Valószínűségszámítás
4. RÉSZ
Zárthelyi és vizsga feladatok gyűjteménye

Vetier András

2017. augusztus 23.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2017. augusztus 21.

Vetier András

1. Első zárthelyik

1.1. Első zárthelyi, 2016-10-10, 8 óra

1. (a) Az egész értékeket felvevő X valószínűségi változó (baloldali) eloszlásfüggvénye a 7 helyen 0.13 -mal egyenlő. Magyarázza el ennek a ténynek a jelentését a valószínűség fogalma segítségével!

   (b) Írja le azt a képletet, mely az eloszlásfüggvényt a súlyfüggvénnyel kifejezve adja meg!

   (c) Írja le azt a képletet, mely az eloszlásfüggvény segítségével adja meg az $\{A, A+1, A+2; \ldots, B\}$ intervallum valószínűségét! (A, B egész számok.)

2. Egy erdőben ismeretlen számú vaddisznó él. A vaddisznók számának becslése céljából 80 vaddisznót piros festékkel megjelöltek, majd néhány hét eltelte után megszámolták, hogy 50 véletlenszerűen választott vaddisznó között hány pirossal megjelölt akad. Tegyük fel, hogy 39.

   (a) Adjon becslést az erdőben élő vaddisznók számára egyetlen szám formájában!
   Meg kell magyarázni, hogy honnan, hogyan jön ki ez a szám.

   (b) Adja meg a $\mathrm{P}(39 \text{ piros})$ valószínűséget matematikai képlettel a megfelelő paraméterek segítségével!

   (c) Adja meg a $\mathrm{P}(39 \text{ piros})$ valószínűséget Excel képlettel a megfelelő paraméterek segítségével!

   (d) Az lentebbi táblázatban a hegységben élő vaddisznók ismeretlen számának függvényében megadtuk a $\mathrm{P}(39 \text{ piros})$ valószínűséget.
   Az (a) kérdésre adott válaszát egészítse ki egy-egy értelmes alsó- és felső becsléssel!
   Indokolja meg, miért gondolja értelmesnek az Ön által választott alsó- és felső becsléseket!

vaddisznók száma az erdőben	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135
$\mathrm{P}(39 \text{ piros})$	.000	.000	.000	.050	.175	.167	.091	.038	.013	.004	.001	.000

3. Tekintünk egy gyufaszálat. Párhuzamos egyeneseket húzunk egy nagy papírra egymástól gyufahossznyi távolságra. A gyufát elég magasról hetykén leejtjük. Mi a valószínűsége annak, hogy a gyufa metszi valamelyik egyenest?

4. Egy városban az évi 3 lakástűz eset fele akkora valószínűségű, mint a 2.

   (a) Milyen eloszlást követ az évi lakástűz esetek száma? Miért?
   Korrekt indoklást kérünk.

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy évben nincs lakástűz eset?

   (c) Egy év alatt hány lakástűz eset a legvalószínűbb?

5. **Extra feladat iMSc diákoknak.** Párhuzamos egyeneseket húzunk egy nagy papírra egymástól 10 cm távolságra. Az egyenesekre merőlegesen újabb párhuzamos egyeneseket húzunk 20 cm távolságra. Egy 5 cm hosszú gyufát elég magasról hetykén leejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a gyufa nem metsz semmilyen egyenest sem?

1.2. Első zárthelyi, 2016-10-10, 9 óra

1. (a) A B eseménynek az A eseményre vonatkozó feltételes relatív gyakorisága mit jelent?
   Egy ügyes példán keresztül magyarázza el!

   (b) Mi köze van a feltételes relatív gyakoriságnak a feltételes valószínűséghez?
   Magyarázza el röviden és világosan!

   (c) Hogyan lehet a feltételes valószínűséget feltétel nélküliekből kiszámolni?
   Adja meg a formulát!

2. Tegyük fel, hogy egy teremben, ahol egy ünnepi fogadást rendeznek, 100 hely van a vendégek számára. Gondolván, hogy néhány meghívott vendég betegség vagy valami más ok miatt távolmarad a fogadásról, 105 vendéget hívnak meg. Feltéve, hogy minden vendég a többitől függetlenül $p = 0.07$ valószínűséggel nem jön el a fogadásra, mi annak a valószínűsége, hogy gubanc támad, vagyis a fogadáson 100-nál több vendég jelenik meg?

   (a) Írja fel a valószínűséget matematikai képlettel!

   (b) Írja fel a valószínűséget Excel képlettel!

   (c) Hány vendég megjelenése a legvalószínűbb?

   (d) Hogyan lehet Excel segítségével meghatározni azt, hogy $p = 0.2$ esetén hány vendéget lehet meghívni, ha a gubanc valószínűségét $0,01$ alatt akarjuk tartani?

3. Tekintünk egy gyufaszálat. Párhuzamos egyeneseket húzunk egy nagy papírra egymástól két gyufahossznyi távolságra. A gyufaszálat elég magasról hetykén leejtjük. Mi a valószínűsége annak, hogy a gyufa metszi valamelyik egyenest úgy, hogy az egyenessel bezárt szöge kisebb 45 foknál?

4. Egy országban az évi 2 hármasiker ugyanolyan valószínű, mint a 4.

   (a) Milyen eloszlást követ az évi hármasikrek száma? Miért?
   Korrekt indoklást kérünk.

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy évben nincs hármasiker?

   (c) Egy év alatt hány hármasiker a legvalószínűbb?

1.3. Első zárthelyi, 2016-10-26, pótzh

1. (a) Egerész Professzor akadémiai székfoglalójának vázlatában 10 éves kisfia meglátta, hogy egy mama-egér kölykeinek száma olyan valószínűségi változó, melynek az 5 helyen a baloldali eloszlásfüggvénye 1/10, a jobboldali eloszlásfüggvénye 9/10. A kisfiú elcsodálkozott: Hát még itt is a politikáról van szó! Egerész Professzor érthetően elmagyarázta, hogy ezek a sok éves kutatáson alapuló komoly eredmények mit jelentenek. Ön is így magyarázza el!

   Egy 10 éves gyerek általában nem tudja, mit jelent a "valószínűség", ezért ezt a fogalmat most itt nem szabad használni!

   (b) Magyarázza el "egyetemi színten" is, hogy mit jelentenek a fenti tények!

   (c) Számolja ki annak a valószínűségét, hogy egy mama-egér kölykeinek száma pontosan 5?

2. Tegyük fel, hogy a kóbor macskák 5 százaléka színvak. Valaki a kóbor macskákat vizsgálja egy (kissé vacak) macska-teszttel, hogy a macska színvak-e vagy sem. Tegyük fel, hogy a teszt mindkét irányban tévedhet: színeket látó kóbor macska esetén 0.9, színvak kóbor macska esetén 0.8 a valószínűsége annak, hogy a teszt helyes eredményt ad. Ha egy kóbor macskával kapcsolatban 3 független vizsgálat közül az első azt jelzi, hogy a macska látja a színeket, de a második és a harmadik azt jelzi, hogy színvak, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a macska színvak?

3. Egerész Professzor reggelente busszal és metróval megy az egyetemre. Mindegyikre a végállomásán száll fel. A busz minden egész órakor indul a végállomásról, és utána szabályosan 12 percenként. A metró is minden egész órakor indul a végállomásról, és utána szabályosan 6 percenként.

   (a) Egészítse ki a szöveget Egerész Professzor olyan szokásaival és/vagy olyan körülményekkel, hogy jogos legyen feltételezni azt, hogy a várakozási idő a buszra és a várakozási idő a metróra független, egyenletes eloszlású valószínűségi változók!

   Ne sokat írjon, hanem okosat! Olyan szokásokat és/vagy körülményeket találjon ki, ami alátámasztja azt, hogy bár a járművek pontos menetrend szerint indulnak, mégis:

   - *felbukkan a véletlen,*
   - *az egyenletes eloszlás mindkétszer jogos,*
   - *a függetlenség elfogadható!*

   (b) Mi a valószínűsége, hogy Egerész Professzornak többet kell várnia a metróra, mint a buszra, és a várakozással eltöltött összes ideje több, mint 6 perc?

   A (b) kérdés egyetlen kérdés!

4. A "Fussunk együtt!" mozgalom keretében tegnapelőtt futóversenyt rendeztek a Pilisben. A kérdőívek tegnapi elemzése után a Bölcs Statisztikus kijelentette, hogy egy emberben a 2 kullancs valószínűsége kétszer akkora, mint a 4 kullancs valószínűsége.

   (a) Holnap én is végigfutom a pályát. Mi a valószínűsége annak, hogy megúszom kullancs nélkül?

   A Bölcs Statisztikus kijelentetésére támaszkodva képlettel adja meg a valószínűség numerikus értékét!

   (b) Az erőpróba után bennem hány kullancs a legvalószínűbb?

   Ne csak az eredményt közölje! Látszódjon, hogy honnan veszi a választ!

   (c) Indokolja meg, miért éppen azt az eloszlást használta, aminek segítségével válaszolt az (a) és (b) kérdésekre! *Korrekt indoklást kérünk.*

5. **Extra feladat iMSc diákoknak.** Párhuzamos egyeneseket húzunk egy nagy papírra egymástól 5 cm távolságra. Az egyenesekre merőlegesen újabb párhuzamos egyeneseket húzunk 20 cm távolságra. Egy 10 cm hosszú gyufát elég magasról hetykén leejtünk. Mi a valószínűsége annak, hogy a gyufa nem metsz semmilyen egyenest sem?

1.4. Első zárthelyi, 2016-12-14, pótpótzh

1. A kóbor macskák 5 százaléka színvak. Valaki a kóbor macskákat vizsgálja egy (kissé vacak) macska-teszttel, hogy a macska színvak-e vagy sem. Tegyük fel, hogy a teszt mindkét irányban tévedhet: színeket látó kóbor macska esetén 0.9, színvak kóbor macska esetén 0.8 a valószínűsége annak, hogy a teszt helyes eredményt ad.

   (a) Ha egy kóbor macskával kapcsolatban egy vizsgálat azt jelzi, hogy a macska színvak, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a macska tényleg színvak?

   (b) Ha egy kóbor macskával kapcsolatban 2 független vizsgálat mindegyike azt jelzi, hogy a macska színvak, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a macska tényleg színvak?

   (A válaszokat elég egy-egy korrekt numerikus képlettel megadni.)

2. A valószínűségszámítás jegyzet oldalainak csak kb. 10 százaléka mentes a sajtóhibáktól.

   (a) Egy oldalon hány hiba a legvalószínűbb?

   (b) Összesen hány hiba a legvalószínűbb öt egymást követő oldalon?

   *(A megoldásban használt **eloszlás jogosságát** indokolni kell. A válaszokat elég egy-egy korrekt numerikus képlettel és rövid korrekt indoklással megadni.)*

3. 45 darab golyó van egy dobozban. Közülük 10 darab piros, 15 darab kék, 20 darab fehér. Kiveszünk 8 darab golyót visszatevés nélkül. Legyen $X =$ a pirosak, $Y =$ a kékek száma a kivettek között. (X, Y) eloszlását (3 tizedesre való kerekítéssel) megadjuk táblázattal:

y										
8	0.000									
7	0.001	0.000								
6	0.004	0.005	0.001							
5	0.016	0.026	0.013	0.002						
4	0.0317	0.072	0.054	0.015	0.001					
3	0.033	0.102	0.108	0.048	0.009	0.001				
2	0.019	0.0756	0.106	0.067	0.019	0.002	0.000			
1	0.005	0.027	0.049	0.040	0.017	0.003	0.000	0.000		
0	0.001	0.004	0.008	0.009	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x

   (a) Adjon meg olyan matematikai formulát, amivel a táblázat közepén található 0.015 értéket megkaphatjuk! *(Matematikailag egzakt formulát kérünk!)*

   (b) Ha sok kísérletet végeznénk, akkor a kísérletek kb. hány százalékában lenne $X + Y = 5$? *(A táblázat adatai alapján számoljon!)*

4. *(Az előző feladat folytatása)*

   (a) Ha nagyon sok kísérletetet végeznénk, és csak azokat a kísérleti eredményeket tartanánk meg, melyekre $X + Y = 3$, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó XY szorzatoknak kb. mennyi lenne az átlaga? *(A táblázat adatai alapján számoljon! A választ elég egy korrekt numerikus képlettel megadni.)*

   (b) Írja le szavakkal, hogy X -nek az $Y = 3$ feltétel melletti feltételes várható értékét hogyan lehet a táblázatból kiszámolni! *(Rövid, világos megfogalmazást kérünk!)*

1.5. Első zárthelyi, 2017-03-22

1. Az egyetem hajókirándulást szervez a legjobb eredményeket elérő diákok számára. A hajón 200 hely van az utasok számára. Gondolván, hogy néhányan nem mennek majd el, 210 diákot hívnak meg a hajóra. Feltéve, hogy minden diák a többitől függetlenül 0.06 valószínűséggel nem megy el, mi annak a valószínűsége, hogy mégis 200-nál több diák jelenik meg? **a)** Írja fel a valószínűséget matematikai vagy Excel képlettel! **b)** Hány diák megjelenése a legvalószínűbb?

2. Vadász barátom hétköznapokon (hétfőtől péntekig) a rosszabbik puskáját használja. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül csak 0.05 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Hétvégén (szombaton és vasárnap) a jobb puskájával lövöldöz. Ezzel a puskával minden lövése a többitől függetlenül 0.4 valószínűséggel teríti le a célba vett nyulat. Minden nap addig lövöldöz a nyulakra, míg sikerül egyet leterítenie. Azt mesélik, hogy egy bizonyos napon, melyről nem tudjuk, hogy a hét melyik napja volt, csak 2 lövést adott le a nyúlvadászaton, hogy teljesítse aznapi feladatát. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a sikeres nap hétköznap volt?

3. Sok éves tapasztalatunk szerint hétköznap délelőtt a tanszékünkre átlagosan kb. 15 percenként jön egy-egy telefonhívás. **a)** Mi a valószínűsége annak, hogy 10:30 és 10:50 között pontosan 2 hívás érkezik? **b)** Milyen eloszlást követ a hívások száma 10:30 és 10:50 között, és MIÉRT? *Korrekt indoklást kérünk.*

4. Két szabályos dobókockával dobunk. X-szel jelöljük a dobott számok kisebbikét, Y-nal a nagyobbikat. Ha a dobott számok egyenlőek, akkor természetesen $X = Y$. **a)** Számolja ki X várható értékét, és *sok kísérleti eredményre hivatkozva* magyarázza el hogy a valóságban mit jelent a várható érték fogalma! **b)** Mi a valószínűsége annak, hogy $X = 4$, feltéve, hogy $Y = 4$? **c)** Számolja ki X feltételes várható értékét az $Y = 4$ feltétel mellett, és *sok kísérleti eredményre hivatkozva* magyarázza el hogy a valóságban mit jelent a feltételes várható érték fogalma!

1.6. Első zárthelyi, 2017-03-22. Megoldások és válaszok

1.

a) A jegyzet "Binomiális eloszlás és társai" c. alfejezetében olvasható "Vajon mindenki le tud ülni?" c. példa mintájára – annak a valószínűsége, hogy 200 vagy kevesebb diák jelenik meg, Excel képlettel:

`BINOM.ELOSZLÁS( 200 ; 210 ; 0.94 ; IGAZ )` $= 0.86$

Matematikai képlettel:

$$\sum_{x=0}^{200} \binom{210}{x} 0.94^x (1-0.94)^{210-x}$$

Ezért annak a valószínűsége, hogy 200-nál több diák jelenik meg, Excel képlettel:

`1 - BINOM.ELOSZLÁS( 200 ; 210 ; 0.94 ; IGAZ )` $= 0.86$

Matematikai képlettel:

$$\sum_{x=201}^{210} \binom{210}{x} 0.94^x (1-0.94)^{210-x}$$

b) $(n+1) \cdot p = 211 \cdot 0.94 = 198.3$ alsó egész része, ami 198.

2. A feladat és a megoldás a jegyzet "Geometriai eloszlások és társaik" c. alfejezetének elején található.

3.

a) A feladat (b) részében felsorolt tények alapján Poisson eloszlással dolgozhatunk. Átlagosan $20/15 = 4/3 = 1.33$ hívás várható, ezért a várható érték $\lambda = 4/3 \quad (= 1.33)$

P(2 hívás) $= \frac{(4/3)^2}{2!}\, \mathrm{e}^{-4/3} \quad (= 0.23)$

b) Sok ember mindegyike a többitől függetlenül kis valószínűséggel telefonál a megadott időintervallumban.

4.

a) Két kockával dobva 36 egyformán valószínű kimenetel van.

- $\mathrm{P}(X=1) = 11/36$, hiszen az $X = 1$ esemény számára 11 kedvező kimenetel van:

  $$11 \;\; 12 \;\; 13 \;\; 14 \;\; 15 \;\; 16 \;\; 21 \;\; 31 \;\; 41 \;\; 51 \;\; 61$$

- $\mathrm{P}(X=2) = 9/36$, hiszen az $X = 2$ esemény számára 9 kedvező kimenetel van:

  $$22 \;\; 23 \;\; 24 \;\; 25 \;\; 26 \;\; 32 \;\; 42 \;\; 52 \;\; 62$$

- $\mathrm{P}(X=3) = 7/36$, hiszen az $X = 3$ esemény számára 7 kedvező kimenetel van:

  $$33 \;\; 34 \;\; 35 \;\; 36 \;\; 43 \;\; 53 \;\; 63$$

- $\mathrm{P}(X=4) = 5/36$, hiszen az $X = 4$ esemény számára 5 kedvező kimenetel van:

  $$44 \;\; 45 \;\; 46 \;\; 54 \;\; 64$$

- $\mathrm{P}(X = 5) = 3/36$, hiszen az $X = 5$ esemény számára 3 kedvező kimenetel van:

$$55 \;\; 56 \;\; 65$$

- $\mathrm{P}(X = 6) = 1/36$, hiszen az $X = 6$ esemény számára 1 kedvező kimenetel van:

$$66$$

Ebből a várható érték:

$$1 \cdot 11/36 \; + \; 2 \cdot 9/36 \; + \; 3 \cdot 7/36 \; + \; 4 \cdot 5/36 \; + \; 5 \cdot 3/36 \; + \; 6 \cdot 1/36 \;\; = \;\; 2.53$$

Ha sok kísérletet végzünk, akkor a kísérleti eredmények átlaga közel lesz a várható értékhez. Ha sokszor feldobjuk a két dobókockát, és minden esetben felírjuk a kisebbik számot, akkor a felírt számok átlaga – nagy kísérletszám esetén – közel lesz 2.53 -hoz.

b) Az $Y = 4$ esemény számára 7 (egyforma valószínűségű) kedvező kimenetel van:

$$14 \;\; 24 \;\; 34 \;\; 44 \;\; 41 \;\; 42 \;\; 43$$

Ezek között egyetlen kedvez az $X = 4$ esemény számára. Ezért $\mathrm{P}(X = 4|Y = 4) = 1/7$. **(1 pont)**

c)

- $\mathrm{P}(X = 1|Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 1$ esemény számára 2 kedvező eset van:

$$14 \;\; 41$$

- $\mathrm{P}(X = 2|Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 2$ esemény számára 2 kedvező eset van:

$$24 \;\; 42$$

- $\mathrm{P}(X = 3|Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 3$ esemény számára 2 kedvező eset van:

$$34 \;\; 43$$

- $\mathrm{P}(X = 4|Y = 4) = 2/7$, hiszen az $Y = 4$ feltétel mellett az $X = 4$ esemény számára 1 kedvező eset van:

$$44$$

Ebből a feltételes várható érték:

$$1 \cdot 2/7 \; + \; 2 \cdot 2/7 \; + \; 3 \cdot 2/7 \; + \; 4 \cdot 1/7 \;\; = \;\; 2.29$$

Ha sok kísérletet végzünk, és csak azokat az X értékeket tartjuk meg, amikor a feltétel teljesül Y -ra, akkor a megtartott X értékek átlaga közel lesz a feltételes várható értékhez. Ha sokszor feldobjuk a két dobókockát, és csak akkor írjuk fel a kisebbik számot, amikor a nagyobbik 4 - gyel egyenlő, akkor a felírt számok átlaga közel lesz 2.29 -hez.

1.7. Első zárthelyi, 2017-05-03, pótzh

1. 130 hallgató mindegyike egymástól függetlenül 0.2 valószínűséggel jár órára. A teremben 30 kényelmes szék van, a többi kényelmetlen. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elmegy órára, mind kényelemes székre tud ülni? **(a)** Írja fel a valószínűséget matematikai vagy Excel képlettel! **(b)** Hány diák megjelenése a legvalószínűbb?

2. Blicc úr minden nap villamossal megy dolgozni, de nincs bérlete, sem jegye. A villamosra minden nap 0.2 valószínűséggel száll fel ellenőr, és ilyenkor 0.95 valószínűséggel elkapja Blicc urat. (Az ellenőr minden nap az addigiaktól függetlenül dönti el, ellenőrzi-e aznap Blicc úr villamosát.) **(a)** Mennyi a valószínűsége, hogy Blicc úrnak "szerencsés hete" van, azaz az 5 munkanap egyikén sem kell büntetést fizetnie? **(b)** Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan kétszer kapják el egy hét munkanapjai alatt?

3. A dél-floridai Everglades National Park-ban nem azt szokás számolni, hogy hány szúnyog csíp meg, hanem azt, hogy hányat nyelsz le. Egy iskola diákjait elvitték a parkba. A diákok közül 200-an nyeltek le egyet, 50-en pedig kettőt. **(a)** Kb. hány diák jár az iskolába? **(b)** Átlagosan hány szúnyogot nyeltek a diákok? *(A használt eloszlás jogosságát indokolni kell!)*

4. **(a)** Definiálja két diszkrét eloszlás konvolúciójának fogalmát! **(b)** Én hatoldalú, barátom nyolcoldalú szabályos dobókockával dob. Határozza meg a dobott számok összegének az eloszlását!

1.8. Első zárthelyi, 2017-05-03, pótzh. Megoldások és válaszok

1. **(a)**

   Annak a valószínűsége, hogy 30 vagy kevesebb diák jelenik meg, Excel képlettel:

   $$\texttt{BINOM.ELOSZLÁS(30 ; 130 ; 0.2 ; IGAZ)} = 0.83$$

   Matematikai képlettel:

   $$\sum_{x=0}^{30} \binom{130}{x} 0.2^x (1-0.2)^{130-x}$$

   (b)

   A válasz: $(n+1) \cdot p = 131 \cdot 0.2 = 26.2$ alsó egész része, ami 26. .

2. **(a)**

   Egyrészt

   $$\text{P(egy nap elkapják)} =$$
   $$= \text{P(jön ellenőr)} \cdot \text{P(elkapják | jön ellenőr)} = 0.2 \cdot 0.95$$

   Másrészt

   $$\text{P(5 nap szerencsés)} = (\text{ P(egy nap szerencsés) })^5 =$$
   $$= (\text{ 1 − P(egy nap elkapják) })^5 = (1 - 0.2 \cdot 0.95))^5 \quad (= 0.35)$$

   (b)

   Excel képlettel:

   $$\texttt{BINOM.ELOSZLÁS(2 ; 5 ; 0.2*0.95 ; HAMIS)} = 0.19$$

   Matematikai képlettel:

   $$\binom{5}{2} (0.2 \cdot 0.95)^2 \cdot (1 - 0.2 \cdot 0.95)^{5-2} (\quad = 0.19)$$

3. Az, hogy egy kiszemelt diák, hány szúnyog nyel le, valószínűségi változó. Mivel a sok szúnyog mindegyikét – a többitől függetlenül – kis valószínűséggel nyeli le, ez a valószínűségi változó Poisson eloszlást követ valamilyen λ paraméterrel. Ezért annak a valószínűsége, hogy 1 szúnyogotnyel le, $\lambda e^{-\lambda}$. A 2 szúnyog valószínűsége pedig $\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$. Ha a diákok számát N -nel jelöljük, és a valószínűségeket relatív gyakoriságokkal helyettesítjük, akkor a nagy számok törvénye szerint alábbi közelítések igazak:

   $$\frac{200}{N} \approx \lambda e^{-\lambda} \qquad\qquad \frac{50}{N} \approx \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$$

   A közelítéseket egyenlőséggel helyettesítve egy egyenletrendszert kapunk, aminek megoldása:

   $$\lambda = 0.5 \qquad\qquad N = 659.4$$

   Tehát kb. 660 diák jár az iskolába, és átlagosan kb. $\lambda = 0.5$ szúnyogot nyel le egy-egy diák.

4. **(a)**

   - Két eloszlás konvolúcióját úgy kapjuk meg, hogy a direkt szorzatukat a $z = x + y$ transzformációval a számegyenesre transzformáljuk,

   illetve

   - két olyan független valószínűségi változó összegének eloszlása, amelyek eloszlásai az adott eloszlások,

avagy képlettel:

- $r(z) = \sum\limits_{(x,y):\ x+y=z} p_1(x) \cdot p_2(y)$

vagy

- $r(z) = \sum\limits_{x} p_1(x) \cdot p_2(z-x)$

vagy

- $r(z) = \sum\limits_{y} p_1(z-y) \cdot p_2(y)$

(b)

A 6-oldalú dobókockával az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számokat, a 8-oldalú dobókockával az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ számokat dobhatjuk. A lehetséges 48 darab

$$\begin{array}{cccccc}
(1,8) & (2,8) & (3,8) & (4,8) & (5,8) & (6,8) \\
(1,7) & (2,7) & (3,7) & (4,7) & (5,7) & (6,7) \\
(1,6) & (2,6) & (3,6) & (4,6) & (5,6) & (6,6) \\
(1,5) & (2,5) & (3,5) & (4,5) & (5,5) & (6,5) \\
(1,4) & (2,4) & (3,4) & (4,4) & (5,4) & (6,4) \\
(1,3) & (2,3) & (3,3) & (4,3) & (5,3) & (6,3) \\
(1,2) & (2,2) & (3,2) & (4,2) & (5,2) & (6,2) \\
(1,1) & (2,1) & (3,1) & (4,1) & (5,1) & (6,1)
\end{array}$$

számpár mindegyikének $\frac{1}{48}$ a valószínűsége. A számpárok helyére a számok összegét írhatjuk:

$$\begin{array}{cccccc}
9 & 10 & 11 & 12 & 6 & 14 \\
8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\
5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{array}$$

Látjuk, hogy

- a 2 és a 14 1-szer,
- a 3 és a 13 2-szer,
- a 4 és a 12 3-szor,
- az 5 és a 11 4-szer,
- a 6 és a 10 5-ször,
- a 7, a 8, és a 9 6-szor

szerepel, ezért a dobott számok összegének az eloszlása:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\frac{1}{48}$	$\frac{2}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{6}{48}$	$\frac{6}{48}$	$\frac{6}{48}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{4}{48}$	$\frac{3}{48}$	$\frac{2}{48}$	$\frac{1}{48}$

2. Második zárthelyik

2.1. Második zárthelyi, 2016-11-14, 8 óra

1. Vezesse le két független 0 és 1 között folytonos egyenletes eloszlású random szám szorzata
   (a) eloszlásfüggvényének a képletét;
   (b) sűrűségfüggvényének a képletét!
   (c) A két random szorzatának a várható értéke $\frac{1}{4}$. Magyarázza el kísérleti eredményekkel megfogalmazva, hogy mit jelent a gyakorlatban ez a tény! *Ez a magyarázat lehet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.*

2. Tegyük fel, hogy egy alkatrész (években mért) élettartama exponenciális eloszlást követ 2.5 paraméterrel. Határozza meg, hogy mennyi az az időtartam, amennyit egy ilyen alkatrész
   (a) 0.9 valószínűséggel túlél?
   (b) 0.9 valószínűséggel túlél, feltéve, hogy az alkatrész legalább 1 évig élni fog?

3. Tegyük fel, hogy egy svéd szigeten december elején a déli hőmérséklet normális eloszlást követ 2 °C várható értékkel. A szórást nem ismerjük, de tudjuk, hogy 0.25 a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 0 °C alatt van.
   (a) Mennyi a hőmérséklet szórása?
   (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy hőmérséklet nagyobb 3 °C-nál?
   (c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 4 független mérési eredményének az átlaga nagyobb 3 °C-nál?

4. Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $(2, 3)$ pontban 4 -gyel egyenlő. Mit jelent ez a tény?
   (a) Magyarázza el a "valószínűség" fogalma segítségével!
   (b) Magyarázza el a "relatív gyakoriság" fogalma segítségével!

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

2.2. Második zárthelyi, 2016-11-14, 8 óra. Megoldások és válaszok

1. (a) A levezetés a jegyzet 2. részében a "Random számok transzformációi" című 3. fejezetében található.

   (b) A levezetés a jegyzet 2. részében a "Random számok transzformációi" című 3. fejezetében található.

   (c) Ha 1000 cellába beírjuk a `=RAND()*RAND()` utasítást, akkor a kapott 1000 szám átlaga közel lesz $\frac{1}{4}$ -hez.

2. (a) A keresett x időtartamnak eleget kell tenni az

$$0.9 = \mathrm{P}(X > x) = \mathrm{e}^{-2.5x}$$

   egyenletnek, ahonnan

$$x = \frac{\ln(0.9)}{(-2.5)} \qquad (= 0.04 \text{ év })$$

   (b) Az exponenciális eloszlás örökifjú tulajdonsága miatt a válasz

$$x = 1 + \frac{\ln(0.9)}{(-2.5)} \qquad (= 1.04 \text{ év })$$

3. (a) A feladat szövege szerint az X hőmérsékletre igaz, hogy

$$0.25 = \mathrm{P}(X < 0) = F(0) = \Phi(\frac{0-2}{\sigma})$$

   A táblázat szerint $\Phi(0.7) \approx 0.75$, ezért

$$\Phi(-0.7) = 1 - \Phi(0.7) \approx 0.25$$

   Így

$$\frac{0-2}{\sigma} \approx -0.7$$

   vagyis

$$\sigma \approx \frac{2}{0.7} \qquad (\approx 2.9\ ^\circ C\ )$$

   (b)

$$\mathrm{P}(X > 3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{\left(\frac{2}{0.7}\right)}\right) \qquad (\approx 0.36\ )$$

   (c) A 4 független mérési eredmény átlagának szórását úgy kapjuk, hogy az eredeti szórást elosztjuka 4 négyzetgyökével, vagyis a 4 független mérési eredmény átlagának szórása

$$\frac{\left(\frac{2}{0.7}\right)}{\sqrt{4}}$$

   ezért

$$\mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} > 3\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3-2}{\frac{\left(\frac{2}{0.7}\right)}{\sqrt{4}}}\right) \qquad (\approx 0.24\ )$$

4. (a) A $(2, 3)$ pont körüli kis területű tartomány valószínűsége körülbelül egyenlő a tartomány területének 4 -szeresével.

   (b) Ha sok kísérletet végzünk, és megszámoljuk, hogy a kísérleti eredményeknek hányad része esik egy $(2, 3)$ pont körüli kis területű tartományba, akkor ez a relatív gyakoriság körülbelül egyenlő a tartomány területének 4 -szeresével.

2.3. Második zárthelyi, 2016-11-14, 9 óra

1. Vezesse le két független 0 és 1 között folytonos egyenletes eloszlású random szám hányadosa
   (a) eloszlásfüggvényének a képletét;
   (b) sűrűségfüggvényének a képletét!
   (c) A két random szám hányadosának a várható értéke végtelen. Magyarázza el kísérleti eredményekkel megfogalmazva, hogy mit jelent a gyakorlatban ez a tény! *Ez a magyarázat lehet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.*

2. Tegyük fel, hogy egy alkatrész (években mért) élettartama exponenciális eloszlást követ, és hogy a várható értéke 2 év. Mi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen alkatrész
   (a) legalább 4 évig élni fog?
   (b) legalább 4 évig élni fog, feltéve, hogy az alkatrész legalább 1 évig élni fog?

3. Tegyük fel, hogy egy norvég szigeten december elején a déli hőmérséklet Celsius fokokban mérve normális eloszlást követ 4 fok szórással. A várható értéket nem ismerjük. Annak a valószínűsége, hogy hőmérséklet 2 fok alatt van, 0.25 -tel egyenlő.
   (a) A hőmérsékletnek mennyi a várható értéke?
   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet negatív?
   (c) Mi a valószínűsége annak, hogy 4 független mérési eredmény átlaga negatív?

4. Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $(2, 3)$ pontban $1/4$ -del egyenlő. Mit jelent ez a tény?
   (a) Magyarázza el a "valószínűség" fogalma segítségével!
   (b) Magyarázza el a "relatív gyakoriság" fogalma segítségével!

5. **Extra feladat iMSc diákoknak.** A kétdimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye képletének levezetésekor miért írtuk az $\frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!}$ konstanst (esetleg más alakban írva) a hatványok szorzata elé? *Írja le a levezetésnek ezt a lépését!*

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

2.4. Második zárthelyi, 2016-11-23, pótzh

1. Vezesse le egy 0 és 0.5 között folytonos egyenletes eloszlású valószínűségi változó szám reciproka
   (a) eloszlásfüggvényének a képletét! *(A képlet érvényességi tartományát is meg kell adni!)*
   (b) Számolja ki a mediánját!
   (c) Magyarázza el **kísérleti eredményekkel megfogalmazva**, hogy mit jelent az, hogy a medián annyi, amennyi kijött! *(A magyarázat történhet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.)*
2. Tegyük fel, hogy egy alkatrész (években mért) élettartama exponenciális eloszlást követ, és hogy a várható értéke 3 év. Mi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen alkatrész
   (a) legalább 5 évig él, feltéve, hogy legalább 4 évig él?
   (b) legalább 3 évig él, feltéve, hogy legfeljebb 4 évig él?
3. Tegyük fel, hogy egy finn szigeten december elején a déli hőmérséklet normális eloszlást követ ismeretlen várható értékkel és szórással. Tudjuk, hogy 0.18 a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 0 °C alatt van, és 0.14 a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 10 °C felett van. *A lentebbi táblázat segítségével adja meg a válaszokat numerikusan!*
   (a) Mennyi a hőmérséklet szórása? *(Segítség: Állítson fel egyenleteket úgy, hogy azokból a szórást meg lehessen határozni!)*
   (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy hőmérséklet a várható értéktől 1 °C-nál többel eltér?
   (c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet 4 független mérési eredményének az átlaga a várható értéktől 1 °C-nál többel eltér?
4. Egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó
   (a) sűrűségfüggvénye a $(2, 3)$ pontban 0.3 -del egyenlő,
   (b) eloszlásfüggvénye a $(4, 5)$ pontban 0.4 -del egyenlő.

   Mit jelentenek ezek a tények? Magyarázza el a valószínűség fogalma segítségével!

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

2.5. Második zárthelyi, 2016-12-14, pótpótzh

1. Jancsi és Juliska egymástól függetlenül érkeznek a menzára 12^{h} és $\frac{3}{4}\,1^{\mathrm{h}}$ között (folytonos!) egyenletes eloszlás szerint. Aki előbb odaér, megvárja a másikat. Amikor találkoznak, örömükben nagyot kiáltanak. Határozza meg a kiáltás időpontjának

   (a) eloszlásfüggvényét! *(Ne feldje megadni a képlet értelmezési tartományát!)*

   (b) várható értékét!

2. Egy bizonyos alkatrész (években mért) élettartama exponenciális eloszlást követ. Csak kb. minden tizedik alkatrész éli túl az 5 évet.

   (a) Mennyi az ilyen alkatrészek élettartamának a várható értéke?

   (b) Mi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen alkatrész túléli a 6 évet, feltéve, hogy túléli a 4 évet?

   (A válaszokat elég egy-egy korrekt numerikus képlettel megadni.)

3. Ha a gyufaszálak hossza normális eloszlást követ 4 cm várható értékkel és 0.2 cm szórással, akkor

   (a) mennyi a valószínűsége annak, hogy 2 egymástól független gyufaszál mindegyike 4.4 cm -nél rövidebb?

   (b) Ha 9 független gyufaszálat egymáshoz fűzve lerakunk az asztalra, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy a a keletkező "kígyó" hossza (= a 9 gyufa összhossza) 35 cm -nél nagyobb?

   (A válaszokat elég egy-egy korrekt numerikus képlettel megadni.)

4. (a) Adja meg az arkusz-szinusz eloszlás sűrűségfüggvényének és eloszlásfüggvényének a képletét! Rajzolja le a sűrűségfüggvény grafikonját!
   (Pontos képleteket és értelmezési tartományokat, valamint gondos rajzot kérünk.)

   (b) Mondjon példát az életből olyan valószínűségi változóra, ami arkusz-szinusz eloszlás követ!
   (Itt szimulációnak nincs helye.)

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

2.6. Második zárthelyi, 2017-04-19

1. Egy városban a közlekedési "piros-sárga-zöld" lámpák élettartama (a zavartalan működés időtartama) exponenciális eloszlást követ. Az élettartam mediánja 7.5 hónap. **(a)** Mennyi a várható érték? **(b)** Kísérleti eredményekből hogyan közelíthetjük az élettartam négyzetének a várható értékét?

2. **(a)** Vezesse le két független 0 és 1 között folytonos egyenletes eloszlású random szám hányadosa sűrűségfüggvényének a képletét! **(b)** A hányados várható értéke végtelen. Magyarázza el kísérleti eredményekkel megfogalmazva, hogy mit jelent a gyakorlatban ez a tény! *Ez a magyarázat lehet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.*

3. A λ paraméterű exponenciális eloszlást az $y = x^2$ transzfromációval transzformáljuk. **(a)** Határozza meg a kapott eloszlás jobboldali eloszlásfüggvényének a képletét! **(b)** Mutassa meg a jobboldali eloszlásfüggvény felhasználásával, hogy ha egy Y élettartam ezt az eloszlást követi, akkor igaz rá a

$$\mathrm{P}(\,Y > s + t \,|\, Y > t\,) \;>\; \mathrm{P}(\,Y > s\,) \qquad (s, t > 0)$$

fiatalodó tulajdonság! **(c)** A képlettel megadott tulajdonságot miért jogos *fiatalodó tulajdonság*nak nevezni?

4. A szépséges Zöld Mezőn a fűszálak hossza normális eloszlást követ. A fűszálaknak kb. 7 százaléka hosszabb 40 cm -nél, és kb. 10 százaléka rövidebb 20 cm -nél. **(a)** Mennyi a fűhossz várható értéke? **(b)** Kb. hány fűszál esetén teljesül 92 százalékos biztonsággal, hogy a fűszálak átlagos hossza 1 cm -es pontosságon belül közelíti a várható értéket?

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

2.7. Második zárthelyi, 2017-04-19. Megoldások és válaszok

1. **(a)**
   A mediánt az $F(x) = \frac{1}{2}$ egyenletet definiálja.
   Exponenciális eloszlás esetén $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, de λ -t egyelőre nem ismerjük.
   A medián $x = 7.5$, ezért $1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, 7.5} = \frac{1}{2}$, ahonnan $\lambda = \frac{\ln(2)}{7.5}$.
   Exponenciális eloszlás esetén a várható érték $\frac{1}{\lambda}$.
   Ezért a várható érték $\lambda = \frac{7.5}{\ln(2)}$ $\quad (= 10.8$ hónap).

   (b)
   A nagy számok törvénye szerint: sok lámpa esetén az élettartamok négyzeteinek a tapasztalati átlaga közelíti az élettartam négyzetének az elméleti várható értékét.

2. **(a)**
   A feladat és a megoldás a jegyzet "Random számok transzformációi" fejezetében olvasható.

   (b)
   A nagy számok törvénye szerint: ilyenkor – sok kísérlet esetén – a kísérleti eredmények átlaga nagy lesz. A kísérletszám növekedtével az átlag minden határon túl nő.

3. **(a)**
   Mint tudjuk, az új $G(y)$ eloszlásfüggvény a régi $F(x)$ eloszlásfüggvényből és az $y = t(x)$ transzformáció $x = t^{-1}(y)$ inverzéből összetett függvényként adódik:

   $$G(y) = F\left(t^{-1}(y)\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}$$

   Ezért a keresett jobboldali eloszlásfüggvény:

   $$T(y) = 1 - G(y) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{y}}$$

   (b)
   Igazolandó, hogy

   $$\frac{\mathrm{P}(\,Y > s + t\,)}{\mathrm{P}(\,Y > t\,)} > \mathrm{P}(\,Y > s\,)$$

   Tehát igazolandó, hogy

   $$\frac{T(\,s + t\,)}{T(\,t\,)} > T(\,s\,)$$

   azaz

   $$T(\,s + t\,) > T(\,s\,) \cdot T(\,t\,)$$

   vagyis

   $$\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{s+t}} > \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{s}} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{t}}$$

   Minkét oldal logaritmusát vesszük:

   $$-\lambda\sqrt{s+t} > -\lambda\sqrt{s} - \lambda\sqrt{t}$$

   $(-\lambda)$ -val osztunk:

   $$\sqrt{s+t} < \sqrt{s} + \sqrt{t}$$

   Négyzetre emelünk:

   $$s + t < s + t + 2\sqrt{s}\sqrt{t}$$

   A kapott egyenlőtlenség nyilván igaz, hiszen

   $$0 < 2\sqrt{s}\sqrt{t}$$

   (c)
   A baloldali feltételes valószínűség azt fejezi ki, hogy egy t időt meghaladó élettartam milyen eséllyel halad meg további s időtartamot. A képlet szerint ez az esély nagyobb, mintha az élettartam 0-ból indulna. Tehát egy már leélt időtartam növeli a jövőre vonatkozó esélyeket. Ezt joggal nevezhetjük fiatalodásnak!

4. **(a)**
Jelöljük a fűszál hosszát X -szel, a várható értéket μ -vel, a szórást σ -val. Mivel $\mathrm{P}(X > 40) = 0.07$, ezért

$$\mathrm{P}(X < 40) = \Phi\left(\frac{40-\mu}{\sigma}\right) = 0.93$$

A Φ függvény táblázata alapján:

$$\frac{40-\mu}{\sigma} = 1.5$$

Másrészt

$$\mathrm{P}(X < 20) = \Phi\left(\frac{20-\mu}{\sigma}\right) = 0.10$$

Mivel a Φ függvény táblázata alapján $\Phi(1.3) = 0.90$, ezért $\Phi(-1.3) = 0.10$, így:

$$\frac{20-\mu}{\sigma} = -1.3$$

μ -re és σ -ra két egyenletet kaptunk. Az egyenletrendszer megoldása:

$$\sigma = \frac{20}{2.8} \qquad\qquad \mu = 40 - \frac{30}{2.8}$$

Tehát a fűhossz várható értéke $\mu = 40 - \frac{30}{2.8} \qquad (= 29.28)$.

(b)
A "Várható érték közelítése átlaggal" c. fejezetben kijött (a gondolatmenetet lásd ott), hogy ha a kísérletszám nagyobb, mint

$$\sigma^2 \ \frac{\left[\phi^{-1}\left(\frac{1+q}{2}\right)\right]^2}{\varepsilon^2}$$

akkor az átlag q biztonság mellett ε -nál kisebb hibával közelíti a várható értéket. Ebbe a képletbe kell behelyettesíteni a $q = 0.9$, $\epsilon = 1$ és a fenti σ értéket, ami azt adja, hogy 139 fűszálra van szükség.

IDE

2.8. Második zárthelyi, 2017-05-03, pótzh

1. Egy városban az úttest felett elhelyezett lámpák élettartama (a zavartalan működés időtartama hónapokban mérve) azt az eloszlást követi, melynek eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - \frac{1}{x^5} \quad (x > 1)$. **(a)** Az élettartam négyzetének mennyi a várható értéke? **(b)** Kísérleti eredményekből hogyan közelíthetjük az élettartam négyzetének a várható értékét?

2. **(a)** Vezesse le két független 0 és 1 között folytonos egyenletes eloszlású random szám szorzata sűrűségfüggvényének a képletét! **(b)** Mennyi a szorzat várható értéke? **(c)** Magyarázza el kísérleti eredményekkel megfogalmazva, hogy mit jelent a gyakorlatban az a tény, hogy a szorzat várható értéke annyi, amennyi a számolásból adódik! *Ez a magyarázat lehet Excelre hivatkozva is, Excel nélkül is.*

3. A λ paraméterű exponenciális eloszlást az $y = \sqrt[3]{x}$ képletű köbgyök transzfromációval transzformáljuk. **(a)** Határozza meg a kapott eloszlás jobboldali eloszlásfüggvényének a képletét! **(b)** Mutassa meg a jobboldali eloszlásfüggvény felhasználásával, hogy ha egy Y élettartam ezt az eloszlást követi, akkor igaz rá a

$$\mathrm{P}(\, Y > s + t \,|\, Y > t \,) \;<\; \mathrm{P}(\, Y > s \,) \qquad (s, t > 0)$$

öregedő tulajdonság! **(c)** A képlettel megadott tulajdonságot miért jogos *öregedő tulajdonság*nak nevezni?

4. A szépséges Karcsú-réten a nádszálak hossza normális eloszlást követ. A nádszálaknak kb. 14 százaléka hosszabb 3 méternél, és kb. 5 százaléka rövidebb 2 méternél. **(a)** Mennyi a nádhossz szórása? **(b)** Mennyi az az x érték, amire teljesül, hogy 25 nádszálat egymás után fűzve a hosszak összege 0.1 valószínűséggel nagyobb x-nél?

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

2.9. Második zárthelyi, 2017-05-03, pótzh. Megoldások és válaszok

1. **(a)**

   Az élettartam sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = F'(x) = \frac{5}{x^6} \qquad (x > 1)$$

   Az élettartam négyzetének a várható értéke:

$$\int_1^\infty x^2 \cdot \frac{5}{x^6}\, dx \; = \ldots = \frac{5}{3}$$

   (b)

   A nagy számok törvénye szerint: *sok* lámpa esetén az élettartamok *négyzeteinek* az *átlaga* közelíti az élettartam négyzetének az elméleti várható értékét.

2. **(a)**

   A feladat és a megoldás a jegyzet "Random számok transzformációi" fejezetében olvasható.

   (b)

   A függetlenség miatt a szorzat várható értéke egyenlő a várható értékek szorzatával, ezért:

$$\mathrm{E}(\,\mathrm{RND}_1 \cdot \;\mathrm{RND}_2) = \mathrm{E}(\,\mathrm{RND}_1) \cdot \mathrm{E}(\,\mathrm{RND}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

   (c)

   Ha két véletlen szám szorzatát sokszor vesszük, akkor a kapott számok átlaga körülbelül $\frac{1}{4}$ lesz.

3. **(a)**

   Mint tudjuk, az új $G(y)$ eloszlásfüggvény a régi $F(x)$ eloszlásfüggvényből és az $y = t(x)$ transzformáció $x = t^{-1}(y)$ inverzéből összetett függvényként adódik:

$$G(y) = F\left(t^{-1}(y)\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, y^3}$$

   Ezért a keresett jobboldali eloszlásfüggvény:

$$T(y) = 1 - G(y) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, y^3}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda\, y^3}$$

   (b)

   Igazolandó, hogy

$$\frac{\mathrm{P}(\,Y > s + t\,)}{\mathrm{P}(\,Y > t\,)} \;<\; \mathrm{P}(\,Y > s\,)$$

   Tehát igazolandó, hogy

$$\frac{T(\,s + t\,)}{T(\,t\,)} \;<\; T(\,s\,)$$

   azaz

$$T(\,s + t\,) \;<\; T(\,s\,) \cdot T(\,t\,)$$

   vagyis

$$\mathrm{e}^{-\lambda\,(s+t)^3} \;<\; \mathrm{e}^{-\lambda\, s^3} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda\, t^3}$$

   Minkét oldal logaritmusát vesszük:

$$-\lambda\,(s + t)^3 \;<\; -\lambda\, s^3 \;-\; \lambda\; t^3$$

   $(-\lambda)$ -val osztunk:

$$(s + t)^3 \;>\; s^3 \;+\; t^3$$

A kapott egyenlőtlenség nyilván igaz, hiszen ha

(c)

A baloldali feltételes valószínűség azt fejezi ki, hogy egy t időt meghaladó élettartam milyen eséllyel halad meg további s időtartamot. A képlet szerint ez az esély kisebb, mintha az élettartam 0-ból indulna. Tehát egy már leélt időtartam csökkenti a jövőre vonatkozó esélyeket. Ezt joggal nevezhetjük öregedésnek!

4. **(a)**

Jelöljük a nádszál hosszát X -szel, a várható értéket μ -vel, a szórását σ -val. Mivel $\mathrm{P}(X > 3) = 0.14$, ezért

$$\mathrm{P}(X < 3) = \Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right) = 0.86$$

A Φ függvény táblázata alapján:

$$\frac{3-\mu}{\sigma} = 1.1$$

Másrészt

$$\mathrm{P}(X < 2) = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) = 0.05$$

Mivel a Φ függvény táblázata alapján $\Phi(1.6) = 0.95$, ezért $\Phi(-1.6) = 0.05$, így:

$$\frac{2-\mu}{\sigma} = -1.6$$

μ -re és σ -ra két egyenletet kaptunk. Az egyenletrendszer megoldása:

$$\sigma = \frac{1}{2.7} \quad (= 0.37) \qquad\qquad \mu = \frac{7}{2.7} \quad (= 2.59)$$

Tehát a nádhossz szórása $\sigma = \frac{1}{2.7} \quad (= 0.37)$.

(b)

25 nádszál hosszának az összege normális eloszlású

$$25 \cdot \mu = 25 \cdot \frac{7}{2.7} = \frac{175}{2.7} \quad (= 64.81)$$

várható értékkel és

$$\sqrt{25} \cdot \sigma = 5 \cdot \frac{1}{2.7} = \frac{5}{2.7} \quad (= 1.85)$$

szórással. Mivel a Φ függvény táblázata alapján $\Phi(1.3) = 0.9$, ezért az

$$\frac{x - \frac{175}{2.7}}{\frac{5}{2.7}} = 0.9$$

egyenlet megoldása adja a keresett x értéket:

$$x = \frac{175}{2.7} + 0.9\,\frac{5}{2.7} = \frac{179.5}{2.7} \quad (= 66.48)$$

3. Félév végi vizsgák

3.1. Félév végi vizsga, 2016-12-19

1. **(a)** Adja meg az

i	0	1	2	3	...
p_i	p_0	p_1	p_2	p_3	...

diszkrét eloszlás várható értékének a definícióját!

(b) Tegyük fel, hogy a rigófészkekben található tojások X száma a

i	0	1	2	3	4
p_i	0.15	0.25	0.30	0.20	0.10

eloszlást követi. **(b1)** Számolja ki X várható értékét! **(b2)** Felhasználva, hogy az $X = i$ esemény relatív gyakorisága – nagy kísérletszám esetén – közel van a p_i valószínűséghez, írja le annak a vázlatos bizonyítását, hogy sok rigófészket megfigyelve a tojások számának az átlaga közel van a várható értékéhez!

2. A fagylaltos nap mint nap dél és 5 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a strandra, 1 órán át árulja portékáját, aztán elmegy. Mi a valószínűsége, hogy összefutok a fagyissal, ha én

(a) 2 -kor érkezem, és 1.5 órát töltök ott?

(b) a fagyis tól függetlenül egyenletes eloszlás szerint érkezem 2 és 3 között, és 1.5 órát töltök ott?

Mindkét esetben világosan kell tálalni, hogy az Ön megoldásában mi az eseménytér, és azon belül mi a kedvező kimenetelek halmaza, mert az értékelésnél ez sokat számít!

3. A nikkel bolhák, amikor forró fémlapra helyezik őket, ugranak egyet, és már végük is van. Az X valószínűségi változó jelentse azt, amekkorát ilyenkor egy nikkel bolha ugrik (méterben mérve).

(a) Ha Önnek lenne 800 nikkel bolhája, hogyan ellenőrizné, hogy X rendelkezik-e az örökifjú tulajdonsággal? Írja le, hogy a mindennapi gyakorlatban kísérleti eredményekből relatív gyakoriságokkal hogyan lehet az örökifjú tulajdonságot – ha csak többé-kevésbé is, de mégis valamennyire – ellenőrizni!

(b) Tegyük fel, hogy a kísérlet azt adja, hogy X rendelkezik az örökifjú tulajdonsággal. **(b1)** Vezesse le az örökifjú tulaldonságból, hogy X jobboldali eloszlásfügvénye eleget tesz a $T(s+t) = T(s)T(t)$ egyenletnek! **(b2)** Mutassa meg, hogy az exponenciális eloszlás jobboldali eloszlásfüggvénye is eleget tesz a $T(s+t) = T(s)T(t)$ egyenletnek!

4. Azon túl, hogy a bolhák ugrásainak a nagysága exponenciális eloszlást követ, tegyük fel még azt is, hogy a bolháknak kb. a fele ugrik nagyobbat, mint 3.5 méter. Kb. mennyi a 800 ugrás

(a) nagyságának az átlaga?

(b) nagysága négyzetének az átlaga?

Vagy számolja ki a kérdezett értékeket, vagy – ha tudja fejből a megfelelő képletet, dicsekedjen vele, és – adja meg a megfelelő magyarázatot!

5. Számítógéppel generálok két független, 0 és 1 között egyenletes eloszlást követő RND_1, RND_2 random számot. A másodikból köbgyököt vonok, így kapom Y -t: $Y = (\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}$. Ezek után Y -t megszorzom az elsővel, így kapom X -et: $X = Y \cdot \mathrm{RND}_1$.

(a) Határozza meg (X, Y) sűrűségfüggvényét

(b) Határozza meg az X és Y közötti kovarianciát!

6. Tegyük fel, hogy (X, Y) sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 3y \quad (0 < x < y < 1)$. Milyen függvénnyel tippeljünk X -ből Y -ra, ha az a cél, hogy

(a) a hiba négyzetének a várható értéke minimális legyen?

(b) a hiba abszolút értékének a várható értéke minimális legyen?

Határozza meg a kérdezett függvények képletét!

3.2. Félév végi vizsga, 2016-12-19. Megoldások és válaszok

1. **(a)**

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p_i$$

(b1)

$$\mathrm{E}(X) \;=\; 0 \cdot 0.15 + 1 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.30 + 3 \cdot 0.20 + 4 \cdot 0.10 \;=\; 1.85$$

(b2)

$N =$ a megfigyelt rigófészkek száma. $N_i =$ ahány fészekben i darab tojás van $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$. Ekkor a tojások számának az átlaga:

$$\frac{\sum_{i=0}^{4} N_i \cdot i}{N} \;=\; \sum_{i=0}^{4} \frac{N_i}{N} \cdot i \;\approx\; \sum_{i=0}^{4} p_i \cdot i \;=\; \mathrm{E}(X)$$

2. **(a)**

Az eseményteret a fagyis lehetséges érkezési időpontjai alkotják, vagyis az eseménytér a $[0, 5]$ intervallum. Egy 0 és 5 közötti t időpont kedvező, ha a $[t, t+1]$ intervallumnak van közös pontja a $[2, 3.5]$ intervallummal, azaz t 1 és 3.5 közé esik. Ezért a kérdezet valószínűség egyenlő az $[1, 3.5]$ hossza per a $[0, 5]$ hossza, azaz $2.5/5 = \frac{1}{2}$.

(b)

A fagyis érkezési időpontja 0 és 5 között van, az enyém 2 és 3 között. Ezért az eseménytér a $[0, 5] \times [2, 3]$ téglalap. Az eseménytérnek egy (x, y) pontja pontosan akkor kedvező, ha az $[x, x+1]$ intervallumnak van közös pontja az $[y, y+1.5]$ intervallummal, azaz a

$$2 < y < 3 \qquad \text{egyenlőtlenséggel együtt az} \qquad y - 1 < x < y + 1.5 \qquad \text{egyenlőtlenség}$$

is teljesül. A kérdezett valószínűség egyenlő az iménti egyenlőtlenségekkel meghatározott parallelogramma területe osztva a $[0, 5] \times [2, 3]$ téglalap területével: $2.5/5 = \frac{1}{2}$.

3. **(a)**

Választok egy s és egy t értéket, pl. $s = 2$ méter és $t = 0.5$ méter, és megnézem, hogy

- a bolhák hányadrésze ugrik nagyobbat t -nél,

és azt is, hogy

- az s-nél nagyobbat ugró bolhák hányad része ugrik nagyobbat $s + t$ -nél.

Ha ez a két arány közel van egymáshoz, akkor erre az s, t értékpárra X örökifjú tulajdonságúnak tűnik. Ha még néhány vagy inkább kellően sok s, t értékpárra X örökifjúnak tűnik, akkor elfogadom az örökifjú tulajdonságot.

(b1)

Az örökifjú tulajdonság szerint

$$\mathrm{P}\,(\; X > s + t \mid X > s \;) = \mathrm{P}\,(\; X > t \;)$$

azaz

$$\frac{\mathrm{P}\,(\; X > s + t)}{\mathrm{P}\,(\; X > s)} = \mathrm{P}\,(\; X > t \;)$$

ahonnan átszorzással

$$\mathrm{P}\,(\,X > s+t) = \mathrm{P}\,(\,X > s)\,\mathrm{P}\,(\,X > t\,)$$

vagyis

$$T(s+t) = T(s)T(t)$$

(b2)

Közismert, hogy

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{b}$$

Az exponenciális eloszlás jobboldali eloszlásfüggvénye

$$T(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Ezek alapján

$$T(s+t) = \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} = \mathrm{e}^{-\lambda s-\lambda t} = \mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{e}^{-\lambda t} = T(s)T(t)$$

4. **(a)**

A megadott információ szerint $\mathrm{P}(X > 3.5)$ valószínűséget 0.5 -nek vesszük. Ezért $T(3.5) = 0.5$, vagyis

$$\mathrm{e}^{-\lambda\,3.5} = 0.5$$

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{3.5}$$

A nagy számok törvénye szerint a kísérleti eredmények átlaga a várható értéket közelíti. Exponenciális eloszlás esetén a várható érték (amit integrálással ki is lehet számolni) $\frac{1}{\lambda}$. Ezért a válasz a kérdésre:

$$\frac{3.5}{\ln(2)}$$

(b)

A nagy számok törvénye szerint a kísérleti eredmények négyzetének az átlaga a második momentumot közelíti. Exponenciális eloszlás esetén a második momentum (amit integrálással ki is lehet számolni) $\frac{2}{\lambda^2}$. Ezért a válasz a kérdésre:

$$2\left(\frac{3.5}{\ln(2)}\right)^2$$

5. **(a)**

Y eloszlásfüggvénye:

$$F_2(y) = \mathrm{P}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}} < y\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{RND}_2 < y^3\right) = y^3 \qquad (0 < y < 1)$$

Y sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = 3y^2 \qquad (0 < y < 1)$$

Az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlású 0 és y között, ezért a feltételes sűrűségfüggvény 0 és y közötti x -ekre egyenlő a $(0, y)$ intervallum hosszának reciprokával, vagyis $\frac{1}{y}$ -nal:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y} \quad (0 < x < y)$$

(X, Y) sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x|y) = 3y^2 \cdot \frac{1}{y} = 3y \qquad (0 < x < y < 1)$$

(b)

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\left(Y \cdot \mathrm{RND}_1\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}} \cdot \mathrm{RND}_1\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\right) = \int_0^1 y \cdot 3y^2 \, dy = \frac{3}{4}$$

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}} \, \mathrm{RND}_1 \cdot (\mathrm{RND}_2)^{\frac{1}{3}}\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{2}{3}} \cdot \mathrm{RND}_1\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\mathrm{E}\left((\mathrm{RND}_2)^{\frac{2}{3}}\right) = \int_0^1 y^{\frac{2}{3}} \, dy = \frac{3}{5}$$

Végül a kovariancia

$$\mathrm{COV}\left(X, Y\right) = \mathrm{E}\left(XY\right) - \mathrm{E}\left(X\right) \cdot \mathrm{E}\left(Y\right) = \frac{3}{10} - \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{160}$$

6. **(a)**

X sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_x^1 3y \, dy = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 \qquad (0 < x < 1)$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{3y}{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2} = \frac{2y}{1 - x^2} \qquad (0 < x < y < 1)$$

Y feltételes várható értéke az $X = x$ feltétel mellett:

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_x^1 \frac{2y^2}{1 - x^2} \, dy = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^3}{1 - x^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - x^3}{1 - x^2}$$

A legjobb tippeléshez használandó függvény:

$$k(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - x^3}{1 - x^2}$$

(b)

Y feltételes eloszlásfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$F_{2|1}(y|x) = \int_x^y \frac{2y}{1 - x^2} \, dy = \frac{y^2 - x^2}{1 - x^2}$$

A feltételes medián meghatározásához az egyenlet:

$$\frac{y^2 - x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{2}$$

Az egyenlet megoldása y -ra:

$$y = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2}$$

A legjobb tippeléshez használandó függvény:

$$k(x) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2}$$

3.3. Félév végi vizsga, 2017-01-09

1. **(a)** Adja meg a

i	0	1	2	3	...
p_i	p_0	p_1	p_2	p_3	...

diszkrét eloszlás második momentumának a definícióját!

(b) Felhasználva, hogy az $X = i$ esemény relatív gyakorisága – nagy kísérletszám esetén – közel van a p_i valószínűséghez, írja le annak a vázlatos bizonyítását , hogy sok kísérleti eredmény négyzetének az átlaga közel van a második momentumhoz! *(Matematikai levezetést kérünk, nem pedig számítógépes szimuláció elmesélését.)*

2. Egy városban pár év óta elég sok trafipax-szal próbálják a száguldozást megfékezni. A taxi-központ az év végén minden egyes taxisra összesítette, hogy hányszor kapták el gyorshajtásért. Mi csak annyit tudunk, hogy 110 taxist egyszer, 55-öt kétszer. **(a)** Kb. hány taxi szaladgál a városban? **(b)** A taxisoknak kb. hány százaléka kapott egy vagy több büntetést gyorshajtásért? *(A használt modell jogosságát indokolni is kell!)*

3. **(a)** 100 diák mindegyike, a többitől függetlenül 0.8 valószínűséggel adja be házi feladatát a megadott határidőig. Mi a valószínűsége annak, hogy a diákoknak legalább a háromnegyede a megadott határidőig beadja a házi feladatát? *(A választ itt egy korrekt szumma alakjában kérjük.)* **(b)** A feltett kérdésre adjon közelítő választ normális eloszlás segítségével! *(A lentebbi táblázatot használja!)*

4. Van egy piros és egy zöld lámpám. Élettartamaik függetlenek, és exponenciális eloszlásúak. A piros élettartamának a várható értéke 200 nap, a zöldnek pedig a mediánja 200 nap. **(a)** *Az eloszlásfüggvények összevetésével* döntse el, melyik lámpa a jobb! **(b)** Mennyi a valószínűsége annak, hogy a piros élettartama nagyobb a zöldénél? *(Segítség: határozza meg a kétdimenziós sűrűségfüggvény képletét és a kedvező kimenetelek halmazát, stb.)*

5. *(Folytatás)* Kísérleti eredményekre támaszkodva magyarázza el, hogy hogy mit jelent az a tény, hogy **(a)** a piros lámpa élettartamának a várható értéke 200 nap! **(b)** a zöld lámpa élettartamának a mediánja 200 nap!

6. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = \frac{2x}{y} \quad (0 < x < 1,\ x < y < \frac{1}{x})$$

(a) Határozza meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét! **(b)** Milyen $y = k(x)$ függvénnnyel tippeljünk X-ből Y-ra, ha azt szeretnénk, hogy a hiba négyzetének a várható értéke minimális legyen? *(Határozza meg a $k(x)$ függvény képletét!)*

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

3.4. Félév végi vizsga, 2017-01-09. Megoldások és válaszok

1. **(a)**

   A második momentum:

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=0}^{\infty} i^2 p_i = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_i$$

   (b)

   Legyenek $X_1, \ldots, X_N$ kísérleti eredmények. Legyen N_i, hogy ebből hányszor kaptuk az i eredményt. Tehát az i relatív gyakorisága $N_i/N \approx p_i$. Így

$$\frac{X_1^2 + \cdots + X_N^2}{N} = \frac{N_1}{N}\, 1^2 + \cdots + \frac{N_i}{N}\, i^2 + \cdots \approx p_1 1^2 + \cdots + p_i i^2 + \cdots = \mathrm{E}(X^2)$$

2. **(a)**

   Minden egyes taxisra igaz, hogy sok gyorshajtásának mindegyikét egymástól függetlenül kis valószínűséggel veszik észre. Így az egyes taxisok tettenéréseinek X számát független Poisson változókkal modellezhetjük, ismeretlen λ paraméterrel.

   N db taxi esetén:

$$110 \approx N\,\mathrm{P}(X = 1) = N \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda$$

   illetve

$$55 \approx N\,\mathrm{P}(X = 2) = N \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^2/2$$

   A két egyenlet hányadosa $\lambda/2 = 1/2$-et ad, ahonnan $\lambda = 1$ és $N \approx 110 \cdot \mathrm{e} \approx 299$.

   (b)

   A tettenértek aránya $\mathrm{P}(X > 0) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 63.2\%$.

3. **(a)**

   Az időben leadott dolgozatok X száma binomiális eloszlást követ, $n = 100$, $p = 0.8$ paraméterekkel.

$$\mathrm{P}(X \geq 75) = \sum_{k=75}^{100} \binom{100}{k} 0.8^k\, 0.2^{100-k}$$

   (b)

$$\mathrm{P}(X \geq 75) = \mathrm{P}(X \geq 74.5) = \mathrm{P}\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \geq \frac{74.5 - 1000.8}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx 1 - \Phi(-5.5/4) = \Phi(1.375) \approx 0.92$$

4. **(a)**

A λ paraméterű exponenciális eloszlást eloszlásfüggvénye $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, a várható értéke $\frac{1}{\lambda}$. A második állítás alapján:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{piros}}} = 200, \qquad \text{így} \qquad \lambda_{\text{piros}} = \frac{1}{200}, \qquad \text{ezért} \qquad F_{\text{piros}}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{200}\,x}$$

Az első első állítás alapján:

$$\mathrm{e}^{-\lambda_{\text{zöld}}\,200} = \frac{1}{2}, \qquad \text{így} \qquad \lambda_{\text{zöld}} = \frac{\ln(2)}{200}, \qquad \text{ezért} \qquad F_{\text{zöld}}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{200}\,x}$$

Mivel $\ln(2) < 1$, ezért $\lambda_{\text{zöld}} < \lambda_{\text{piros}}$ vagyis,

$$\frac{1}{\lambda_{\text{zöld}}} > \frac{1}{\lambda_{\text{piros}}}$$

így a zöld lámpa élettartartamának nagyobb a várható értéke, mint a piros lámpa élettartamának. Sőt, tetszőleges x időtartam esetén

$$F_{\text{piros}}(x) > F_{\text{zöld}}(x)$$

ami azt fejezi ki, hogy az x időtartam alatt a piros nagyobb valószínűséggel ég ki, mint a zöld. Tehát a zöld lámpa egyértelműen jobb, mint a piros.

(b)

Legyen $X =$ a piros lámpa élettartama, $Y =$ a zöld lámpa élettartama. ARz (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye szorzat alakú:

$$f(x, y) = \lambda_{\text{piros}}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{\text{piros}} x}\;\lambda_{\text{zöld}}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{\text{zöld}} y}$$

ahol (x, y) a pozitív síknegyedben van.

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X > Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty f(x, y)\,dx\,dy &= \int_0^\infty \lambda_{\text{zöld}}\mathrm{e}^{-\lambda_{\text{zöld}} y}\left(\int_y^\infty \lambda_{\text{piros}}\mathrm{e}^{-\lambda_{\text{piros}} x}\,dx\right)\,dy \\ &= \int_0^\infty \lambda_{\text{zöld}}\mathrm{e}^{-\lambda_{\text{zöld}} y}\mathrm{e}^{-\lambda_{\text{piros}} y}\,dy = \frac{\lambda_{\text{zöld}}}{\lambda_{\text{zöld}} + \lambda_{\text{piros}}}\end{aligned}$$

Jelen esetben ez $\frac{\ln(2)}{\ln(2)+1} = 0.41$.

5. **(a)**

Sok (N db) kísérletet végzünk, az eredményeket $X_1, \ldots, X_N$-nel jelöljük. Az élettartamok átlaga nagy kísérletszám esetén körülbelül 200.

(b)

Azon kísérletek aránya, melyekben az élettartam 200 napnál nagyobb, körülbelül 1/2.

6. **(a)**

X sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_x^{1/x} \frac{2x}{y}\,dy = 2x[\ln y]_x^{1/x} = 4x \ln\frac{1}{x} \quad \text{ha} 0 < x < 1$$

Így a feltételes sűrűségfüggvény:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{2y\ln(1/x)}, \qquad \text{ha } x < y < \frac{1}{x}$$

(b)

A hiba négyzetének várható értékét a feltételes várható érték minimalizálja, tehát

$$k(x) = \int_x^{1/x} y\, f_{2|1}(y|x)\, dy = \int_x^{1/x} \frac{y}{2y\ln(1/x)}\, dy = \left(\frac{1}{x} - x\right) \frac{1}{2\ln(1/x)}$$

3.5. Félév végi vizsga, 2017-01-16

1. Én és barátom felváltva dobunk kosárra addig, ameddig valamelyikünknek sikerül bedobni a labdát. Én minden dobásomnál 0.4 valószínűséggel találok be, barátom 0.6 -tal. Dobásaink függetlenek. Én kezdek. **(a)** Mi a valószínűsége, hogy én nyerek? *(Ha a kért valószínűséget korrekt szumma alakjában adja meg, akkor megoldása 4 pontot ér, ha a szummát helyes tört alakra is hozza, akkor 5 pont jár.)* **(b)** Mi a valószínűsége, hogy úgy nyerek, hogy legfeljebb hármat dobok? *(Elég ha valószínűséget korrekt szumma alakjában adja meg.)*

2. **(a)** Határozza meg az alábbi két eloszlás konvolúcióját! *(Itt a számolási hiba is HIBA!)*

x	0	1	2	3
$p_1(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

y	0	1	2
$p_2(y)$	0.5	0.3	0.2

   (b) Két valószínűségi változó esetén, milyen feltételek mellett és mire ad helyes választ a két változó eloszlásának konvolúciója?

3. Tekintünk egy egységsugarú kört, és annak egy érintőjét. Az érintőből számegyenest csinálunk: az origó az érintési pont, az egység pedig a kör sugara. A kör kerületén vett egyenletes eloszlást merőlegesen vetítjük az érintőjére. Az **(a)** Vezesse le az X -szel jelölt vetületpont eloszlásfüggvényének és sűrűségfüggvényének a képletét! *(A levezetéshez használt ábra legyen szép és jól érthető!)* **(b)** Két életből vett példát is tanultunk, ahol az (a) részben leírt probléma felbukkan. Vázolja ezek közül az egyiket egy-két mondatban!

4. **(a)** Mondja ki a Moivre-Laplace tételt! *(Világosan fogalmazza meg, hogy a tétel alapján **milyen feltételek mellett, mit, mivel** közelíthetünk!)* **(b)** Szemléltesse a Moivre-Laplace tétel állítását egy gondosan készített ábrával és megfelelő magyarázattal! *(A fontos dolgok legyenek tisztán lerajzolva, érthetően bejelölve, megnevezve, beskálázva!)*

5. Éva csak szedi, szedi az almákat a fáról, és adogatja Ádámnak. Ádám először megméri az átmérőjüket, aztán a súlyukat. Feltételezzük, hogy az átmérő és a súly kétdimenziós normális eloszlást követ. Az átmérő várható értéke 10, szórása 1 cm. A súly várható értéke 20, szórása 2 dkg. A korrelációs együttható 0.8. **(a)** Hány almát kell leszedni ahhoz, hogy azoknak az átlagsúlya legalább 0.96 valószínűséggel 19.9 és 20.1 dkg között legyen? **(b)** Ha Ádám egy szép piros almán éppen 12 cm átmérőt mért, akkor vajon mekkora ennek az almának a súlya? Tippeljen úgy, ahogy akkor kell tippelni, amikor a hiba négyzetének a várható értékét minimálizáljuk!

6. RND_1 és RND_2 független, külön-külön 0 és 1 között egyenletes eloszlást követő véletlen számok. Legyen $X = \mathrm{RND}_1$ és $Y = \mathrm{RND}_1^2 \cdot \mathrm{RND}_2$. Határozza meg **(a)** X és Y várható értékét, **(b)** az X és Y közötti kovarianciát!

3.6. Félév végi vizsga, 2017-01-16. Megoldások és válaszok

1. **(a)**

   Az összegzési és szorzási szabályok alkalmazásával:

$$\mathrm{P}(\text{én nyerek}) = 0.4 + (0.6 \cdot 0.4) \cdot 0.4 + (0.6 \cdot 0.4)^2 \cdot 0.4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (0.6 \cdot 0.4)^k \cdot 0.4 = \frac{10}{19}$$

   (b)

   A válasz az előző összeg első három tagjának az összege:

$$0.4 + (0.6 \cdot 0.4) \cdot 0.4 + (0.6 \cdot 0.4)^2 \cdot 0.4$$

2. **(a)**

   A síkbeli eloszlás tagjai – a függetlenség miatt – szorzatként adódnak:

2	$\frac{2}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{8}{100}$
1	$\frac{3}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{12}{100}$
0	$\frac{5}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{20}{100}$
	0	1	2	3

   A konvolúció tagjai összegzéssel adódnak:

z	0	1	2	3	4	5
$p(z)$	$\frac{5}{100}$	$\frac{3+10}{100} = \frac{13}{100}$	$\frac{2+6+15}{100} = \frac{23}{100}$	$\frac{4+9+20}{100} = \frac{33}{100}$	$\frac{6+12}{100} = \frac{18}{100}$	$\frac{8}{100}$

   (b)

   Független valószínűségi változók összegének az eloszlása egyenlő a tagok eloszlásainak konvolúciójával.

3. **(a) és (b)**

   Az levezetést és két példát lásd a jegyzet 2. részének "Egyenletes körmozgásból származtatott eloszlások" című fejezetében.

4. **(a) és (b)**

   Az állítást és az ábrát lásd a jegyzet 2. részének "Moivre-Laplace tétel" című fejezetében.

5. **(a)**

   Egy leszedett almára vonatkozólag legyen X az alma súlya dkg-ban, Y pedig az alma átmérője cm-ben. A feladat szövege alapján (X, Y) együttes eloszlása kétdimenziós normális az adott paraméterekkel. Az (a) feladatrész csak egydimenziós probléma: azt kell csak felhasználni, hogy X normális eloszlást követ 20 várható értékkel és 2 szórással. n darab leszedett alma átlagát jelöljük $\overline{X}_n$ -nel. Ennek eloszlása normális 20 várható értékkel és $2/\sqrt{n}$ szórással. Így

$$\mathrm{P}(19.9 < \overline{X}_n < 20.1) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{0.1}{2/\sqrt{n}}\right) - 1.$$

Ez a valószínűség akkor legalább 0.96, ha $\Phi(\frac{0.1\cdot\sqrt{n}}{2}) \geq 0.98$, vagyis $\frac{0.1\cdot\sqrt{n}}{2} \geq 2$. Így 1600 vagy több leszedett alma esetén teljesül a kívánt feltétel.

(b)

Mint tanultuk:

- a legjobb tipp az $\mathrm{E}(X|Y=12)$ feltételes várható érték
- az $Y=y$ feltétel mellett X eloszlása normális
- melynek a várható értéke $m_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-m_2)$

Így

$$\mathrm{E}(X|Y=12) = 23.2$$

6. **(a)**

A megoldás több helyen felhasználja a valószínűségi változó függvényének várható értékéről szóló képletet (lásd: 2. rész 1. fejezet).

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 1 \, dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{RND}_1^2 \cdot \mathrm{RND}_2) = \mathrm{E}(\mathrm{RND}_1^2) \cdot \mathrm{E}(\mathrm{RND}_2) = \left(\int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(b)

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(\mathrm{RND}_1^3 \cdot \mathrm{RND}_2) = \mathrm{E}(\mathrm{RND}_1^3) \cdot \mathrm{E}(\mathrm{RND}_2) = \left(\int_0^1 x^3 \cdot 1 \, dx\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{24}$$

3.7. Félév végi vizsga, 2017-01-23

1. **(a)** Mikor mondjuk azt, hogy az A és B események függetlenek egymástól? *(Mondja ki a definíciót!)* **(b)** Mikor mondjuk azt, hogy az A, B,C események függetlenek egymástól, vagy – más kifejezéssel élve – A, B,C események független rendszert alkotnak? *(Mondja ki a definíciót!)* **(c)** Igaz-e, hogy ha három esemény közül bármelyik kettő független egymástól, akkor a három esemény független rendszert alkot? *(Ha igen, bizonyítsa be! Ha nem, adjon ellenpéldát, és a szükséges tényeket igazolja!)*

2. X és Y függetlenek, és eloszlásaik:

x	0	10	20	30
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

illetve

y	10	20	30	40
$p(y)$	0.1	0.2	0.3	0.4

(a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y > X$? **(b)** Mennyi X , Y és $X + Y$ szórása? *(Mindkét részben a számolási hiba is HIBA! Segítség: ha jól számol, mindkét részben "szép" eredmény jön ki.)*

3. Két gejzírt (egy kisebbet és egy nagyobbat) rendszeresen megfigyelünk Izlandon. A percekben mért várakozási idők a kitörésükig, amiket X és Y jelöl, függetlenek, és mindketten 0.1 paraméterű exponenciális eloszlást követnek. **(a)** Határozza meg az $X < 2 \cdot Y$ esemény valószínűségét! **(b)** Határozza meg $Z = 2 \cdot Y - X$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a képletét! *(Ha a válaszokat korrekt integrálokkal megadja, de nem számolja ki, akkor csak 1-1 pontot veszít. Egy-egy jó ábra sokat segíthet!)*

4. Felmegy a legény fára, a meggyfa tetjére. Lerázza a meggyet, aztán ... a babája (válogatás nélkül) száz szemet szed a fedeles kosarába. A meggyszemek súlya – egymástól függetlenül – egyenletes eloszlást követ 2 dkg és 4 dkg között. **(a)** Mi a valószínűsége, hogy a kosár nettó súlya meghaladja a 3.05 kg -ot? *(Használja a normális eloszlás lentebbi táblázatát!)* **(b)** Bár a meggyszemek súlya egyenletes eloszlást követ, az (a) részben mégis normális eloszlással lehetett számolni. Miért? *(Korrekt, tiszta választ kérünk.)*

5. Legyen $X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$ és $Y = \mathrm{RND}_1$. Határozza meg **(a)** X és Y várható értékét, és **(b)** az X és közötti Y kovarianciát!

6. Amikor az (x, y) -síkon tekintett $f(x, y)$ sűrűségfüggvényű eloszlást az (u, v) -síkra transzformáljuk az

$$u = \mathbf{u}(x, y), \qquad v = \mathbf{v}(x, y)$$

képletpár által definiált t transzformációval (a szükséges folytonossági, differenciálhatósági és invertálhatósági feltételek mellett), akkor fontos szerepe van egy bizonyos Jacobi mátrixnak. **(a)** Írja fel ezt a bizonyos Jacobi mátrixot a megfelelő parciális deriváltakkal! **(b)** Írja fel azt a képletet, ahogy az (u, v) -síkon kapott eloszlás $s(u, v)$ sűrűségfüggvényét az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényből és a megfelelő Jacobi determinánsból elő lehet állítani! *(Korrekt, jól érthető képleteket kérünk! A t transzformáció inverzét a szokásoknak megfelelően jelölje t^{-1}, a t^{-1} -nek megfelelő képletpár tagjait pedig $x = \boldsymbol{x}(u, v)$, $y = \boldsymbol{y}(u, v)$.)*

Standard normális eloszlásfüggvény
(két tizedes pontossággal)

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

3.8. Félév végi vizsga, 2017-01-23. Megoldások és válaszok

1. **(a)**

   Lásd jegyzet 1. rész, 6.1 "Események függetlensége" című alfejezet.

   (b)

   Lásd jegyzet 1. rész, 6.1 "Események függetlensége" című alfejezet.

   (c)

   Nem igaz. Az ellenpéldát lásd jegyzet 1. rész, 6.5. "Gyakorló feladatok", 3. feladat: "*Példa páronként független, de összességében nem független eseményekre*":

   - $A = 10$ forintos érme fejet ad
   - $B = 20$ forintos érme fejet ad
   - $C =$ mindkét érmével írást dobok vagy mindkét érmével fejet dobok

   A és B nyilván függetlenek egymástól, és

   - A és C függetlenek, hiszen $\mathrm{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \P(A) \cdot \mathrm{P}(C)$,
   - B és C függetlenek, hiszen $\mathrm{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C)$,
   - de A és B és C nem függetlenek, hiszen $\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C)$

2. **(a)**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\left(X < Y\right) &= \sum_{y \in \{10,20,30,40\}} \mathrm{P}\left(X < y \ \wedge \ Y = y\right) \\
&= \sum_{y \in \{10,20,30,40\}} \mathrm{P}\left(X < y\right) \cdot \mathrm{P}\left(Y = y\right) \\
&= (0.1) \cdot 0.1 + (0.1 + 0.2) \cdot 0.2 + (0.1 + 0.2 + 0.3) \cdot 0.3 + (0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4) \cdot 0.4 \ = \ 0.65
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= 0 \cdot 0.1 + 10 \cdot 0.2 + 20 \cdot 0.3 + 30 \cdot 0.4 \ = \ 20 \\
\mathrm{E}(X^2) &= 0^2 \cdot 0.1 + 10^2 \cdot 0.2 + 20^2 \cdot 0.3 + 30^2 \cdot 0.4 \ = \ 500 \\
\mathrm{SD}(X) &= \sqrt{\mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2} \ = \ \sqrt{500 - 20^2} \ = \ 10 \\
\mathrm{SD}(Y) &= \ = \ \mathrm{SD}(X + 10) \ = \ \mathrm{SD}(X) \ = \ 10 \\
\mathrm{SD}(X + Y) &= \sqrt{\mathrm{SD}^2(X) + \mathrm{SD}^2(Y)} \ = \ \sqrt{10^2 + 10^2} \ = \ \sqrt{200} \ \approx \ 14.1
\end{aligned}
$$

3. **(a)**

   Mivel az (a) és (b) rész megoldásában csak az alábbi integrálra van szükség, előre bocsátjuk, hogy

$$
\int_{y=s}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot y} \, \mathrm{d}y \ = \ \left[-e^{-\lambda \cdot y} \right]_{y=s}^{\infty} \ = \ e^{-\lambda \cdot s}
$$

(X, Y) sűrűségfüggvénye a függetlenség miatt szorzatként adódik:

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 0.1 \cdot e^{-0.1\cdot x} \cdot 0.1 \cdot e^{-0.1\cdot y} & \text{ha } 0 \le x \text{ és } 0 \le y \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$\mathrm{P}\left(X < 2 \cdot Y\right) \;=\; \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=\frac{x}{2}}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{2}{3}$$

(b)

$$\begin{aligned} R(z) \;&=\; \mathrm{P}\left(Z < z\right) \;=\; \mathrm{P}\left(2 \cdot Y - X < z\right) \;=\; \mathrm{P}\left(Y < \frac{z+X}{2}\right) \\ \text{ha } 0 \le z\text{, akkor} \;&=\; \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\frac{z+x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \;=\; 1 - \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{-z}{20}} \\ \text{ha } z < 0\text{, akkor} \;&=\; \int_{x=-z}^{\infty} \int_{y=0}^{\frac{z+x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{z}{10}} \end{aligned}$$

4. **(a)**

   X_i jelölje az i-edik meggy súlyát dkg-ban. A feltevés szerint X_i eloszlása a $[2,4]$ intervallumon egyenletes, ezért $\mathrm{E}(X_i) = \mu = \frac{2+4}{2} = 3$ és $\mathrm{SD}(X_i) = \sigma = \frac{4-2}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. A centrális határeloszlás tétel miatt:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_{100} > 305) &= \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100\mu}{\sqrt{100}\sigma} > \frac{305 - 300}{\sqrt{100}/\sqrt{3}}\right) \\ &= 1 - \Phi(\sqrt{3}/2) \;\approx 1 - \Phi(0.87) \approx 1 - 0.81 = 0.19 \end{aligned}$$

   (b)

   A Centrális határeloszlás tételt használtuk: sok (100 db) független, kis szórású ($\frac{1}{\sqrt{100}}$) valószínűségi változó összege közelítőleg normális eloszlású.

5. **(a) és (b)**

   Lásd jegyzet 3. rész, 19.2 "Számolós példa".

6. **(a) és (b)**

   Lásd jegyzet 3. rész, 4. fejezet, "Transzformáció síkról síkra".

3.9. Félév végi vizsga, 2017-05-22

1. Adja meg valószínűségek összegzési szabályának a képletét $A \cup B$ -re,

   (a) ha A és B független események.

   (b) ha A és B kizáró események.

   (c) ha A és B tetszőleges események.

   Adja meg valószínűségek szorzási szabályának a képletét $A \cap B \cap C$ -re,

   (d) ha A, B és C független események.

   (e) ha A, B és C kizáró események.

   (f) ha A, B és C tetszőleges események.

2. Egy kisvárosban, amikor a mentőt hívnak, a tapasztalat szerint átlagosan 5 próbálkozás kell ahhoz, hogy felvegyék a telefont.

   a) Milyen eloszlást követ az első sikeres hivásig szükséges hívások száma? *(Adja meg az eloszlás nevét és paraméterének/paramétereinek numerikus értékét!)*

   b) Mi a valószínűsége annak, hogy 5-nél több hívás kell ahhoz, hogy végre felvegyék a telefont?

   (c) Mi a valószínűsége annak, hogy a szükséges hívások száma páros?

3. Amikor a tűzoltók kijönnek, a tapasztalat szerint akármennyi idő is telt el azóta, hogy hívták őket, nem változik az esély arra vonatkozóan, hogy mennyit kell még várni rájuk. A tapasztalat szerint átlagosan 7.5 percet.

   a) Milyen eloszlást követ a tűzoltók érkezéséig eltelt idő? *(Adja meg az eloszlás nevét és paraméterének/paramétereinek numerikus értékét!)*

   Fogalmazza meg azt a tulajdonságot, ami az eloszlás használatát indokolja! Vezesse le ebből a tulajdonságból az eloszlás eloszlásfüggvényének a képletét!

   b) Mi a valószínűsége annak, hogy 3 percen belül felveszik a telefont?

   (c) Készítsen egy-egy gondos ábrát az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény grafikonjáról, és mindkét ábrán jelölje be, hogy a b) kérdésben kérdezett valószínűség hol látható! *(Az ábrán legyen skála, és írja a megfelel helyre a megfelelő numerikus értékeket!)*

4. Egy véletlenszerűen választott házaspár esetén a férj testsúlya legyen X kg, a feleségé Y kg. (X, Y) -t normális eloszlással modellezzük. Tegyük fel, hogy X várható értéke 85, szórása 15, Y várható értéke 75, szórása 10, a korrelációs együttható pedig 0.6.

   (a) Képzelje el, hogy 1000 házaspárral kapcsolatban megmérjük mindkettőjük testsúlyát, és a kapott (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ... , (X_{1000}, Y_{1000}) pontokat a felvesszük a síkon. Rajzoljon egy ilyen jellegű pontfelhőt! *(A koordináta tengelyeken jelölje be a várható értékeket, és a szórásokat, és a pontfelhőt ezeknek megfelelően helyezze el! A pontfelhő elkészítésénél figyeljen arra is, hogy mekkora a korrelációs együttható!)*

   (b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy férj súlya több, mint 100 kg?

   (c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy 80 kg-os feleség férjének a súlya több, mint 100 kg?

Standard normális eloszlásfüggvény *(két tizedes pontossággal)*

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

3.10. Félév végi vizsga, 2017-05-22. Megoldások és válaszok

1. **(a)**

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}B)$$

(b)

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

(c)

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$$

(d)

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B)\ \mathrm{P}(C)$$

(e)

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = 0$$

(f)

$$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A)\ \mathrm{P}(B|A)\ \mathrm{P}(C|A \cap B)$$

2. **a)**

Optimista geometriai eloszlás $p = \frac{1}{5}$ paraméterrel.

b)

$$\mathrm{P}\ (\text{ 5-nél több hívás }) = 1 - \mathrm{P}\ (\text{ 4 vagy kevesebb hívás }) = \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5}$$

(c)

$$\mathrm{P}\,(\text{a hívások száma 2 vagy 4 vagy 6 vagy ... }) =$$

$$= \mathrm{P}\,(\text{a hívások száma 2 }) \ + \ \mathrm{P}\,(\text{a hívások száma 4}) \ + \ \mathrm{P}\,(\text{a hívások száma 6}) \ + \ \ldots =$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{2-1} \cdot \frac{1}{5} \quad + \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{4-1} \cdot \frac{1}{5} \quad + \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{6-1} \cdot \frac{1}{5} \quad + \ \ldots =$$

A végtelen sort szumma jellel is felírhatjuk:

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{2i-1} \cdot \frac{1}{5} =$$

A kapott mértani sor első tagja $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$, kvóciense $\left(\frac{4}{5}\right)^2$. A sor összege – miont ismeretes – *első tag osztva egy mínusz a kvóciens*:

$$= \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{4}{9} = 0.44$$

3. **a)**

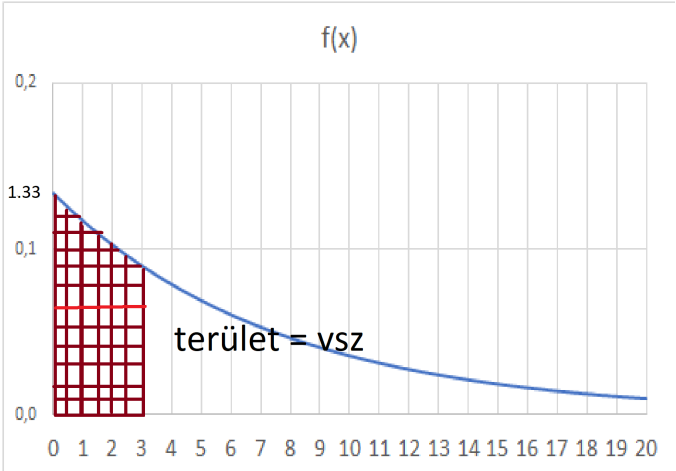
A megfogalmazott "örökifjú tulajdonság" miatt a várakozási időt exponenciális eloszlással modellezhetjük. A paraméter az elméleti átlag reciproka: $\lambda = \frac{1}{7.5} = 0.133$. Az exponenciális eloszlás levezetése az "örökifjú tulajdonság"-ból a jegyzetben olvasható.

b)

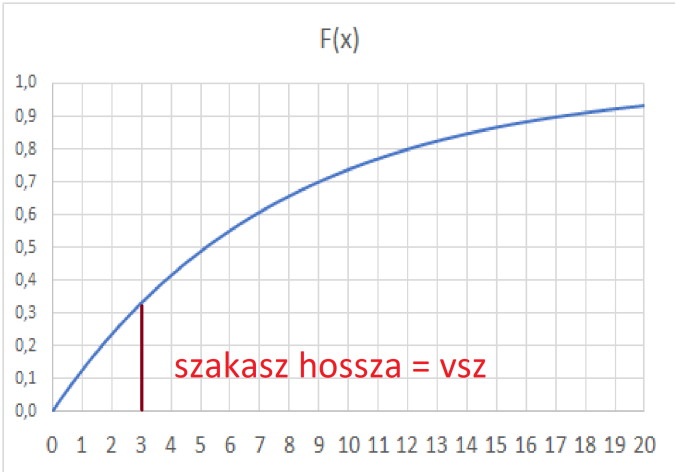
$$\mathrm{P}\ (\text{ a várakozási idő 3 percnél kevesebb }) = F(3) = 1 - \mathrm{e}^{-0.133\ \cdot 3} \qquad (= 0.33)$$

(c)

A sűrűségfüggvény grafikonja a kérdezett valószínűséggel:

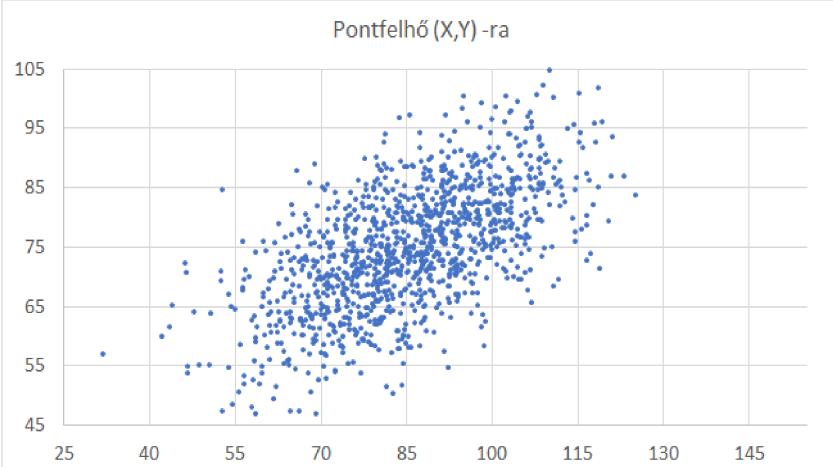


Az eloszlásfüggvény grafikonja a kérdezett valószínűséggel:



4. **(a)**

Az ábrának ehhez hasonónak kell lenni:



(b)

$$\mathrm{P}\left(X > 100\right) = 1 - F(100) = 1 - \Phi\left(\frac{100-85}{15}\right) = 1 - \Phi\left(1\right) = 1 - 0.86 = 0.16$$

(c)

Kétdimenziós normális eloszlás esetén X feltételes várható értékének általános képlete:

$$\mathrm{E}(\,X \,|\, Y = y\,) = \mu_1 + r \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot (y - \mu_2)$$

A mostani konkrét adatokkal:

$$\mathrm{E}(\,X \,|\, Y = 80\,) = 85 + 0.6 \cdot \frac{15}{10} \cdot (80 - 75) = 89.5$$

Kétdimenziós normális eloszlás esetén X feltételes szórásának általános képlete:

$$\mathrm{SD}(\,X \,|\, Y = y\,) = \sigma_1 \cdot \sqrt{1 - r^2}$$

A mostani konkrét adatokkal:

$$\mathrm{SD}(\,X \,|\, Y = 80\,) = 15 \cdot \sqrt{1 - 0.6^2} = 12$$

X feltételes eloszlása az $Y = 80$ feltétel mellett egydimenziós normális eloszlás a kiszámolt paraméterekkel, így a kérdezett feltétes valószínűség:

$$\mathrm{P}\left(X > 100 \mid Y = 80)\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100-89.5}{12}\right) = 1 - \Phi\left(0.79\right) = 1 - 0.79 = 0.21$$

3.11. Félév végi vizsga, 2017-06-06

1. **(a)** Az

1	2	3	4	...
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	...

táblázattal megadott diszkrét eloszlás a nevezetes eloszlások egyike. Adja meg az eloszlás nevét és a paraméterének a numerikus értékét!

(b) Számolja ki a baloldali eloszlásfüggvény értékét az $x = 3$ helyen?

(c) Számolja ki a jobboldali eloszlásfüggvény értékét az $x = 3$ helyen?

(Figyelem! A (b) és (c) kérdésekre adott válaszokban a számolási hiba is HIBA!)

(d) Adja meg és igazolja azt az általános összefüggést, mely a baloldali eloszlásfüggvény, a jobboldali eloszlásfüggvény és a súlyfüggvény értékei között minden x -re fennáll!

2. Néhány tény:

   - Tanszékünkre naponta munkaidőben (8 óra) alatt átlagosan kb. 50 telefonhívás érkezik.
   - A telefonálók kb. 1/3 -a férfi, 2/3-a nő.
   - A nők és férfiak között egyaránt átlagosan kb. minden 10 -ik hívás téves.

   a) Mi a valószínűsége annak, hogy a következő 20 hívásból pontosan 2 téves?

   b) Mi a valószínűsége annak, hogy a következő 20 hívásból pontosan 2 téves, és az első téves hívó nő, a második férfi?

   c) Milyen eloszlást követ az **összes hívások** száma egy óra alatt? *(Rövid indoklással fűszerezve adja meg az eloszlás nevét és paraméterének/paramétereinek numerikus értékét!)*

   d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy két óra alatt pontosan 2 téves hívás érkezik?

3. 45 diák mindegyike a többitől függetlenül 9:40 és 10:10 között egyenletes eloszlás szerint érkezik a 10:00 -kor kezdődő vizsgára. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a diákok többsége (azaz legalább 23 diák) időben (tehát 10:00 előtt) beér?

   (a) Írja fel a kérdezett valószínűséget szumma formájában!

   (b) Számolja ki a kérdezett valószínűség közelítő értékét normális eloszlással!

   (c) Határozza meg annak az X valószínűségi változónak az eloszlásfüggvényét, ami megmondja, hogy mikor érkezik meg az utolsó diák?

4. (X, Y) sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 3x \quad (0 < 2x < y < 2)$.

   (a) Szemléltesse egy-egy gondosan készített ábrán

   - a sűrűségfüggvény értelemezési tartományát az (x, y) síkon,
   - és a $z = f(x, y)$ felületet az értelmezési tartomány felett az (x, y, z) térben!

   (b) Rajzoljon egy olyan pontfelhőt az (x, y) síkon, amilyet akkor kapnánk, ha (X, Y) -ra sok kísérletet végeznénk! *(Ügyeljen arra, hogy a pontfelhő sűrűsége a megadott sűrűségfüggvénynek megfeleljen!)*

   (c) Határozza meg Y sűrűségfüggvényét!

   (d) Ha sok kísérletet végeznénk kb. mennyi lenne az X értékek átlaga? *(Egy konkrét számot kell – megfelelő számolás eredményeként – megadnia.)*

   (e) Hogyan tippeljünk Y -ból X -re, ha a célunk az, hogy a hiba négyzetének a várható értéke minimális legyen? *(Adja meg az optimális tippet megvalósító függvény képletét!)*

Standard normális eloszlásfüggvény *(két tizedes pontossággal)*

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,0	0,50	0,5	0,69	1,0	0,84	1,5	0,93	2,0	0,98	2,5	0,99
0,1	0,54	0,6	0,73	1,1	0,86	1,6	0,95	2,1	0,98	2,6	1,00
0,2	0,58	0,7	0,76	1,2	0,88	1,7	0,96	2,2	0,99		
0,3	0,62	0,8	0,79	1,3	0,90	1,8	0,96	2,3	0,99		
0,4	0,66	0,9	0,82	1,4	0,92	1,9	0,97	2,4	0,99		

3.12. Félév végi vizsga, 2017-06-06. Megoldások és válaszok

1. **(a)** Optimista geometriai eloszlás $\frac{2}{3}$ paraméterrel

   (b)
$$F(3) \;=\; \mathrm{P}(X \le 3) \;=\; \mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3) \;=\; \frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27} \;=\; \frac{26}{27}$$

   (c)
$$T(3) \;=\; \mathrm{P}(X \ge 3) \;=\; 1-\mathrm{P}(X=1)-\mathrm{P}(X=2) \;=\; 1-\frac{2}{3}-\frac{2}{9} \;=\; \frac{1}{9}$$

   (d)
$$F(x)+T(x) \;=\; 1+p(x)$$

2. **(a)**
$$\mathrm{P}(\text{ egy hívás téves }) \;=\; \frac{1}{10}$$

   (b)
$$\mathrm{P}(\text{ 20 hívásból pontosan 2 téves }) \;=\; \binom{20}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{18}$$

   (c)
$$\mathrm{P}(\text{ 20 hívásból pontosan 2 téves, és az első téves hívó nő, a második pedig férfi }) \;=$$
$$=\; \binom{20}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)^{18}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$$

   (d) Mivel sok ember mindegyikére igaz, hogy kis valószínűséggel telefonál a vizsgált egy órás időtartam alatt, továbbá az emberek egymástól függetlenül telefonálgatnak, a hívások száma egy óra alatt Poisson eloszlást követ. Mivel 8 óra alatt a telefonálók számának a várható értéke 50 , ezért 1 óra alatt a telefonálók számának a várható értéke $\frac{50}{8}$. Poisson eloslás esetén a paraméter értéke egyenlő a várható értékkel, vagyis $\lambda = \frac{50}{8}$.

3. **(a)** Az időben érkező hallgatók X száma binomiális eloszlást követ $n = 45$ és $p = \frac{2}{3}$ paraméterekkel, ezért
$$\mathrm{P}(X \ge 23) \;=\; \sum_{k=23}^{45}\binom{45}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{45-k}$$

   (b) A Moivre-Laplace tétel értelmében X közelítőleg normális eloszlású $\mu = 45\cdot\frac{2}{3}$ és $\sqrt{45\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}}$ paraméterekkel. Így
$$\mathrm{P}(X \ge 23) \;=\; 1-\Phi\left(\frac{22.5-30}{3}\right) \;=\; 1-\Phi\left(\frac{-7.5}{3}\right) \;=\; \Phi\left(\frac{7.5}{3}\right) \;=\; 0.99$$

   (c) Legyen Z_k az a valószínűségi változó, ami megmondja, hogy a (kor szerint) k -ik hallgató 10:40 után hány perccel érkezik. A feladat szerint $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{45}$ független valószínűségi változók, melyek egyenletes eloszlásúak a $[0, 30]$ intervallumon. Nekünk a $Z = \max(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{45})$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét kell meghatározni. Ezért meg kell határoznunk a
$$Z \le z$$
esemény valószínűségét. Nyilvánvaló, hogy 45 szám maximuma akkor és csak akkor kisebb vagy egyenlő, mint z, ha mind a 45 szám kisebb vagy egyenlő, mint z. Így a bennünket érdeklő $Z \le z$ esemény ugyanaz, mint a
$$Z_1 \le z\ ,\ Z_2 \le z\ ,\ \ldots\ ,\ Z_{45} \le z\ \le z$$

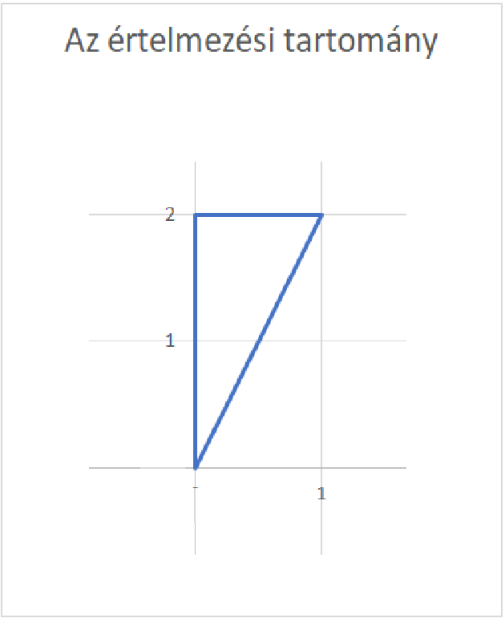
esemény. Ezért ezt írhatjuk:

$$R(z) \;=\; \mathrm{P}(\,Z \le z) \;=\; \mathrm{P}(\,Z_1 \le z\,,\; Z_2 \le z\,,\; \ldots\,,\; Z_{45} \le z \;\le z\,) \;=$$

A függetlenség miatt pedig ezt kapjuk:

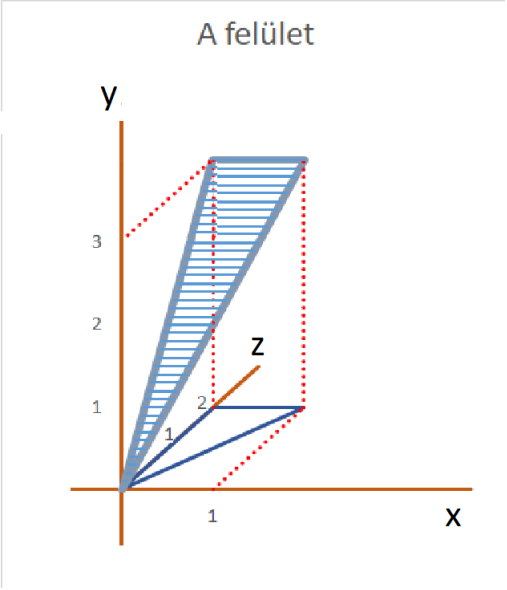
$$= \;\mathrm{P}(\,Z_1 \;\le z) \cdot \mathrm{P}(\,Z_2 \;\le z) \cdot \ldots \cdot \mathrm{P}(\,Z_{45} \;\le z) \;=\; \left(\frac{z}{30}\right)^{45} \qquad (0 \le z \le 30)$$

4. **(a)** Íme az értelmezési tartomány:



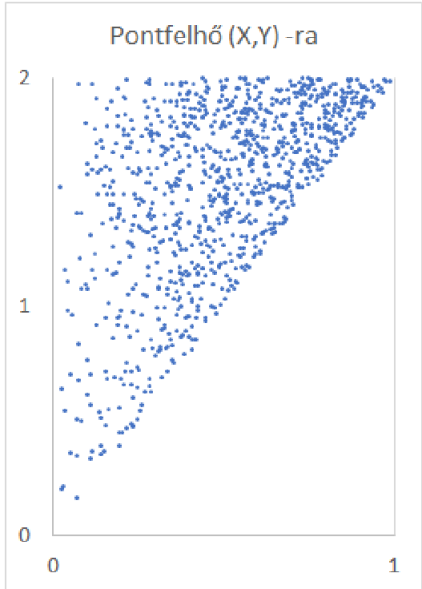
1. ábra. *Az értelmezési tartomány*

Íme a felület



2. ábra. *A felület*

(b) A sűrűségfüggvény nem függ y -tól, x -től pedig lineárisan függ. Ezért a pontfelhő sűrűsége x irányban lineárisan növekszik, y irányban pedig állandó. (Bár a feladatban nem kértük a pontfelhő pontos szimulációját, a feladat megoldásának végén egy megjegyzésben mégis megadjuk a korrekt szimulációs képleteket.)



3. ábra. *Pontfelhő* (X, Y) *-ra*

(c) Y sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^{y/2} 3x\,dx = \left[\,\frac{3x^2}{2}\,\right]_0^{y/2} = \frac{3y^2}{8} \qquad (0 < y < 2)$$

(d) Sok kísérlet esetén – a nagy számok törvénye szerint – az X értékek átlaga közelítőleg az X várható értékével egyenlő. A várható érték meghatározásához szükségünk van X sűrűségfüggvényére:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_{2x}^{2} 3x\,dx = 6x - 6x^2 \qquad ((0 < x < 1)$$

Ezek után a várható érték:

$$\mathrm{E}(\,X\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x|y)\,dx = \int_0^1 x \cdot \left(6x - 6x^2\right)\,dx = \int_0^1 \left(6x^2 - 6x^3\right)\,dx = \ldots = \frac{1}{2}$$

(e) Ha a hiba négyzetének a várható értékét akarjuk minimalizálni, akkor a feltételes várható érték adja az optimális tippelési eljárást. A feltételes várható érték meghatározásához szükség van a feltételes sűrűségfüggvényre:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{3x}{\frac{3y^2}{8}} = \frac{8x}{y^2}$$

A feltételes várható érték:

$$\mathrm{E}(\,X \,|\, Y = y\,) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{1|2}(x|y)\,dx =$$

$$= \int_0^{y/2} x \cdot \frac{8x}{y^2}\,dx = \int_0^{y/2} \frac{8x^2}{y^2}\,dx = \frac{8}{y^2}\left[\,\frac{x^3}{3}\,\right]_0^{y/2} = \frac{y}{3} \qquad (0 < y < 2)$$

Megjegyzés: A korrekt szimulációs képletek meghatározása. A fenti ábrán látható pontfelhőt Excellel generáltuk. Y generálása céljából meghatároztuk Y eloszlásfüggvényét, és annak inverzét, hogy az inverzbe egy random számot helyettesítve előállítsuk Y -t:

$$F_2(y) = \int_0^y \frac{3y^2}{8}\, dy = \frac{y^3}{8}$$

$$v = \frac{y^3}{8}$$

$$y = 2 \cdot v^{\frac{1}{3}}$$

$$Y = 2 \cdot (\text{RND}_1)^{\frac{1}{3}}$$

X generálása céljából meghatároztuk X feltételes eloszlásfüggvényét, és annak inverzét, hogy az inverzbe egy másik random számot helyettesítve előállítsuk X -t:

$$F_{1|2}(x|y) = \int_0^x \frac{8x}{y^2}\, dy = \frac{4x^2}{y^2}$$

$$u = \frac{4x^2}{y^2}$$

$$x = y \cdot u^{\frac{1}{2}}$$

$$X = Y \cdot (\text{RND}_2)^{\frac{1}{2}}$$

3.13. Félév végi vizsga, 2017-06-12

1. **(a1)** X és Y független, egész értékű valószínűségi változók $p_1(x)$, illetve $p_2(y)$ súlyfüggvényekkel. Írja fel azt az általános képletet, ami a $Z = X + Y$ valószínűségi változó $r(z)$ súlyfüggvényének képletét megadja $p_1(x)$ és $p_2(y)$ segítségével!

   (a2) X és Y független valószínűségi változók, melyek pesszimista geometriai eloszlást követnek $\frac{1}{3}$, illetve $\frac{1}{4}$ paraméterekkel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y = 3$?

   (b1) X és Y egész értékű valószínűségi változók. (X, Y) súlyfüggvénye $p(x, y)$. Írja fel azt az általános képletet, ami a $Z = X + Y$ valószínűségi változó V (z) súlyfüggvényének képletét megadja $p(x, y)$ segítségével!

   (b2) X és Y egész értékű valószínűségi változók. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó súlyfüggvénye

   $$p(x, y) = \frac{2x + y}{30} \qquad (x \text{ és } y \text{ egész számok}, \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3)$$

   Adja meg ez eloszlást táblázattal! Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y = 3$?

   (c) Mondja ki azt az állítást, amit sok független valószínűségi változó összegével kapcsolatban tanultunk! *(Milyen eloszlást követ sok független valószínűségi változó összege?)*

2. Egy citromfarmon a tetvek száma egy-egy levélen Poisson eloszlást követ 7.5 átlaggal.

   (a) A leveleknek kb. hány százalékán van pontosan 2 tetű?

   (b) Egy hirtelen időjárás változás során az olyan levelek, melyeken 5 vagy több tetű van, lehullanak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az időjárás változás után egy a fán fennmaradó levélen nincs tetű?

   (c) A megmaradó leveleken kb. mennyi a tetvek átlagos száma? *(Írja fel a várható értéket szumma formájában!)*

3. Négy cimbora mindegyike a többitől függetlenül $12:00$ és $13:00$ között egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára.

   (a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább három cimbora háromnegyed egy előtt érkezik?

   (b) A harmadiknak érkező cimbora érkezési időpontja (déltől számítva, órában mérve) folytonos valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei 0 és 1 közé esnek. Határozza meg az eloszlásfüggvényének a képletét!

   (c) A harmadiknak érkező cimbora érkezési időpontja egy tanult nevezetes eloszlást követ. Mi a neve az eloszlásnak?

   (d) A (b) részre kapott eredmény felhasználásával *számolással* vagy a tanultak alapján *emlékezetből* írja le eme eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

4. Tegyük fel, hogy

   - a királylány X év múlva megy férjhez,
     (ahol X exponenciális eloszlású 2 év várható értékkel),
   - és az esküvő után Y évvel gyönyörű gyermeke születik.
     (Az $X = x$ feltétel mellett Y egyenletes eloszlású 0.75 és $0.75 + \frac{1}{x}$ között).

   (a) Egy ábrán adja meg az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeinek a halmazát!

   (b) Adja meg az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét!

   (c) Adja meg az Y valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét egy korrektül felírt integrál alakjában!

3.14. Félév végi vizsga, 2017-06-12. Megoldások és válaszok

1. **(a1)**

$$r(z) = \sum_{(x,y):\ x+y=z} p_1(x) \cdot p_2(y)$$

vagy

$$r(z = \sum_{x} p_1(x) \cdot p_2(z-x)$$

vagy

$$r(z) = \sum_{y} p_1(z-y) \cdot p_2(y)$$

(a2)

$$\mathrm{P}(X+Y=3) \ = \ p_1(0) \cdot p_2(3) \ + \ p_1(1) \cdot p_2(2) \ + \ p_1(2) \cdot p_2(1) \ + \ p_1(3) \cdot p_2(0) \ =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\right] \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{2}{3}\,\frac{1}{3}\right] \cdot \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4}\right] + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3}\right] \cdot \left[\frac{3}{4}\,\frac{1}{4}\right] + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 \frac{1}{3}\right] \cdot \left[\frac{1}{4}\right]$$

(b1)

$$r(z) = \sum_{(x,y):\ x+y=z} p(x,y)$$

(b2)

3	$\frac{3}{30}$	0	0	0
2	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	0	0
1	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{5}{30}$	0
0	0	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{6}{30}$
Y/X	0	1	2	3

$$\mathrm{P}(X+Y=3) \ = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{3}{5} \ =$$

(c) Lásd jegyzet 2. rész, 5.5.2. pont, Centrális határeloszlás tétel.

2. **(a)** A Poisson eloszlás paramétere megegyezik a várható értékkel, ezért $\lambda = 7.5$.

$$\mathrm{P}(\text{ pontosan két tetű }) = \frac{7.5^2}{2!}\ \mathrm{e}^{-7.5} = 0.16$$

Tehát a leveleknek kb. 16 százalékán van pontosan 2 tetű.

(b)

$$\mathrm{P}(\text{ nincs tetű a levélen } | \text{ a levél a fán maradt }) =$$

$$= \text{P(nincs tetű a levélen | eredetileg legfeljebb 4 tetű volt a levélen)} =$$

$$= \frac{\text{P(eredetileg 0 tetű volt)}}{\text{P(eredetileg legfeljebb 4 tetű volt)}} =$$

$$= \frac{\frac{7.5^0}{0!}\ \mathrm{e}^{-7.5}}{\sum\limits_{k=0}^{4} \frac{7.5^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-7.5}} = \frac{0.0006}{0.1321} = 0.0042$$

(c) Hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$\text{P(} n \text{ tetű van a levélen | a levél a fán maradt)} = \frac{\frac{7.5^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-7.5}}{\sum\limits_{k=0}^{4} \frac{7.5^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-7.5}} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, 4)$$

A fán maradó leveleken lévő tetvek számának a várható értéke:

$$\sum_{k=0}^{4} n \cdot \frac{\frac{7.5^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-7.5}}{\sum\limits_{k=0}^{4} \frac{7.5^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-7.5}} =$$

A közös nevezőt kiemelve a várható értéket így is felírhatjuk:

$$= \frac{\sum\limits_{n=0}^{4} n \cdot \frac{7.5^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-7.5}}{\sum\limits_{k=0}^{4} \frac{7.5^k}{k!}\ \mathrm{e}^{-7.5}}$$

3. **(a)**

$$\text{P(legalább 3 cimbora háromnegyed egy előtt érkezik)} =$$

$$= \text{P(pontosan 3 érkezik háromnegyed egy előtt)} + \text{P(pontosan 3 érkezik háromnegyed egy előtt)} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

(b) Minden x -re, mely 0 és 1 közé esik, fennáll, hogy

$$F(x) = \text{P(a 3 -iknak érkező cimbora } x \text{ óra előtt érkezik)} =$$

$$\text{P(legalább 3 cimbora } x \text{ óra előtt érkezik)} =$$

$$= \text{P(pontosan 3 érkezik } x \text{ óra előtt)} + \text{P(pontosan 3 érkezik } x \text{ óra előtt)} =$$

$$= 4 \cdot x^3(1-x) + (x)^4$$

(c) Béta eloszlás

(d) A sűrűségfüggvény képlete:

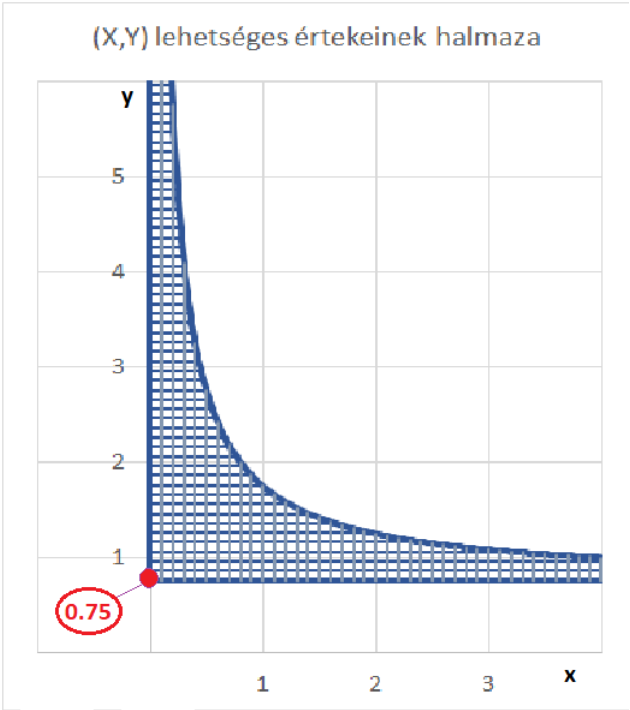
$$f(x) = 12 \cdot x^2\,(1-x) \qquad (0 < x < 1)$$

4. **(a)** (X, Y) lehetséges értékeit az alábbi egyenlőtlenségek definiálják:

$$0 < X < \infty, \quad 0.75 < Y < 0.75 + \frac{1}{X}$$

A lehetséges értékek halmaza a végtelenbe nyúlik függőleges és vízszintes irányban is. A halmazt egy-egy félegyenes és egy hiperbola-ág határolja:

- balról az y -tengely,
- alulról az x tengellyel párhuzamos $y = 0.75$ egyenletű egyenes,
- jobbról és felülről az $y = 0.75 + \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbola-ág.



4. ábra. (X, Y) *lehetséges értékeinek halmaza*

(b) X exponenciális eloszlású 0.5 paraméterrel, ezért

$$f_1(x) \;=\; 0.5\,\mathrm{e}^{-0.5\,x} \qquad\qquad (x \geq 0)$$

Az $X = x$ feltétel mellett Y egyenletes eloszlású a $[\,0.75\;,\;0.75 + \frac{1}{x}\,]$ intervallumon, ezért a feltételes sűrűségfüggvény így fest:

$$f_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{1}{\left(0.75 + \frac{1}{x}\right) - (0.75)} \;=\; \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} \;=\; x \qquad\qquad (0.75 \leq y \leq 0.75 + \frac{1}{x})$$

A kérdezett síkbeli sűrűségfüggvényt szorzatként kapjuk:

$$f(x, y) \;=\; f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x) \;=\; 0.5\,\mathrm{e}^{-0.5\,x} \cdot x \qquad\qquad (x \geq 0,\;\; 0.75 \leq y \leq 0.75 + \frac{1}{x})$$

(c) A kérdezet vetület sűrűségfüggvényt a síkbeli sűrűségfüggvényből integrálással kapjuk

$$f_2(y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx \;=\; \int_0^{\frac{1}{y-0.75}} 0.5\,\mathrm{e}^{-0.5\,x} \cdot x\,dx \qquad\qquad (y > 0.75)$$

Az integrál felső határa abból adódott, hogy az

$$y \;=\; 0.75 + \frac{1}{x} \qquad\qquad (x > 0)$$

egyenletű hiperbola-ág egyenletét x -re nézve explicit alakban is írtuk fel:

$$x \;=\; \frac{1}{y - 0.75} \qquad\qquad (y > 0.75)$$

Megjegyzés: Az integrál parciális integrálással ki is számolható, de az itt nem volt feladat.

3.15. Félév végi vizsga, 2017-06-19

1. A kutyaharapások száma egy év alatt egy bizonyos országban valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvényét táblázatosan megadjuk:

Kutyaharapások számának eloszlásfüggvénye
(három tizedes pontossággal)

x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$	x	$F(x)$
26	0.000	36	0.024	46	0.317	56	0.822	66	0.988
27	0.000	37	0.034	47	0.370	57	0.855	67	0.991
28	0.001	38	0.047	48	0.425	58	0.884	68	0.994
29	0.001	39	0.065	49	0.481	59	0.908	69	0.996
30	0.002	40	0.086	50	0.538	60	0.928	70	0.997
31	0.003	41	0.112	51	0.593	61	0.944	71	0.998
32	0.004	42	0.144	52	0.646	62	0.958	72	0.999
33	0.007	43	0.180	53	0.696	63	0.968	73	0.999
34	0.011	44	0.221	54	0.742	64	0.976	74	0.999
35	0.016	45	0.267	55	0.784	65	0.983	75	1.000

Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kutyaharapások száma

(a) 40 -nel egyenlő?

(b) 40 -nél több, de 50 -nél kevesebb?

(c) Hogyan lehetne meghatározni a táblázatból kiindulva a kutyaharapások számának a várható értékét? *(Nem kell kiszámolni a várható értéket!)*

(d) Hogyan lehetne meghatározni a táblázatból kiindulva a kutyaharapások számának a móduszát? *(Nem kell kiszámolni a móduszt!)*

2. Az egység sugarú kör kerületén egyenletes szögsebességgel mozgó pont véletlenszű időpontban tekintett x-koordinátáját jelöljük X-szel. Nyilván $-1 \leq X \leq 1$.

(a) Mi a valószínűsége annak, hogy $X > 0.5$?

(b) X eloszlásának mi a neve?

(c) Vezesse le az eloszlásfüggvény képletét!

(d) Számolja ki a sűrűségfüggvény képletét!

(e) Rajzolja le a sűrűségfüggvény grafikonját!

3. A sufniban raktározok 100 egyforma típusú izzót, melyek élettartamai örökifjú tulajdonságúak és egymástól függetlenek. Az élettartam várható értéke 15 óra.

(a) Írja le képlettel vagy szavakkal, hogy mit jelent az örökifjú tulajdonság!

(b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 100 izzó mindegyike 20 óránál kevesebbet él?

(c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 100 izzó közül pontosan 14 él 20 óránál kevesebbet?

(d) Kb. mennyi a valószínűsége annak, hogy a 100 izzó élettartamának az összege 1600 -nál nagyobb? *(A számolásnál használja az alábbi táblázatot!)*

Standard normális eloszlásfüggvény *(két tizedes pontossággal)*

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.50	0.5	0.69	1.0	0.84	1.5	0.93	2.0	0.98	2.5	0.99
0.1	0.54	0.6	0.73	1.1	0.86	1.6	0.95	2.1	0.98	2.6	1.00
0.2	0.58	0.7	0.76	1.2	0.88	1.7	0.96	2.2	0.99		
0.3	0.62	0.8	0.79	1.3	0.90	1.8	0.96	2.3	0.99		
0.4	0.66	0.9	0.82	1.4	0.92	1.9	0.97	2.4	0.99		

4. Először választunk egy Y számot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint. Ha Y értéke már megvan, mondjuk $Y = y$, akkor választunk egy X számot 0 és y között egyeletes eloszlás szerint.

   (a) Adja meg Y sűrűségfüggvényének a képletét!

   (b) Adja meg X feltételes sűrűségfüggvényének a képletét az $Y = y$ feltétel mellett!

   (c) Adja meg (X, Y) sűrűségfüggvényének a képletét!

   (d) Határozza meg X feltétel nélküli sűrűségfüggvényének a képletét!

   (e) Határozza meg Y feltételes várható értékét az $X = x$ feltétel mellett!

3.16. Félév végi vizsga, 2017-06-19. Megoldások és válaszok

1. Jelöljük X -szel a kutyaharapások számát egy év alatt.

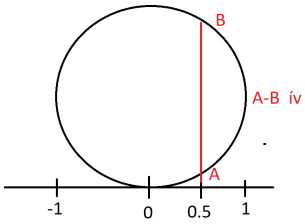
   (a)
   $$\mathrm{P}(X = 40) \;=\; \mathrm{P}(X \leq 40) - \mathrm{P}(X \leq 39) \;=\; F(40) - F(39) = 0.021$$

   (b)
   $$\mathrm{P}(40 < X < 50) \;=\; \mathrm{P}(X \leq 49) - \mathrm{P}(X \leq 40) \;=\; F(49) - F(40) = 0.395$$

   (c) és (d)

   A súlyfüggvény értékeit a táblázatbeli értékek különbségeként kapjuk:
   $$p(x) \;=\; F(x) - F(x-1)$$
   A várható értéket az x értékek és a $p(x)$ értékek szorzatainak összege adja:
   $$\mathrm{E}(X) \;=\; \sum_x x \cdot p(x)$$
   A $p(x)$ értékek táblázatában a maximális $p(x)$ értéknek megfelelő x érték a módusz.

2. **(a)** Az alábbi ábráról geometriai tudásunk alapján látjuk, hogy az $A - B$ ív hossza ossztva a kör kerületének hosszával $1/3$ -dal egyenlő. Ez a kérdezett valószínűség értéke.

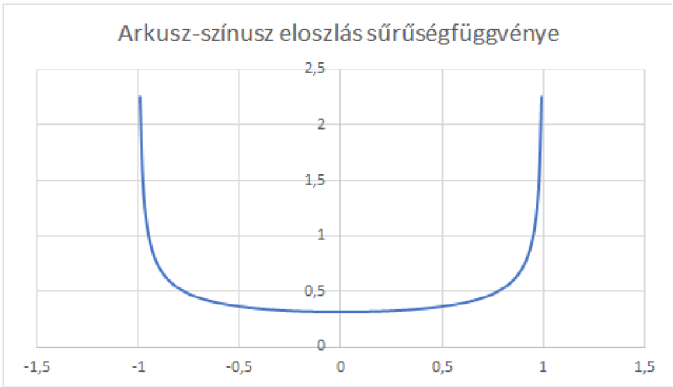


5. ábra. *Az A-B ív hossza a kör kerületének egyharmada*

   (b) Arkusz-színusz eloszlás.

   (c) és (d) A levezetés a jegyzet 2. részének 3.3.1 -es pontjában "Arkusz-színusz eloszlás" címmel található.

   (e)



6. ábra. *Az arkusz-színus eloszlás sűrűségfüggvénye*

3. **(a)**

$$\mathrm{P}\,(\ X > s + t \mid X > t\ ) = \mathrm{P}\,(\ X > s\ )$$

(b) Annak a valószínűsége, hogy egy izzó kevesbbet él 20 óránál:

$$F(20) = 1 - \mathrm{e}^{-20\cdot\frac{1}{15}}$$

Annak a valószínűsége, hogy 100 izzó mindegyike kevesebbet él 20 óránál, a függetlenség miatt:

$$(\ F(20)\ )^{100} \ = \ \left(1 - \mathrm{e}^{-20\cdot\frac{1}{15}}\right)^{100}$$

(c) Akérdezett valszínűség, binomiális eloszlást használva:

$$\binom{100}{14}\, p^{14}\ (1-p)^{100-14}$$

ahol $p = 1 - \mathrm{e}^{-20\cdot\frac{1}{15}}$.

(d) A centrális határeloszlás miatt az élettartamok Y összege normális eloszlású $\mu = 100 \cdot 15 = 1500$ és $\sigma = \sqrt{100} \cdot 15 = 150$ paraméterekkel, ezért

$$\mathrm{P}\,(\ Y > 1600\ ) \ \approx\ 1 - \Phi\left(\ \frac{1600 - 1500}{150}\ \right)\ \ 1 - \Phi\left(\ \frac{2}{3}\ \right)\ \approx\ 1 - 0.745 = 0.255$$

4. A megoldás a jegyzet 3. részének 6.11. -es pontjában "Egy számolós minta példa" címmel található.