ legyen:

$$f(x) = 1/42 \qquad (0 < x < 7)$$

- ezek után az $1,2,3,4,5$ számok mindegyikére ráhelyezzük a maradék $5/6$ festékmennyiség $1/5$ részét, vagyis az $1,2,3,4,5$ számok mindegyikére $5/6 \cdot 1/5 = 1/6$ nagyságú tömegpont kerül

$$p(x) = 1/6 \qquad (x = 1,2,3,4,5)$$

Hogy néz ki ennek az eloszlásnak az eloszlásfüggvénye? Legyen az Olvasó feladata a grafikon gondos elkészítése!

2. Feladat: Küzdelem a zavaró fény ellen! Él egy barátom északon, a sarkkörön túl, ott ahol télen mindig sötét van. A házuk előtt világiít a fehér hó és egy rosszul elhelyezett utcai lámpa. Barátom kisfia utálja, hogy a lámpa bevilágít a szobájába. Ezért minden délután pontosan 18 órakor (vacsora előtt) – egy jól irányzott lövéssel – megpróbálja csúzlival kilőni. A lámpa magasan van, ezért minden lövése csak 0.01 valószínűséggel talál. A tél legelején egy sötét napon 0 órakor betettek egy új izzót, aminek élettartama exponenciális eloszlást követ 10 hét várható értékkel, vagyis – az időt hetekben mérve – 0.1 paraméterrel. Kérdések:

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a fiú az első sikert
   (a) az első napon elkönyvelheti magának?
   (b) a k -ik napon könyvelheti el magának?
   (c) az első héten könyvelheti el magának?

(d) a k -ik héten könyvelhet el magának?

2. Mi a valószínűsége annak, hogy már az első héten

   (a) az izzót cserélni kell, mert a fiú kilövi?

   (b) az izzót cserélni kell, mert – bár a fiú nem tudja kilőni – de kiég?

   (c) az izzót cserélni kell?

3. Mi a valószínűsége annak, hogy

   (a) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell, mert a fiú kiövi? (Az időt hetekben mérjük. $x > 0$ valós.)

   (b) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell, mert – bár a fiú nem tudja kilőni – de kiég?

   (c) az x időpillanat előtt az izzót cserélni kell?

Megoldás: Jó szórakozást a megoldáshoz!

11. A főnökök halmaza nem mérhető *(Extra tananyag)*

Ez a fejezet egyáltalán nem része a tananyagnak. Amit itt lehet megérteni, annak nincs haszna a mindennapi gyakorlatban. Csak azok olvassák el, akik a matematika alkalmazhatósága mellett értékelik a matematika logikai tisztaságát is.

Tekintsük a balról zárt, jobbról nyitott $[0;1)$ intervallumot.

11.1. Trükkös eltolás

Az intervallum pontjaival kapcsolatban bevezetünk egy trükkös eltolást. Ha x egy eleme a $[0;1)$ intervallumnak, és r egy 1 -nél kisebb pozitív szám, akkor $x+r$ -et joggal nevezhetjük az x pont r -rel való eltoljának. $x+r$ nyilván kisebb 2 -nél.

Két eset lehet. Az egyik az, hogy $x+r$ még bele esik a $[0;1)$ intervallumba, a másik, hogy $x+r$ nagyobb 1 -nél. Ez utóbbi esetben viszont $x+r-1$ eleme a $[0;1)$ intervallumnak. Az $x+r-1$ érték azt mutatja, hogy $x+r$ mennyivel nagyobb 1 -nél. Az első esetben az $x+r$ számot, a második esetben az $x+r-1$ számot az x szám r -rel való **trükkös eltolt**jának nevezzük.

11.2. Barátok és osztályok

Azt mondjuk, hogy két 0 és 1 közötti szám **barát**, ha az egyik a másiknak valamilyen racionális számmal való trükkös eltoltja. A barátság relációját úgy is megfogalmazhatjuk, hogy két szám egymás barátja, ha egymástól való távolságauk racionális szám. Nyilvánvaló, hogy a jóbarátság ekvivalencia reláció, ami a $[0;1)$ intervallumot diszjunkt **osztályok**ra bontja. Minden osztályban megszámlálhatóan végtelen sok elem van. Az osztályok száma koninuum.

11.3. Főnökök

Képzeljük el, hogy minden osztályban választanek egy jól definiált **főnök**öt. Azzal, hogy ezt hogyan teszik, mi nem foglalkozunk, legyen ez az osztály belső titka. Ezáltal kontinuum sok főnök lesz. A főnökök halmazát jelöljük F -fel.

Legyen r egy racionális szám. Ha minden főnököt az r számmal trükkösen eltolunk, akkor egy újabb kontinuum számosságú halmazhoz jutunk, amit F_r -rel jelölünk. Mivel a hosszúság invariáns az eltolással kapcsolatban, és az F_r halmaz eltolással származik F -ből, fennáll, hogy

$$F_r \text{ hossza} \quad = \quad F \text{ hossza}$$

Tehát minden 0 és 1 között r racionális szám esetén az F_r halmaznak ugyanannyi a hossza, mint az F halmaznak.

11.4. Ellentmondásra jutunk

Világos, hogy ha az összes 0 és 1 közötti racionális számmal kapcsolatban tekintjük az F_r halmazokat, akkor ezek diszjunkt halmazok, és egyesítésük a $[0;1)$ intervallum. Ezért

$$[0;1) \text{ hossza } = \sum_{r \text{ racionális szám 0 és 1 között}} F_r \text{ hossza}$$

Itt a bal oldalon 1 áll, a jobb oldalon pedig egy olyan szumma, ami megszámlálhatóan végtelen sok tagból áll, és minden tag egyforma.

Megszámlalhatóan végtelen sok egyforma tag összege nem lehet 1 -gyel egyenlő, ezért ellentmondásra jutottunk. Az ellentmondás abból származik, hogy az F halmaz hosszáról volt bátorságunk beszélni. Pórul jártunk, mert ellentmondásra jutottunk.

Ha el akarjuk kerülni az ellentmondást, akkor nem szabad azt képzelni, hogy minden részhalmaznak van jól definiált hossza, és emellett még az eltolással kapcsolatos invarianciát is fenntartjuk.

Mivel az eltolással kapcsolatos invariancia gondolatmneteinkben nélkülözhetetlen lemondunk arról, hogy minden részhalmaznak van jól definiált hossza. Hasonlóképpen, egy olyan valószínűségszámítási probléma esetén, amikor az eseménytér számossága nagyobb, mint megszálálhatóan végtelen, nem lehet minden részhalmaznak van jól definiált valószínűsége.

A további részletekbe itt most nem megyünk bele, csak megjegyezzük, hogy

- az intervallumok valószínűségeit mindig egyértelműen lehet definiálni,
- és ha véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok halmaznak lehet definiálni a valószínűségét, akkor ezek
  - komplementerének
  - úniójának
  - metszetének

  szintén lehet definiálni a valószínűségét.

Mivel a gyakorlatban felmerülő részhalmazokhoz az intervallumobkól kiindulva a felsorolt halmazműveletekkel jutunk, a gyakorlati alkalmazásokan felbukanó halmazoknak mindig lehet a valósznínűségéről beszélni. Ahhoz, hogy olyan halmazzal legyen valakinek dolga, aminek nincs valószínűsége, olyan jellegű absztrakt dolgokkal kell foglalkoznia, mint ahogy a főnökök halmazát fentebb értelmeztük.

12. A nagy számok *erős törvénye* eseményekre *(Extra tananyag)*

12.1. A probléma megfogalmazása

Egy átlászó dobozba egymás után teszünk piros és fehér golyókat. A színt véletlenszerűen választjuk. A golyó színe minden alkalommal – az előzőektől függetlenül – 0.6 valószínűséggel piros, 0.4 valószínűséggel fehér. És ezt a folyamatot – a golyók rakosgatását – soha sem hagyjuk abba. Bár az életünk véges, és a gyakorlatban nem tudjuk megtenni, most mégis úgy képzeljük, hogy egy-egy kísérlet egy-egy végtelen hosszú sorozatot ad nekünk. A színsorozat első néhány – mondjuk tíz – tagját le tudjuk írni, például adódhat ez:

```
PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR
```

Minden lépés után látjuk a doboz tartalmát:

```
PIROS

PIROS, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS,

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS

PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR
```

Ha minden lépés után tekintjük a pirosak arányát a dobozan, akkor egy tíz hosszúságú számsorozatot kapunk:

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{4}{8}, \quad \frac{5}{9}, \quad \frac{5}{10}$$

Mivel a színek sorozatát a véletlen alakítja, az arányok sorozata is véletlentől függ. Ha a színek sorozatát a végtelenségig tekintjük, akkor az arányok sorozata is végtelen hosszú lesz. Ez a végtelen sorozat – véletlentől függően –lehet konvergens is, lehet divergens is. Ha netán konvergens, akkor a határértéke elvileg akármi lehet. Lehet például 0.6, és lehet bármi más is.

Az alábbiakban azt az eseményt fogjuk vizsgálni, hogy

a pirosak arányainak a sorozata konvergál-e a 0.6 értékhez (vagy nem)

12.2. A valószínűség meghatározása

Ebben az alfejeztben megmutatjuk, hogy

annak a valószínűsége, hogy
a pirosak arányainak a sorozata konvergál a 0.6 értékhez,
1-gyel egyenlő

A valószínűség meghatározása céljából valószínűségi változóknak egy végtelen sorozatát vezetjük be:

- az X_1 valószínűségi változó értéke legyen 1, ha az első szín piros, 0, ha fehér
- az X_2 valószínűségi változó értéke legyen 1, ha a második szín piros, 0, ha fehér
- az X_3 valószínűségi változó értéke legyen 1, ha a harmadik szín piros, 0, ha fehér
- és így tovább ...

Ha a színsorozat első tíz eleme a fentebb példaként vett

`PIROS, PIROS, FEHÉR, FEHÉR, FEHÉR, PIROS, FEHÉR, PIROS, PIROS, FEHÉR`

színsorozat, akkor a most definiált valószínűségi változó sorozat első tíz eleme az alábbi:

$$1, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \quad 0$$

Ha a színsorozat másképpen alakul, akkor az

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4, \quad X_5, \quad X_6, \quad X_7, \quad X_8, \quad X_9, \quad X_{10}$$

értékek mások lesznek. Ha a színek sorozatát a végtelenségig tekintjük, akkor végtelen sok X_i véletlen értéket kapunk.

Ezekkel az X_i valószínűségi változókkal a pirosak aránya egyszerűen kifejezhető. Az N -ik lépés után a pirosak aránya nyilván az

$$\frac{X_1 \ + \ X_2 \ + \ \ldots + \ X_N}{N}$$

átlag adja meg. Tehát igazolandó, hogy 1 a valószínűsége annak, hogy $N \to \infty$ esetén

$$\frac{X_1 \ + \ X_2 \ + \ \ldots + \ X_N}{N} \quad \to \ 0.6$$

A határéték relációt átírhatjuk így:

$$\frac{X_1 \ + \ X_2 \ + \ \ldots + \ X_N}{N} \ - \ 0.6 \quad \to \ 0$$

ami nyilván ekvivalens azzal, hogy

$$\left(\frac{X_1 \ + \ X_2 \ + \ \ldots + \ X_N}{N} \ - \ 0.6 \right)^4 \ \to \ 0$$

Ennek a trükknek, hogy negyedik hatványra emelünk, lejjebb fogjuk látni a hasznát. Ismeretes, hogy annak igazolásához, hogy egy pozitív tagokból álló sorozat 0 -hoz tart, elegendő azt belátni, hogy a tagokból alkotott végtelen sor konvergens. Ezért elég azt belátni, hogy

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 \ + \ X_2 \ + \ \ldots + \ X_N}{N} \ - \ 0.6 \right)^4 \ < \ \infty$$

Mivel a most felírt végtelen sor értéke véletlentől függ, az összeg egy Z valószínűségi változót definiál:

$$Z \;=\; \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4$$

Mivel biztos, hogy minden tag értéke nagyobb vagy egyenlő 0 -nál, a Z valószínűségi változónak az értéke is biztos, hogy nagyobb vagy egyenlő 0 -nál. Viszont amikor a véletlen úgy hozza, a sor divergálhat a végtelenhez. Ilyenkor a Z valószínűségi változó értékét értelemszerűen végtelennek tekintjük.

Ha egy nemnegatív valószínűségi változó pozitív valószínűséggel végtelen értékű, akkor várható értéke nyilván végtelen. Ezért ahhoz, hogy egy nemnegatív valószínűségi változóra belássuk, hogy 1 valószínűséggel véges értékű, elég azt belátni, hogy a várható értéke véges. Ezért most meg fogjuk mutatni, hogy Z várható értéke véges:

$$\mathrm{E}\,(Z) \;=\; \mathrm{E}\left(\sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \right) \;<\; \infty$$

A várható érték képzést és a szummázást fel lehet cserélni, ezért azt kell belátnunk, hogy

$$\mathrm{E}\,(Z) \;=\; \sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{E}\left(\left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \right) \;<\; \infty$$

12.2.1. Egy egyenlőtlenség állítása és igazolása

E célból most azt állítjuk, hogy minden N -re teljesül az

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{X_1 \;+\; X_2 \;+\; \ldots + \; X_N}{N} \;-\; 0.6 \right)^4 \right) \;<\; \frac{4}{N^2}$$

egyenlőtlenség. A becslés az igazolása céljából a zárójelben álló kifejezést átírjuk így:

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \; (X_N - 0.6)}{N} \right)^4 \right)$$

A hatványozást pedig külön végezzük el a számlálóban és a nevezőben:

$$\mathrm{E}\left(\frac{(\;(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \; (X_N - 0.6)\;)^4}{N^4} \right)$$

Gondoljuk most meg, hogy amikor a számlálóban álló

$$(\;(X_1 - 0.6) \;+\; (X_2 - 0.6) \;+\; \ldots + \; (X_N - 0.6)\;)^4$$

negyedik hatványt kifejtjük, milyen jellegű tagok keletkeznek!

Leszen olyan tagok, melyekben valamelyik

$$(X_i - 0.6)$$

kifejezés az első hatvánnyal szerepel, további tényezőkkel megszorozva. Mivel ez a tényező független a többi tényezőtől, a várható érték tényezőnként vehető. Mivel

$$\mathrm{E}(X_i - 0.6) = 0$$

ezeknek a tagoknak a várható értéke 0, így ezek a tagok a várható érték számításakor eldobhatóak.

Maradnak az olyan tagok, melyekben minden $(X_i - 0.6)$ tag legalább második hatványon szerepel. Ilyen tag kétféle van:

$$(X_i - 0.6)^4$$

alakú, illeve

$$(X_i - 0.6)^2 \cdot (X_j - 0.6)^2$$

alakú, ahol $i \neq j$. Mivel $(X_i - 0.6)$ abszolút értéke 1-nél kisebb, az ilyen tagok abszolút értéke 1-nél, kisebb, ezért a várható értékeik is kisebbek 1 -gyél.

Most megszámoljuk, hogy hány ilyen tag adódik. Az

$$(X_i - 0.6)^4$$

jellegű tagok száma nyilván N. Az

$$(X_i - 0.6)^2 \cdot (X_j - 0.6)^2$$

jellegű tagok száma, ahol $i \neq j$, egyenlő $\binom{N}{2} \cdot \binom{4}{2}$ -vel, hiszen az i, j indexpár választása $\binom{N}{2}$ lehetőséget ad, és adott i, j indexpár esetén a negyedik hatvány kifejtésénél, ami egy négy tényezős szorzat kifejtését jelenti, a négy tényező $\binom{4}{2}$ lehetőséget ad az i, j indexpár választására. Vegyük észre, hogy

$$\binom{N}{2} \cdot \binom{4}{2} = \binom{N}{2} \cdot 6 = 3N(N-1) < 3N^2$$

Mindebből kiadódik, hogy

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{(X_1 - 0.6) + (X_2 - 0.6) + \ldots + (X_N - 0.6)}{N} \right)^4 \right) < \frac{N + 3N^2}{N^4} < \frac{4 \cdot N^2}{N^4} < \frac{4}{N^2}$$

12.3. Az általános eset megfogalmazása

Természetesen a 0.6 valószínűségérték tetszőleges p -re cserélhető:

Ha a minden lépésnél
– az előzőektől függetlenül –
p **valószínűséggel jön piros,**
$1 - p$ **valószínűséggel fehér,**
akkor
annak a valószínűsége, hogy a pirosak arányainak a sorozata konvergál a p **értékhez,** 1 **-gyel egyenlő .**

12.4. Miért hívjuk *erős törvény*t erősnek?

Valószínűségszámítás tanulmányaink kezdetén általában – tapasztalatinkra hivatkozva leszögezzük –, hogy nagy számú független kísérlet esetén az esemény relatív gyakorisága közel van az esemény valószínűségéhez. Annak ellenére, hogy az itt használt kifejezések, mint "nagy számú kísérlet", "közel van" a hétköznapi élet szintjén többnyire elfogadhatóak, most mégis örülni lehet annak, hogy ezeket a kifejezéseket ki tudtuk cserélni a konvergencia fogalmára, hiszen levezettük, hogy **egy esemény relatív gyakoriságainak sorozata 1 valószínűséggel konvergál az esemény valószínűségéhez**. Ennek a matematikai állításnak a neve: **nagy számok erős törvénye a relatív gyakoriságokra**. Ez "erős" jelzővel itt arra utalunk, hogy a konvergencia tényét 1 valószínűséggel állítjuk – más, itt nem részletezendő "gyengébb" konvergencia foglamakkal szemben.