Valószínűségszámítás
3. RÉSZ
Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

Vetier András

2018. május 11.

Tartalomjegyzék

Tisztelt Hallgatók!

Kérem, hogy a jegyzetben talált hibákat a **vetier@math.bme.hu** email címen jelezzék nekem. A levél tárgya legyen: **Hibát találtam**. Egy hatékony módszer a hibák rögzítésére, ha valaki a számítógépen olvassa a jegyzetet:

- nyom egy PRINT SCREEN-t
- behívja a PAINT programot
- nyom egy PASTE (ctrl-V) utasítást
- pirossal bekarikázza a hibát, esetleg valamit oda ír
- elmenti a JPG fájlt, a fájl neve legyen a hiba helyének az oldalszáma, vagy a nevében legyen benne az oldalszám
- a JPG fájlokat csatolt fájlként a fent megadott címre

Természetesen minden más módszerrel küldött hibajelzést is köszönök.

Az "***Extra feladat***", "***Extra tananyag***" cimkékkel megjelölt feladatok és anyagrészek nem részei a kötelező vizsga anyagának. Ezeket a vizsgákon nem kérdezzük. Viszont ha valaki az *"Extra feladat"*, *"Extra tananyag"* cimkékkel megjelölt feladatokból és anyagrészekből

- összesen 15 oldalnyi mennyiséget szépen, okosan megtanult, és
- a vizsga utáni napon délig a szándékét emailben jelzi, és
- a szóbeli beszámoló elején deklarálja, hogy mik azok az anyagrészek, melyekből összeáll az ő extra 10 oldala, és
- utána a vizsgáztató által a deklarált anyagból feltett kérdésekre szépen, okosan válaszol, akkor

a vizsgán már elért a közepes (3) vagy a jó (4) osztályzatát egy jeggyel javíthatja.

A "szépen, okosan" itt azt jelenti, hogy tényleg érti a dolgokat, nem csupán visszamondja az olvasottakat. iMSc hallgatók a jegy javításán túl iMSc extra pontokat szerezhetnek, ha a megtanult anyag mennyisége 25 oldal. A küldendő email címzettje: **vetier@math.bme.hu**, tárgya: **Beszámoló Extra tananyagból**.

Eredményes, örömteli, jó tanulást kívánok! Üdvözlettel,

2017. augusztus 21.

Vetier András

1. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változók

Két valószínűségi változót véve – legyenek ezek X és Y – összerakhatjuk őket egyetlen (X, Y) véletlen számpárrá, véletlen ponttá. Ily módon egy kétdimenziós valószínűségi változót kapunk. Példák:

1. Amikor az ejtőernyős célba ugrik, igyekszik a célpontot eltalálni, de ez nem sikerül pontosan. Általában a célpont közelében ér talajt. Ez a pont, ami véletlentől (is) függ. A pont, illetve annak koordinátái egy (X, Y) kétdmineziós valószínűségi változót adnak.

2. Ha véletlenszerűen választunk egy magyar férfit, akkor az

   $$X = \text{ testmagassága centiméterekben mérve}$$

   $$Y = \text{ testúlya (pontosabban: testtömege) kilogramokban mérve}$$

   jelölésekkel élve (X, Y) kétdmineziós valószínűségi változó.

3. Generáljunk három 0 és 1 közötti véletlen számot, és legyenek

   $$X = \text{ a legkisebb}$$

   $$Y = \text{ a legnagyobb}$$

   Ekkor (X, Y) kétdmineziós valószínűségi változó.

1.1. Sűrűségfüggvény és valószínűség

Folytonos kétdmineziós valószínűségi változókat általában a sűrűségfüggvényükkel jellemezzük. Az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényt a síknak valamilyen A részhalmazán integrálva megkapjuk annak a valószínűségét, hogy az (X, Y) véletlen pont az A halmazba esik:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}\left((X, Y) \in A\right) = \iint\limits_{A} f(x, y)\, dx\, dy$$

Ahhoz, hogy egy $f(x, y)$ függvény valamilyen kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye lehessen két feltételnek kell teljesülni:

$$f(x, y) \geq 0$$

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = 1$$

Ezek a feltételek minden kétdimenziós sűrűségfüggvényre teljesülnek, és ha egy kétváltozós függvény teljesíti ezeket a tulajdonságokat, akkor lehet olyan kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változót értelemezni, melynek sűrűségfüggvénye a szóbanforgó függvény.

A sürűségfüggvény értéke, mint arányossági tényező. Ha A egy kicsike halmaz (x, y) közelében, akkor

$$\mathrm{P}\left(\ (X, Y) \in A\ \right) = \iint\limits_{A} f(x, y)\, dx\, dy \approx f(x, y)\ \times\ A \text{ területe}$$

és

$$f(x, y) \approx \frac{\mathrm{P}\left(\ (X, Y) \in A\ \right)}{A \text{ területe}}$$

Hangsúlyozzuk, hogy az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény értéke nem képviseli valaminek a valószínűségét. Ha (x,y) egy adott pont a síkon, akkor $f(x,y)$ jelentése a következő: az (x,y) pont közelében akármilyen kicsi A halmaz esetén annak a valószínűsége, hogy (X,Y) az A halmazba esik, közelítőleg $f(x,y) \times A$ területe:

$$\mathrm{P}(\ (X,Y) \in A\ c) \approx f(x,y)\ \times\ A \text{ területe}$$

A sűrűségfüggvény értékének közelítése. Ha A egy kicsi téglalap az (x,y) pont közelében Δx, illetve Δy oldalhosszakkal, akkor

$$f(x,y) \approx \frac{\mathrm{P}(\ x < X < x + \Delta x \ \text{ és } \ y < Y < y + \Delta y\ )}{\Delta x\ \Delta y}$$

Ez a formula sok esetben hasznos eszköz a sűrűségfüggvény képletének meghatározásához.

1.2. Kétdimenziós folytonos eloszlás szemléltetése festékkel

A felületi sűrűség – speciálisan a síkon vett sűrűség – fogalma a fizikából jól ismert. Szemléltetés céljából szeretnénk támaszkodni erre a fogalomra.

Ha egy kétdimenziós sűrűségfüggvénnyel van dolgunk, akkor könnyen elképzelhetjük azt a tömegeloszlást a síkon, aminek a síkon vett sűrűségéte a szóbanforgó sűrűségfüggvény írja le. Ha valaki ezt mégsem tudja elképzelni, akkor olvassa lelkesen a következő "konstukciót"!

Jön az úthenger! Képzeljük el az $f(x,y)$ sűrűségfüggvényz grafikonját, ami a 3-dimenziós térben egy felület. A felület alatti térrészben– képzeletben – egyenletesen helyezzünk el egységnyi össztömegű festéket! Az egyenletesség itt azt jelenti, hogy a térrész minden részhalmazára annyi festék kerül, amennyi a térrész térfogata. És akkor most jöjjön az úthenger, és a térrészben elhelyezett festéket préselje függőleges irányú préseléssel a vízszintes síkra!

A síkon kapunk egy tömegeloszlást, ami festékből készült, és így a festék szín árnyalata is jelzi, hogy hol sűrűbb, hol ritkább az anyag (a festék). Ennél a konstrukciónál a sík (x,y) pontjában a tömegsűrűség éppen $f(x,y)$ -nek adódik.

Ha valaki ennek a gyerekes tálalásnak az egzakt hátterét szeretné tudni, akkor íme, tessék: egy $f(x,y)$ sűrűségfüggvény grafikonja (felülete) alatti térrészben vett egyenletes eloszlás vetülete az (x,y) -síkra olyan folytonos eloszlást ad, aminek sűrűségfüggvénye $f(x,y)$.

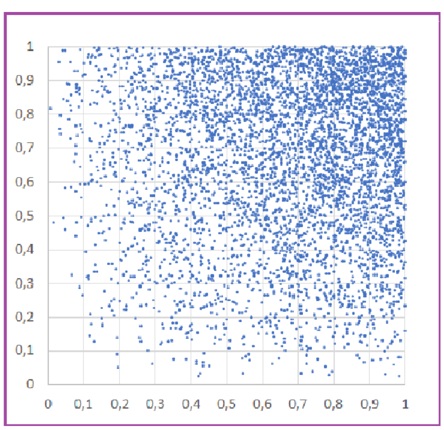
Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$\left(\ \sqrt{\mathrm{RND}_1}\ ,\ \sqrt{\mathrm{RND}_2}\ \right)$$

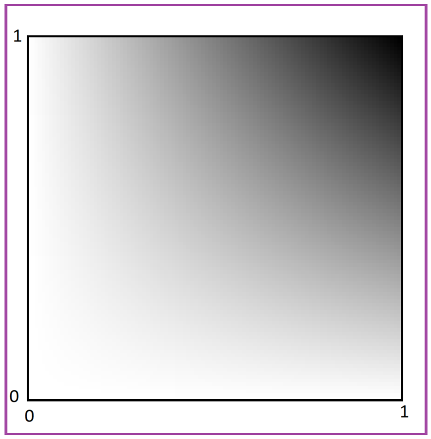
valószínűségi változót. Ennek sűrűségfüggvénye – mint azt néhány oldallal később belátjuk – a következő:

$$f(x,y)\ =\ 4xy \qquad (\ 0 < x < 1\ , 0 < x < 1\ )$$

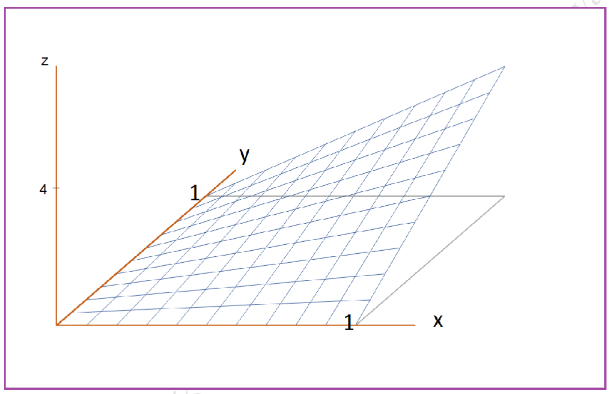
Íme a megfelelő ábrák:



1. ábra. $\left(\ \sqrt{RND_1}\ ,\ \sqrt{RND_2}\ \right)$ *– pontfelhő 5000 kísérletből*



2. ábra. $\left(\sqrt{RND_1}\,,\sqrt{RND_2}\right)$ *eloszlásának szemléltetése festékkel*



3. ábra. $\left(\sqrt{RND_1}\,,\sqrt{RND_2}\right)$ *sűrűségfüggvény szemléltetése felülettel*

A következő oldalak, fejezetek bőven szolgáltatnak további példákat, tessék előre lapozgatni!.

1.3. Feltételes valószínűség

Ha A és B a síknak részhalmazai, akkor $(X,Y) \in A$, illetve $(X,Y) \in B$ egy egy eseményt jelentenek. Az $(X,Y) \in A$ feltétel mellett az $(X,Y) \in B$ esemény valószínűségét $\mathrm{P}\left((X,Y) \in B | (X,Y) \in A\right)$ -vel, vagy rövidebben csak $\mathrm{P}(B|A)$ -val jelöljük. A számláló és a nevező is egy-egy integrállal írható fel:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\iint\limits_{A\cap B} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy}$$

Ha $B \subseteq A$, akkor $A \cap B = B$, ezért ezt kapjuk:

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\iint\limits_{B} f(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{A} f(x,y)\,dx\,dy}$$

1.4. Feltételes sűrűségfüggvény egy pozitív valószínűségű eseményen belül

Legyen A a síknak egy részhalmaza, melynek pozitív a valószínűsége. Tegyük fel, hogy az $(X, Y) \in A$ esemény bekövetkezett. Ilyen feltétel mellett az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye nyilván

$$f(x, y \mid A) = \frac{f(x, y)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{f(x, y)}{\iint\limits_A f(x, y)\, dx\, dy} \quad \text{ha } (x, y) \in A$$

1.5. Szorzási szabály független valószínűségi változókra

Ha X és Y függetlenek, és sűrűségvüggvényeik $f_1(x)$, illetve $f_2(y)$, akkor az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direktszorzata:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Vázlatos bizonyítás.

$$f(x, y) \approx \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y\right)}{\Delta x\, \Delta y} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}\left(y < Y < y + \Delta y\right)}{\Delta y} \approx f_1(x) \cdot f_2(y)$$

1. Példa: Tekintsük a kétdimenziós

$$\left(\sqrt{\mathrm{RND}_1}\,, \sqrt{\mathrm{RND}_2}\, \right)$$

valószínűségi változót. Mivel RND_1 és RND_2 függetlenek, a kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a szorzási szabállyal számítható:

$$f(x, y) \;=\; f_1(x) \cdot f_2(y) \;=\; 2x \cdot 2y \;=\; 4xy \qquad (\, 0 < x < 1\,, 0 < x < 1\,)$$

Néhány oldallal előbb felhaszáltuk ezt az eredményt.

2. Példa: Ha X és Y független exponenciális eloszlású valószínűségi változók $\lambda_1 = 3$, illetve $\lambda_2 = 4$ paraméterekkel, akkor (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f_1(x)$ és $f_2(y)$ sűrűségfüggvények direktszorzata:

$$f(x, y) = 3\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot 4\,\mathrm{e}^{-4y} = 12\,\mathrm{e}^{-3x-4y} \qquad (x, y \geq 0)$$

1.6. Általános szorzási szabály

Ha X sűrűségfüggvénye $f_1(x)$, és Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett $f_{2|1}(y|x)$, akkor (X, Y) sűrűségfüggvénye

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

Hasonlóan:

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x|y)$$

Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt bizonyítjuk:

$$f(x, y) \approx \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x \text{ és } y < Y < y + \Delta y\right)}{\Delta x\, \Delta y} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x + \Delta x\right)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}\left(y < Y < y + \Delta y \mid x < X < x + \Delta x\right)}{\Delta y} \approx$$

$$\approx \frac{\mathrm{P}\,(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \cdot \frac{\mathrm{P}\,(y < Y < y + \Delta y \mid X \approx x)}{\Delta y} \approx$$
$$\approx f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

2. Példa: Ha X exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda_1 = 3$ paraméterrel, és az $X = x$ feltétel mellett Y exponenciális eloszlást követ x paraméterrel, akkor

$$f_1(x) \;=\; 3\,\mathrm{e}^{-3x} \qquad (x \geq 0)$$
$$f_{2|1}(y|x) \;=\; x\,\mathrm{e}^{-xy} \qquad (y \geq 0)$$

és így az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 3\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot x\,\mathrm{e}^{-xy} = 3x\,\mathrm{e}^{-3x-xy} = 3x\,\mathrm{e}^{-x(3+y)} \qquad (x, y \geq 0)$$

3. Példa ($Y = \mathbf{RND}_1,\ X = \mathbf{RND}_1 \cdot \mathbf{RND}_2$): Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y -t már megválasztottuk, akkor 0 és Y között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az X pont. Ezek után X -ből és Y -ból rakjuk össze az (X, Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \mathrm{RND}_1, \qquad X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$$

Most pedig megadjuk, illetve kiszámoljuk (X, Y), illetve X sűrűségfüggvényének a képletét:

Ha Y egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és 1 között, akkor

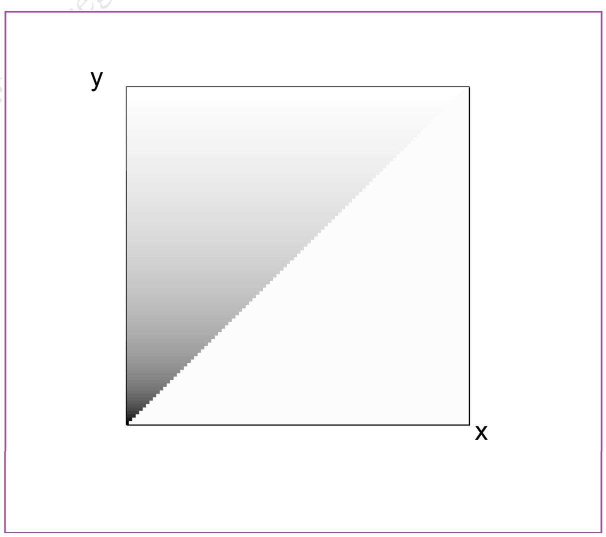
$$f_2(y) \;=\; 1 \qquad (0 < y < 1)$$

és Mivel az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlású valószínűségi változó 0 és y között, ezért

$$f_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y)$$

A szorzási szabály alapján az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = 1\,\frac{1}{y} = \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y < 1)$$



4. ábra. (X, Y) *eloszlása festékkel szemléltetve, ahol* $Y = RND_1,\ X = RND_1 \cdot RND_2$

1.7. Eloszlásfüggvény

Egy kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az

$$F(x,y) = \mathrm{P}(X < x, Y < y)$$

képlettel definiáljuk. Az eloszlásfüggvény a sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\, dx \right) dy$$

A sűrűségfüggvényt az eloszlásfüggvényből deriválással kapjuk:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\, \partial y}$$

Egy téglalap valószínűsége az eloszlásfüggvénynek a téglalap sarkain vett értékeiből kiszámolható:

$$P(x_1 < X < x_2 \quad \text{és} \quad y_1 < Y < y_2) =$$
$$= P(X < x_2 \quad \text{és} \quad Y < y_2) - P(X < x_1 \quad \text{és} \quad Y < y_2) -$$
$$-P(X < x_2 \quad \text{és} \quad Y < y_1) + P(X < x_1 \text{ és } Y < y_1) =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

1.8. Gyakorló feladatok

1. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

   $$f(x,y) = 4xy \quad (0 < x, y < 1)$$

   (a) Szemléltesse az eloszlást "festékkel"!
   (b) Szemléltesse az eloszlást a sűrűségfüggvényt megadó felülettel!
   (c) Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!
   (d) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y < 1$?
   (e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$?
   (f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$, feltéve, hogy $X + Y < 1$?
   (g) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (h) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (i) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (j) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

2. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

   $$f(x,y) = c(x+y) \quad (x > 0, \;\; y > 0, \;\; x + y < 1)$$

   ahol c egy alkalmas konstans.

   (a) Határozza meg a c konstans értékét!
   (b) Szemléltesse az eloszlást "festékkel"!

(c) Szemléltesse az eloszlást a sűrűségfüggvényt megadó felülettel!

(d) Határozza meg az eloszlásfüggvény képletét!

(e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $X + Y < 1$?

(f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$?

(g) Mennyi a valószínűsége annak, hogy $Y < X^2$, feltéve, hogy $X + Y < 1$?

3. Egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = c(2x + y) \quad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ x + y < 1)$$

ahol c egy alkalmas konstans.

(a) Határozza meg a c konstans értékét!

(b) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!

(c) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

(d) Számolja ki a $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.25)$ feltételes valószínűséget!

(e) Számolja ki a $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.50)$ feltételes valószínűséget!

(f) Számolja ki a $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.75)$ feltételes valószínűséget!

(g) Számolja ki a $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = x)$ feltételes valószínűséget!

(h) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!

(i) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

(j) Számolja ki a $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.25)$ feltételes valószínűséget!

(k) Számolja ki a $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.50)$ feltételes valószínűséget!

(l) Számolja ki a $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.75)$ feltételes valószínűséget!

(m) Számolja ki a $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = y)$ feltételes valószínűséget!

Megoldás:

(a) $c = 2$, vagyis $\quad f(x,y) = 2(2x + y) = 4x + 2y \qquad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ x + y < 1)$

(b) $f_1(x) = 2x - 3x^2 + 1 \qquad (0 < x < 1)$

$F_1(x) = x^2 - x^3 + x \qquad (0 < x < 1)$

(c) $f_{2|1}(y|x) = \frac{4x+2y}{2x-3x^2+1} \qquad (0 < x < 1 - y < 1)$

$F_{2|1}(y|x) = \frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1} \qquad (0 < x < 1 - y < 1)$

(d) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.25) = F_{2|1}(y|x) = \left[\frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1}\right]_{x=0.25,\ y=0.1} = 0.080$

(e) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.50) = F_{2|1}(y|x) = \left[\frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1}\right]_{x=0.50,\ y=0.1} = 0.164$

(f) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = 0.75) = F_{2|1}(y|x) = \left[\frac{4xy+y^2}{2x-3x^2+1}\right]_{x=0.75,\ y=0.1} = 0.375$

(g) $\mathrm{P}(Y < 0.1|X = x) = F_{2|1}(0.1|x) = \frac{0.4x+0.01}{2x-3x^2+1} \qquad$ ha $\ 0 < x < 0.9$

$\mathrm{P}(Y < 0.1|X = x) = 1 \qquad$ ha $\ 0.9 < x < 1$

(h) $f_2(y) = 2 - 2y \qquad (0 < y < 1)$

$F_2(y) = 2y - y^2 \qquad (0 < y < 1)$

(i) $f_{1|2}(x|y) = \frac{2x+y}{1-y} \qquad (0 < y < 1 - x < 1)$

$F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y} \qquad (0 < y < 1 - x < 1)$

(j) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.25) = \left[F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y}\right]_{x=0.1,\ y=0.25} = 0.047$

(k) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.50) = \left[F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y}\right]_{x=0.1,\ y=0.50} = 0.120$

(l) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = 0.75) = \left[F_{1|2}(x|y) = \frac{x^2+xy}{1-y}\right]_{x=0.1,\ y=0.75} = 0.340$

(m) $\mathrm{P}(X < 0.1|Y = y) = F_{1|2}(0.1|y) = \frac{0.01+0.1y}{1-y}$ ha $0 < y < 0.9$

$\mathrm{P}(X < 0.1|Y = y) = 1$ ha $0.9 < y < 1$

4. Reggel taxival megyek az egyetemre. A várakozási időm percekben mérve X. Feltesszük, hogy X exponenciális eloszlást követ $\lambda_1 = 0.1$ paraméterrel. Este taxival megyek haza. A várakozási időm percekben mérve Y. Feltesszük, hogy Y exponenciális eloszlást követ $\lambda_2 = 0.2$ paraméterrel. A két várakozási idő független egymástól.

   (a) Határozza meg az $f(x, y)$ síkbeli sűrűségfüggvény képletét!
   (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X + Y < 15$?
   (c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X + Y < z$?
   (d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X < Y$?
   (e) Mennyi annak a valószínűsége, hogy $X < Y$, feltéve, hogy $X + Y < 15$?

Az alábbi "pince-világítással kapcsolatos" feladatok egymásra épülnek. A feladat-sorozat lépésről-lépésre levezeti a gamma eloszlások sűrűségfüggvényeinek a képletét.

5. *Másodrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
   Sötét pincénkben állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzóim. Sajnos csak két izzóm van. Ezeket egymás után fogom használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X az izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a második is kiég.

   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (c) Határozza meg az $f(x, y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a másodrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a második izzó kiég.)*
   (e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

6. *Harmadrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
   Szomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő gazdagabb, neki három izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a második izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a harmadik is kiég.

(a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg. Ott akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)*

(b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

(c) Határozza meg az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény képletét!

(d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a harmadrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a harmadik izzó kiég.)*

(e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

7. *Negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
Másodszomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő még gazdagabb, neki négy izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a harmadik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor a negyedik izzó kiég.

(a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg. Ott akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)*

(b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

(c) Határozza meg az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény képletét!

(d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a negyedik izzó kiég.)*

(e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

8. *Ötödrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése:*
Harmadik szomszédom pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Ő még a másodszomszédomnál is gazdagabb, neki öt izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X a negyedik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor az ötödik izzó kiég.

(a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt az előző feladatban határoztuk meg, és akkor $f_2(y)$ -nal jelöltük.)*

(b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

(c) Határozza meg az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény képletét!

(d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez a negyedrendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor aaz ötödik izzó kiég.)*

(e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

9. *n -ed rendű gamma eloszlás sűrűségfüggvényének levezetése a teljes indukció módszerével:*
A jó hosszú utcánk végében lakó ember pincéjében is állandóan fog égni a villany, amíg csak bírják az izzói. Neki – mondjuk – n izzója van. Ezeket egymás után fogja használni. Élettartamaik függetlenek és exponenciális eloszlást követnek 2 hónap várható értékkel. Legyen X az $(n-1)$ -edik izzócsere pillanata, Y pedig az a pillanat, amikor az n -edik izzó kiég.

(a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Segítség: ezt a sűrűségfüggvényt a teljes indukció módszerének megfelelően – okosan – vegye fel!*

(b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

(c) Határozza meg az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény képletét!

(d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét! *(Ez az n -ed rendű gamma eloszlás sűrűségfüggvénye. Emlékeztetőül: itt most Y az a pillanat, amikor a n -edik izzó kiég.)*

(e) Az érdekesség kedvéért határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét, és gondolja meg, mit jelent a kapott eredmény!

2. Kétdimenziós egyenletes eloszlás

2.1. Egyenletes eloszlás véges területű halmazon

Legyen S egy véges területű halmaz a síkon. Tekinsük azt a kétváltozós függvényt, melynek értéke a halmaz területének reciprokával egyenlő a halmazba tartozó pontokban, egyéb pontokban pedig 0:

$$f(x,y) \;=\; \frac{1}{S \text{ területe}} \quad \text{ha } (x,y) \in S \qquad\qquad f(x,y) \;=\; 0 \quad \text{egyébként}$$

Vegyük most S-nek egy A részhalmazát. Ha a $\mathrm{P}(A)$ valószínűség kiszámítása érdekében integráljuk az $f(x,y)$ függvényt az a halmazon, akkor az integrál értékéül a szóbanforgó konstans és a halmaz területének a szorzatát kapjuk:

$$\mathrm{P}(A) \;=\; \iint\limits_A f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \iint\limits_A \frac{1}{S \text{ területe}}\,dx\,dy \;=\; \frac{A \text{ területe}}{S \text{ területe}}$$

Tehát az A halmaz valószínűsége egyenlő az A területe osztva az S területével. Ugyanahoz a képlethez jutottunk, mint az 1. rész 3. fejezetének 1. pontjában a "Folytonos egyenletes eloszlás" cím alatt.

2.2. Gyakorló feladatok

1. Egy bolha az origóból indulva a pozitív irányba ugrál. Ugrásainak nagysága független egymástól, és deciméterben mérve egyenletes eloszlást követ 30 és 60 között. Legyen X annak a pontnak a koordinátája, ahova először ugrik, Y pedig annak a pontnak a koordinátája, ahova másodszor ugrik.
   (a) Adja meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (b) Adja meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (c) Határozza meg az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (e) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

2. Az origó középpontú, egységnyi sugarú körlapon egyenletes eloszlás szerint választunk egy (X,Y) pontot.
   (a) Határozza meg az $f_1(x)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (b) Határozza meg az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!
   (c) Határozza meg az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (d) Határozza meg az $f_2(y)$ sűrűségfüggvény képletét!
   (e) Határozza meg az $f_{1|2}(x|y)$ feltételes sűrűségfüggvény képletét!

3. Béta eloszlások kétdimenzióban

Az alábbiakban több példán is bemutatjuk, hogy az

$$f(x,y) \approx \frac{\mathrm{P}(\ x < X < x + \Delta x \ \text{ és } \ y < Y < y + \Delta y\ )}{\Delta x\ \Delta y}$$

formula segítségével hogyan lehet a sűrűségfüggvény képletét meghatározni. A számolásoknak az eredményei is érdekesek, elgondolkodtatóak, ezért egy külön alfejezetben ábrákkal illusztráljuk az eloszlásokat. De ami itt igazán fontos és megértendő, az *maga a módszer, amivel a sűrűségfüggvények képleteit meghatározzuk*. A kiadódó eloszlásokat **béta eloszlások**nak szokás nevezni ilyen-olyan paraméterekkel. Először egyszerűbb, később bonyolultabb példákat veszünk.

3.1. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek dél és egy óra között

3.1.1. Három ember esete

Három ember rendszeresen együtt ebédel egy vendéglőben. Tegyük fel, hogy hogy mindegyikük – a többiektől függetlenül – dél és egy óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a vendéglőbe. Az érkezési időpontokkal kapcsolatban végzünk megfigyeléseket.

Könnyen szimulálhatjuk a problémát: generáljunk három random számot 0 és 1 között, melyeket RND_1, RND_2, RND_3 jelöl, és – mondjuk – úgy képzeljük, hogy

RND_1, a legfiatalabb ember érkezési időpontját,
RND_2, a kor zserinti középső ember érkezési időpontját,
RND_3, a jelenti a legöregebb ember érkezési időpontját.

1. Mikor érkezik az első ember, mikor jön a második?

Legyen

X = az első érkezési időpont
Y = a második érkezési időpont

Tehát nem az érdekel minket, hogy ki érkezik elsőnek, másodiknak (ez itt most nem egy érkezési vereny!), hanem az, hogy mikor ül le valaki a lefoglalt asztalhoz elsőnek, másodiknak.

A szimuláció lehetőségével élve azt is mondhatjuk, hogy

X = a három random szám közül a legkisebb
Y = a három random szám közül a második legkisebb, azaz a nagyság szerinti középső

Javasoljuk, hogy az Olvasó csináljon szimulációt:

- Generáljon Excelben három véletlen számot a `VÉL()` utasítással.
- A `KICSI( tartomány ; 1 )`, `KICSI( tartomány ; 2 )` utasításokkal találja meg X és Y értékét.

- Készítsen ábrát az (X, Y) pontról. Az `F9` gomb ismételt nyomogatásával tapasztalja meg, hogy merre, hogyan szeret kóválygogni az (X, Y) pont.
- Végezzen (X, Y) -ra sok – kb. ezer – kísérletet, és azokat egy pontfelhővel ábrázolja. A pontfelhő "sűrűségéből" is láthatja, hogy az (X, Y) pont számára a sík mely része "népszerű".

Nyilvánvaló, hogy a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó lehetséges értékei azok az (x, x) pontok, melykre teljesülnek a $0 < x < y < 1$ egyenlőtlenségek. Ezek a pontok a síkon egy háromszöget alkotnak.

Most levezetjük a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felveszünk két x , y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felveszünk

x	mellett egy kis	$[\, x,\ x + \Delta x \,]$	intervallumot és
y	mellett egy kis	$[\, y,\ y + \Delta y \,]$	intervallumot
úgy, hogy	teljesüljön az	$x + \Delta x < y$	egyenlőtlenség is.

(X, Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x, y) \approx \frac{\mathrm{P}(\ x < X < x + \Delta x \ \text{ és } \ y < Y < y + \Delta y\ )}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{ és } \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy a $\mathrm{RND}_1,\ \mathrm{RND}_2,\ \mathrm{RND}_3$ random számok közül

a legkisebb az	$[\, x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba esik, és
a középső az	$[\, y,\ y + \Delta y)$	intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve – azt jelenti, hogy

a legkisebb az	$[\, x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba esik, és
a középső az	$[\, y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba esik, és
a legnagyobb az	$[\, Y,\ 1\,]$	intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	1	random szám esik az	$[\, x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\, y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\, y + \Delta y,\ 1\,]$	intervallumba.

Az, hogy

melyik random szám esik az	$[\, x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\, y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\, y + \Delta y,\ 1\,]$	intervallumba,

3! -féleképpen valósulhat meg, ezért a leírt esemény valószínűsége 6-szor annyi, mint az

RND_1	beleesik az	$[\, x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba, és
RND_2	beleesik az	$[\, y,\ y + \Delta y\ )$	intervallumba, és
RND_3	beleesik az	$[\, y + \Delta y,\ 1\,]$	intervallumba.

esemény valószínűsége. Ennek az eseménynek a valószínűsége a megfelelő intervallumok hosszainak szorzata, vagyis

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (1-(y+\Delta y))$$

Ezért

$$f(x,y) \approx \frac{6 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (1-(y+\Delta y)\,)}{\Delta x \cdot \Delta y} = 6 \cdot (1-(y+\Delta y)\,) \approx 6 \cdot (1-y)$$

Midebből azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) = 6 \cdot (1-y) \qquad (0<x<y<1)$$

2. Mikor érkezik az első ember, mikor jön a harmadik?

Legyen most

X = a három random szám közül a legkisebb
Y = a három random szám közül a legnagyobb

Most is levezetjük (X,Y) sűrűségfüggvényének a képletét.

$$f(x,y) \approx \frac{\mathrm{P}(\ x<X<x+\Delta x \ \text{ és } \ y<Y<y+\Delta y\ )}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x<X<x+\Delta x \quad \text{és} \quad y<Y<y+\Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy a RND_1, RND_2, RND_3 random számok közül

a legkisebb az	$[\,x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumba esik, és
a legnagyobb az	$[\,y,\ y+\Delta y)$	intervallumba esik,

ami – most! – a következőket jelenti:

a legkisebb az	$[\,x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumba esik, és
a legnagyobb az	$[\,y,\ y+\Delta y\,)$	intervallumba esik, és
a középső	$[\,X,\ Y\,]$	intervallumba esik.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	1	random szám esik az	$[\,x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\,y,\ y+\Delta y\,)$	intervallumba, és
pontosan	1	random szám esik az	$[\,x+\Delta x,\ y\,]$	intervallumba.

Az, hogy

melyik random szám esik az	$[\,x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\,y,\ y+\Delta y\,)$	intervallumba, és
melyik random szám esik az	$[\,x+\Delta x,\ y\,]$	intervallumba,

3! -féleképpen valósulhat meg, ezért a leírt esemény valószínűsége 6-szor annyi, mint az

RND_1	beleesik az	$[\,x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumba, és
RND_2	beleesik az	$[\,y,\ y+\Delta y\,)$	intervallumba, és
RND_3	beleesik az	$[\,x+\Delta x,\ y\,]$	intervallumba.

esemény valószínűsége. Ennek az eseménynek a valószínűsége a megfelelő intervallumok hosszainak szorzata, vagyis

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot (\ y - (x + \Delta x)\ )$$

Ezért

$$f(x,y) \;\approx\; \frac{6 \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot (\ y - (x + \Delta x)\ )}{\Delta x \cdot \Delta y} \;=\; 6 \cdot (y - (x + \Delta x)\ ) \;\approx\; 6 \cdot (y - x)$$

Midebből azt kapjuk, hogy

$$f(x,y) \;=\; 6 \cdot (y - x) \qquad (0 < x < y < 1)$$

1. Mikor érkezik a második, mikor jön a harmadik?

Legyen most

$$\begin{aligned} X &= \text{a három random szám közül a középső} \\ Y &= \text{a három random szám közül a legnagyobb} \end{aligned}$$

Legyen az Olvasó feladata, megmuatni, hogy

$$f(x,y) \;=\; 6 \cdot x \qquad (0 < x < y < 1)$$

3.1.2. Tíz ember esete

Tegyük fel, hogy tíz ember mindegyike – akik rendszeresen együtt ebédelnek – a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik egy vendéglőbe. Legyen X az 3-ik, Y a 7-ik érkezési időpont. Könnyen szimulálhatjuk a problémát, ha generálunk tíz random számot 0 és 1 között, és

$$\begin{aligned} X &= \text{a} \quad \text{3-ik legkisebb} \\ Y &= \text{a} \quad \text{7-ik legkisebb} \end{aligned}$$

Most levezetjük a kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felveszünk két x, y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felveszünk x mellett egy kis $[x, x + \Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y + \Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x + \Delta x < y$ egyenlőtlenség is. (X,Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x,y) \approx \frac{\mathrm{P}\,(x < X < x + \Delta x \ \text{ és } \ y < Y < y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \quad \text{ és } \quad y < Y < y + \Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy

a 3-ik legkisebb random szám az	$[\ x,\ x + \Delta x\ )$	intervallumba esik, és
a 7-ik legkisebb random szám az	$[\ y,\ y + \Delta y)$	intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve – a következőket jelenti:

legalább	1	random szám van az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumban, és
legalább	1	random szám van az	$[\ y,\ y+\Delta y\ )$	intervallumban, és
pontosan	2	random szám van a	$[\ 0,\ X\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ X,\ Y\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ Y,\ 1\ ]$	intervallumban.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	2	random szám van a	$[\ 0,\ x)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ x+\Delta x,\ y\ )$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\ y,\ y+\Delta y\ )$	intervallumban, és
pontosan	3	random szám van az	$[\ y+\Delta y,\ 1\ ]$	intervallumban.

A többdimenziós polinomiális eloszlás formuláját felhasználva kapjuk, hogy ennek az eseménynek a valószínűsége

$$\frac{10!}{2!\ 1!\ 3!\ 1!\ 3!}\ \cdot\ (x)^{i-1}\ \cdot\ (\Delta x)^1\ \cdot\ (\ y-(x+\Delta x)\ )^3\ \cdot\ (\Delta y)^1\ \cdot\ (\ 1-(y+\Delta y)\ )^3$$

Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a formula így egyszerűsödik:

$$\frac{10!}{2!\ 3!\ 3!}\ \cdot\ x^2\ \cdot\ \Delta x\ \cdot\ (\ y-(x+\Delta x)\ )^3\ \cdot\ \Delta y\ \cdot\ (\ 1-(y+\Delta y)\ )^3$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$ -nal, majd $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ határérték mellet megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y)\ =\ \frac{10!}{2!\ 3!\ 3!}\ x^2\ (y-x)^3\ (1-y)^3 \qquad (0<x<y<1)$$

3.1.3. Általános eset

Tegyük fel, hogy n ember mindegyike – akik rendszeresen együtt ebédelnek – a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik egy vendéglőbe. Legyen X az i-ik, Y a j-ik érkezési időpont. Könnyen szimulálhatjuk a problémát, ha generálunk n random számot 0 és 1 között, és

X = az i-ik legkisebb
Y = a j-ik legkisebb

Most levezetjük a kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból először felveszünk két x, y számot, melyekre igaz, hogy

$$0<x<y<1$$

Ezek után felveszünk x mellett egy kis $[x, x+\Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y+\Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x+\Delta x<y$ egyenlőtlenség is. (X,Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x,y)\approx\frac{\mathrm{P}\left(x<X<x+\Delta x\ \text{ és }\ y<Y<y+\Delta y\right)}{\Delta x\cdot\Delta y}$$

A számlálóban álló

$$x<X<x+\Delta x \quad \text{és} \quad y<Y<y+\Delta y$$

esemény azt jelenti, hogy

az i-ik legkisebb random szám az $[\ x,\ x+\Delta x\ )$ intervallumba esik, és
a j-ik legkisebb random szám az $[\ y,\ y+\Delta y)$ intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve – a következőket jelenti:

legalább	1	random szám van az	$[\, x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumban, és
legalább	1	random szám van az	$[\, y,\ y+\Delta y\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(i-1)$	random szám van a	$[\, 0,\ X\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\, X,\ Y\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\, Y,\ 1\,]$	intervallumban.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	$(i-1)$	random szám van a	$[\, 0,\ x)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\, x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\, x+\Delta x,\ y\,)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\, y,\ y+\Delta y\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\, y+\Delta y,\ 1\,]$	intervallumban.

A többdimenziós polinomiális eloszlás formuláját felhasználva kapjuk, hogy ennek az eseménynek a valószínűsége

$$\frac{n!}{(i-1)!\ 1!\ (j-i-1)!\ 1!\ (n-j)!} \cdot (x)^{i-1} \cdot (\Delta x)^1 \cdot (q; y-(x+\Delta x)\,)^{j-i-1} \cdot (\Delta y)^1\ (\, 1-(y+\Delta y)\,)^{n-j} \cdot$$

Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a formula így egyszerűsödik:

$$\frac{n!}{(i-1)!\ (j-i-1)!\ (n-j)!} \cdot x^{i-1} \cdot \Delta x \cdot (\ y-(x+\Delta x)\,)^{j-i-1} \cdot \Delta y\ \ (\ 1-(y+\Delta y)\ )^{n-j}$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$ -nal, majd $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ határérték mellet megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

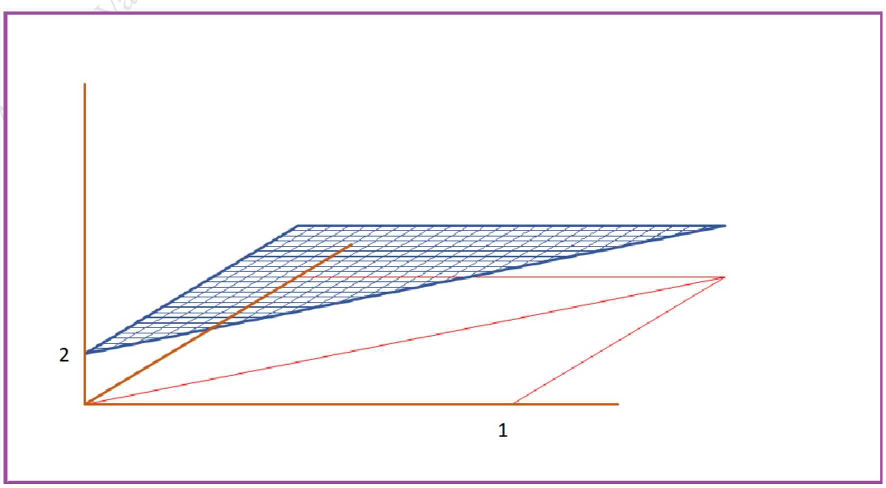
$$f(x,y) \ = \ \frac{n!}{(i-1)!\ (j-i-1)!\ (n-j)!}\ \ x^{i-1}\ \ (y-x)^{j-i-1}\ \ (1-y)^{n-j} \qquad\qquad (0<x<y<1)$$

3.2. Ábrák

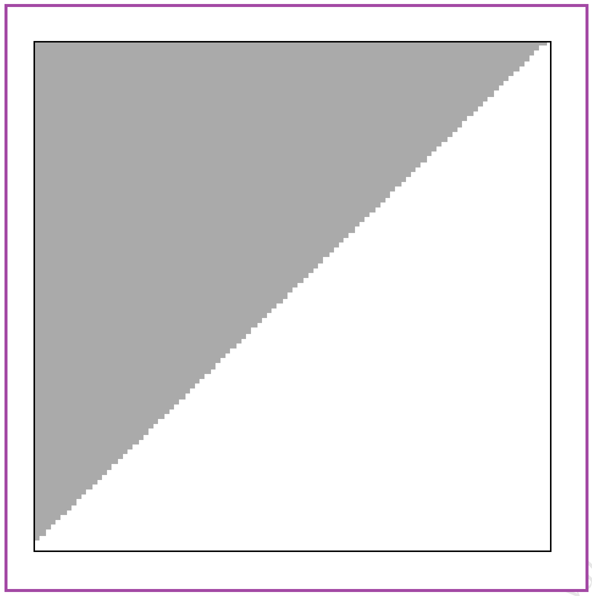
Két ember (véletlen szám) esete:

$X =$ **a kisebbik** $\quad Y =$ **a nagyobbik** $\quad n=2, i=1, j=2$ esetén ezt kapjuk:

$$f(x,y)=2 \qquad \text{if}\ \ 0<x<y<1$$



5. ábra. 2*-dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n=2$, $i=1$, $j=2$



6. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 2$, $i = 1$, $j = 2$

Három ember (véletlen szám) esete:

1. $X =$ **a legkisebb** $\quad Y =$ **a legnagyobb** $\quad n = 3, i = 1, j = 3$ esetén ezt kapjuk:

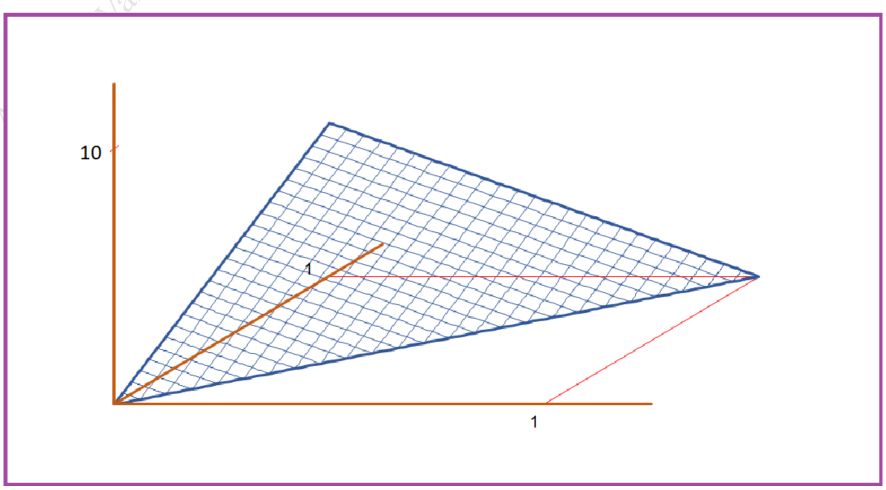
$$f(x, y) = 6(y - x) \qquad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

2. $X =$ **a legkisebb** $\quad Y =$ **a középső** $\quad n = 3, i = 1, j = 2$ esetén ezt kapjuk:

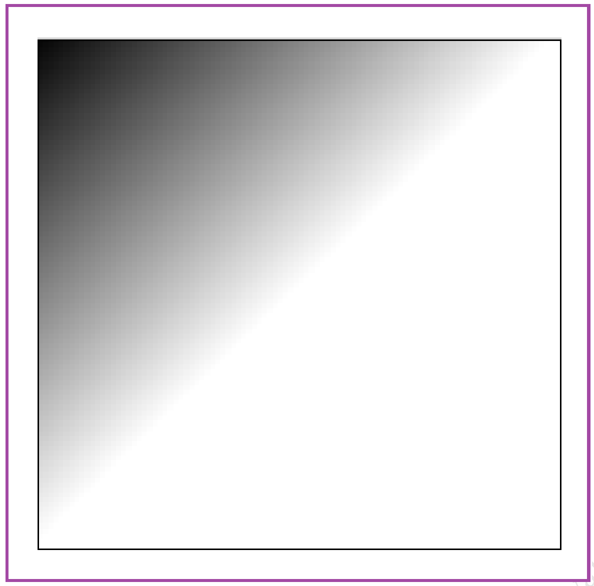
$$f(x, y) = 6(1 - y) \qquad \text{ha } 0 < x < y < 1$$

3. $X =$ **a középső** $\quad Y =$ **a legnagyobb** $\quad n = 3, i = 2, j = 3$ esetén ezt kapjuk:

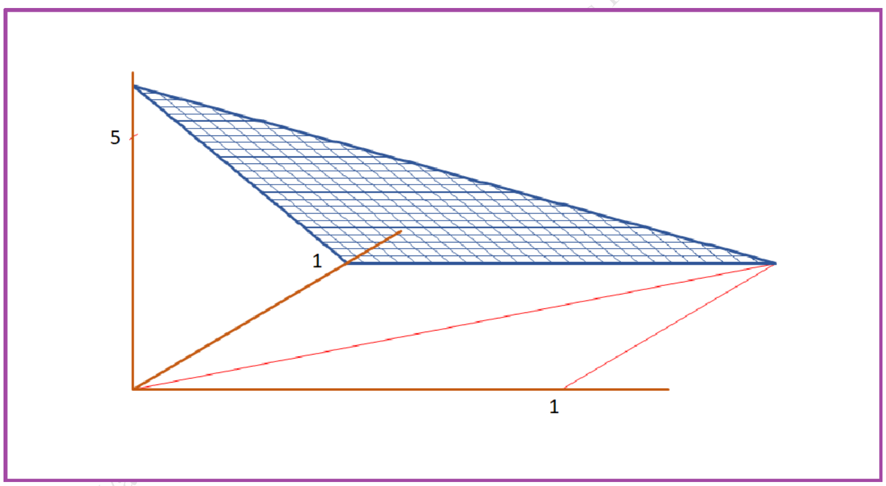
$$f(x, y) = 6x \qquad \text{ha } 0 < x < y < 1$$



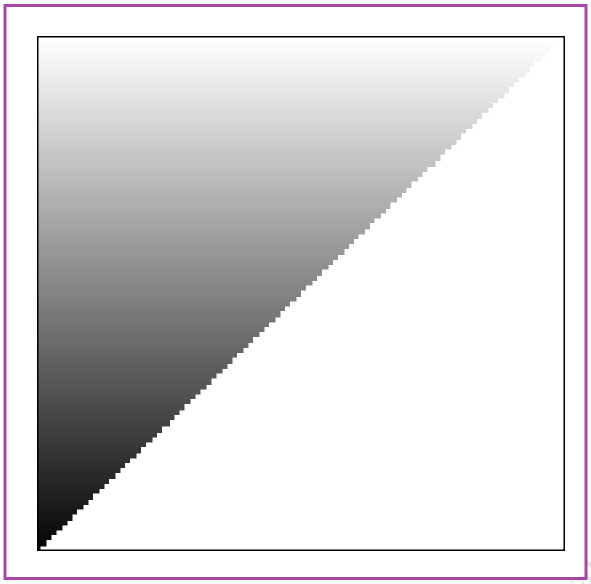
7. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 3$



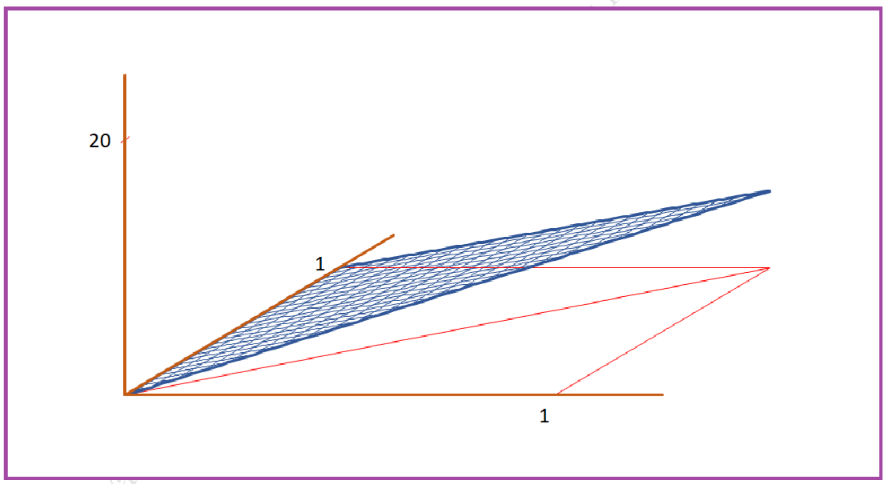
8. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 3$



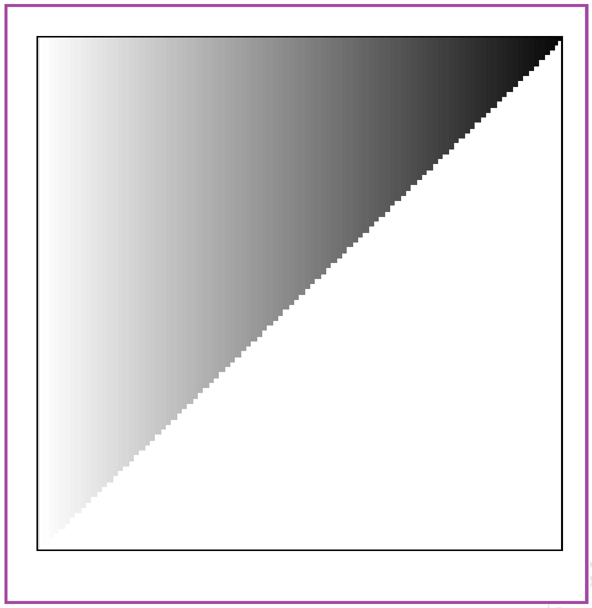
9. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 2$



10. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 3$, $i = 1$, $j = 2$



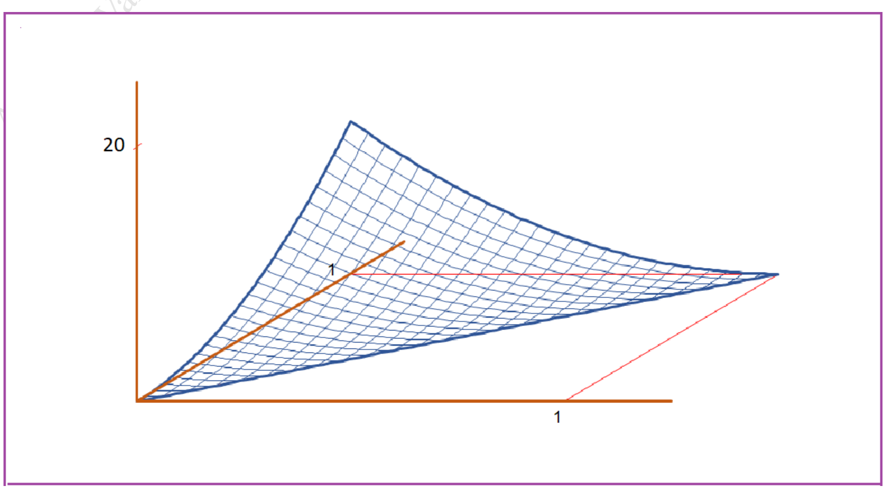
11. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 3$, $i = 2$, $j = 3$



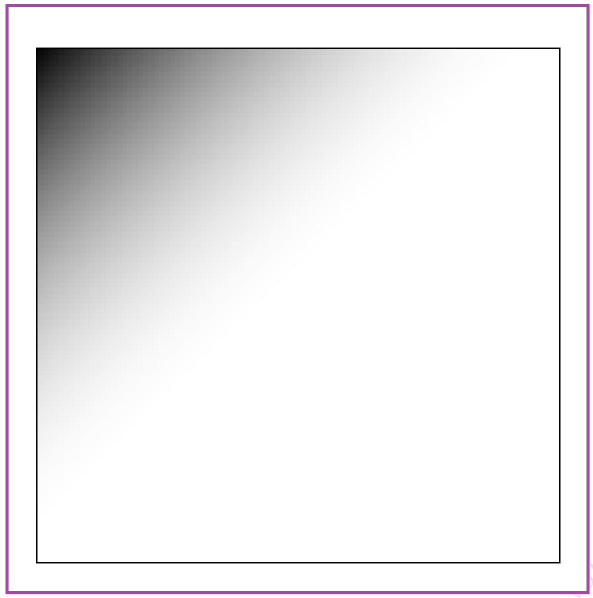
12. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 3\,,\, i = 2\,,\, j = 3$

Négy ember (véletlen szám) esete:

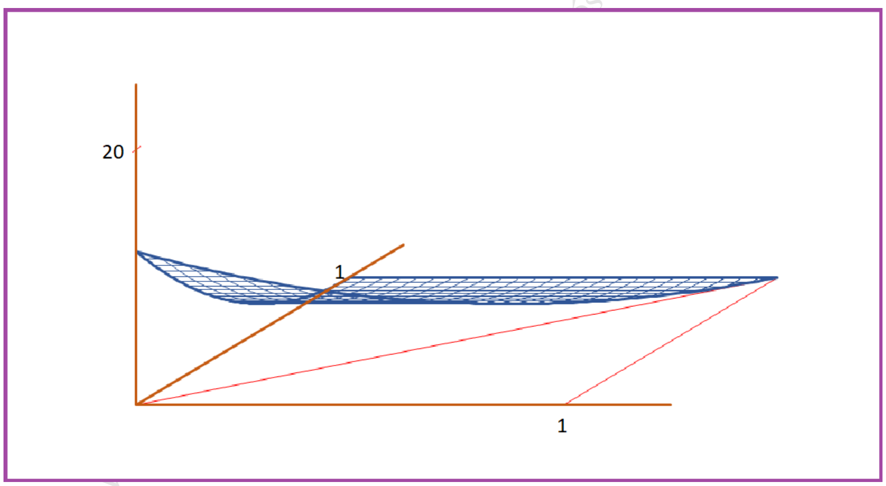
1. $X =$ **a legkisebb** $\quad Y =$ **a legnagyobb** $\quad n = 4,\, i = 1,\, j = 4$ esetén ezt kapjuk:
$$f(x, y) = 12\ \ (y - x)^2 \qquad \text{ha } \ 0 < x < y < 1$$
2. $X =$ **a legkisebb** $\quad Y =$ **a középső** $\quad n = 4,\, i = 1,\, j = 2$ esetén ezt kapjuk:
$$f(x, y) = 12(1 - y)^2 \qquad \text{ha } \ 0 < x < y < 1$$
3. $X =$ **a második legkisebb** $\quad Y =$ **a harmadik legkisebb** $\quad n = 4,\, i = 2,\, j = 3$ esetén ezt kapjuk:
$$f(x, y) = 24x(1 - y) \qquad \text{ha } \ 0 < x < y < 1$$



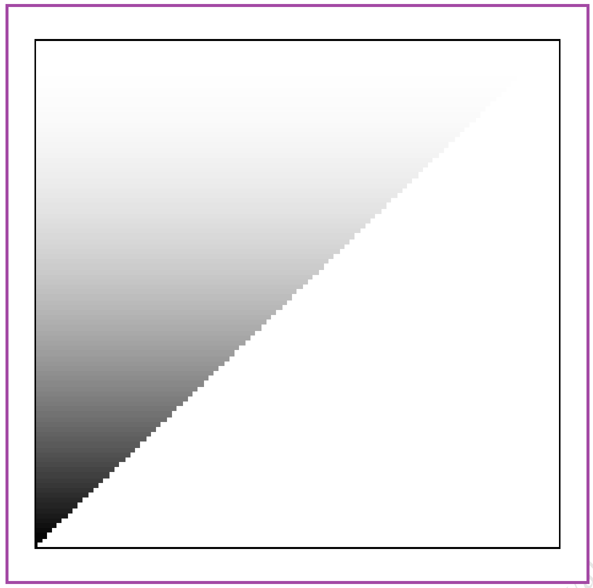
13. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 4\,,\, i = 1\,,\, j = 4$



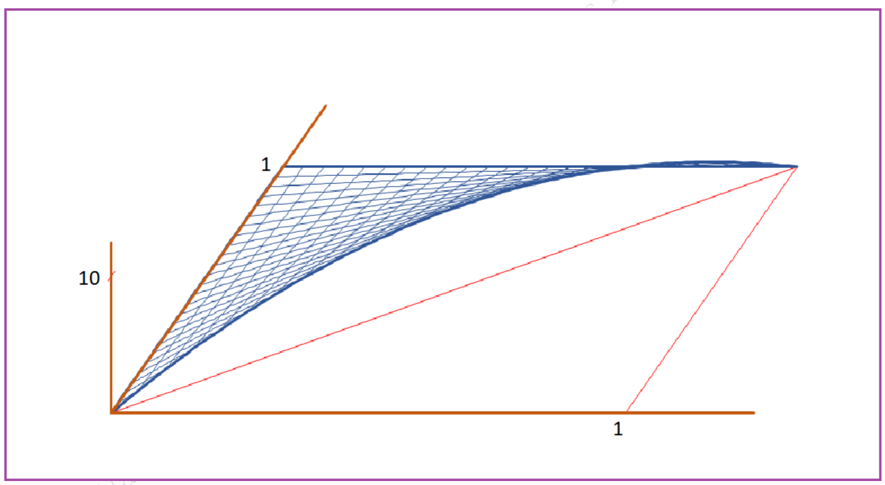
14. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 4\,,\; i = 1\,,\; j = 4$



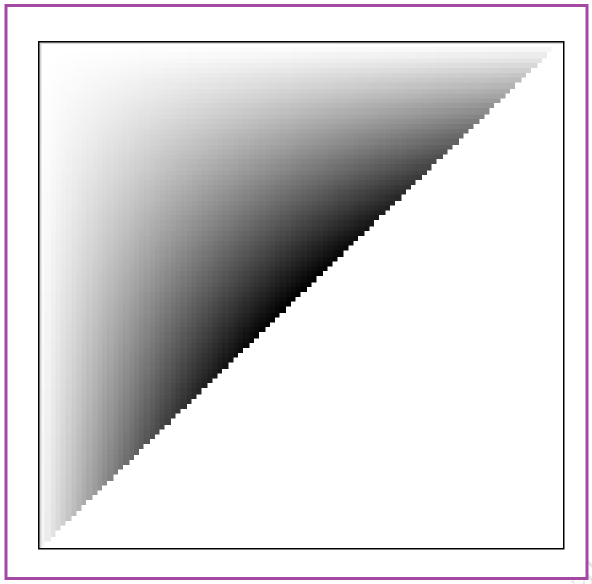
15. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 4\,,\; i = 1\,,\; j = 2$



16. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 4$, $i = 1$, $j = 2$



17. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 4$, $i = 2$, $j = 3$

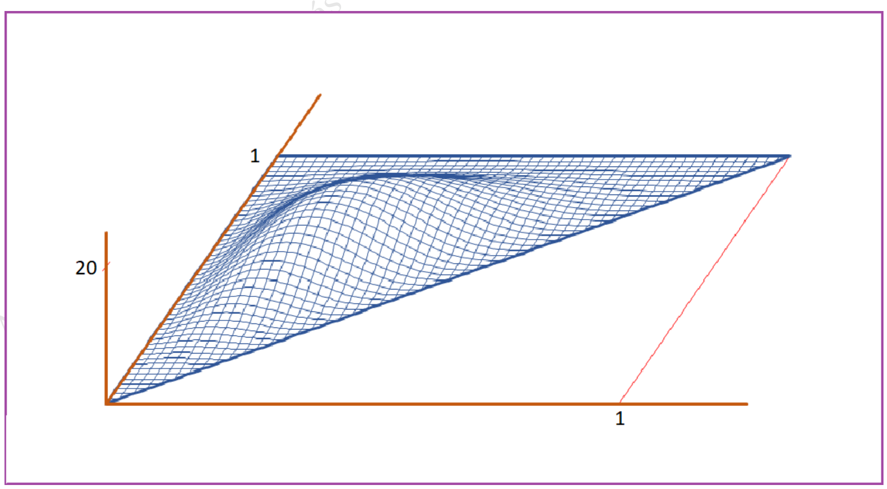


18. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 4\,,\; i = 2\,,\; j = 3$

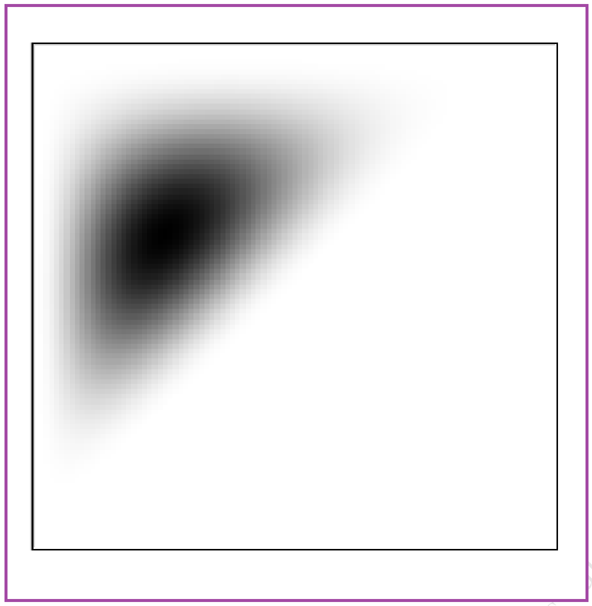
Tíz ember (véletlen szám) esete:

$X =$ **a 3-ik legkisebb** $\quad Y =$ **a 7-ik legkisebb** $\quad n = 10,\, i = 3,\, j = 7$ esetén ezt kapjuk:

$$f(x,y) = \frac{10!}{2!\;3!\;3!}\;\; x^2\,(y-x)^3\,(1-y)^3 \qquad \text{ha } \; 0 < x < y < 1$$



19. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $n = 10\,,\; i = 3\,,\; j = 7$



20. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 10$, $i = 3$, $j = 7$

3.3. Feladatok megoldásokkal

1. Feladat: Három jóbarát déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elsőnek ér oda, az fél egy előtt, aki utolsónak, az fél egy után érkezik?

Megoldás: Bizonyára az Olvasó emlékszik az előző alpontban említett "Három véletlen szám esete" példára, amikor X jelölte a három véletlen szám közül a legkisebbet, Y a legnagyobbat, és (X, Y) sűrűségfüggvénye az

$$f(x, y) = 6(y - x) \qquad (0 \le x \le y \le 1)$$

függvény volt. Ha most tekinjük az

$$N = \{(x, y) : \quad 0 \le x \le 0.5 \quad 0.5 \le y \le 1\}$$

négyzetet, akkor a kérdéses valószínűség annyi, mint annak a valószínűsége, hogy az (X, Y) pont az N négyzetbe esik:

$$\mathrm{P}\left((X, Y) \in N \right) = \iint\limits_N 6(y - x)\, dx\, dy = \int\limits_{0.5}^{1} \left(\int\limits_{0}^{0.5} 6(y - x)\, dx \right) dy = \ \ldots = \frac{3}{4}$$

A képletben a három pont az jelenti, hogy az intergrál kiszámolása az Olvasó feladata.

2. Feladat: Három jóbarát déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Mi a valószínűsége annak, hogy aki elsőnek ér oda, az fél egy előtt, aki utolsónak, az fél egy után érkezik feltéve, hogy érkezési időpontjaik között legfeljebb fél óra telik el?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X, az utolsó Y. Ekkor (X, Y) sűrűségfüggvénye – mint tudjuk:

$$f(x, y) = 6\,(y - x) \qquad (0 < x < y < 1)$$

A kérdezett feltételes valószínűség:

$$\mathrm{P}(\ X < 0.5\ \text{ és }\ Y > 0.5 \mid Y - X < 0.5\ ) \ =\ \frac{\mathrm{P}(\ X < 0.5\ \text{ és }\ Y > 0.5\ \text{ és }\ Y - X < 0.5\ )}{\mathrm{P}(\ Y - X < 0.5\ )} \ =$$

$$=\ \frac{\mathrm{P}(\ 0 < X < 0.5\ \text{ és }\ 0.5 < Y < X + 0.5\ )}{1 - \mathrm{P}(\ Y - X > 0.5\ )}$$

A számláló:

$$\mathrm{P}(\ 0 < X < 0.5\ \text{ és }\ 0.5 < Y < X + 0.5\ ) = \int_0^{0.5} \left(\int_{0.5}^{x+0.5} 6\,(y-x)\,dy \right) dx = \ldots\ = 0.25$$

A nevező:

$$1\ -\ \mathrm{P}(\ 0 < X < 0.5\ \text{ és }\ Y > X + 0.5\ ) = \int_0^{0.5} \left(\int_{x+0.5}^{1} 6\,(y-x)\,dy \right) dx = \ldots\ = 0.5$$

Így a kérdezett feltételes valószínűség $0.25/0.5 = 0.5$ -del egyenlő.

3. Feladat: Most tegyük fel, hogy nem három, hanem n jóbarát érkezik a menzára déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint. **(a)** Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó és az első érkezési időpont között legalább z idő eltelik $(0 < z < 1)$? Az említett két időpont között eltelt időtartamnak mi **(b)** az eloszlásfüggvénye, **(c)** sűrűségfüggvénye?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X, az utolsó Y, az X és Y között eltelt időtartam $Z = Y - X$. Ekkor (X, Y) sűrűségfüggvénye az $0 < x < y < 1$ egyenlőtlenségek által definiált tartományon a korábban levezetett

$$f(x,y)\ =\ \frac{n!}{(i-1)!\ (j-i-1)!\ (n-j)!}\ x^{i-1}\ (y-x)^{j-i-1}\ (1-y)^{n-j}$$

általános képletből az $i = 1, j = n$ helyettesítéssel adódik:

$$f(x,y)\ =\ \frac{n!}{(0)!\ (n-2)!\ (0)!}\ x^0\ (y-x)^{n-2}\ (1-y)^0$$

Az egyszerűsítések után ezt kapjuk:

$$f(x,y)\ =\ n\,(n-1)\ (y-x)^{n-2}$$

(a) A kérdezett valószínűség:

$$\mathrm{P}(Z > z)\ =\ \mathrm{P}(Y - X > z)\ =\ \mathrm{P}(X < Y - z)\ =$$

A kettős integrált – gyakorlásképpen – kétféleképpen is felírjuk kétszeres integrálként. Első esetben az x szerinti ingtegrál áll kívül, az y szerinti belül:

$$=\ \int_0^{1-z} \left(\int_{x+z}^{1} n(n-1)\,(y-x)^{n-2}\,dy \right) dx\ =$$

Most pedig az y szerinti ingtegrál áll kívül, és az x szerinti belül:

$$=\ \int_z^{1} \left(\int_0^{y-z} n(n-1)\,(y-x)^{n-2}\,dx \right) dy\ =$$

Akár így, akár úgy, az eredmény ez lesz:

$$\ldots\ =\ 1\ - n\,z^{n-1} + (n-1)\,z^n$$

(b) Az eloszlásfüggvény:

$$R(z)\ =\ 1 - \mathrm{P}(Z > z)\ =\ n\,z^{n-1} - (n-1)\,z^n$$

(c) A sűrűségfüggvény:

$$r(z)\ =\ \left(n\,z^{n-1} - (n-1)\,z^n\right)'\ =\ n(n-1)\,z^{n-2} - n(n-1)\,z^{n-1}\ =\ n(n-1)\,(z^{n-2} - z^{n-1})$$

3.4. Ha az érkezések egyenletes eloszlást követnek akármilyen véges intervallumon *(Extra tananyag)*

Az előző gondolatmkenetet könnyű általánosítani arra az esetre, ha az emberek az A és a B időpontok között érkeznek (egyenletes eloszlás szerint, egymástól függetlenül), azaz n független, egyenletes eloszlású véletlen számot tekintünk A és B között, és

$$X = \text{az } i\text{-ik legkisebb}$$

$$Y = \text{a } j\text{-ik legkisebb}$$

ahol $0 < i < j \le n$. Ekkor minden $A < x < y < B$ esetén

$$f(x,y) = \frac{1}{(B-A)^2} \cdot \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \cdot \left(\frac{x-A}{B-A}\right)^{i-1} \cdot \left(\frac{y-x}{B-A}\right)^{j-i-1} \cdot \left(\frac{B-y}{B-A}\right)^{n-j}$$

3.5. Ha az érkezések tetszőleges eloszlást követnek *(Extra tananyag)*

Tegyük fel, hogy az emberek egyforma, de nem egyenletes eloszlás szerint érkeznek a vendéglőbe: mindenki – a többitől függetlenül – az $s(x)$ sűrűségfüggvényű, $S(x)$ eloszlásfüggvényű eloszlás szerint érkezik $(A < x < B)$. Legyen X az i-ik, Y a j-ik érkezési időpont.

Most levezetjük erre az általánosabb esetre is a kétdimenziós (X,Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvényének a képletét. E célból – ugyanúgy, mint korábban – felveszünk két x, y számot, melyekre igaz, hogy

$$0 < x < y < 1$$

Ezek után felveszünk x mellett egy kis $[x, x+\Delta x]$ intervallumot és y mellett egy kis $[y, y+\Delta y]$ intervallumot úgy, hogy teljesüljön az $x + \Delta x < y$ egyenlőtlenség is. (X,Y) sűrűségfüggvényét hányadossal közelítjük:

$$f(x,y) \approx \frac{\mathrm{P}\left(x < X < x+\Delta x \;\text{ és }\; y < Y < y + \Delta y\right)}{\Delta x \Delta x}$$

A számlálóban álló

$$x < X < x + \Delta x \qquad \text{és} \qquad y < Y < y + \Delta y$$

esemény – ugyanúgy, mint korábban – azt jelenti, hogy

az i-ik legkisebb szám, amit X jelöl, az $[\ x,\ x+\Delta x\ )$ intervallumba esik,

és

a j-ik legkisebb szám, amit Y jelöl, az $[\ y,\ y+\Delta y\ )$, intervallumba esik,

ami – részletesebben kifejtve a következőket jelenti:

legalább	1	random szám van az	$[\ x,\ x+\Delta x\ )$	intervallumban, és
legalább	1	random szám van az	$[\ y,\ y+\Delta y\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(i-1)$	random szám az	$[\ 0,\ X\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\ X,\ Y\ )$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\ Y,\ 1\ ]$	intervallumban.

Ez – jó közelítéssel – azt jelenti, hogy

pontosan	$(i-1)$	random szám van a	$[\,0,\ x\,)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\,x,\ x+\Delta x\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(j-i-1)$	random szám van az	$[\,x+\Delta x,\ y\,)$	intervallumban, és
pontosan	1	random szám van az	$[\,y,\ y+\Delta y\,)$	intervallumban, és
pontosan	$(n-j)$	random szám van az	$[\,y+\Delta y,\ 1\,]$	intervallumban.

A többdimenziós polinomiális eloszlás formuláját felhasználva most azt kapjuk, hogy az

$$x < X < x+\Delta x \quad \text{és} \quad y < Y < y+\Delta y$$

esemény valószínűsége körülbelül egyenlő a

$$\frac{n!}{(i-1)!\;1!\;(j-i-1)!\;1!\;(n-j)!}$$

konstans és

$$(\,S(x)\,)^{i-1}\,(\,s(x)\,\Delta x\,)^{1}\,(\,S(y)-S(x+\Delta x)\,)^{j-i-1}\,(\,s(y)\,\Delta y\,)^{1}\,(\,1-S(y+\Delta y)\,)^{n-j}$$

kifejezés szorzatával. Eldobhatunk néhány fölösleges zárójelet, tényezőt és kitevőt, ami által a teljes formula, vagyis maga szorzat így egyszerűsödik:

$$\frac{n!}{(i-1)!\;(j-i-1)!\;(n-j)!}\;\;(\,S(x)\,)^{i-1}\;\;s(x)\,\Delta x\;\;(\,S(y)-S(x+\Delta x)\,)^{j-i-1}\;\;s(y)\,\Delta y\;\;(\,1-S(y+\Delta y)\,)^{n-j}$$

Osztva $\Delta x \cdot \Delta y$ -nal osztva, majd $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ határérték mellet megkapjuk a sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) \;=\; \frac{n!}{(i-1)!\;(j-i-1)!\;(n-j)!}\;\;S(x)^{i-1}\,s(x)\;\;(\,S(y)-S(x)\,)^{j-i-1}\;\;f(y)\;\;(\,1-S(y)\,)^{n-j}$$

3.6. Kovariancia *(Extra tananyag)*

Bár a kovarianciát csak később tanuljuk, béta eloszlásokkal kapcsolatban a kiszámításának technkáját itt mutatjuk be.

Először egy alapvető formulát állítunk fel a sűrűségfüggvény segítségével, utána kiszámoljuk a kovarianciát.

Mivel minden sűrűségfüggvénynek a teljes értelmezési tartományán vett integrálja 1 -gyel egyenlő, ezért fennáll az alábbi egyenlőség:

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{n!}{(i-1)!\;(j-i-1)!\;(n-j)!}\;\;x^{i-1}\;\;(y-x)^{j-i-1}\;\;(1-y)^{n-j}\,dxdy = 1$$

Ha valaki ezt az egyenlőséget közvetlenül integrálással szeretné megkapni, akkor ennek sincs különösebb akadálya, hiszen parciális integrálásokkal és kellő türelemmel az $\int_0^1 \int_0^y x^{i-1}\;\;(y-x)^{j-i-1}\;\;(1-y)^{n-j}\,dx\,dy$ integrál értékére kijön:

$$\int_0^1 \int_0^y x^{i-1}\;\;(y-x)^{j-i-1}\;\;(1-y)^{n-j}\,dx\,dy = \frac{(i-1)!\;(j-i-1)!\;(n-j)!}{n!} \qquad \textit{alapvető formula}$$

Érdemes ebben az *alapvető formulá*ban i, j és n helyett $(i+1)$ -et $(j+2)$ -t és $(n+2)$ -t írni. Ezt az összefüggést kapjuk:

$$\int_0^1 \int_0^y x^{(i+1)-1}\;\;(y-x)^{(j+2)-(i+1)-1}\;\;(1-y)^{(n+2)-(j+2)}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{(\,(i+1)-1\,)!\,(\,(j+2)-(i+1)-1\,)!\,(\,(n+2)-(j+2))\,)!}{(n+2)!}$$

amiből egyszerűsítés után ez jön ki:

$$\int_0^1 \int_0^y x^i \;\; (y-x)^{j-i} \;\; (1-y)^{n-j} \, dx \, dy = \frac{i!\,(j-i)!\,(n-j)!}{(n+2)!} \qquad \textit{származtatott formula}$$

Az itt következő várható értéket könnyen meg letet határozni a most kapott *származtatott formula* segítségével:

$$\mathrm{E}(\,X\,(Y-X)\,) =$$

$$\int_0^1 \int_0^y x\,(y-x) \;\cdot \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \;\; x^{i-1} \;\; (y-x)^{j-i-1} \;\; (1-y)^{n-j} \, dxdy =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \int_0^1 \int_0^y x\,(y-x) \;\cdot\; x^{i-1} \;\; (y-x)^{j-i-1} \;\; (1-y)^{n-j} \, dxdy =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \;\cdot \int_0^1 \int_0^y x^i \;\; (y-x)^{j-i} \;\; (1-y)^{n-j} \, dxdy =$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} \;\cdot\; \frac{i!\,(j-i)!\,(n-j)!}{(n+2)!} = \frac{i\,(j-i)}{(n+1)(n+2)}$$

Ezek után a szorzat várható értéke egyszerűen adódik:

$$\mathrm{E}(\,X\,Y\,) = \mathrm{E}(\,X\,(Y-X)\,) + \mathrm{E}(\,X^2\,) \;=\; \frac{i\,(j-i)}{(n+1)(n+2)} + \frac{i\,(i+1)}{(n+1)(n+2)} \;=\; \frac{i\,(j+1)}{(n+1)(n+2)}$$

Végül a kovariancia:

$$\mathrm{COV}(\,X\,Y\,) = \mathrm{E}(\,X\,Y\,) - \mathrm{E}(\,X\,)\,\mathrm{E}(\,Y\,) = \frac{i\,(j+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{i}{n+1}\,\frac{j}{n+1}$$

3.7. Gyakorló feladatok

1. Öt jóbarát mindegyike a többitől függetlenül dél és 1 óra között egyenletes eloszlás szerint érkezik a menzára. Legyen X az az időpont, amikor a már négyen vannak, és legyen Y az az időpont, amikor a már mind az öten ott vannak. Ha van rá lehetősége, szimulálja a jelenséget és a valószínűségi változókat! Az alábbi feladatok megértésében és megoldásában sokat segít, ha érti, látja, hogy mi történik, hogyan dolgozik a véletlen!

   (a) Fókuszáljunk először csak az Y valószínűségi változóra!

      i. Határozza meg az
      $$Y < 0.75$$
      esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, hogy mindenki odaér háromnegyed egy előtt.)

      ii. Határozza meg Y eloszlásfüggvényének a képletét!

      iii. Határozza meg Y sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

      iv. Határozza meg Y sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

   (b) Fókuszáljunk most csak az X valószínűségi változóra!

i. Határozza meg az

$$X < 0.25$$

esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, esemény azt jelenti, hogy legalább négyen odaérnek negyed egy előtt. A binomiális eloszlás képletét összegzésekkel kombinálva ügyesen lehet használni.)

ii. Határozza meg X eloszlásfüggvényének a képletét!

iii. Határozza meg X sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

iv. Határozza meg X sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

(c) Most foglalkozzunk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval!

i. Határozza meg az

$$X < 0.25 \text{ és } Y < 0.75$$

esemény valószínűségét! (Vegye észre, hogy ez az esemény azt jelenti, hogy legalább négyen odaérnek negyed egy előtt, és mindenki odaér háromnegyed egy előtt. A polinomiális eloszlás összegzésekkel kombinálva ügyesen lehet használni.)

ii. Határozza meg (X, Y) sűrűségfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény deriválásával!

iii. Határozza meg (X, Y) eloszlásfüggvényének a képletét az eloszlásfüggvény felhasználása nélkül!

4. Kísérleti eredmények függvényének a várható értéke

4.1. Diszkrét eset (ismétlés)

A folytonos esetre vonatkozó gondolatok és formulák megértésének könnyítése céljából megismételjük az idevonatkozó gondolatokat és formulákat, melyeket diszkrét esetben a jegyzet első részének 14. fejezetében már tárgyaltunk.

Ha egy (X,Y) kétdimenziós diszkrét valószínűségi változó mellett egy $z = t(x,y)$ transzformációt is tekintünk, és képezzük a $t(X,Y)$ valószínűségi változót, akkor az

$$\sum_{(x,y)} t(x,y)\; p(x,y)$$

számot a transzformációval nyert $t(X,Y)$ **valószínűségi változó várható érték**ének nevezzük, és $\mathrm{E}\,(\, t(X,Y)\,)$ -vel jelöljük:

$$\mathrm{E}\,(\, t(X,Y)\,) = \sum_{(x,y)} t(x,y)\; p(x,y)$$

Ha egy diszkrét eloszlást a síkon csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor a

$$\sum_{(x,y)} t(x,y)\; p(x,y)$$

számot a szóbanforgó eloszlásból **a** $z = t(x,y)$ **transzformációval kapott eloszlás várható értéké**nek nevezzük.

Megjegyzés. Természetesen a $Z = t(X,Y)$ valószínűségi változó várható értékét meghatározhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk a $Z = t(X,Y)$ valószínűségi változó lehetséges z értékeit és az eloszlásának az $r(z)$ képletét, és a kapott eloszlás

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{z} z\; r(z)$$

várható értékét kiszámoljuk.

4.2. Folytonos eset

Ha egy (X,Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változó mellett egy $z = t(x,y)$ folytonos transzformációt is tekintünk, és képezzük a $t(X,Y)$ valószínűségi változót, akkor az

$$\iint_{\mathrm{R}^2} t(x,y)\; f(x,y)\; dx\, dy$$

számot **a** $t(X,Y)$ **valószínűségi változó várható értéké**nek nevezzük, és $\mathrm{E}\,(\, t(X,Y)\,)$ -vel jelöljük:

$$\mathrm{E}\,(\, t(X,Y)\,) = \iint_{\mathrm{R}^2} t(x,y)\; f(x,y)\; dx\, dy$$

Ha egy folytonos eloszlást a síkon csak úgy önmagában – mindenféle valószínűségi változó nélkül – vizsgálunk, akkor az

$$\iint_{\mathrm{R}^2} t(x,y)\; f(x,y)\; dx\, dy$$

számot a **a** $z = t(x, y)$ **transzformációval kapott eloszlás várható értéké**nek nevezzük.

Megjegyzés. Természetesen a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó várható értékét meghatározhatjuk úgy is, hogy meghatározzuk a $Z = t(X, Y)$ valószínűségi változó eloszlásának $r(z)$ sűrűségfüggvényét, és a kapott eloszlás

$$\mathrm{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\, r(z)\, dz$$

várható értékét kiszámoljuk.

Feladat: Tegyük fel, hogy n jóbarát érkezik a menzára déli 12 óra és délután 1 óra között egymástól függetlenül (folytonos) egyenletes eloszlás szerint. Az utolsó és az első érkezése között eltelt időtartamnak mennyi a várható értéke?

Megoldás: Az első érkezési időpont legyen X, az utolsó Y, az X és Y között eltelt időtartam $Z = Y - X$. Ekkor (X, Y) sűrűségfüggvénye – mint korábban meghatároztuk:

$$f(x, y) = n\,(n-1)\,(y-x)^{n-2} \qquad (0 < x < y < 1)$$

Z sűrűségfüggvényét is kiszámítottuk a korábbiakan:

$$r(z) \;=\; n(n-1)\,(z^{n-2} - z^{n-1}) \qquad (0 < z < 1)$$

Most háromféleképpen is felírjuk Z várható értékét:

1. $Z = Y - X$ várható értéke az $f(x, y)$ sűrűségfüggvényből az $y - x$ függvénnyel így írható fel:

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \iint_{\mathrm{R}^2} (y-x)\cdot f(x,y)\, dxdy \;=\; \iint_{0<x<y<1} (y-x)\;\cdot\; n\,(n-1)\,(y-x)^{n-2}\, dx\, dy$$

$$=\; \int_0^1 \left(\int_0^y n\,(n-1)\,(y-x)^{n-1}\, dx \right) dy \;=\; \ldots \;=\; \frac{n-1}{n+1}$$

2. A várható érték a Z sűrűségfüggvényéből:

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} z\cdot r(z)\, dz \;=\; \int_0^1 z\cdot \big(n(n-1)\,(z^{n-2} - z^{n-1}) \big)\, dz \;=\; \ldots \;=\; \frac{n-1}{n+1}$$

3. A legegyszerűbb, ha a várható értéket a korábbról már ismert

$$\mathrm{E}(Y) \;=\; \frac{n}{n+1} \qquad \mathrm{E}(X) \;=\; \frac{1}{n+1}$$

tények alapján különbségként írjuk fel:

$$\mathrm{E}(Z) \;=\; \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X) \;=\; \frac{n}{n+1} - \frac{1}{n+1} \;=\; \frac{n-1}{n+1}$$

4.3. Szorzat várható értéke

Fontossága miatt külön megemlítjük az $X\,Y$ szorzat várható értékének a képletét.

Diszkrét esetben:

$$\mathrm{E}\,(X\,Y) = \sum_{(x,y)} x\,y \,\cdot\, p(x,y)$$

Folytonos esetben:

$$\mathrm{E}\,(X\,Y) = \iint_{\mathrm{R}^2} x\,y \,\cdot\, f(x,y)\;dx\,dy$$

4.4. Gyakorló feladatok

1. Tegyük fel, hogy az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása táblázattal megadva így fest:

y					
5	0.060	0.120	0.090	0.030	
4	0.080	0.160	0.120	0.040	
3	0.030	0.060	0.045	0.015	
2	0.020	0.040	0.030	0.010	
1	0.010	0.020	0.015	0.005	
	1	2	3	4	x

Határozza meg

(a) az XY szorzatának,
(b) az Y/X hányados,
(c) az X/Y hányados

a várható értékét!

2. Egy (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = x + y \qquad (x>0,\;\; y>0,\;\; x+y<1)$$

Határozza meg

(a) az XY szorzatának,
(b) az Y/X hányados,
(c) az X/Y hányados

a várható értékét!

3. Egy (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x,y) = 4x + 2y \qquad (x>0,\;\; y>0,\;\; x+y<1)$$

Határozza meg

(a) az XY szorzatának,
(b) az Y/X hányados,
(c) az X/Y hányados

a várható értékét!

5. NSZT a kísérleti eredmények függvényének az átlagára

5.1. Diszkrét eset (ismétlés)

Képzeljük el, hogy egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számpárok, jelölje

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2),\ \ldots,\ (X_N, Y_N)$$

Állítás: Ha kísérleti eredményeket egy $t(x, y))$ függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1, Y_1),\ t(X_2, Y_2),\ \ldots,\ t(X_N, Y_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X, Y)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx \mathrm{E}(\, t(X, Y)\,)$$

Vázlatos bizonyítás. *(Extra tananyag.)* Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit most indexezve soroluk fel:

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2), \ldots$$

A lehetséges értékek valószínűségeit is indexekkel látjuk el:

$$p_1,\ p_2, \ldots$$

Tehát minden i esetén p_i megadja az (x_i, y_i) számpár valószínűségét. Jelölje továbbá

$$N_1,\ N_2, \ldots$$

a lehetséges értékek gyakoriságait N kísérlet során. Tehát minden i esetén N_i azt mutatja, hogy az (x_i, y_i) számpár hányszor következik be az N kísérlet során. Tudjuk, hogy – nagy N esetén – minden i-re az N_i/N relatív gyakoriság közel van a p_i valószínűséghez. A

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N}$$

kifejezés számlálója N darab tagból áll. Közöttük a t függvény argumentumaként az (x_1, y_1) számpár N_1-szer, az (x_2, y_2) számpár N_2-ször, … fordul elő. Ezért a számláló értéke:

$$t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N) = N_1 \cdot t(x_1, y_1) + N_2 \cdot t(x_2, y_2) + \ldots$$

Az átlagot jelentő tört értéke:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} = \frac{N_1 \cdot t(x_1, y_1) + N_2 \cdot t(x_2, y_2) + \ldots}{N} =$$

$$= \frac{N_1}{N} \cdot t(x_1, y_1) + \frac{N_2}{N} \cdot t(x_2, y_2) + \ldots \approx p_1 \cdot t(x_1, y_1) + p_2 \cdot t(x_2, y_2) + \ldots = \mathrm{E}(\, t(X, Y)\,)$$

5.2. Folytonos eset

Képzeljük el, hogy egy (X, Y) kétdimenziós folytonos valószínűségi változóra sok kísérletet végzünk. A kísérletek számát jelölje N, a kísérleti eredményeket, melyek véletlen számpárok, jelölje

$$(X_1, Y_1),\ (X_2, Y_2),\ \ldots,\ (X_N, Y_N)$$

Állítás: Ha kísérleti eredményeket egy $t(x, y))$ folytonos függvénybe helyettesíthetjük, majd az így kapott

$$t(X_1, Y_1),\ t(X_2, Y_2),\ \ldots,\ t(X_N, Y_N)$$

értékeket átlagoljuk, akkor ez az átlag – nagy kísérletszám esetén – körülbelül a $t(X, Y)$ várható értékével egyenlő:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx \mathrm{E}(\, t(X, Y)\,)$$

Vázlatos bizonyítás *(Extra tananyag)*: Vegyük fel az x-tengelyen az x_i , $(i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ pontokat, az y-tengelyen az y_j , $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ pontokat úgy, hogy szomszédos x_i, x_{i+1} és y_j, y_{j+1} pontok távolsága, amit Δx_i -vel illetve Δy_j -vel jeölünk, kicsi legyen minden i-re és j-re. Az X valószínűségi változó megfigyelt értékét az $[x_i, x_{i+1})$ intervallumban kerekítsük le x_i-re, és a kapott értéket jelöljük X^*-gal:

$$X^* = x_i \quad \text{ha} \quad x_i \le X < x_{i+1}$$

Az Y valószínűségi változó megfigyelt értékét az $[y_j, y_{j+1})$ intervallumban kerekítsük le y_j-re, és a kapott értéket jelöljük Y^*-gal:

$$Y^* = Y_j \quad \text{ha} \quad y_j \le Y < y_{j+1}$$

Az (X^*, Y^*) diszkrét valószínűségi változó, melynek lehetséges értékei az (x_i, y_j) , $(i, j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ számpárok, és minden i és j esetén-re az (x_i, y_j) számpár valószínűsége:

$$\mathrm{P}(\ X^* = x_i \ \text{ és } \ Y^* = y_j) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)\, dx\, dy$$

$t(X^*, Y^*)$ várható értéke:

$$\mathrm{E}(\, t(X^*, Y^*)\,) = \sum_{(i,j)} t(x_i, y_j)\, \mathrm{P}(\ X^* = x_i \ \text{ és } \ Y^* = y_j) = \sum_{(i,j)} t(x_i, y_j) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)\, dx\, dy$$

Mivel X^* és X, illetve Y^* és Y csak kicsit térnek el egymástól, $t(X, Y)$ értéke is csak kicsit tér el $t(X^*, Y^*)$-tól, ezért a kísérleti eredmények átlagai is csak kicsit térnek el:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx \frac{t(X_1^*, Y_1^*) + t(X_2^*, Y_2^*) + \ldots + t(X_N^*, Y_N^*)}{N}$$

Mivel Δx_i minden i-re és Δy_j minden i-re és j-re kicsik, az alábbi közelítésekkel élhetünk:

$$\mathrm{P}(\ X^* = x_i \ \text{ és } \ Y^* = y_j) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)\, dx\, dy \approx f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i\, \Delta y_j \qquad (i, j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

$$\mathrm{E}(\, t(X^*, Y^*)\,) = \sum_{(i,j)} t(x_i, y_j) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{(i,j)} t(x_i, y_j)\, f(x_i, y_j) \cdot \Delta x_i\, \Delta y_j \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

Mindezt felhasználva kapjuk, hogy az (X, Y)-ra végzett kísérleti eredmények $t(x, y)$-ba való helyettesítésekor adódó értékeinek az átlaga közel van $t(X, Y)$ várható értékéhez:

$$\frac{t(X_1, Y_1) + t(X_2, Y_2) + \ldots + t(X_N, Y_N)}{N} \approx \frac{t(X_1^*, Y_1^*) + t(X_2^*, Y*_2) + \ldots + t(X_N^*, Y_N^*)}{N} \approx \mathrm{E}(\, t(X^*, Y^*)\,) \approx$$

$$\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t(x, y)\, f(x, y)\, dx\, dy = \mathrm{E}(\, t(X, Y)\,)$$

5.3. Gyakorló feladatok

1.

2.

6. Vetület- és feltételes eloszlások

6.1. Vetület eloszlások

Állítás: Ha a kétdimenziós (X, Y) valószűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor az X valószűségi változó $f_1(x)$ sűrűségfüggvénye integrálként áll elő $f(x, y)$-ből:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy$$

Hasonlóképpen az Y valószínűségi változó $f_2(x)$ sűrűségfüggvénye is integrálként áll elő $f(x, y)$-ből:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx$$

Diszkrét esetben az ezekkel analóg szabályokat összegzési szabályoknak hívtuk. Most joggal nevezhetük ezeket a szabályokat **integrálási szabályok**nak. **Vázlatos bizonyítás.** A vízszintes tengelyen felvett $[x, x + \Delta x]$ intervallum

egy sávot definiál a síkon:

$$S_{[x,x+\Delta x]} = \{(x, y) : x \in [x, x + \Delta x]\}$$

és az $X \in [x, x + \Delta x]$ esemény ekvivalens az $(X, Y) \in S_{[x,x+\Delta x]}$ eseménnyel. E tény alapján:

$$f_1(x) \approx \frac{\mathrm{P}\left(X \in [x, x + \Delta x]\right)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{P}\left((X, Y) \in S_{[x,x+\Delta x]}\right)}{\Delta x} =$$

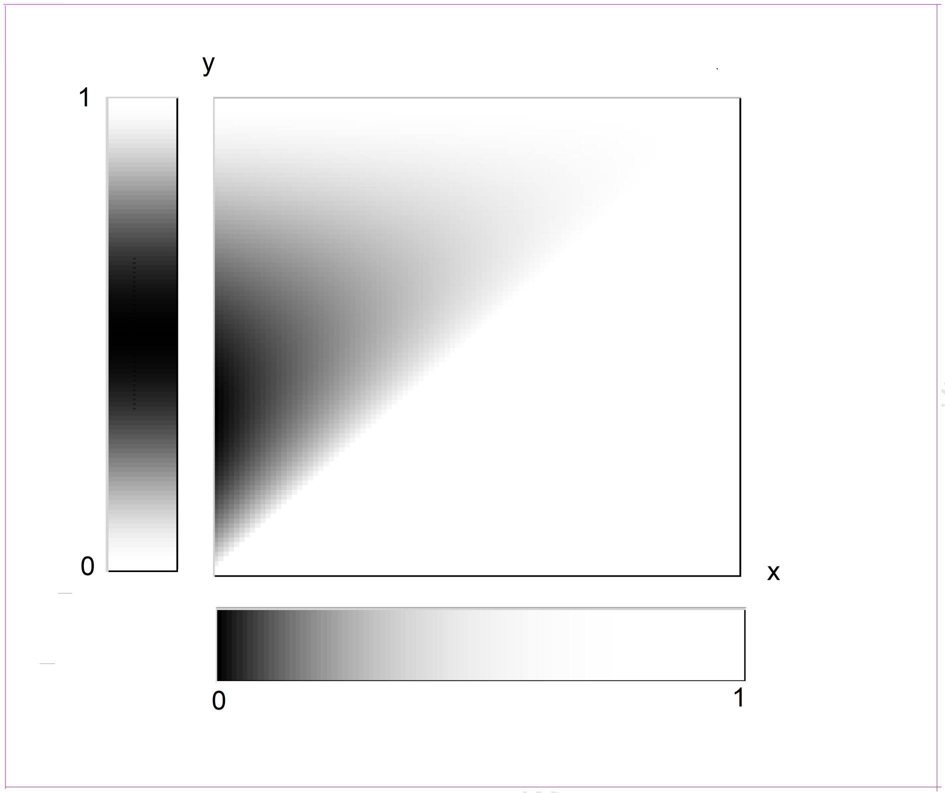
$$= \frac{\iint\limits_{S_{[x,x+\Delta x]}} f(x, y)\, dx\ dy}{\Delta x} = \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy \right)\ dx}{\Delta x} \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy$$

Ha a kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x, y)$, akkor – mint korábban már láttuk, az X valószínűségi változó $f_1(x)$ sűrűségfüggvénye integrálként áll elő $f(x, y)$-ből:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dy$$

Hasonlóképpen az Y valószínűségi változó $f_2(y)$ sűrűségfüggvénye is integrálként áll elő $f(x, y)$-ből:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\ dx$$



21. ábra. *2-dimenziós béta eloszlás és vetületei festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 5$, $i = 1$, $j = 3$

6.2. Feltételes sűrűségfüggvények

Amikor egy kétdimenziós (X, Y) valószínűségi változóval van dolgunk, előfordulhat, hogy X értékét megtudjuk: $X = x$, de a másik koordinátát, Y-t nem tudjuk: Y -t továbbra is valószínűségi változónak kell tekintenünk. Felmerül a kérdés: milyen eloszlással modellezzük Y -t az $X = x$ feltétel mellett? Belátjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét hányadosként kaphatjuk meg:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$

Hasonlóképpen, az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvénye:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

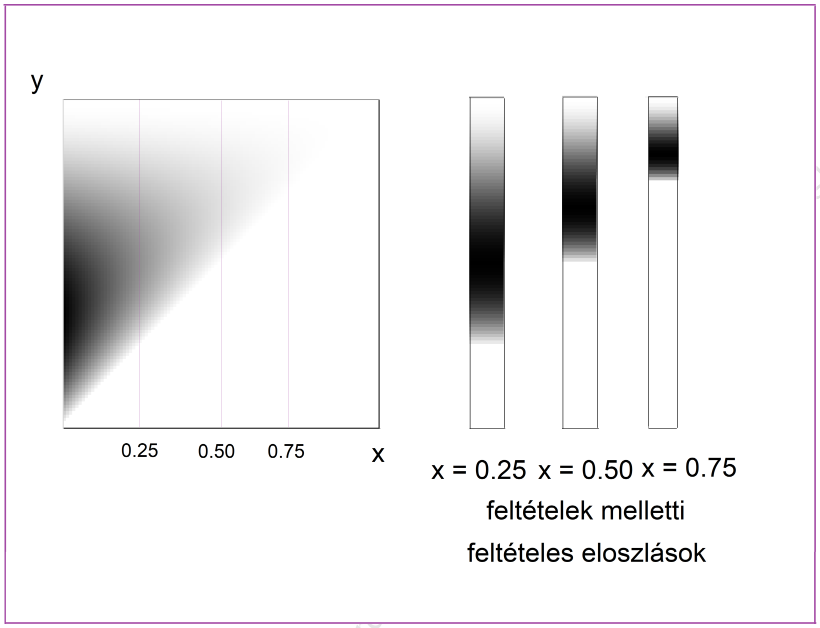
Vázlatos bizonyítás. A két formula közül az elsőt vezetjük le:

$$f_{2|1}(y|x) \approx \frac{\mathrm{P}(\ Y \in [y, y+\Delta y] \ \mid \ X = x\ )}{\Delta y} \approx$$

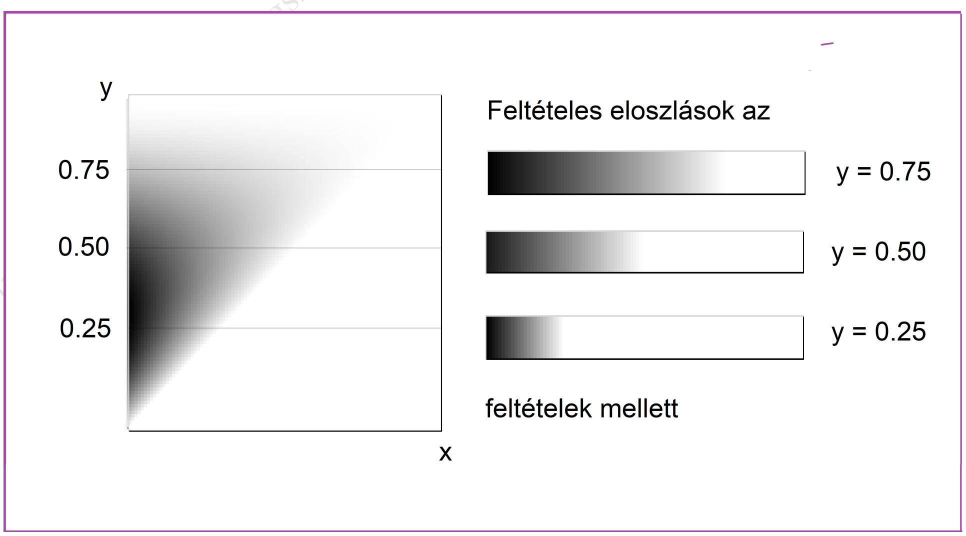
$$\approx \frac{\mathrm{P}(\ Y \ \in [y, y+\Delta y] \ \mid \ X \in [x, x+\Delta x]\ )}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{P}(\ X\in[x,x+\Delta x] \quad \text{és} \quad Y\in[y,y+\Delta y])}{\text{P}(X\in[x,x+\Delta x])}\right)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{P}(\ X\in[x,x+\Delta x] \quad \text{és} \quad Y\in[y,y+\Delta y]\ )}{\Delta x \ \ \Delta y}\right)}{\left(\frac{\text{P}(\ X\in[x,x+\Delta x]\ )}{\Delta x}\right)} \approx \frac{f(x,y)}{f_1(x)}$$



22. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás és az* $x = 0.25$*,* $x = 0.50$*,* $x = 0.75$ *feltételek melletti feltételes eloszlásai festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 5$*,* $i = 1$*,* $j = 3$



23. ábra. 2-*dimenziós béta eloszlás és az* $y = 0.25$*,* $y = 0.50$*,* $y = 0.75$ *feltételek melletti feltételes eloszlásai festékkel szemléltetve; paraméterek:* $n = 5$*,* $i = 1$*,* $j = 3$

Példa ($X = \mathbf{RND}_1 \cdot \mathbf{RND}_2,\ Y = \mathbf{RND}_1$): Válasszunk egy pontot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az Y pont. Ha Y -t már megválasztottuk, akkor 0 és Y és között válasszunk egy másik pontot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint, ez legyen az X pont. Ezek után X -ből és Y -ból rakjuk össze az (X, Y) pontot a síkon! Számítógéppel X és Y így állítható elő random számok segítségével:

$$Y = \mathrm{RND}_1, \qquad X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$$

Korábban megadtuk, illetve kiszámoltuk (X, Y), illetve X sűrűségfüggvényének a képletét. Most meghatározzuk Y feltételes sűrűségfüggvényeit az $X = x$ feltételek mellett.

Ha Y egyenletes eloszlást követ 0 és 1 között, akkor

$$f_2(y) \ = \ 1 \qquad (0 < y < 1)$$

Ha az $Y = y$ feltétel mellett X egyenletes eloszlást követ 0 és y között, akkor

$$f_{1|2}(x|y) \ = \ \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y)$$

Mint korábban meghatároztuk – az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

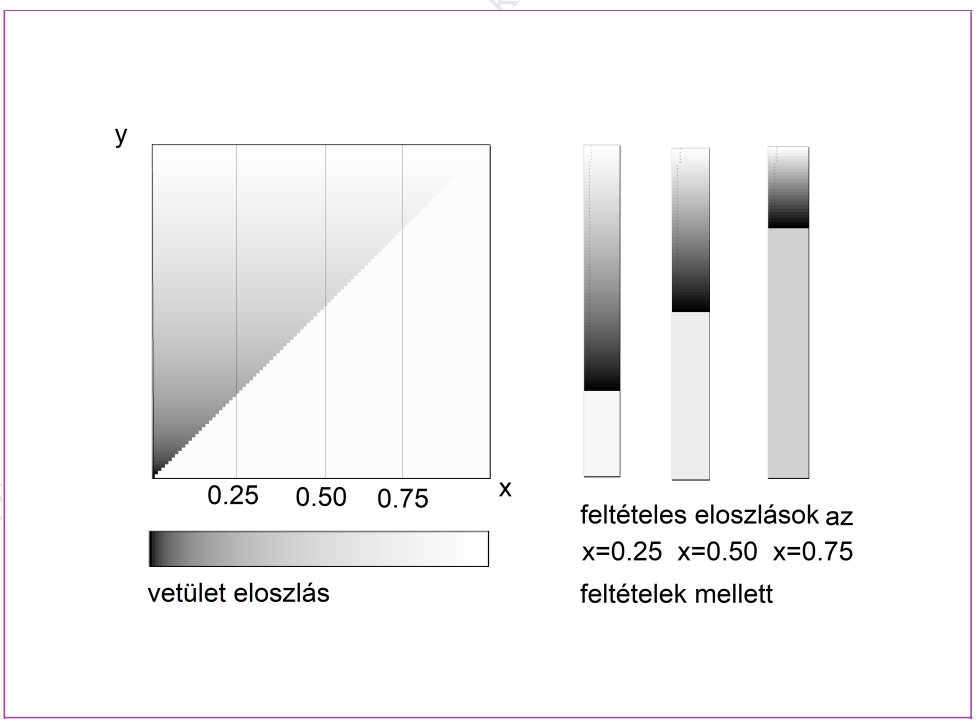
$$f(x, y) = \frac{1}{y} \qquad (0 < x < y < 1)$$

X (feltétel nélküli) sűrűségfüggvényét is kiszámítottuk:

$$f_1(x) = -\ln(x) \qquad (0 < x < 1)$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett a hányados szabállyal adódik:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \qquad (0 < x < y < 1)$$



24. ábra. (X, Y) *eloszlása,* X *eloszlása és* Y *feltételes eloszlásai az* $x = 0.25$*,* $x = 0.50$*,* $x = 0.75$ *feltételek mellett festékkel szemléltetve, ahol* $Y = RND_1,\ X = RND_1 \cdot RND_2$

6.3. Feltételes sűrűségfüggvények rendszere

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy az (első fejezetben tárgyalt)

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

szorzási szabály és az (előző pontban levezetett)

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

osztási szabály egyenértékű egymással. Hasonlósképpen az

$$f(x, y) = f_2(y) \cdot f_{1|2}(x|y)$$

szorzási szabály és az

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

osztási szabály egyenértékű egymással.

Ha minden x mellett tekintjük a $f_{2|1}(y|x)$ sűrűségfüggvényt, akkor sűrűségfüggvényeknek egy rendszerét kapjuk, amit az Y valószínűségi változó X -re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvény-rendszerének** nevezünk.

Ha minden y mellett tekintjük a $f_{1|2}(x|y)$ sűrűségfüggvényt, akkor sűrűségfüggvényeknek egy rendszerét kapjuk, amit az X valószínűségi változó Y -re vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvény-rendszerének** nevezünk.

Egy adott $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvényből, az

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\; dy$$

integrlási szabállyal meghatározhatjuk az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényt, majd pedig a

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

hányados szabállyal az $f_{2|1}(y|x)$ feltételes sürüségfüggvények rendszerét. Fordítva, az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényből és a a feltételes sürüségfüggvények $f_{2|1}(y|x)$ rendszeréből a

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_{2|1}(y|x)$$

szorzási szabállyal a mgkaphatjuk az $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvényt. Ezért *az $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény ismerete egyenértékű azzal, hogy ismerjük az $f_1(x)$ vetület-sűrűségfüggvényt és a a feltételes sürüségfüggvények $f_{2|1}(y|x)$ rendszerét*. Hasonlóképpen kiadódik az is, hogy a *az $f(x, y)$ kétdimenziós sűrűségfüggvény ismerete egyenértékű azzal, hogy ismerjük az $f_2(y)$ vetület-sűrűségfüggvényt és a a feltételes sürüségfüggvények $f_{1|2}(x|y)$ rendszerét*.

6.4. Sűrűségfüggvények keverése

A feltételes sűrűségfüggvényekkel kapcsolatos

$$f(x,y) = f_1(x)\ f_{2|1}(y|x)$$

szorzási szabály és a vetítésre vonatkozó

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dy$$

integrálási szabály kombinálásával adódik az alábbi formula:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\ f_{1|2}(x|y)\ dy$$

A koordináták szerepének felcserélése pedig a

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f_{2|1}(y|x)\ dx$$

formulát adja.

Ezek a formulák a korábban tanult

$$p_1(x) = \sum_y p_2(y)\ p_{1|2}(x|y)$$

$$p_2(y) = \sum_x p_1(x)\ p_{2|1}(y|x)$$

diszkrét formulák folytonos megfelelői. Ezért ezekre az integrál-formulákra hivatkozhatunk úgy is mint a **teljes valószínűség formulái kétdimenziós folytonos valószínűségi változókra**. A jobboldali integrál-kifejezéseket egyfajta **keverés**nek is felfoghajuk: például az

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\ f_{2|1}(y|x)\ dx$$

formula azt mutatja, hogy az $f_2(y)$ függvényértéket úgy kaphatjuk meg, hogy a az $f_{2|1}(y|x)$ függvényértékeket az $f_1(x)$ súlyfüggvény szerint keverjük. Tehát

- **az Y valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az X feltételes sűrűségfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az X sűrűségfüggvénye (eloszlása) szerint.**

Hasonlóképpen

- **az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye (eloszlása) nem más, mint az X feltételes sűrűségfüggvényeinek (feltételes eloszlásainak) keveréke az Y sűrűségfüggvénye (eloszlása) szerint.**

6.5. Feltételes eloszlásfüggvény

A feltételes sűrűségfüggvény integráljaként a feltételes eloszlásfüggvényt kapjuk:

$$F_{2|1}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(y|x)\ dy = P\left(Y < y \mid X = x\right)$$

illetve

$$F_{1|2}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{1|2}(x|y)\ dx = P\left(X < x \mid Y = y\right)$$

Megfordítva: a feltételes eloszlásfüggvény deriváltjaként a feltételes sűrűségfüggvényt kapjuk meg

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\partial F_{2|1}(y|x)}{\partial y}$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{\partial F_{1|2}(x|y)}{\partial x}$$

A feltételes eloszlásfüggvény jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül az

  $F_{2|1}(y|x)$ **-ed része kisebb** y **-nál**

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül az

  $F_{1|2}(x|y)$ **-ed része kisebb** x **-nél**

6.6. Feltételes valószínűség

Az $y_1 < Y < y_2$ esemény valószínűsége az $X = x$ feltétel mellett a feltételes sűrűségfüggvényből integrálással adódik:

$$\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ ) = \int_{y_1}^{y_2} f_{2|1}(y|x)\ dy$$

Hasonlóan adódik az $x_1 < Y < x_2$ esemény valószínűsége az $X = x$ feltétel mellett:

$$\mathrm{P}(\ x_1 < X < x_2 \mid Y = y\ ) = \int_{x_1}^{x_2} f_{1|2}(x|y)\ dx$$

Ugyanezeket a feltételes valószínűségeket a feltételes eloszlásfüggvényből különbségként is megkaphatjuk:

$$\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ ) = F_{2|1}(y_2|x) - F_{2|1}(y_1|x)$$

$$\mathrm{P}(\ x_1 < X < x_2 \mid Y = y\ ) = F_{1|2}(x_2|y) - F_{1|2}(x_1|y)$$

A feltételes valószínűség jelentése:

- Ha (y_1, y_2) egy tetszőleges intervallum az y tengelyen, (x_1, x_2) pedig egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül a

  $\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ )$ **-ed része esik az** (y_1, y_2) **intervallumba**

- Ha (x_1, x_2) egy tetszőleges intervallum az x tengelyen,, (y_1, y_2) pedig egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül a

  $\mathrm{P}(\ x_1 < X < x_2 \mid Y = y\ )$ **-ed része esik az** (x_1, x_2) **intervallumba**

Megjegyzés. A

$$\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ )$$

feltételes valószínűségben a feltétel valószínűsége nulla

$$\mathrm{P}(X = x\ ) = 0$$

Ezért a feltételes valószínűség elemi

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

formuláját nem lehet alkalmazni a $\mathrm{P}(\ y_1 < Y < y_2 \mid X = x\ )$ valószínűség definiálására.

6.7. Feltételes medián

Az

$$F_{2|1}(y|x) = \frac{1}{2}$$

egyenletet y-ra megoldva, azaz kifejezve az egyenletből y-t az x segítségével, megkapjuk Y mediánját az $X = x$ feltétel mellett.

Hasonlóképpen, az

$$F_{1|2}(x|y) = \frac{1}{2}$$

egyenletet x-re megoldva, azaz kifejezve az egyenletből x-et az y segítségével, megkapjuk X mediánját az $Y = y$ feltétel mellett.

A feltételes medián jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek körülbelül a

  fele kisebb, a fele nagyobb, mint az $X = x$ feltételhez tartozó medián

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek körülbelül a

  fele kisebb, a fele nagyobb, mint az $Y = y$ feltételhez tartozó medián

6.8. Feltételes várható érték

A feltételes várható érték nem más mint a feltételes eloszlás várható értéke:

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{2|1}(y|x)\ dy$$

illetve

$$\mathrm{E}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f_{1|2}(x|y)\ dx$$

A feltételes várható érték jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek az átlaga körülbelül az

$$\mathbf{E}(Y|X = x) \quad \textbf{feltételes várható értékkel egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek az átlaga körülbelül az

$$\mathbf{E}(X|Y = y) \quad \textbf{feltételes várható értékkel egyenlő}$$

6.9. Feltételes variancia

A feltételes variancia nem más mint a feltételes eloszlás varianciája:

$$\text{VAR}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\ y\ -\ \text{E}(Y|X = x)\ )^2\ f_{2|1}(y|x)\ dy\ =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2\ f_{2|1}(y|x)\ dy\right)\ -\ (\ \text{E}(Y|X = x)\ )^2$$

illetve

$$\text{VAR}(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\ x\ -\ \text{E}(X|Y = y)\ )^2\ f_{1|2}(x|y)\ dx\ =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ f_{1|2}(x|y)\ dx\right)\ -\ (\ \text{E}(X|Y = y)\ )^2$$

A feltételes variancia jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek a varianciája körülbelül az

$$\mathbf{VAR}(Y|X = x) \quad \textbf{feltételes varianciával egyenlő}$$

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek a varianciája körülbelül az

$$\mathbf{VAR}(X|Y = y) \quad \textbf{feltételes varianciával egyenlő}$$

6.10. Feltételes szórás

A feltételes szórás nem más mint a feltételes eloszlás szórása, vagyis a feltételes variancia négyzetgyöke:

$$\text{SD}(Y|X=x) = \sqrt{\text{VAR}(X|Y=y)} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (y - \text{E}(Y|X=x))^2 \; f_{2|1}(y|x)\, dy} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \; f_{2|1}(y|x)\, dy - (\text{E}(Y|X=x))^2}$$

illetve

$$\text{SD}(X|Y=y) = \sqrt{\text{VAR}(Y|X=x)} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \text{E}(X|Y=y))^2 \; f_{1|2}(x|y)\, dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f_{1|2}(x|y)\, dx - (\text{E}(X|Y=y))^2}$$

A feltételes szórás jelentése:

- Ha (x_1, x_2) egy picike intervallum az x szám körül, és az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az X értéke x_1 és x_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó Y értékeknek a szórása körülbelül az

  SD$(Y|X=x)$ **feltételes szórással egyenlő**

- Ha (y_1, y_2) egy picike intervallum az y szám körül, és az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változóra annyira sok kísérletet végzünk, hogy még az olyan kísérletekből is sok adódik, melyekre az Y értéke y_1 és y_2 közé esik, akkor az ilyen kísérletekhez tartozó X értékeknek a szórása körülbelül az

  SD$(X|Y=y)$ **feltételes szórással egyenlő**

Megjegyzés: A feltételes várható érték fogalmát már a jegyzet első részében értelmeztük diszkrét eloszlásokra – integrálok helyett szummákkal. A feltételes variancia, feltételes szórás is nyilvánvalóan értelmezhető diszkrét eloszlásokra is: a fenti formulákban az integrálok a megfelelő formulákban értelemszerűn szummákkal cserélődnek fel.

6.11. Egy számolós minta példa ($X = \textbf{RND}_1 \cdot \textbf{RND}_2,\ Y = \textbf{RND}_1$)

Feladat: Válasszunk egy Y számot 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint. Ha $Y = y$, akkor 0 és y között választunk egy X számot ugyancsak egyeletes eloszlás szerint. És most meghatározzuk a feltétel nélküli- és feltételes sűrűség- és eloszlásfüggvényeket és a feltételes eloszolások jellemzőit!

Megoldás:

- Y sűrűségfüggvényét Y definíciója alapján felírhatjuk:

  $$f(y) = 1 \quad \text{ha} \qquad 0 < y < 1$$

- A most következő képletek $0 < y < 1$ mellett értendők.

  Az $Y = y$ feltétel mellett

  X feltételes sűrűségfüggvényét X definíciója alapján fel tudjuk írni:

$$f_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{1}{y} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < y$$

  X feltételes eloszlásfüggvénye nyilván:

$$F_{1|2}(x|y) \;=\; \frac{x}{y} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < y$$

  X feltételes mediánja és feltételes várható értéke nyilván:

$$\frac{y}{2}$$

  a feltételes variancia, illetve szórás pedig:

$$\frac{y^2}{12} \qquad \text{illetve} \qquad \frac{y}{\sqrt{12}}$$

- (X, Y) sűrűségfüggvényét a szorzási szabály alapján kapjuk meg:

$$f(x,y) \;=\; f_2(y)\; f_{1|2}(x|y) \;=\; 1\,\frac{1}{y} \;=\; \frac{1}{y} \qquad \text{ha} \quad 0 < x < y < 1$$

- X sűrűségfüggvényét y szerinti integrálással kapjuk meg. $0 < x < 1$ esetén ez adódik :

$$f_1(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\; dy \;=\; \int_x^1 \frac{1}{y}\; dy \;=\; -\ln(x)$$

- A most következő képletek $0 < x < 1$ mellett értendők.

  Y-nak az $X = x$ feltétel melletti

  feltételes sűrűségfüggvényét hányadosként kapjuk:

$$f_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \;=\; \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \;=\; -\frac{1}{y\;\ln(x)} \qquad \text{ha} \quad x < y < 1$$

  A feltételes eloszlásfüggvényt integrálással kapjuk meg:

$$F_{2|1}(y|x) \;=\; \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(y|x)\; dy \;=$$

$$= \int_x^y \left(-\frac{1}{y\;\ln(x)}\right)\; dy \;=\; \frac{1}{-\ln(x)} \int_x^y \frac{1}{y}\; dy \;=\; \frac{1}{-\ln(x)}\;\left(\ln(y) - \ln(x)\right) \;=$$

$$= 1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \qquad \text{ha} \quad x < y < 1$$

  A feltételes medián az

$$F_{2|1}(y|x) \;=\; 1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \;=\; \frac{1}{2}$$

egyenlet y-re való megoldásából adódik:

$$\begin{aligned}\frac{\ln(y)}{\ln(x)} &= \frac{1}{2}\\ \ln(y) &= \frac{1}{2}\ln(x)\\ \ln(y) &= \ln(\sqrt{x})\\ y &= \sqrt{x}\end{aligned}$$

Tehát a feltételes medián $\sqrt{x}$.

A feltételes várható érték:

$$\mathrm{E}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\ f_{2|1}(y|x)\ dy\ =$$

$$= \int_x^1 y\ \left(-\frac{1}{y\ \ln(x)}\right)\ dy\ =\ \int_x^1 \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ dy\ =\ \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ (1-x)\ =$$

$$= \frac{x-1}{\ln(x)}$$

A feltételes második momentum:

$$\mathrm{E}(Y^2|X=x)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} y^2\ f_{2|1}(y|x)\ dy\ =$$

$$= \int_x^1 y^2\ \left(-\frac{1}{y\ \ln(x)}\right)\ dy\ =\ \int_x^1 y\ \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ dy\ =\ \left(-\frac{1}{\ln(x)}\right)\ \frac{1-x^2}{2}\ =$$

$$= \frac{x^2-1}{2\ln(x)}$$

A feltételes varianciát a

$$\mathrm{VAR}(Y|X=x)\ =\ \mathrm{E}(Y^2|X=x) - (\ \mathrm{E}(Y|X=x)\ )^2$$

képlet alapján fel lehet írni, amiből gyökvönással a feltételes szórás képletét is megkaphatjuk:

$$\mathrm{VAR}(Y|X=y)\ =\ \frac{x^2-1}{2\ln(x)} - \left(\ \frac{x-1}{\ln(x)}\ \right)^2$$

$$\mathrm{SD}(X|Y=x)\ =\ \sqrt{\frac{x^2-1}{2\ln(x)} - \left(\ \frac{x-1}{\ln(x)}\ \right)^2}$$

6.12. Gyakorló feladatok

1. Tekintjük a $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$ pontok által meghatározhott paralelogrammán vett egyenletes eloszlást. Határozza meg

   - az $X=x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
     (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
     (b) a feltételes mediánját,
     (c) a feltételes várható értékét,
     (d) a feltételes második momentumát,

(e) a feltételes varianciáját
(f) a feltételes szórását!

- az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
  (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
  (b) a feltételes mediánját,
  (c) a feltételes várható értékét,
  (d) a feltételes második momentumát,
  (e) a feltételes varianciáját
  (f) a feltételes szórását!

2. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{1}{2y}$. Határozza meg

- az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
  (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
  (b) a feltételes mediánját,
  (c) a feltételes várható értékét,
  (d) a feltételes második momentumát,
  (e) a feltételes varianciáját
  (f) a feltételes szórását!
- az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
  (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
  (b) a feltételes mediánját,
  (c) a feltételes várható értékét,
  (d) a feltételes második momentumát,
  (e) a feltételes varianciáját
  (f) a feltételes szórását!

3. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = \frac{2x}{y}$. Határozza meg

- az $X = x$ feltétel mellett Y feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
  (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
  (b) a feltételes mediánját,
  (c) a feltételes várható értékét,
  (d) a feltételes második momentumát,
  (e) a feltételes varianciáját
  (f) a feltételes szórását!
- az $Y = y$ feltétel mellett X feltételes sűrűségfüggvényét, majd pedig
  (a) a feltételes eloszlásfüggvényét,
  (b) a feltételes mediánját,
  (c) a feltételes várható értékét,
  (d) a feltételes második momentumát,
  (e) a feltételes varianciáját
  (f) a feltételes szórását!

7. Kétdimenziós folytonos valószínűségi változó szimulációja

7.1. A módszer

Általános eset: Tegyük fel, hogy adott a síkon egy folytonos eloszlás, és nekünk az a feladatunk, hogy a kalkulátor vagy a számítógép által előállított 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számokra építve definiáljunk olyan kétdimenziós valószínűségi változót, mely a megadott eloszlást követi.

A megadott eloszlásnak az x -tengelyre vetett vetületének az eloszlásfüggvényét jelöljük $F_1(x)$ -szel, inverzét pedig $F^{-1}(u)$ -val. (Ha $F_1(x)$ nem nő szigorúan monoton módon az egész számegyenesen, és ebből kifolyólag nem invertálható, viszont $F_1(x)$ egy (A, B) intervallumon szigorúan monoton nő, akkor $F(x)$ -nek erre az intervallumra való megszorítása már invertálható. Ilyenkor $F^{-1}(u)$ ennek a megszorításnak az inverze.) Az inverz függvény formuláját úgy kapjuk meg, hogy az

$$u = F_1(x)$$

egyenletből kifejezzük x -t u segítségével:

$$x = F_1^{-1}(u)$$

A vízszintes számegyenes x pontjához tartozó függőleges egyenes mentén vett feltételes eloszlás $F_{2|1}(y|x)$ eloszlásfüggvényének inverzét jelöljük $F_{2|1}^{-1}(v|x)$ -szel. Az inverz függvény $F_{2|1}^{-1}(v|x)$ formuláját úgy kapjuk meg, hogy az

$$v = F_{2|1}(y|x)$$

egyenletet megoldjuk y -ra, vagyis az egyenletből y -t kifejezzük x -szel és v -vel:

$$y = F_{2|1}^{-1}(v|x)$$

Ebben a kifejezésben v a változó és x a paraméter.

Ezek után X definíciója:

$$X = F_1^{-1}(\text{RND}_1)$$

Nyilvánvaló, hogy X eloszlásfüggvénye $F_1(x)$. Ezek után Y -t így definiáljuk:

$$Y = F_{2|1}^{-1}(\text{RND}_2|X)$$

Nyilvánvaló, hogy Y feltételes eloszlásfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett $F_{2|1}(y|x)$. E két tény azt adja, hogy (X, Y) a kívánt eloszlást követi.

Speciális eset: Ha $f(x, y)$ direktszorzat alakú, azaz $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, akkor X -et és Y -t egymástól függetlenül definiálhatjuk az $F_1(x)$ és $F_2(y)$ eloszlásfüggvények inverzeivel:

$$X = F_1^{-1}(\text{RND}_1) \qquad\qquad Y = F_2^{-1}(\text{RND}_2)$$

1. Példa: Általános eset. Tekintsük az

$$f(x, y) = 3x\,\mathrm{e}^{-x(3+y)} \qquad (x, y \geq 0)$$

sűrűségfüggvényű eloszlást a síkon. Ilyen eloszlást követő kétdimenziós valószínűségi változót az alábkbiak szerint állíthatunk elő.

A definiálandó X valószínűségi változó sűrűségfüggvényét y szerinti integrálással kapjuk síkbeli sűrűségfüggvényből:

$$f_1(x) = \int_0^\infty 3x\,\mathrm{e}^{-x(3+y)}\,dy = 3\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-xy}\,dy = 3\,\mathrm{e}^{-3x} \cdot \left[-\mathrm{e}^{-xy}\right]_0^\infty = 3\,\mathrm{e}^{-3x} \qquad (x \geq 0)$$

Látjuk, hogy 3-paraméterű exponenciális eloszlásról van szó. Az eloszlásfüggvény:

$$F_1(x) = \int_0^x 3\,\mathrm{e}^{-3x}\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-3x} \qquad (x \geq 0)$$

Az

$$u = F_1(x) \qquad \text{azaz} \qquad u = 1 - \mathrm{e}^{-3x}$$

egyenletből az $F_1(x)$ eloszlásfüggvény $x = F_1^{-1}(u)$ inverze:

$$x = -\frac{\ln(1-u)}{3}$$

Tehát az X valószínűségi változó szimulációja:

$$X = -\frac{\ln(1-\mathrm{RND}_1)}{3}$$

A definiálandó Y valószínűségi változó feltételes sűsrűségfüggvénye az $X = x$ ($x \geq 0$) feltétel mellett:

$$f_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{3x\,\mathrm{e}^{-x(3+y)}}{3\,\mathrm{e}^{-3x}} = x\,\mathrm{e}^{-xy} \qquad (y \geq 0)$$

Látjuk, hogy x-paraméterű exponenciális eloszlás jött ki. A feltételes eloszlásfüggvény:

$$F_{2|1}(y|x) = \int_0^y x\,\mathrm{e}^{-xy}\,dy = 1 - \mathrm{e}^{-xy} \qquad (y \geq 0)$$

Rögzített x mellett a

$$v = F_{2|1}(y|x) \qquad \text{azaz} \qquad v = 1 - \mathrm{e}^{-xy}$$

egyenletből az $F_{2|1}(y|x)$ feltételes eloszlásfüggvény $y = F_{2|1}^{-1}(v|x)$ inverze:

$$y = -\frac{\ln(1-v)}{x}$$

Tehát az Y valószínűségi változó szimulációja:

$$Y = -\frac{\ln(1-\mathrm{RND}_2)}{X}$$

Tehát a szimuláció két lépésben történik. Először X -et állítjuk elő egy RND_1 véletlen szám segítségével:

$$X = -\frac{\ln(1-\mathrm{RND}_1)}{-3}$$

majd utána X és egy másik RND_2 véletlen szám segítségével Y -t:

$$Y = -\frac{\ln(1-\mathrm{RND}_2)}{X}$$

2. Példa: Speciális eset. Tekintsük az

$$f(x,y) = 2\,\mathrm{e}^{-2x} \cdot 3\,\mathrm{e}^{-3y} \qquad (x, y \geq 0)$$

kétdimenziós sűrűségfüggvényt, mely direktszorzat alakú. Nyilván

$$f_1(x) = 2\,\mathrm{e}^{-2x} \quad (x \geq 0) \qquad\qquad f_2(y) = 3\,\mathrm{e}^{-3x} \quad (y \geq 0)$$

X eloszlásfüggvénye:

$$F_1(x) = \int_0^x 2\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-2x} \qquad (x \geq 0)$$

Az $F_1(x)$ eloszlásfüggvény $x = F_1^{-1}(u)$ inverze:

$$x = -\frac{\ln(1-u)}{2}$$

Tehát az X valószínűségi változó szimulációja:

$$X = -\frac{\ln(1-\mathrm{RND}_1)}{2}$$

Az $F_2(y)$ eloszlásfüggvény:

$$F_2(y) = \int_0^x 3\,\mathrm{e}^{-3y}\,dy = 1 - \mathrm{e}^{-3y} \qquad (x \geq 0)$$

Az $F_2(y)$ eloszlásfüggvény $y = F_2^{-1}(v)$ inverze:

$$y = -\frac{\ln(1-v)}{3}$$

Tehát az Y valószínűségi változó szimulációja:

$$Y = -\frac{\ln(1-\mathrm{RND}_2)}{3}$$

7.2. Gyakorló feladatok

1. Kalkulátor vagy a számítógép által előállított 0 és 1 között egyenletes eloszlású véletlen számokra építve definiáljon olyan kétdimenziós valószínűségi változót, mely az alább megadott eloszlásokat követi. Az eloszlásokat a sűrűségfüggvényükkel adjuk meg:

   (a) $f(x,y) = 4xy \quad (0 < x, y < 1)$

   (b) $f(x,y) = x + y \quad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ x + y < 1)$

   (c) $f(x,y) = 4x + 2y \quad (x > 0,\ \ y > 0,\ \ x + y < 1)$

8. Transzformáció síkról síkra

8.1. Példa: szorzunk és osztunk

8.1.1. A transzformáció definíciója

Tekintsük azt a transzformációt, mely az (x, y) síkról az (u, v) síkra képez az

$$u = x \cdot y$$
$$v = \frac{y}{x}$$

képlet-pár szerint. Mivel a az elkövetkező oldalakon csak 0 és 1 közötti x és y értékekkel fogunk dolgozni, a transzformációt csak a

$$0 < x \le 1$$
$$0 < y \le 1$$

négyzeten fogjuk tekinteni. A négyzet meg van fosztva a tengelyekre eső oldalaitól.

Ha a transzformációt definiáló két egyenletből kifejezzük x -et és y -t az u és a v segítségével, akkor az inverz transzformáció képlet-párjához jutunk:

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}$$
$$y = \sqrt{u \cdot v}$$

8.1.2. Pontok és szakaszok transzformációja

1. Három pont egymás felett

Először három pontot veszünk fel az $x = \frac{1}{2}$ egyenletű függőleges egyenesen. Ezek transzformáltjait is megadjuk:

x	y		$u = x \cdot y$	$v = y/x$
$1/2$	$1/4$		$1/8$	$1/2$
$1/2$	$1/2$		$1/4$	1
$1/2$	$3/4$		$3/8$	$3/2$

2. Függőleges szakasz

Euztán az

$$x = \frac{1}{2}$$

egyenlettel és az

$$1/4 \le y \le 3/4$$

egyenlőtlenségekkel megadott függőleges szakasz transzformáltját határozzuk meg. A transzformációval adódó alakzat egyenletét az

$$\sqrt{\frac{u}{v}} = \frac{1}{2}$$

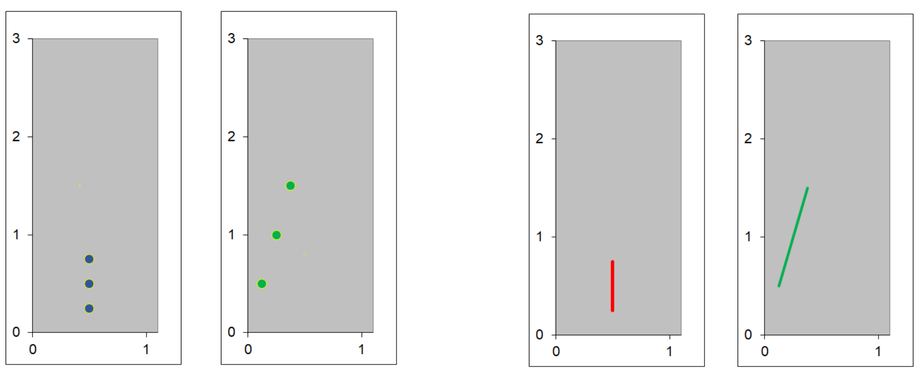
egyenletből és a

$$1/4 \le \sqrt{u \cdot v} \le 3/4$$

egyenlőtlenségekből kapjuk. A megoldás:

$$v = 4 \cdot u \qquad \frac{1}{8} \le u \le \frac{3}{8}$$

Látjuk, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy szakasz, mely az origón átmenő 4 meredekségű egyenesen fekszik.



25. ábra. *Három pont egymás felett és transzformáltjaik* – *Függőleges szakasz és transzformáltja*

3. Három pont egymás mellett

Most az $y = \frac{1}{2}$ egyenletű vízszintes egyenesen veszünk fel három pontot. Ezek transzformáltjait is megadjuk:

x	y		$u = x \cdot y$	$v = y/x$
$1/4$	$1/2$		$1/8$	2
$1/2$	$1/2$		$1/4$	1
$3/4$	$1/2$		$3/8$	$2/3$

4. Vízszintes szakasz

Ezek után az

$$y = \frac{1}{2}$$

egyenlettel és az

$$1/4 \le x \le 3/4$$

egyenlőtlenségekkel megadott vízszintes szakasz transzformáltjának egyenletét határozzuk meg a

$$\sqrt{u \cdot v} = \frac{1}{2}$$

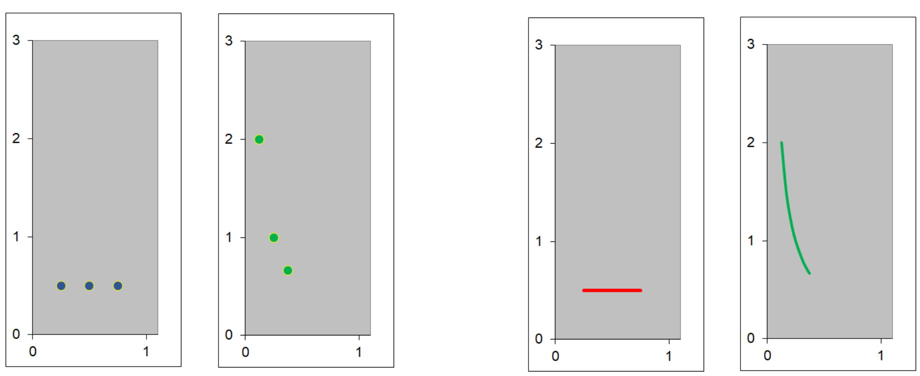
egyenletből és az

$$1/4 \le \sqrt{\frac{u}{v}} \le 3/4$$

egyenlőtlenségekből kapjuk. A megoldás:

$$v = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{u} \qquad \frac{1}{8} \le u \le \frac{3}{8}$$

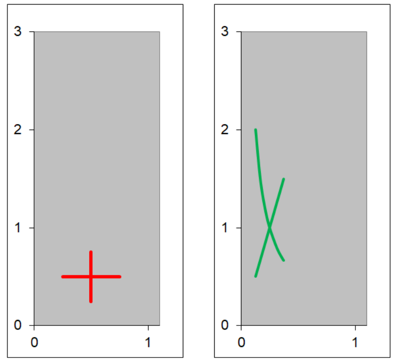
Látjuk, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy hipebola-darab, mely a $v = 1/u$ egyenletű "standard" hiperbolából függőleges irányú zsugorítással keletkezik.



26. ábra. *Három pont egymás mellett és transzformáltjaik – Vízszintes szakasz és transzformáltja*

5. "Plusz jel"

Ha a most vizsgált függőleges és vízszintes szakaszokból egy "plusz jel"-et rakunk össze, akkor láthatjuk, hogy a plusz jel transzformáltja egy erősen torzult plusz jel:



27. ábra. *"Plusz jel" és transzformáltja*

6. Vízszintes szakasz általánosan

Legyünk bátrabbak! Ha c tetszőleges konstans 0 és 1 között, akkor az

$$y = c$$

egyenlet és a

$$0 < x \le 1$$

egyenlőtlenségek egy vízszintes szakaszt definiálnak a négyzetben. A szakasz transzformáltjának az egyenletét a

$$\sqrt{u \cdot v} = c$$

egyenletből és a

$$0 < \sqrt{\frac{u}{v}} \le 1$$

egyenlőtlenségekből kapjuk. A megoldás:

$$v = c^2 \cdot \frac{1}{u} \qquad 0 < u \le c$$

A képletekből kiolvasható, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) síkon egy hipebola-darab, mely a $v = 1/u$ egyenletű "standard" hiperbolából függőleges irányú zsugorítással keletkezik. A hiperbola-darab bal széle felszalad a v tengelyt közelítve végtelen magasra szalad fel, a jobboldali végpontja pedig a (c, c) pont

7. Függőleges szakasz általánosan

Hasonlóképpen, ha d tetszőleges konstans 0 és 1 között, akkor az

$$x = d$$

egyenlet és a

$$0 < y \le 1$$

egyenlőtlenségek egy függőleges szakaszt definiálnak a négyzetben. A szakasz transzformáltjának az egyenletét a

$$\sqrt{\frac{u}{v}} = d$$

egyenletből és a

$$0 \leq \sqrt{u \cdot v} \leq 1$$

egyenlőtlenségekből kapjuk. A megoldás:

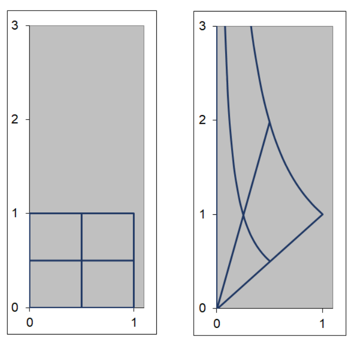
$$v = \frac{1}{d^2} \cdot u \qquad 0 \leq u \leq d$$

A képletekből kiolvasható, hogy a transzformációval kapott alakzat az (u, v) -síkon egy szakasz azon az egyenesen, mely átmegy az origón, és meredeksége az 1 -nél nagyobb $1/d^2$ érték. A szakasz baloldali végpontja az origó, a jobboldali végpontja pedig a standard hiperbolán lévő $(\, d \, , \, 1/d \,)$ pont.

8.1.3. A négyzet "vitorlá"-ba transzformálódik

Az előbb mondottakból (remélhetőleg) világos, hogy a következő ábrán látható

- a függőleges és vízszintes szakaszokból álló rács transzformáltja úgy néz ki, ahogy azt az az ábra mutatja,
- a transzformáció értékkészlete pedig az a "vitorla" alakú alakzat az az (u, v) -síkon, melyet a tengelyek, az 1 -meredekségű egyenes és a standard hiperbola határol.



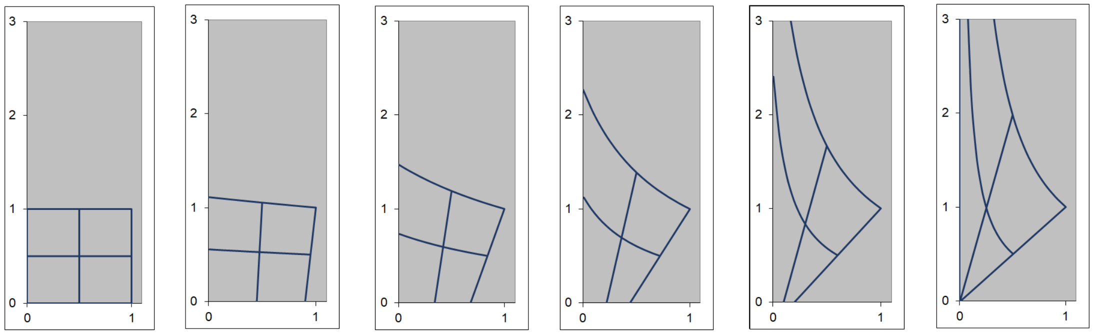
28. ábra. *Függőleges és vízszintes szakaszokból álló rács és transzformáltja – A négyzetből "vitorla" lett*

Abból a szempontból, ami számunkra az ilyen transzformciókkal kapcsolatben fontos, egyáltalán nincs szükség az alábbi ábrán látható kép-sorozatra. Mégis – a transzformáció fizikai megvalósításának az elképzelésében – segíthet a következő ábrán látható képek sorozata:

- Kiindulunk a négyzetből és benne felvett rácsból.
- A négyzet jobb alsó sarkát szép finoman húzzuk az origó felé, a bal felső sarkát pedig egyre vadabbul toljuk felfelé.
- A jobb alsó sarkot behúzzuk az origóba, a bal felső sarkot pedig toljuk, toljuk a függőleges tengelyen a végtelen felé.
- A leírt időben folyonos deformáció határértékeként kapjuk a legutolsó ábrát, ami megfelel a mi

$$u = x \cdot y$$
$$v = \frac{y}{x}$$

transzformációnknak.



29. ábra. *A transzformáció megvalósítása öt lépésben*

1. Megjegyzés: Természetesen sok féle módon végre lehet hajtani olyan időben folytonos deformációt, ami a mi transzformációnkat valósítja meg. Nem titok, hogyan született az alábbi kép-sorozat. Íme a képlet:

$$u = x \cdot [\,(1 - t) + t \cdot y\,]$$

$$v = \frac{y}{[\,(1 - t) + t \cdot x\,]}$$

ahol a t paraméter az "idő" szerepét tölti be $(0 \leq t \leq 1)$. Tessék ellenőrizni, hogy $t = 0$ esetén a

$$u = x$$

$$v = y$$

képlet-pár a "helyben maradás"-t jelenti, $t = 1$ esetén pedig a mi

$$u = x \cdot y$$

$$v = \frac{y}{x}$$

transzformációnkat adja. Az ábrán látható hat kép a

$$t = 0.00\,, \qquad 0.10\,,\ ;\ \ ; 0.32\,, \qquad 0.56\,, \qquad 0.80\,, \qquad 1$$

értékekkel készült.

2. Megjegyzés: Adott, fix t értékek mellett szükségünk lesz a következő fejezetben az

$$u = x \cdot [\,(1 - t) + t \cdot y\,]$$

$$v = \frac{y}{[\,(1 - t) + t \cdot x\,]}$$

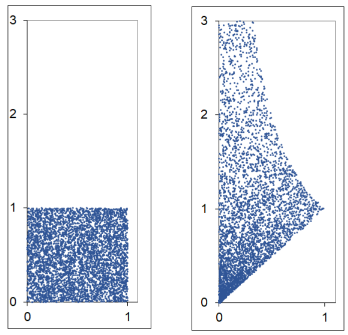
transzformáció inverzére, aminek képlet-párját úgy kapjuk meg, hogy a két egyenletből x -et és y -t kifejezzük u és v segítségével. A számolástól megkíméljük a Kedves Olvasót, íme az eredmény:

$$x = \frac{-(s/v + s \cdot t) + \sqrt{(s/v + s \cdot t)^2 + 4 \cdot t^2 \cdot u/v}}{2 \cdot t^2}$$

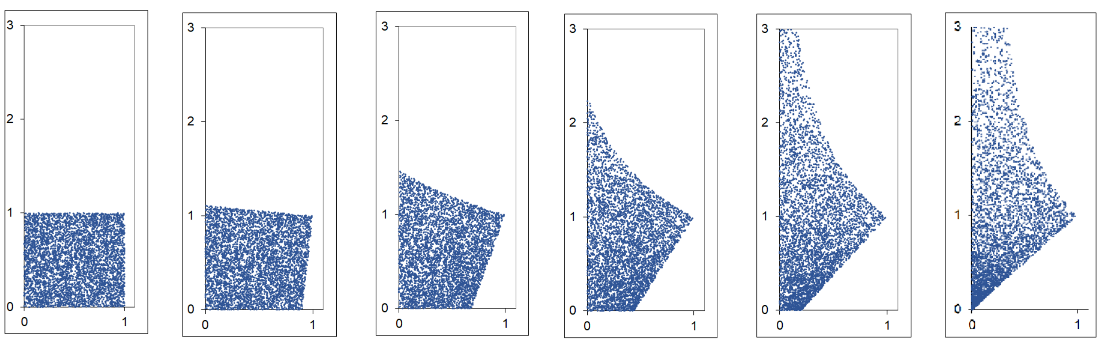
$$y = \frac{(s \cdot t \cdot v - s) + \sqrt{(s \cdot t \cdot v - s)^2 + 4 \cdot t \cdot (s^2 + t \cdot u) \cdot v}}{2 \cdot t}$$

8.1.4. Pontfelhők transzformációja

1. Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja

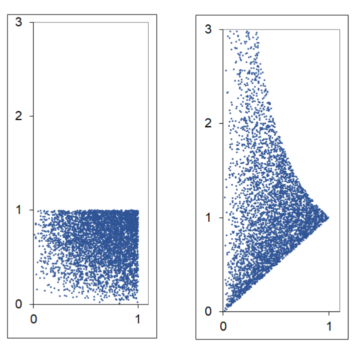


30. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja*

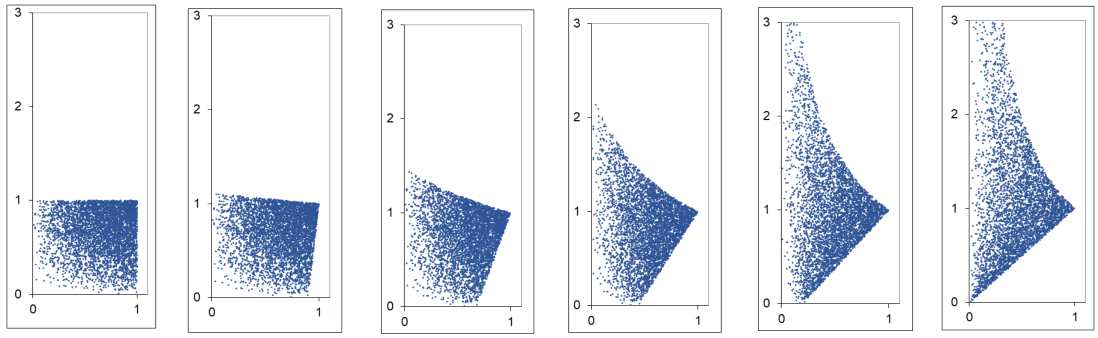


31. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja öt lépésben*

2. Nem-egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja



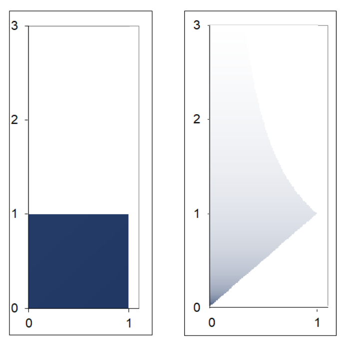
32. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényt követő pontfelhő transzformációja*



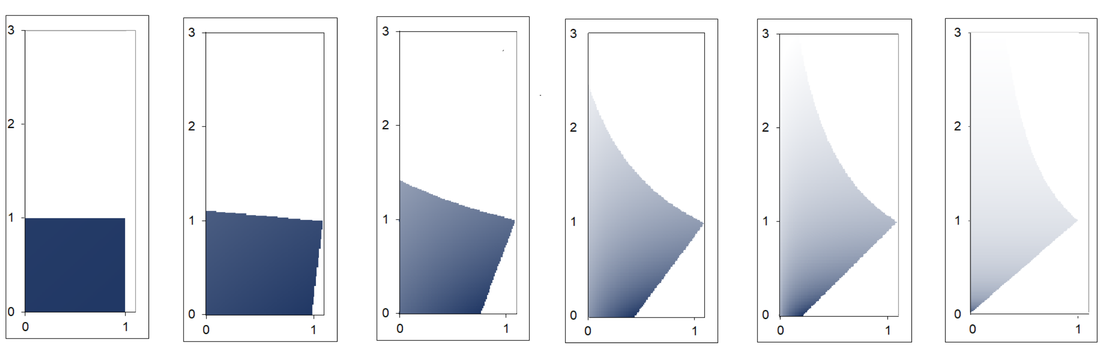
33. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényt követő pontfelhő transzformációja öt lépésben*

8.1.5. Eloszlások transzformációja

1. Egyenletes eloszlás transzformációja

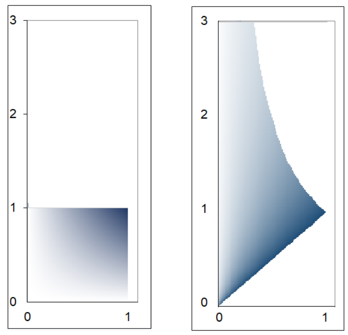


34. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja*

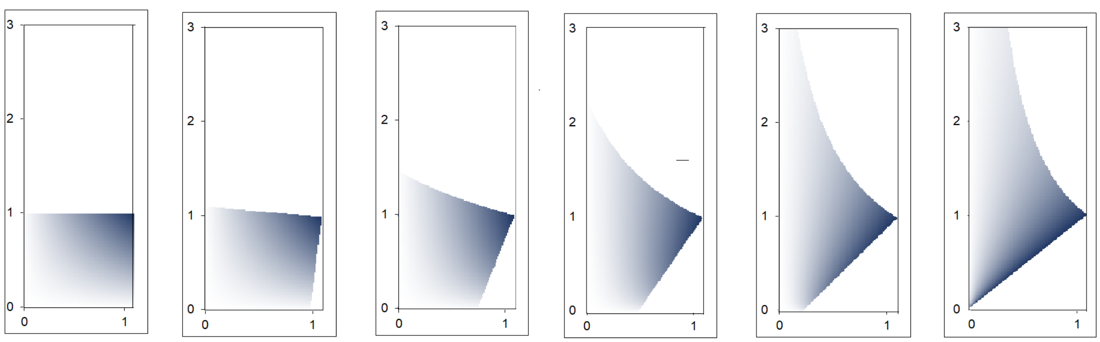


35. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja öt lépésben*

2. Nem-egyenletes eloszlás transzformációja



36. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*



37. ábra. *Az* $f(x,y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja öt lépésben*

8.2. Jacobi mátrix

Tekintsünk egy kölcsönösen egyértelmű t transzformációt az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra, mely az alábbi két kétváltozós koordiánata függvénnyel van megadva:

$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

Az inverz transzformációt t^{-1} jelöli, ennek koordiánata függvényei:

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

Az inverz transzformáció **Jacobi mátrix**a fontos szerepet játszik abban a formulában, melyet alább megadunk. Definíciója:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

8.3. Sűrűségfüggvények közötti kapcsolat

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(x, y)$ sűrűségfüggvényű eloszlást a t transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

$$s(u,v) = f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \quad \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \right|$$

Vázlatos bizonyítás. Tekintsünk egy (x, y) pontot az (x, y) -síkon, mely a t transzformációnál (u, v) pontnak felel meg az (u, v) -síkon. Vegyünk fel egy kis A halmazt az (x, y) pont körül, mely a t transzformációnál egy B halmaznak felel meg az (u, v) pont körül. Mint ismeretes

$$\frac{A \ \textit{területe}}{B \ \textit{területe}} \approx \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \right|$$

Ezt felhasználva

$$s(u,v) \ \approx \ \frac{\mathrm{P}(\ (U,V) \in B\ )}{B \ \textit{területe}} \ = \ \frac{\mathrm{P}(\ (X,Y) \in A\ )}{A \ \textit{területe}} \ \frac{A \ \textit{területe}}{B \ \textit{területe}} \ \approx \ f(x,y) \quad \left| \det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) \right|$$

8.4. Gyakorló feladatok

1. Az (x, y) -sík egységnégyzetén vett egyenletes eloszlást transzformáljuk az $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ transzformációval az (u, v) -síkra.
   (a) Határozza meg az egységnégyzet képét!
   (b) Határozza meg a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!
2. Az (x, y) -sík egységnégyzetén tekintjük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x, y) = 4xy$. Az eloszlást az (u, v) -síkra transzformáljuk az $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ transzformációval. Határozza meg a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

9. Lineáris transzformáció síkról síkra

9.1. Mátrixszal való szorzás

Tekintsük a

$$u = a_{11}x + a_{12}y$$
$$v = a_{21}x + a_{22}y$$

képletekkel definiált, azaz – mátrixokkal felírva – a

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

képlettel definiált lineáris transzformációt, mely az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra képez. Bevezetve a

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jelöléseket, a transzformáció formálisan így is írható:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Az inverz transzformáció képlete:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$$

ahol $\mathbf{A}^{-1}$ az $\mathbf{A}$ mátrix inverze.

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvényű eloszlást a lineáris transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

$$s(\mathbf{u}) = f(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}) \ \left|\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\right|$$

A képletben a $\left|\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\right|$ szorzófaktor az inverzmátrix determinánsának abszolút értékét jelenti.

9.2. Mátrixszal való szorzás és eltolás

Tekintsük most a

$$u = a_{11}x + a_{12}y + b_1$$
$$v = a_{21}x + a_{22}y + b_2$$

képlettel definiált lineáris transzformációt, mely az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra képez. Bevezetve a

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

jelölést, a transzformáció formálisan így is írható:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Az inverz transzformáció képlete:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{b})$$

Ha az (x, y) -síkon tekintett $f(\mathbf{x})$ sűrűségfüggvényű eloszlást a lineáris transzformációval az (u, v) -síkra transzformáljuk, akkor az új eloszlás sűrűségfüggvénye így fejezhető ki a régivel:

$$s(\mathbf{u}) = f(\ \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{u} - \mathbf{b})\ )\ \left|\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right)\right|$$

9.3. Gyakorló feladatok

1. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned} u &= 2x + 3y \\ v &= x + 2y \end{aligned}$$

   lineáris transzformációval.

   (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!

   (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!

   (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

2. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned} u &= 2x + 5y \\ v &= x + 2y \end{aligned}$$

   lineáris transzformációval.

   (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!

   (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!

   (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

3. A síkbeli standard normális eloszlást transzformáljuk az

$$\begin{aligned} u &= 2x + 6y + 10 \\ v &= x + 2y - 5 \end{aligned}$$

   lineáris transzformációval.

   (a) Határozza meg a Jacobi mátrixot!

   (b) Számolja ki a Jacobi determinánst!

   (c) Írja fel a kapott eloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

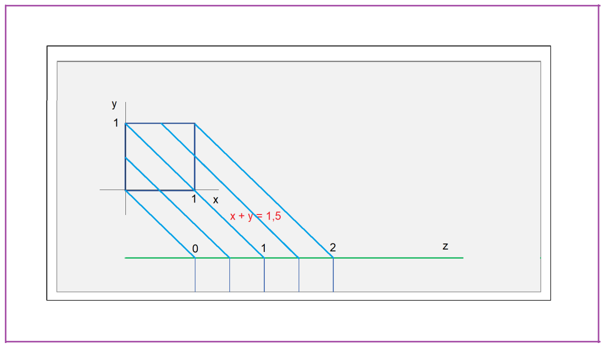
10. Transzformáció síkról egyenesre

Szöveg jön ide majd

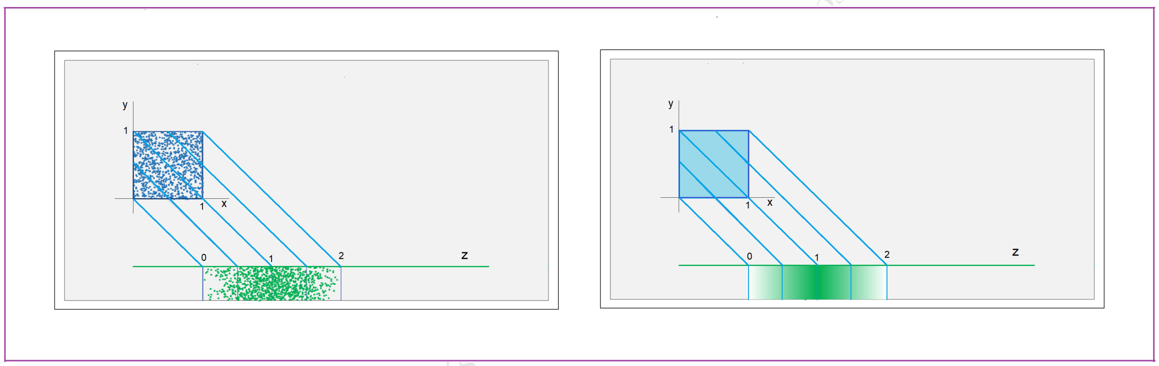
10.1. Példák

A következő 4 oldalon vannak a példák.

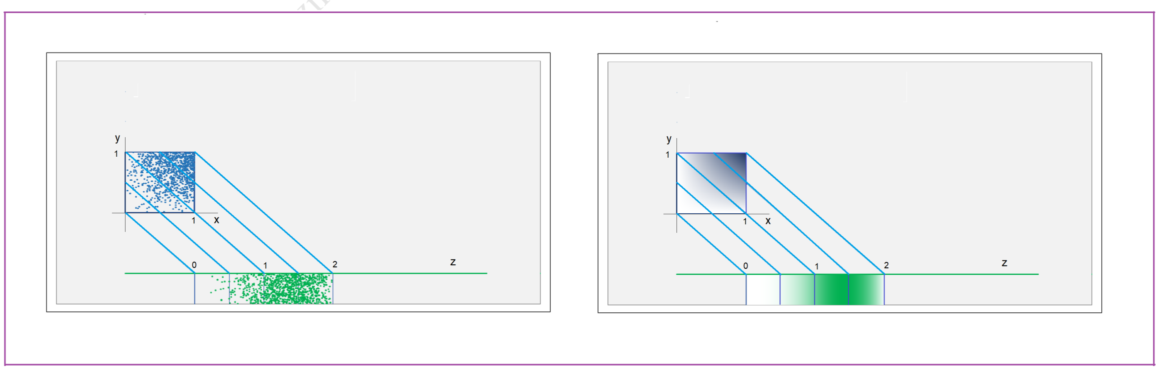
10.1.1. Transzformációk a $z = x + y$ összeg függvénnyel



38. ábra. *Transzformáció az egység-négyzetről a* $z = x + y$ *összeg függvénnyel*

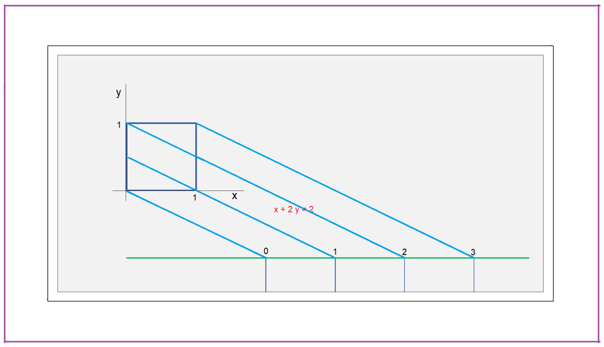


39. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja*

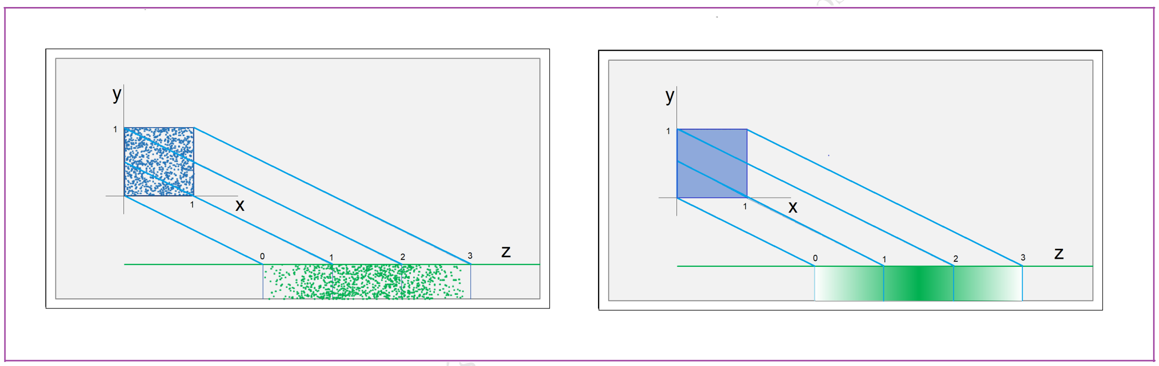


40. ábra. *Az* $f(x, y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*

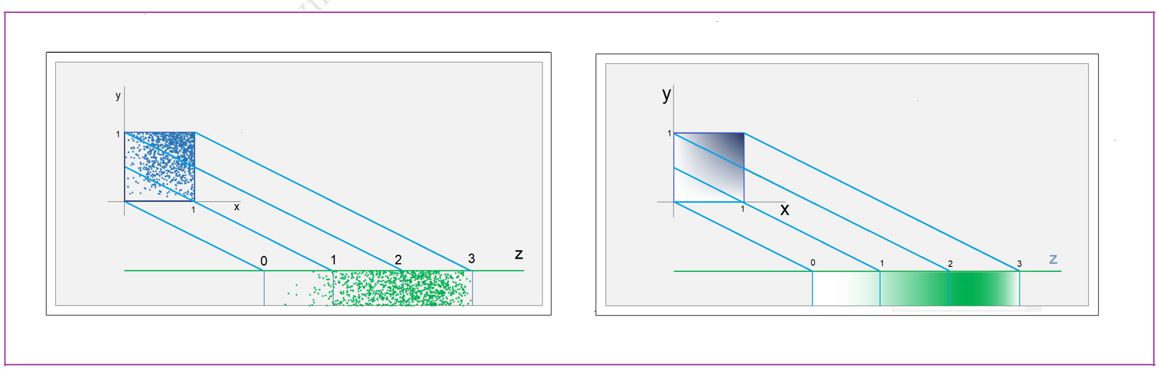
10.1.2. Transzformációk a $z = x + 2 \cdot y$ lineáris függvénnyel



41. ábra. *Transzformáció az egység-négyzetről a* $z = x + 2 \cdot y$ *lineáris függvénnyel*

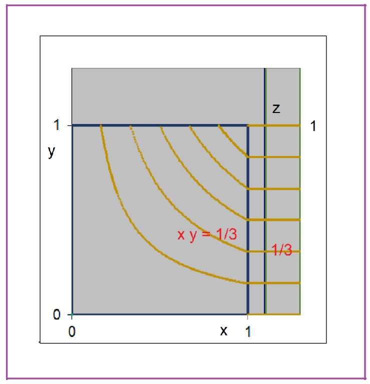


42. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja*

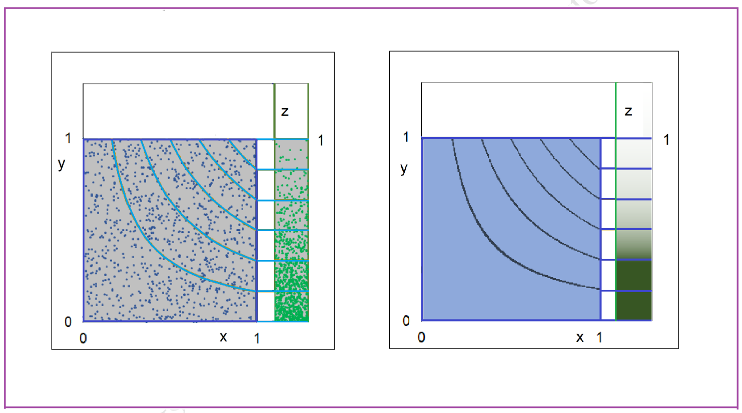


43. ábra. *Az* $f(x, y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*

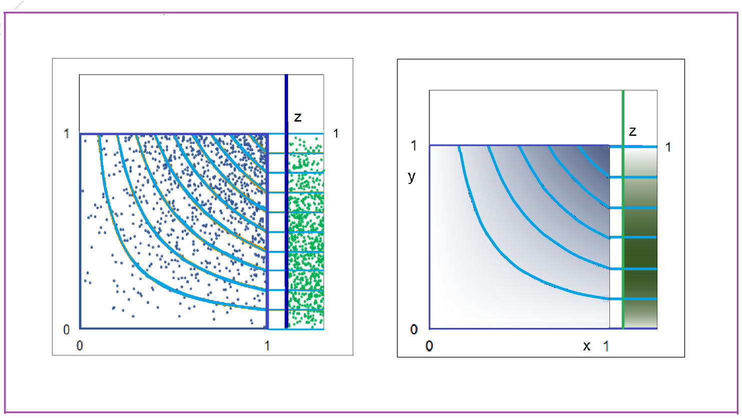
10.1.3. Transzformációk a $z = x \cdot y$ szorzat függvénnyel



44. ábra. *Transzformáció az egység-négyzetről a* $z = x \cdot y$ *szorzat függvénnyel*

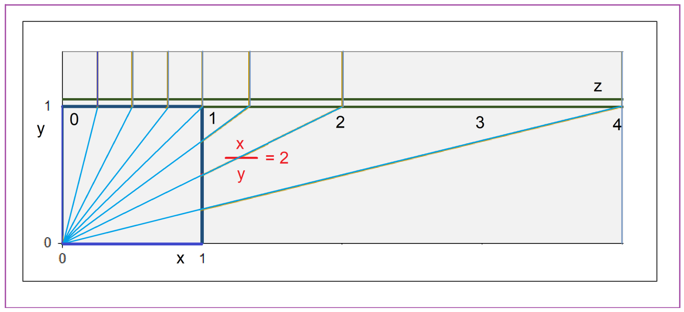


45. ábra. *Egyenletes eloszlású pontfelhő transzformációja*

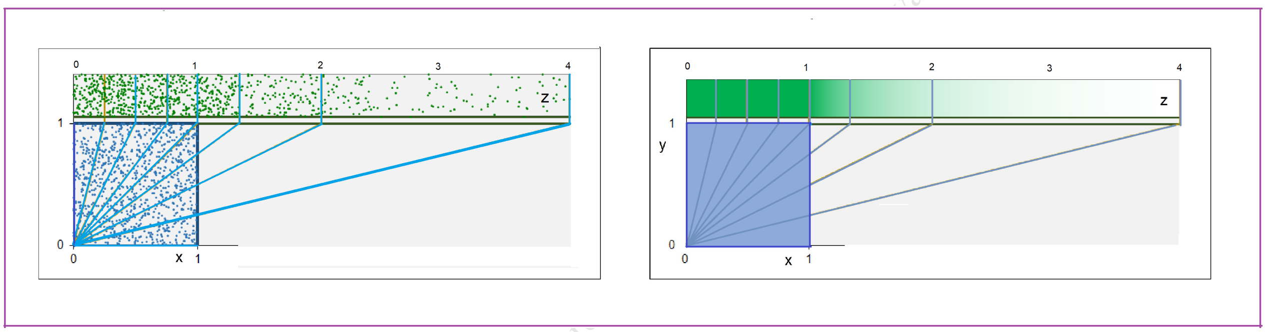


46. ábra. *Az* $f(x, y) = 4\,x\,y$ *sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*

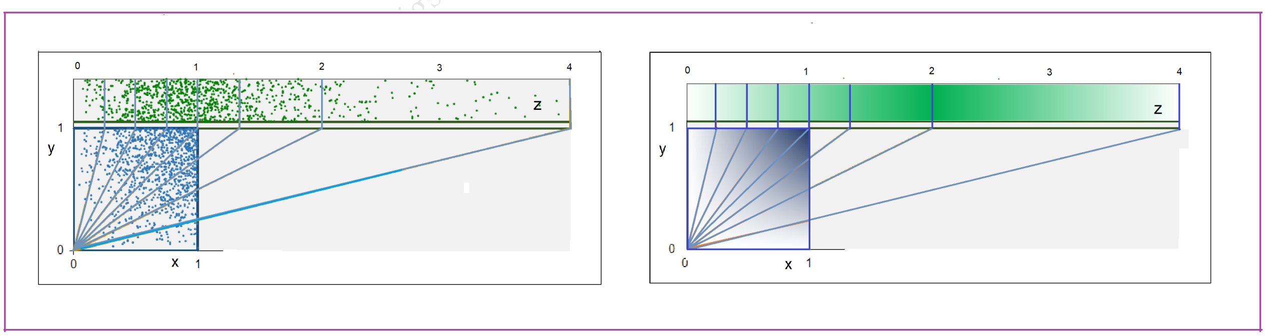
10.1.4. Transzformációk a $z = x/y$ hányados függvénnyel



47. ábra. *Transzformáció az egység-négyzetről a $z = x/y$ hányados függvénnyel*



48. ábra. *Egyenletes eloszlás transzformációja*



49. ábra. *Az $f(x, y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja*

10.2. Általános eset

Tekintsünk egy (X, Y) folytonos kétdimenziós valószínűségi változót. Jelöljük a sűrűségfüggvényét $f(x, y)$-nal. Legyen $z = t(x, y)$ egy folytonosan differenciálható kétváltozós függvény, mely a síkról a számegyenesre képez: az (x, y) számpárhoz hozzárendeli azt a z számot, melyet a $z = t(x, y)$ képlet definiál. Ha az X és Y valószínűségi változók értékeit behelyettesítjük a $t(x, y)$ függvénybe, akkor egy új Z valószínűségi változót kapunk, melyet t(X,Y) -nal jelölünk. A Z, vagyis a t(X,Y) valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelöljük $R(z)$-vel, sűrűségfüggvényét $r(z)$-vel.

Állítás:

$$R(z) = \iint_{A_z} f(x, y)\, dx\; dy$$

ahol az A_z halmaz a $(-\infty, z)$ intervallum ősképe a $z = t(x, y)$ transzformációval kapcsolatban:

$$A_z = \{(x, y) :\; t(x, y) < z)\}$$

Bizonyítás. A $Z < z$ esemény ekvivalens az $(X, Y) \in A_z$ eseménnyel, így

$$R(z) = \mathrm{P}(Z < z) = \mathrm{P}(\ (X, Y) \in A_z) = \iint_{A_z} f(x, y)\, dx\; dy$$

A kapott $R(z)$ függvényt z szerint deriválva a sűrűségfüggvényt kapjuk:

$$r(z) = R'(z)$$

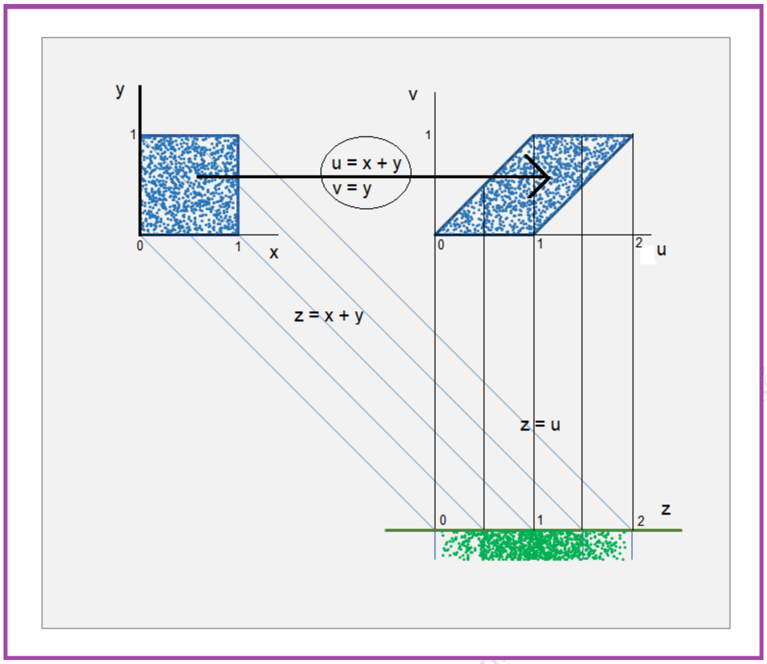
10.3. Összeg sűrűségfüggvénye két lépésben

10.3.1. Ábrák

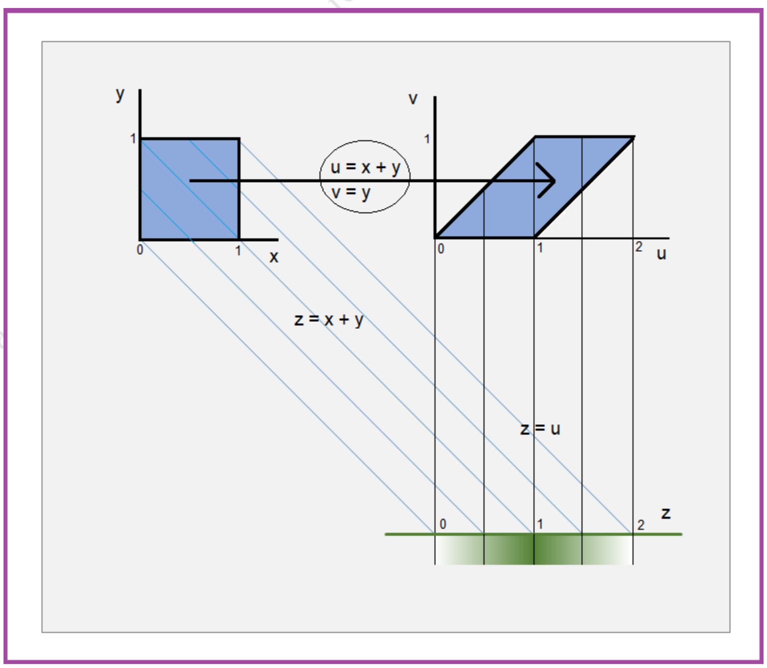
Tessék nézegetni, tanulmányozgatni a következő három oldalon lévő ábra-párokat! Mindhárom oldalon

- a felső ábra kísérleti eredményeket ábrázol pontfelhőkkel,
- az alsó ábra elméleti eloszlásokat ábrázol festékkel.

1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben

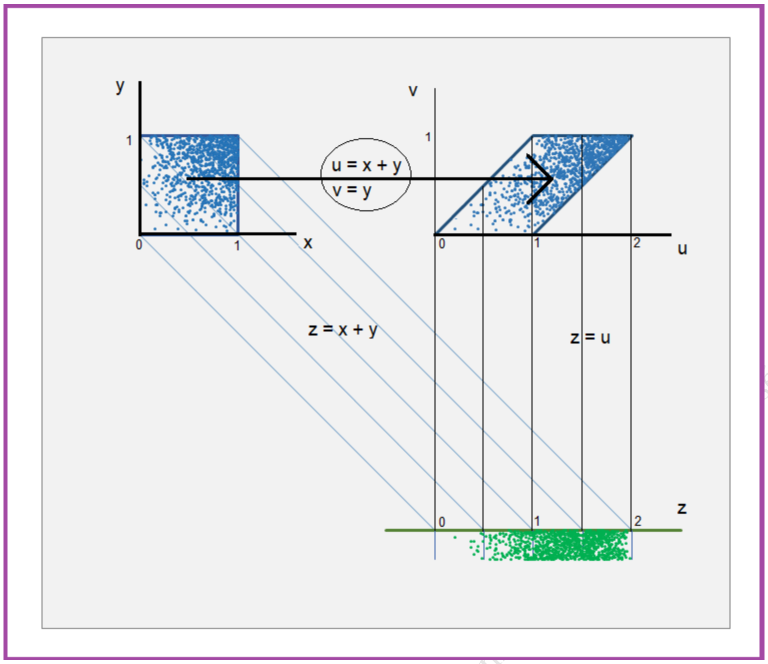


50. ábra. *Pontfelhő transzformációja két lépésben*

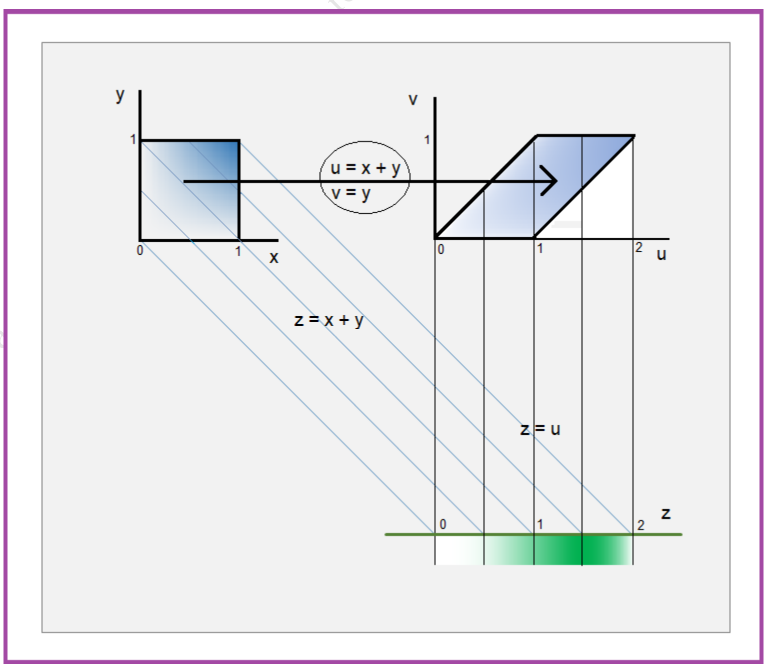


51. ábra. *Festék eloszlás transzformációja két lépésben*

2. Az $f(x, y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben

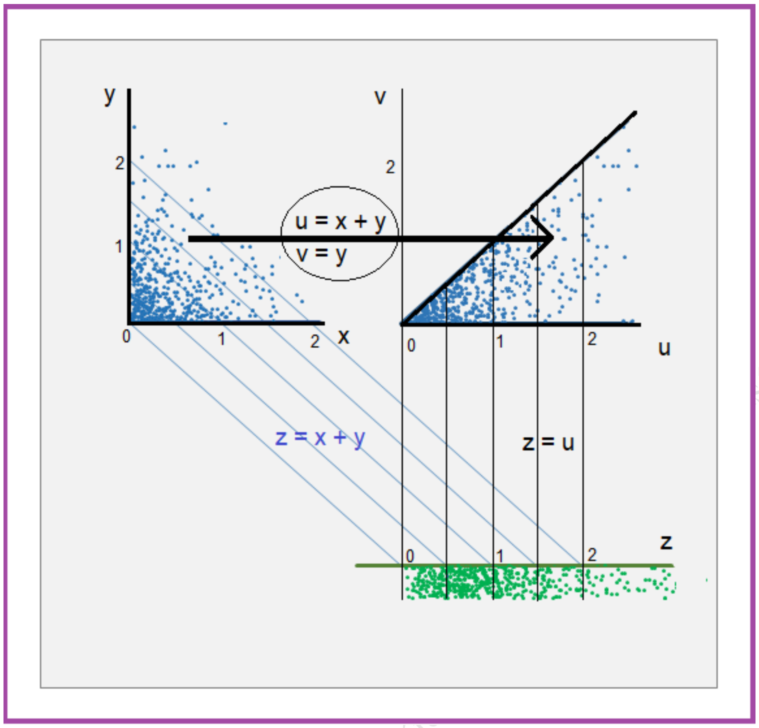


52. ábra. *Pontfelhő transzformációja két lépésben*

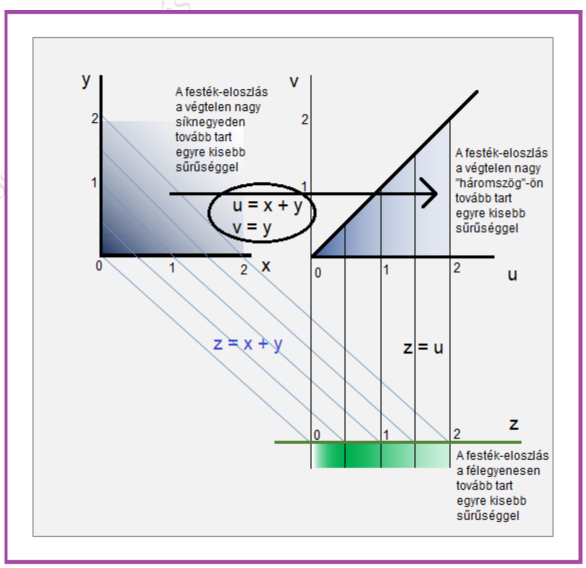


53. ábra. *Festék eloszlás transzformációja két lépésben*

3. Exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben



54. ábra. *Pontfelhő transzformációja két lépésben*



55. ábra. *Festék eloszlás transzformációja két lépésben*

10.3.2. Képletek

Mielőtt ezt a részt elolvassa, érdemes átnézni az 1. részből a "Súlyfüggvény (eloszlás) transzformációja kétdimenzióból egydimenzióba" című fejezet "Összeg súlyfüggvénye" című alfejezetét, mert igen erős az analógia a diszkrét és folytonos esetekről szóló szabályok között:

- mint tanultuk, diszkrét esetben az összeg $r(z)$ súlyfüggvényének meghatározásához összegezni kellett a síkbeli $p(x,y)$ súlyfüggvény értékeit az $x+y=z$ egyenletű egyenes mentén,
- mint látni fogjuk, folytonos esetben az összeg $r(z)$ sűsrűségfüggvényének meghatározásához integrálni kell a síkbeli $f(x,y)$ sűrűségfüggvény értékeit az $x+y=z$ egyenletű egyenes mentén.

Állítás. Tegyük fel, hogy az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f(x,y)$. X és Y összegét jelöljük Z -vel: $Z=X+Y$. Ekkor Z sűrűségfüggvénye kétféleképpen is kiszámolható $f(x,y)$ -ból:

$$r(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(z-v,v)\;dv$$

$$r(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u,z-u)\;du$$

1. Megjegyzés. Adott z esetén a $(z-v,v)$, illetve az $(u,z-u)$ pontok az $x+y=z$ egyenletű egyenest futják be, ezért mindkét formula azt fejezi ki, hogy $r(z)$ -t úgy kapjuk meg $f(x,y)$ -ból, hogy az értékeit az $x+y=z$ egyenletű egyenes mentén integráljuk.

2. Megjegyzés. Természetesen az integrál kiszámításánál az integritási tartományból elhagyatók az olyan részek, ahol az integandus 0 -val egyenlő. Ezért ha az $f(x,y)$ sűrűségfüggvény az S tartományon kívül nulla, akkor egy adott z érték esetén a $(-\infty,\infty)$ integritási tartomány

- az első integrálban az $A_z=\{v:(z-v,v)\in S\}$ halmazzal helyettesíthető:

$$r(z)=\int_{A_z} f(z-v,v)\;dv$$

- a második integrálban a $B_z=\{u:(u,z-u)\in S\}$ halmazzal helyettesíthető:

$$r(z)=\int_{B_z} f(u,z-u)\;du$$

Az első formula vázlatos bizonyítása. A $z=x+y$ leképezést több lépésben hajtjuk végre. Először tekintjük az (x,y) -síkról az (u,v) -síkra ható

$$\begin{array}{ccccc} u & = & x & + & y \\ v & = & & & y \end{array}$$

lineáris leképezést, majd az (u,v) -síkról vetítünk a vízszintes tengelyre. A vízszintes tengelyt általában u -tengelynek szoktunk nevezni, de most z tengelynek is nevezzük. (Egy tengelynek lehet több neve, jele is!) A síkról síkra való transzformáció a vetítéssel és az átnevezéssel együtt a $z=x+y$ leképezést adja.

Az (x,y) -síkról az (u,v) -síkra ható lineáris transzfromáció inverze:

$$\begin{array}{ccccc} x & = & u & - & v \\ y & = & & & v \end{array}$$

Ennek Jacobi mátrixa:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A Jacobi determináns nyilván 1 -gyel egyenlő. Ezért

$$s(u,v) \ = \ f\,(\ u-v\ ,v\ )\ \cdot\ 1 \ = \ f\,(\ u-v\ ,v\ )$$

Ezek után a vízszintes tengelyre való vetítéssel ezt kapjuk:

$$s_1(u) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} s(u,v)\ dv = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\ u-v\ ,v\ )\ dv$$

Most u helyett z -t írunk, $s_1(u)$ helyett pedig $r(z)$ -t, és megkapjuk a fenti formulák közül az elsőt:

$$r(z) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\ z-v\ ,v\ )\ dv$$

A második formula vázlatos bizonyítása. A $z = x + y$ leképezést most is több lépésben hajtjuk végre, de egy kicsit másképpen. Először tekintjük az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható

$$\begin{array}{ccccc} u & = & x & & \\ v & = & x & + & y \end{array}$$

lineáris leképezést, majd az (u, v) -síkról vetítünk a függőleges tengelyre. A függőleges tengelyt általában v -tengelynek szoktunk nevezni, de most z tengelynek is nevezzük. A síkról síkra való transzformáció a vetítéssel és az átnevezéssel együtt a $z = x + y$ leképezést adja.

Az (x, y) -síkról az (u, v) -síkra ható transzfromáció inverze:

$$\begin{array}{ccccc} x & = & u & & \\ y & = & v & - & u \end{array}$$

A Jacobi determináns nyilván most is 1 -gyel egyenlő. Ezért

$$s(u,v) \ = \ f\,(\ u\ ,v-u\ )\ \cdot\ 1 \ = \ f\,(\ u\ ,v-u\ )$$

Ezek után a függőleges tengelyre való vetítéssel ezt kapjuk:

$$s_2(v) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} s(u,v)\ du = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\ u\ ,v-u\ )\ du$$

Most v helyett z -t írunk, $s_2(v)$ helyett pedig $r(z)$ -t, és megkapjuk a fenti formulák közül a másodikat:

$$r(z) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f\,(\ u\ ,z-u\ )\ du$$

10.3.3. Számolások

1. Egyenletes eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x,y) = 1 \qquad (0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1)$$

$$s(u,v) = 1 \qquad (0 \le u-v \le 1\,,\ 0 \le v \le 1)$$

$$s_1(u) = \int_0^u 1\ dv = u \qquad \text{ha} \quad 0 \le u \le 1$$

$$s_1(u) = \int_{u-1}^1 1\ dv = 2-u \qquad \text{ha} \quad 1 \le u \le 2$$

Tehát az összeg sűrűségfügvénye:

$$r(z) = z \qquad \text{ha} \quad 0 \le z \le 1$$

$$r(z) = 2-z \qquad \text{ha} \quad 1 \le z \le 2$$

2. Az $f(x,y) = 4\,x\,y$ sűrűségfüggvényű eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x,y) = 4xy \qquad (0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1)$$

$$s(u,v) = 4(u-v)v \qquad (0 \le u-v \le 1\,,\ 0 \le v \le 1)$$

$$s_1(u) = \int_0^u 4(u-v)v\ dv = \frac{2}{3}u^3 \qquad \text{ha} \quad 0 \le u \le 1$$

$$s_1(u) = \int_{u-1}^1 4(u-v)v\ dv = \frac{2}{3}\left(-u^3+6u-4\right) \qquad \text{ha} \quad 1 \le u \le 2$$

Tehát az összeg sűrűségfügvénye:

$$r(z) = \frac{2}{3}z^3 \qquad \text{ha} \quad 0 \le z \le 1$$

$$r(z) = \frac{2}{3}\left(-z^3+6z-4\right) \qquad \text{ha} \quad 1 \le z \le 2$$

3. Exponenciális eloszlás transzformációja két lépésben

$$f(x,y) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(x+y)} \qquad (x\,,\ y \ge 0)$$

$$s(u,v) = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda u} \qquad (u \ge 0\,,\ 0 \le v \le u)$$

$$s_1(u) = \int_0^u \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda u}\ dv = \lambda^2 u \mathrm{e}^{-\lambda u} \qquad (u \ge 0)$$

Tehát az összeg sűrűségfügvénye:

$$r(z) = \lambda^2 z \mathrm{e}^{-\lambda z} \qquad (z \ge 0)$$

10.4. Konvolúció

Független valószínűségi változók összege (folytonos eset). Ha az X és Y valószínűségi változók függetlenek, akkor $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, ezért a kapott formula így írható:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-v)\ f_2(v)\ dv$$

avagy

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u)\ f_2(z-u)\ du$$

Felismerjük, hogy $r(z)$ nem más, mint $f_1(x)$ és $f_2(y)$ **konvolúciója**.

10.5. Gyakorló feladatok

1. Köralakú céltáblára lövünk. A kör sugara 1 méter. A találat helye egyenletes eloszlást követ a körlapon. A találat helyének távolsága

   - a kör középpontjától
   - a kör kerületétől

   véletlentől függ. Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az

   (a) eloszlásfüggvényét!

   (b) sűrűségfüggvényét!

2. Hatalmas köralakú céltáblára lövünk. A találat helye standrd normális eloszlást követ a körlapon. A találat helyének

   - a kör középpontjától való távolsága
   - a kör középpontjától való távolságának a négyzete

   véletlentől függ. Határozza meg ennek a valószínűségi változónak az

   (a) eloszlásfüggvényét!

   (b) sűrűségfüggvényét!

3. A $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,1)$ pontok által meghatározhott paralelogrammán vett egyenletes eloszlást veítjük

   (a) az x -tengelyre,

   (b) az y -tengelyre

   Milyen eloszlásokat kapunk a tengelyeken?

4. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{1}{2y}$. Határozza meg

   (a) az x -tengelyre,

   (b) az y -tengelyre

   vetett vetületeloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

5. A $0 < x < 1$, $x < y < \frac{1}{x}$ egyenlőtlenségekkel definiált tartományon ("vitorlán") vesszük azt az eloszlást, melynek sűrűségfüggvénye $f(x,y) = \frac{2x}{y}$. Határozza meg

(a) az x -tengelyre,

(b) az y -tengelyre

vetett vetületeloszlás sűrűségfüggvényének a képletét!

6. Tegyük fel, hogy az (X, Y) valószínűségi változó sűrűségfüggvénye: $f(x, y) = 4x + 2y \quad (x > 0, \;\; y > 0, \;\; x + y < 1)$ Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

7. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és mindketten egyenletes eloszlást követnek 0 és 1 között. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

8. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és X egyenletes eloszlást követ 0 és 3 között, Y pedig egyenletes eloszlást követ 0 és 5 között. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

9. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és mindketten λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

10. Tegyük fel, hogy X és Y függetlenek, és X λ_1 paraméterű, Y pedig λ_2 paraméterű exponenciális eloszlást követ. Határozza meg $X + Y$ sűrűségfüggvényének a képletét!

11. Tegyük fel, hogy X_1, X_2, X_3 függetlenek, és mindhárman λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1 + X_2 + X_3$ sűrűségfüggvényének a képletét!

12. Tegyük fel, hogy X_1, X_2, X_3, X_4 függetlenek, és mind λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ sűrűségfüggvényének a képletét!

13. Tegyük fel, hogy $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek, és mind λ paraméterű exponenciális eloszlást követnek. Határozza meg $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ sűrűségfüggvényének a képletét!

14. $\sqrt{RND_1} + \sqrt{RND_2}$ sűrűségfüggvénye: $2/3z^3$ ha $0 < z < 1$, $-2/3(z^3 - 6z + 4)$ ha $1 < z < 2$

15. $\sqrt{RND_1} + 2 \cdot \sqrt{RND_2}$ sűrűségfüggvénye: $z^3/6$ ha $0 < z < 1$, $z/2 - 1/3$ ha $1 < z < 2$, $-z^3/6 + 5z/2 - 3$ ha $2 < z < 3$

11. Regresszió a mediánnal és a várható értékkel

11.1. Regresszió egydimenzióban

11.1.1. A medián minimál tulajdonsága

Legyen X egy folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x)$, eloszlásfüggvénye $F(x)$, és c egy konstans. A véletlen X pontnak és a c pontnak az $|X-c|$ távolsága is valószínűségi változó. Mint tudjuk, $|X-c|$ várható értéke így számolható ki:

$$\mathrm{E}(|X-c|) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-c|\; f(x)\, dx$$

Ennek az integrálnak az értéke függ természetesen c -től.

Állítás: Az integrál értéke akkor minimális, ha c eleget tesz az $F(c) = \frac{1}{2}$ egyenletnek. Tehát az $|X-c|$ távolság várható értéke akkor minimális, ha c a valószínűségi változó mediánja.

Bizonyítás *(Extra tananyag)*: Az integrál értékét jelöljük $h(c)$ -vel. Az alábbi átalakítások nyilvánvalóak:

$$h(c) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x-c|\; f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{c} |x-c|\; f(x)\, dx + \int\limits_{c}^{\infty} |x-c|\; f(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{c} (c-x)\; f(x)\, dx + \int\limits_{c}^{\infty} (x-c)\; f(x)\, dx =$$

$$= c\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\, dx - \int\limits_{-\infty}^{c} x\; f(x)\, dx + \int\limits_{c}^{\infty} x\; f(x)\, dx - c\int\limits_{c}^{\infty} f(x)\, dx$$

A kapott négy tag mindegyikét külön-külön deriváljuk c szerint:

$$\left(c\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\, dx \right)' = 1\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\, dx + c\; f(c) = F(x) + c\; f(c)$$

$$-\left(\int\limits_{-\infty}^{c} x\; f(x)\, dx \right)' = -c\; f(c)$$

$$\left(\int\limits_{c}^{\infty} x\; f(x)\, dx \right)' = -c\; f(c)$$

$$-\left(c\int\limits_{c}^{\infty} 1\; f(x)\, dx \right)' = -1 \cdot \int\limits_{c}^{\infty} f(x)\, dx + c\; f(c) = -1 + F(x) + c\; f(c)$$

A kapott 6 tagot összeadva megkapjuk a deriváltat:

$$h'(c) = 2F(c) - 1$$

Mivel a

$$2F(c) - 1 = 0$$

egyenlet ekvivalens a

$$F(c) = \frac{1}{2}$$

egyenlettel,

$$h'(c) = 2F(c) - 1 = 0 \quad \text{ha } c = \text{medián}$$
$$h'(c) = 2F(c) - 1 < 0 \quad \text{ha } c < \text{medián}$$
$$h'(c) = 2F(c) - 1 > 0 \quad \text{ha } c > \text{medián}$$

ami tényleg azt jelenti, hogy $h(c)$ minimuma akkor adódik, ha $c =$ medián.

11.1.2. A távolság várható értékének minimalizálása

Tegyük fel, hogy X valószínűségi változóra N kísérletet végeztünk. A kísérleti eredményeket jelöljük $X_1, X_2, \ldots, X_N$ -nel. Ha minden kísérleti eredményt egy c konstanssal helyettesítünk, akkor – természetesen – minden egyes helyettesítésnél egy eltérés, egy "hiba" adódik. Ezeknek az eltéréseknek, hibáknak a nagyságai:

$$|X_1 - c|, |X_2 - c|, \ldots, |X_N - c|$$

A hibák átlaga:

$$\frac{|X_1 - c| + |X_2 - c| + \ldots + |X_N - c|}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag közel van az $|X - c|$ valószínűségi változó várható értékéhez:

$$\frac{|X_1 - c| + |X_2 - c| + \ldots + |X_N - c|}{N} \approx$$

$$\approx \mathrm{E}(|X - c|) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - c| \; f(x)\, dx$$

Az előző pontban láttuk, hogy ez a várható érték akkor minimális, ha c az X valószínűségi változó mediánja.

11.1.3. A várható érték minimál tulajdonsága

Steiner egyenlőség: Ha c egy pont a számegyenesen, és tekintünk egy valószínűségi változót vagy eloszlást, akkor a c -re vonatkozó második momentum egyenlő a variancia (azaz szórásnégyzet) plusz a c pont és várható érték közötti távolság négyzete:

$$\sum_x (x - c)^2 \, p(x) \;=\; \sigma^2 + (\mu - c)^2 \qquad \text{(diszkrét eseben)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 \; f(x) \; dx \;=\; \sigma^2 + (\mu - c)^2 \qquad \text{(folytonos esetben)}$$

Felhívjuk a figyelmet a Steiner egyenlőség mechanikai jelentésére: a számegyenesen vett akármilyen tömegeloszlás esetén a bármely c esetén a c pontra vontatozó tehetetlenségi nyomaték egyenlő a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték plusz az a c -re vonatkozó tehetetlenségi nyomaték, amit úgy kapnánk, mintha az összes tömeget a súlypontba helyeznénk.

Bizonyítás A Steiner egyenlőség bizonyítását a folytonos esetre adjuk meg:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - c)^2 \; f(x) \; dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} (\, (x - \mu) + (\mu - c) \,)^2 \; f(x) \; dx \;=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\, (x-\mu)^2 + 2(x-\mu)(\mu-c) + (\mu-c)^2 \, \right) \, f(x) \, dx \; =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \, f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} 2(x-\mu)(\mu-c) f(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} (\mu-c)^2 f(x) \, dx \; =$$

$$= \sigma^2 + 2(\mu-c) \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x) \, dx + (\mu-c)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \; =$$

$$= \sigma^2 + 2(\mu-c)\, 0 + (\mu-c)^2 \, 1 \; = \; \sigma^2 + 0 + (\mu-c)^2 \; = \; \sigma^2 + (\mu-c)^2$$

Ebben az okoskodásban kihasználtuk azt, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x) \, dx \; = \; 0$$

ami azért igaz, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) f(x) \, dx \; = \; \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx \; - \; \int_{-\infty}^{\infty} \mu f(x) \, dx \; =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx \; - \; \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx \; = \; \mu - \mu \, 1 \; = \; 0$$

A diszkrét eset bizonyításának a gondolatmenete hasonló, csak éppen a sűrűségfüggvények helyett súlyfüggvényt kell venni, és az integrálok helyett összegzést kell végezni.

A Steiner egyenlőség nyilvánvaló következménye a Steiner egyenlőtlenség.

Steiner egyenlőtlenség: A c -re vonatkozó második momentum nagyobb vagy egyenlő, mint a variancia (azaz szórásnégyzet), és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a c pont egybeesik a várható értékkel. Más szavakkal: a c -re vonatkozó második momentum akkor minimális, ha c egyenlő a várható értékkel, és a minimum értéke egyenlő a varianciával (szórásnégyzettel).

Felhívjuk a figyelmet a Steiner egyenlőtlenség mechanikai jelentésére: a számegyenesen vett akármilyen tömegeloszlás esetén a bármely c esetén a c pontra vontatozó tehetetlenségi nyomaték nagyobb, mint a súlypontra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.

11.1.4. A távolság négyzete várható értékének minimalizálása

A kísérleti eredmények hibáit négyzetre emelve az alábbi értékeket kapjuk:

$$(X_1-c)^2, (X_2-c)^2, \ldots, (X_N-c)^2$$

Ezek átlaga:

$$\frac{(X_1-c)^2 + (X_2-c)^2 + \ldots + (X_N-c)^2}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag közelíthető az $(X-c)^2$ várható értékével:

$$\frac{(X_1-c)^2 + (X_2-c)^2 + \ldots + (X_N-c)^2}{N} \approx$$

$$\approx \mathrm{E}\left((X-c)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-c)^2 \, f(x) \, dx$$

Az előző pontban láttuk, hogy ez a várható érték akkor minimális, ha c az X valószínűségi változó várható értéke.

11.2. Regresszió kétdimenzióban

Tegyük fel, hogy az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval van dolgunk. Képzeljük el, hogy N kísérletet végzünk. A megfigyelt értékek legyenek:

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$$

Ha valaki az X és Y értékek közül csak az X -et tudja megfigyelni, akkor feladata lehet, hogy Y -ra tippeljen X megfigyelt értékéből úgy, hogy ügyesen választ egy alkalmas $y = k(x)$ függvényt, amibe X megfigyelt értékét mindig behelyettesíti, és ezzel a függvényértékkel tippel Y -ra: Y -ra a $k(X)$ értékkel tippel. Ennél a tippelésnél a véletlen X értékből tippelünk a véletlen Y értékre, ezért az óhatatlanul adódó hiba is véletlentől függ.

11.2.1. A hiba abszolút értéke várható értékének minimalizálása

Az elkövetett hibák abszolút értékei:

$$|Y_1 - k(X_1)|, |Y_2 - k(X_2)|, \ldots, |Y_N - k(X_N)|$$

Ezek átlaga

$$\frac{|Y_1 - k(X_1)| + |Y_2 - k(X_2)| + \ldots + |Y_N - k(X_N)|}{N} \approx$$

Nagy N esetén ez az átlag az átlag közelíthető az $|Y - k(X)|$ várható értékével:

$$\approx \frac{|Y_1 - k(X_1)| + |Y_2 - k(X_2)| + \ldots + |Y_N - k(X_N)|}{N} \approx$$

$$\approx \mathrm{E}(|Y - k(X)|) = \iint\limits_{R^2} |y - k(x)| \; f(x, y) \, dx \; dy =$$

$$\iint\limits_{R^2} |y - k(x)| \; f_1(x) \; f_{2|1}(y|x)) \, dx \; dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y - k(x)| \; f_{2|1}(y|x)) \; dy \right) f_1(x) \; dx$$

Minden rögzített x esetén a

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y - k(x)| \; f_{2|1}(y|x)) \; dy$$

belső integrálban $k(x)$ egy rögzített érték. Ezért a belső integrál akkor minimális, ha $k(x)$ egyenlő a belső integrálban szerepet játszó $f_{2|1}(y|x))$ sűrűségfüggvényű feltételes eloszlás mediánjával. Ezért az optimumot nyújtó $y = k(x)$ függvényt úgy kapjuk meg, hogy az

$$F_{2|1}(y|x) = \frac{1}{2}$$

egyenletből y -t kifejezzük x segítségével.

11.2.2. A hiba négyzete várható értékének minimalizálása

Az elkövetett hibák négyzetei:

$$(Y_1 - k(X_1))^2\,, (Y_2 - k(X_2))^2\,, \ldots, (Y_N - k(X_N))^2$$

Ezek átlaga

$$\frac{(Y_1 - k(X_1))^2 + (Y_2 - k(X_2))^2 + \ldots + (Y_N - k(X_N))^2}{N}$$

Nagy N esetén ez az átlag az átlag közelíthető az $(Y - k(X))^2$ várható értékével:

$$\frac{(Y_1 - k(X_1))^2 + (Y_2 - k(X_2))^2 + \ldots + (Y_N - k(X_N))^2}{N} \approx$$

$$\approx \mathrm{E}\left((Y - k(X))^2\right) = \iint\limits_{R^2} (y - k(x))^2\; f(x,y)\,dx\;dy =$$

$$= \iint\limits_{R^2} (y - k(x))^2\; f_1(x)\; f_{2|1}(y|x))\,dx\;dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - k(x))^2\; f_{2|1}(y|x))\;dy \right) f_1(x)\;dx$$

Minden rögzített x esetén a

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - k(x))^2\; f_{2|1}(y|x))\;dy$$

belső integrálban $k(x)$ egy rögzített érték. Ezért a belső integrál akkor minimális, ha $k(x)$ egyenlő a belső integrálban szerepet játszó $f_{2|1}(y|x))$ sűrűségfüggvényű feltételes eloszlásnak a várható értékével. Ezért az optimumot nyújtó $y = k(x)$ függvényt így kapjuk meg:

$$k(x) = m_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\; f_{2|1}(y|x)\;dy$$

11.3. Egy számolós minta példa

Példa: Először 0 és 1 között választunk egy Y számot egyenletes eloszlás szerint, majd pedig 0 és Y között választunk egy X számot ugyancsak egyenletes eloszlás szerint. Számítógéppel a szimuláció így történhet:

$$X \;=\; \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2 \qquad\qquad Y \;=\; \mathrm{RND}_1$$

A definíciót szavakban így mondhatjuk:

X = két független random szám szorzata

Y = a két tényező közül az első tényező

Tegyük fel, hogy valakinek az a dolga, hogy X -ből Y -ra tippeljen. Két célt is kitűznek neki:

1. A hiba abszolút értékének a várható értékét kell minimalizálnia.

2. A hiba négyzetének a várható értékét kell minimalizálnia.

Megoldás:

$$f(x,y) = f_{1|2}(x|y) \cdot f_2(y)$$

Y sűrűségfüggvénye:

$$f_2(y) = 1 \qquad 0 < y < 1$$

X feltételes sűrűségfüggvénye az $Y = y$ feltétel mellett:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y$$

(X,Y) sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{y} \qquad 0 < x < y < 1$$

X sűrűségfüggvénye:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \;=\; \int_x^1 \frac{1}{y}\, dy \;= -\ln(x) \qquad 0 < x < 1$$

Y feltételes sűrűségfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)} \qquad 0 < x < y < 1$$

Y feltételes eloszlásfüggvénye az $X = x$ feltétel mellett:

$$F_{2|1}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{2|1}(y|x)\, dy \;=\; \int_x^y \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)}\, dy \;=\; \frac{\ln(y) - \ln(x)}{-\ln(x)} \qquad 0 < x < y < 1$$

Y feltételes mediánja az $X = x$ feltétel mellett az

$$\frac{\ln(y) - \ln(x)}{-\ln(x)} \;=\; \frac{1}{2}$$

egyenlet y -ra történő megoldásából jön ki:

$$\begin{aligned}
\ln(y) - \ln(x) \;&=\; -\frac{1}{2}\ln(x) \\
\ln(y) \;&=\; \frac{1}{2}\ln(x) \\
\ln(y) \;&=\; \ln(\sqrt{x}) \\
y \;&=\; \sqrt{x}
\end{aligned}$$

Ezért az abszolút hiba várható értékének minimalizálásához az optimális tippelést nyújtó függvény:

$$k(x) \;=\; \sqrt{x}$$

Y feltételes várható értéke az $X = x$ feltétel mellett:

$$\mathrm{E}(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{2|1}(y|x)\; dy \;=\; \int_x^1 y\, \frac{\frac{1}{y}}{-\ln(x)}\; dy \;=\; \int_x^1 \frac{1}{-\ln(x)}\; dy \;=\; \frac{1-x}{-\ln(x)} \;=\; \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Ezért a négyzetes hiba várható értékének minimalizálásához az optimális tippelést nyújtó függvény:

$$k(x) \;=\; \frac{x-1}{\ln(x)} \qquad 0 < x < 1$$

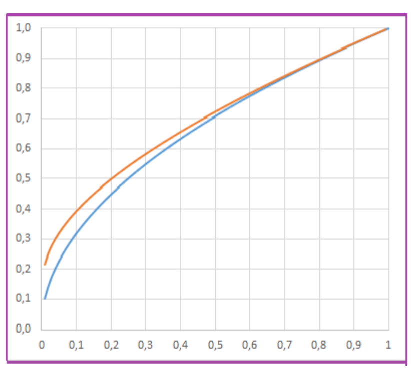
A két függvény összevetése céljából egy egyszerű táblázatot készítettünk az értékeikből:

x	$\sqrt{x}$	$\frac{1-x}{\ln(x)}$
0,1	0,32	0,39
0,2	0,45	0,50
0,3	0,55	0,58
0,4	0,63	0,65
0,5	0,71	0,72
0,6	0,77	0,78
0,7	0,84	0,84
0,8	0,89	0,90
0,9	0,95	0,95

Látható, hogy

$$y = \sqrt{x} \qquad \text{kisebb, mint} \qquad y = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

ami azt jelenti, hogy az abszolút hiba várható értékének minimalizálásakor kisebb értékekkel kell tippelnünk, mint amikor a négyzetes hiba várható értékét minimalizáljuk. Ezt a tényt a "Regressziós függvények összevetése" feliratú ábrán is bemutatjuk.



56. ábra. *Regressziós függvények összevetése:* $y = \sqrt{x}$ *görbe lejjebb van, mint az* $y = \frac{x-1}{\ln(x)}$ *görbe*

11.4. Gyakorló feladatok

1. Ha a Hoppantó Bolhának azt mondjuk, hogy "HOPP!", akkor ugrik egy nagyot. Az ugrásának (méterben mért) nagysága véletlentől függ. Ezt a valószínűségi változót X -szel jelöljük. Ebben a feladatban feltesszük, hogy X egyenletes eloszlást követ 4 és 6 között. Ez – többek között – azt is jelenti, hogy

   - az eseteknek kb. a negyedében 4 méternél nagyobbat, de 4.5 méternél kisebbet ugrik,
   - az eseteknek kb. a negyedében 4.5 méternél nagyobbat, de 5 méternél kisebbet ugrik,
   - az eseteknek kb. a negyedében 5 méternél nagyobbat, de 5.5 méternél kisebbet ugrik,
   - az eseteknek kb. a negyedében 5.5 méternél nagyobbat, de 6 méternél kisebbet ugrik.

   A bolha szeret a véletlennel és a pénzzel játszani. Ha olyan adakozó emberre akad, aki beigéri neki, hogy fizetni fog, és csak úgy kijelent egy c konstans számot is, akkor elkezd ugrálni, és jó sok (mondjuk kb. 100) ugrást végez. A szabályok szerint az adakozó ember minden egyes ugrás után fizet:

   - ha $X > c$, akkor $(X - c)$ -szer 10 forintot,
   - ha $X < c$, akkor $(c - X)$ -szer 20 forintot.

   Ezért a bevállalós ember vesztesége ugrásonként:

   - ha $X > c$, akkor $10 \cdot (X - c)$ forint,
   - ha $X < c$, akkor $20 \cdot (c - X)$ forint.

   Hogyan válassza meg a bevállalós ember a c konstans számot, ha azt akarja, hogy veszteségének ugrásonkénti várható értéke minimális legyen?

2. *(Az előző feladat folytatása)* Ebben a feladatban a Hoppantó Bolha ugrásának nagysága normális eloszlást követ 5 méter várható értékkel és 1 méter szórással. A kérdés ugyanaz, mint az előző feladatban.

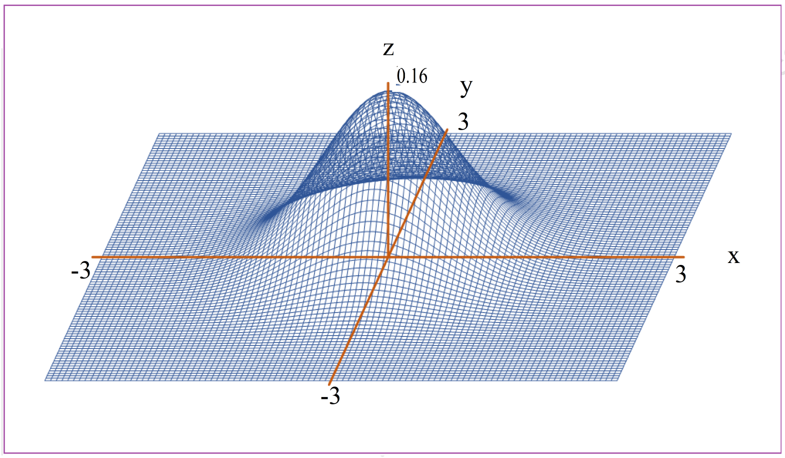
12. Normális eloszlások a síkon

12.1. Standard normális eloszlás

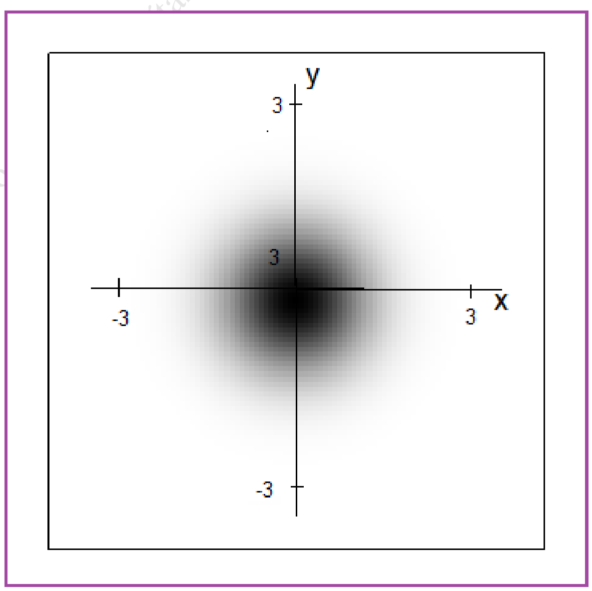
A kétdimenziós standard normális eloszlást az egész síkon az alábbi sűrűségfüggvénnyel definiáljuk:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\; e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}$$

Mivel a sűrűségfüggvény csak (x^2+y^2)-en keresztül függ x-től és y-tól, az eloszlás körszimetrikus. A függvénynek megfelelő felület egy harang alakjára emlékeztet.



57. ábra. 2-*dimenziós standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye*



58. ábra. 2-*dimenziós standard normális eloszlás sűrűségfüggvénye festékkel szemléltetve*

Könnyű észrevenni, hogy a kétdimenziós standard normális sűrűségfüggvény előállítható egydimenziós standard normális sűrűségfüggvények direktszorzataként is:

$$\frac{1}{2\pi}\ e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

Ezért a kétdimenziós standard normális eloszlásnak

- a tengelyekre vetett vetületei egydimenziós standard normális eloszlások,
- a feltételes eloszlások a függőleges és a vízszintes egyenesek mentén is egydimenziós standard normális eloszlások.

12.2. Normális eloszlás $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, r$ paraméterekkel

A kétdimenziós normális eloszlásokat az általános esetben is a sűrűségfüggvényükkel definiáljuk:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\left(1-r^2\right)}}$$

ahol μ_1, μ_2 valós számok, σ_1, σ_2 pozitív számok, az r pedig -1 és 1 közötti valós szám.

A sűrűségfüggvény kitevőjében szereplő tört számlálója, a

$$\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - 2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

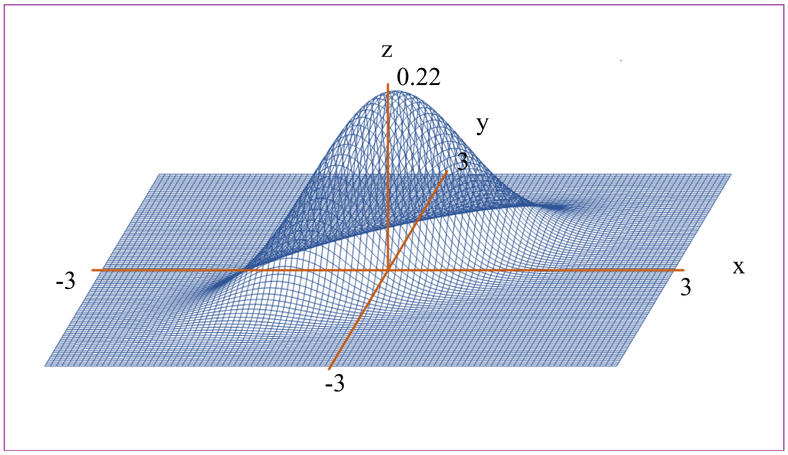
kifejezés egy kvadratikus képlet, aminek a szintvonalai koncentrikus ellipszisek. Ezért a sűrűségfüggvénynek megfelelő felület egy deformált harang alakjára emlékeztet, mintha a harangot összenyomtuk volna úgy, hogy – felülnézetben – a kör helyett ellipszis legyen az alakja.

Megjegyzés. *(Extra tananyag)*: Meg lehet mutatni, hogy

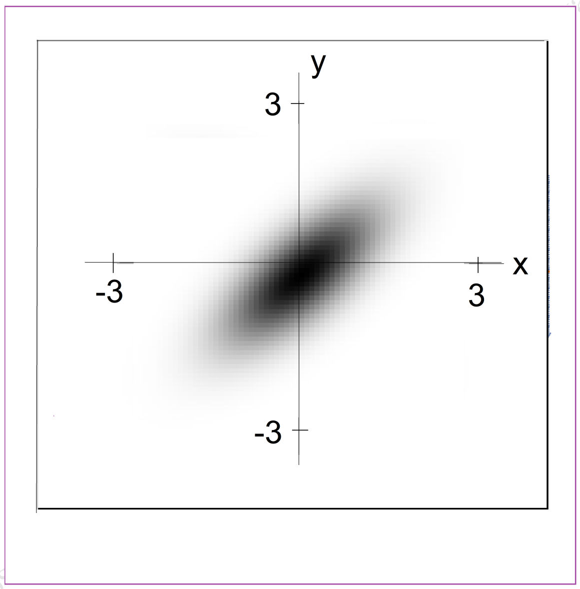
- a sűrűségfüggvény szintvonalai koncentrikus ellipszisek
- az ellipszisek közös középpontja a (μ_1, μ_2) pont
- az ellipszisek tengelyeinek irányát a (a később tárgyalandó) kovariancia mátrix sajátvektorai adják
- a tengelyek hossza pedig arányos a kovariancia mátrix sajátértékeinek négyzetgyökeivel

Normális sűrűségfüggvények felületekkel ábrázolva

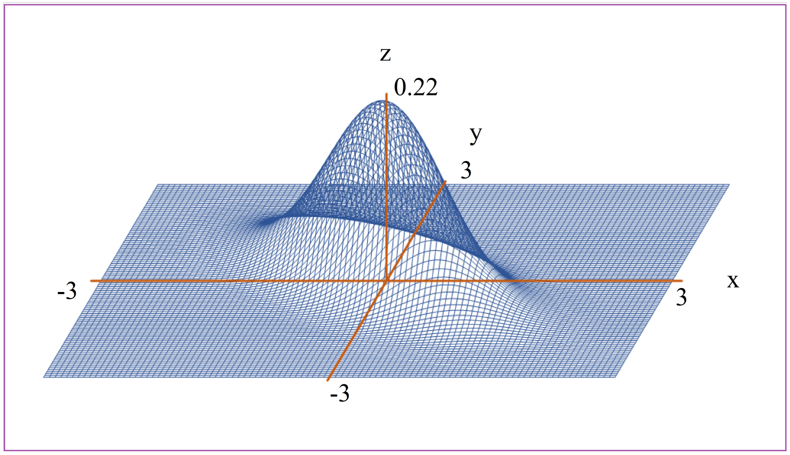
Néhány paraméter érték-rendszerre a megfelelő kétdimenziós normális sűrűségfüggvényt felülettel szemléltetjük:



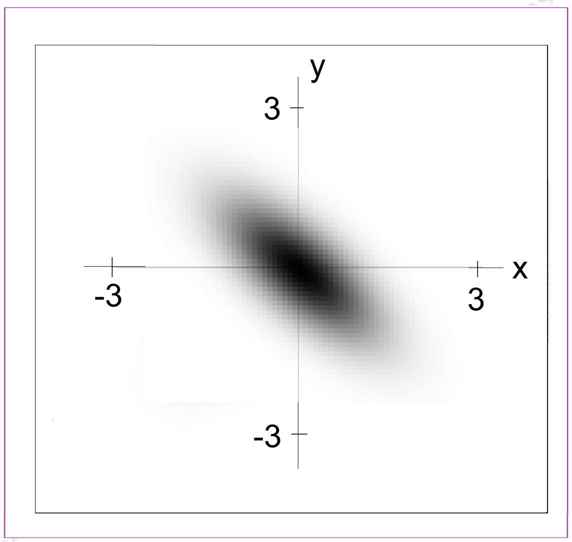
59. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



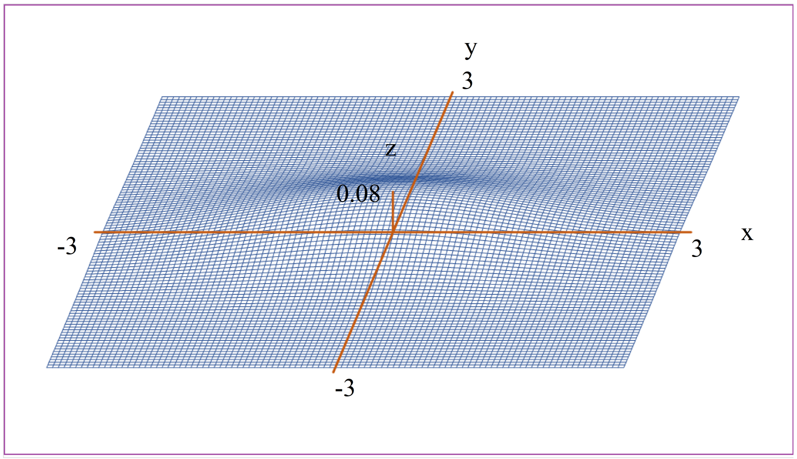
60. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



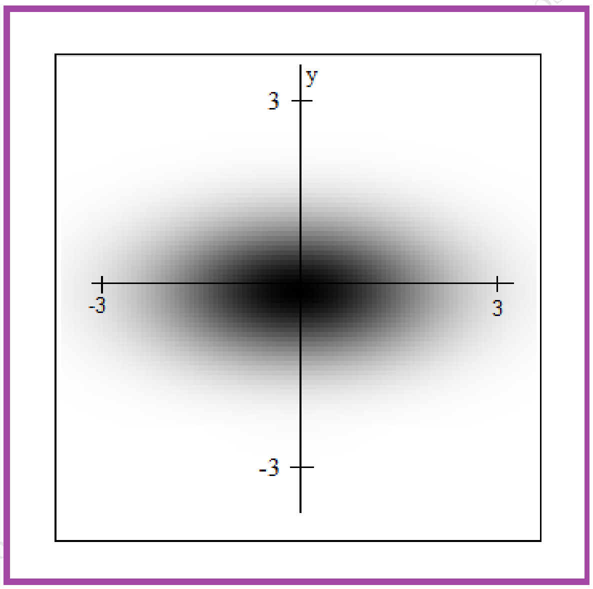
61. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



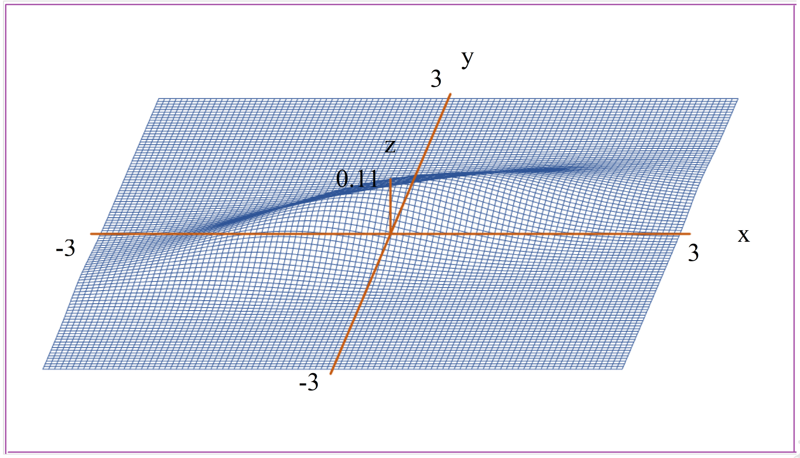
62. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



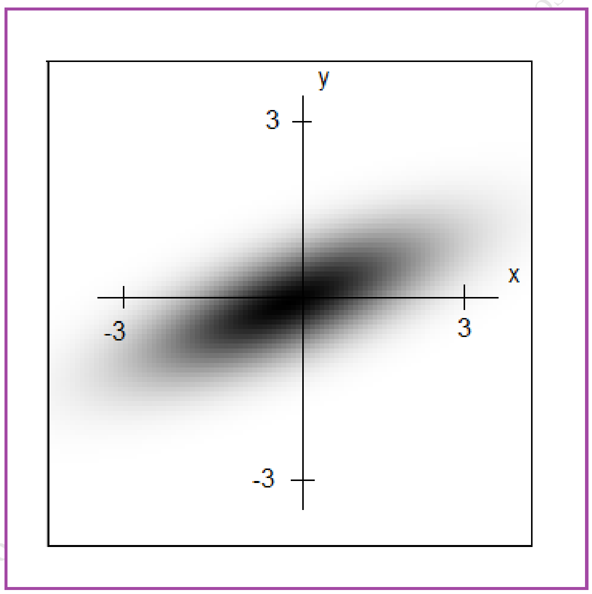
63. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0$



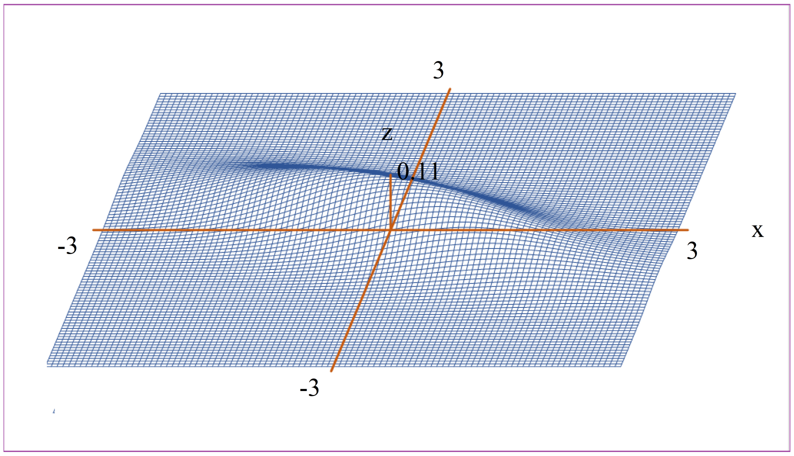
64. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0$



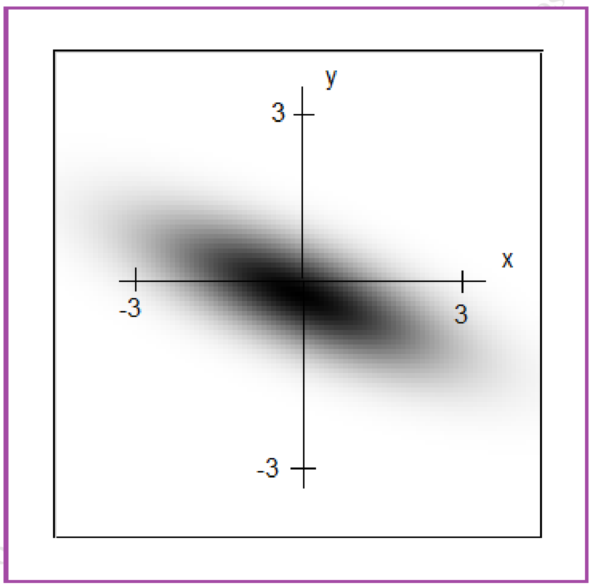
65. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



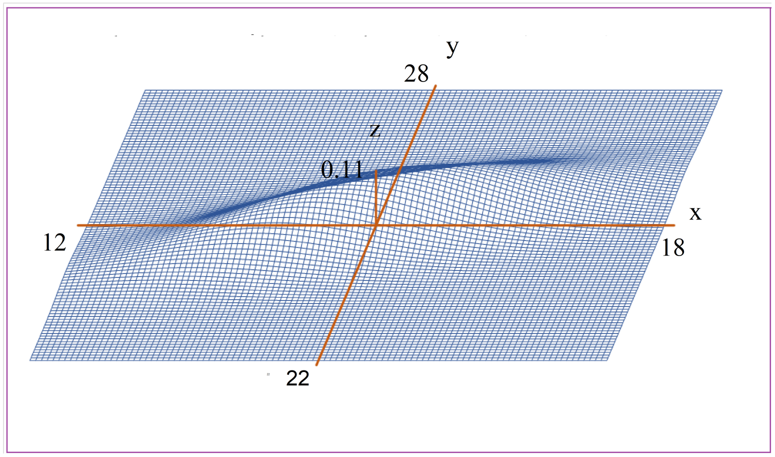
66. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$



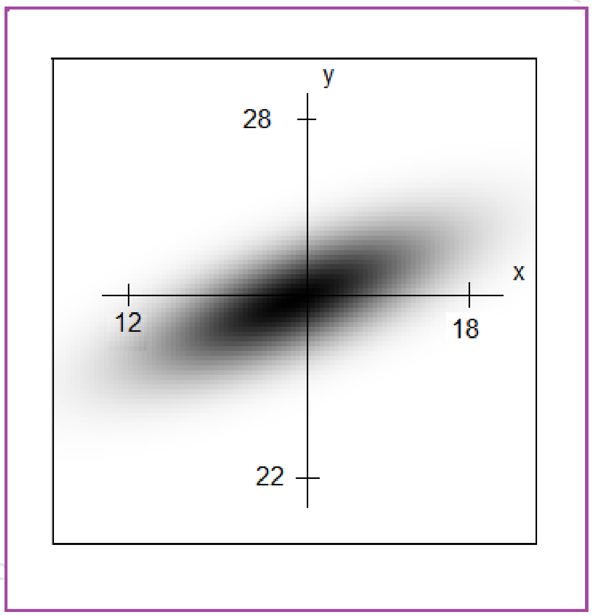
67. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



68. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $r = -0.7$



69. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye; paraméterek:* $\mu_1 = 15$*,* $\mu_2 = 25$*,* $\sigma_1 = 2$*,* $\sigma_2 = 1$*,* $r = 0.7$



70. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás festékkel szemléltetve; paraméterek:* $\mu_1 = 15$*,* $\mu_2 = 25$*,* $\sigma_1 = 2$*,* $\sigma_2 = 1$*,* $r = 0.7$

Mikor használunk kétdimenziós normális eloszlásokat?

1. Ha egy kétdimenziós valószínűségi változó sok, független, *kis szórású* koordinátákkal rendelkező kétdimenziós valószínűségi változó összege, akkor ez a kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, r paraméterekkel.

   Ezt a kijelentést *kétdimenziós centrális határeloszlás tételek* támasztják alá, melyek tárgyalása meghaladja lehetőségeinket. Ha egy valószínűségi változó kis értékeket vesz fel, akkor szórása is szükségképpen kicsi. Ezért az előző kijelentésnek következménye az alábbi:

2. Ha egy kétdimenziós valószínűségi változó sok, független, *kis értékű* koordinátákkal rendelkező kétdimenziós valószínűségi változó összege, akkor ez a kétdimenziós valószínűségi változó normális eloszlásúnak vehető valamilyen μ_1, μ_2, σ_1, σ_2, r paraméterekkel, hiszen kis értékek esetén a szórások is kicsik.

3. Sokszor csak kényelmi okokból használjuk a kétdimenziós normális eloszlásokat, mert úgy látjuk, úgy gondoljuk, hogy a normális eloszlás jó közelítése az igazi eloszlásnak, és kétdimenziós problémák esetén normális eloszlásokkal nagyon kényelmesen lehet dolgozni. Ilyen alkalmazásra hamarosan mutatunk példát.

4. A standard normális eloszlás jelentősége abban rejlik, hogy

   - lineáris transzformációk segítségével tetszőleges normális eloszlás kapcsolatban hozható a standard normálissal, és
   - a standard normális eloszlással – speciális tulajdonságai miatt – az elméleti és a gyakorlati számítások könnyebben végezhetők el.

12.3. Vetület eloszlások

Az x-tengelyre vetett vetület sűrűségfüggvényét a tengely tetszőleges x pontjában az alábbi integrál adja:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)}}\, dy$$

Ennek a – kissé bonyolult – integrálnak a kiszámolása a $z = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ helyettesítéssel elvégezhető. Az eredmény:

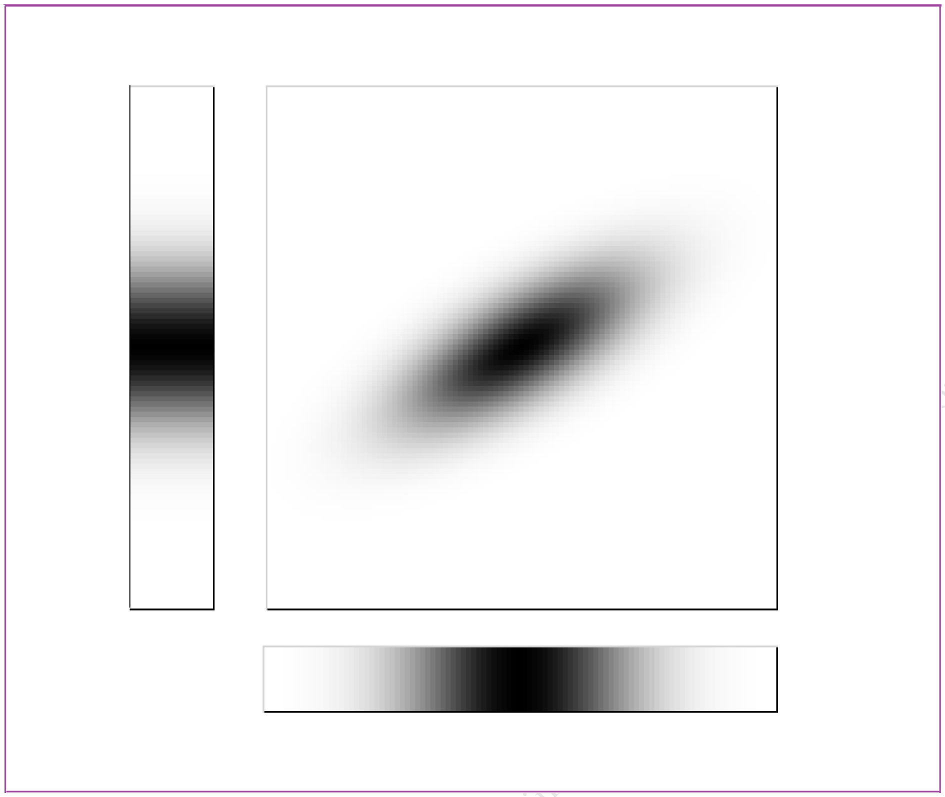
$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\; e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

Hasonlóképp meghatározható a függőleges tengelyre vetett vetület eloszlás sűrűségfügvénye is:

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\; e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Látjuk, hogy a tengelyekre vetett vetületek normális eloszlások μ_1, σ_1, illetve μ_2, σ_2 paraméterekkel.

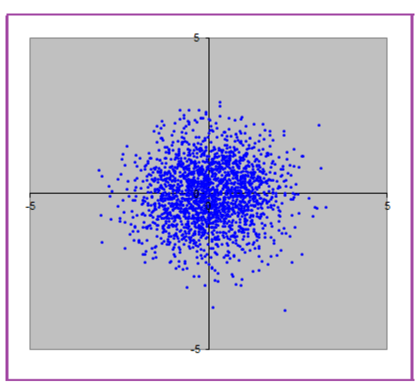
Ezzel a μ_1, μ_2, σ_1, σ_2 paraméterek jelentését megtaláltuk. μ_1 és μ_2 a vetületek várható értékét jelenti, σ_1, σ_2 pedig a vetületek szórását.



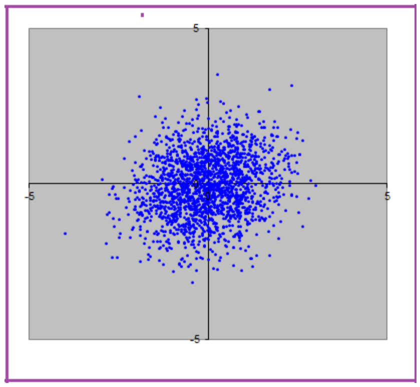
71. ábra. 2-*dimenziós normális eloszlás és vetületei festékkel szemléltetve; paraméterek:* $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\sigma_1 = 1.5$, $\sigma_2 = 1$, $r = 0.7$

12.4. Korrelációs együttható

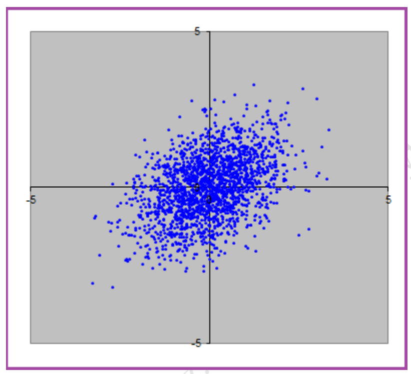
Ha a korrelációs együtthatót, melynek fogalmát később tanuljuk, a definíciójának megfelelő módon kiszámoljuk, akkor értékére az r paraméter adódik. Tehát az r paraméter "hivatalos nevét" is tudjuk már: ő a korrelációs együttható. A korrelációs együttható szemléletes jelentését – kétdimenziós adatrendszerekkel (pontfelhőkkel) kapcsolatban – a mellékelt ábrákról lehet leolvasni. Az ábra sorozatokat egyszerre kell áttekinteni úgy, mintha egy moziban lepörgetnénk előttünk a képeket



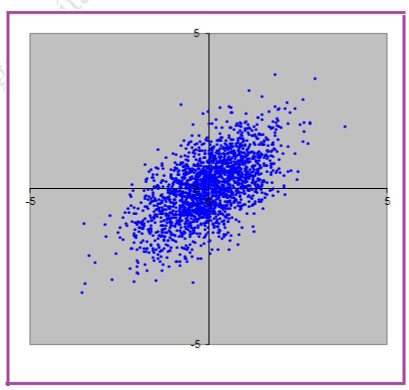
72. ábra. *Korrelációs együttható* 0.00



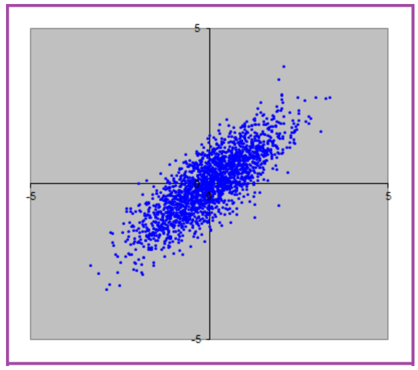
73. ábra. *Korrelációs együttható* 0.20



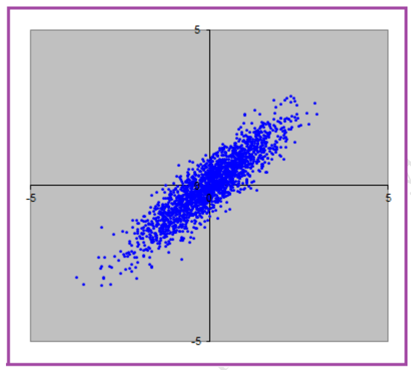
74. ábra. *Korrelációs együttható* 0.40



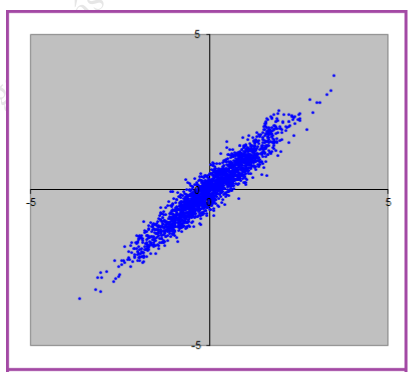
75. ábra. *Korrelációs együttható* 0.60



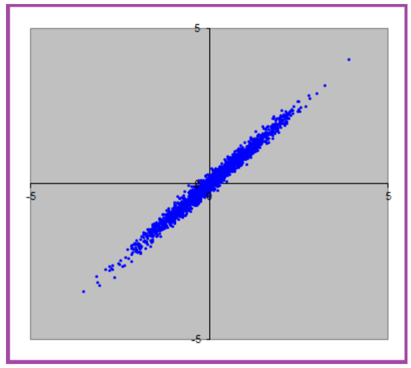
76. ábra. *Korrelációs együttható* 0.80



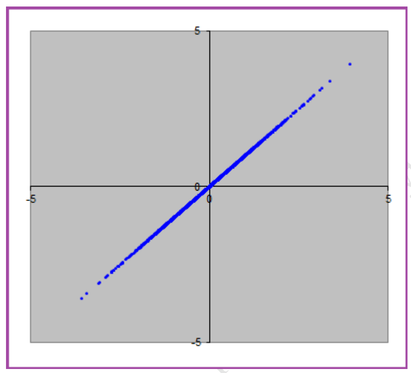
77. ábra. *Korrelációs együttható* 0.90



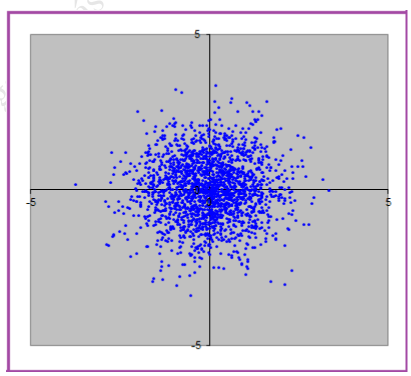
78. ábra. *Korrelációs együttható* 0.95



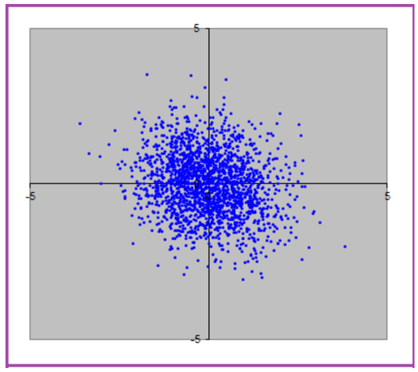
79. ábra. *Korrelációs együttható* 0.99



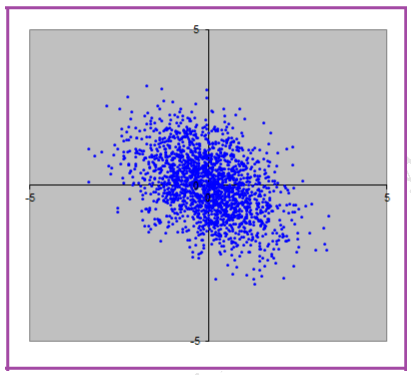
80. ábra. *Korrelációs együttható* 1.00



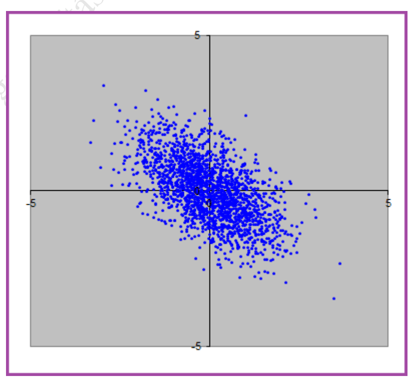
81. ábra. *Korrelációs együttható:* 0.00



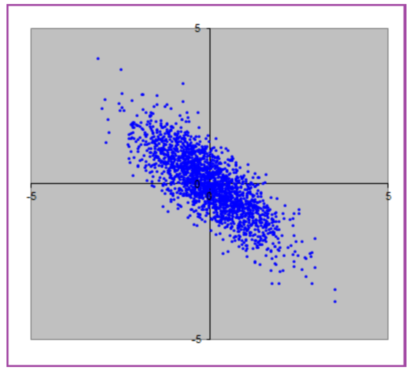
82. ábra. *Korrelációs együttható:* -0.20



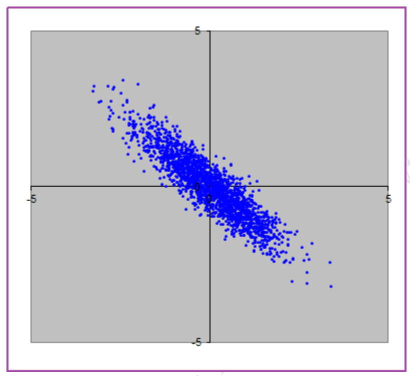
83. ábra. *Korrelációs együttható:* -0.40



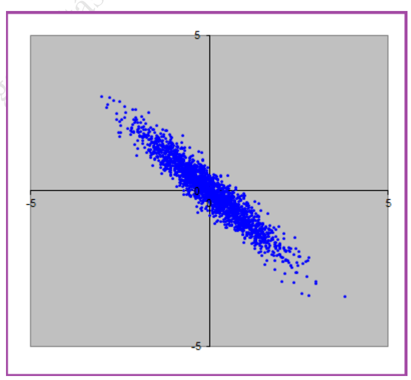
84. ábra. *Korrelációs együttható:* -0.60



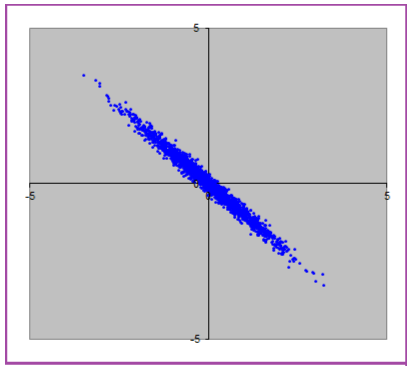
85. ábra. *Korrelációs együttható:* -0.80



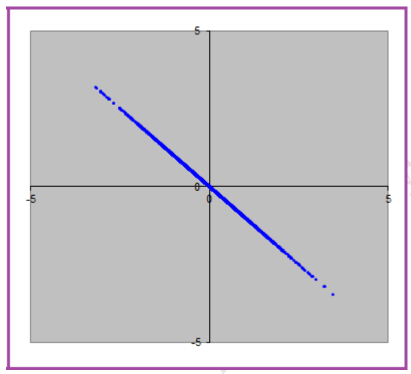
86. ábra. *Korrelációs együttható:* -0.90



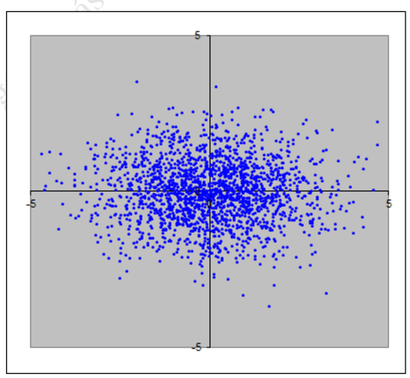
87. ábra. *Korrelációs együttható:* -0.95



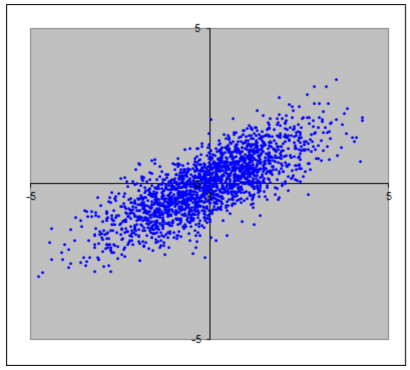
88. ábra. *Korrelációs együttható:* -0.99



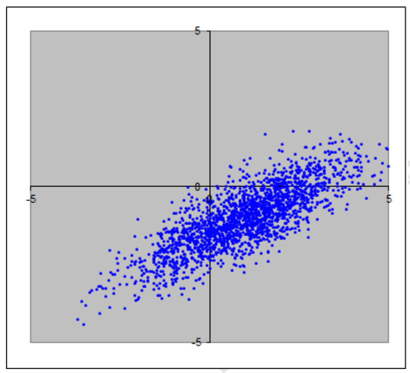
89. ábra. *Korrelációs együttható:* -1.00



90. ábra. *Szórások:* 1.5 *és* 1.0 *;* *Korrelációs együttható:* 0.00



91. ábra. *Szórások:* 1.5 *és* 1.0 ; *Korrelációs együttható:* 0.80



92. ábra. *Szórások:* 1.5 *és* 1.0 ; *Korrelációs együttható:* 0.80 ; *Várható értékek:* 1.0 *és* -1.0

12.5. Feltételes sűrűségfüggvény

A feltételes sűrűségfüggvényt az $X = x$ feltétel mellett a megfelelő függőleges egyenes mentén az alábbi hányados adja:

$$f_{2|1}(y|x) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \;=\; \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\; e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2-2r\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{(1-r^2)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\; e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}}$$

Egyszerűsítésekkel az alábbi eredmény adódik:

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\left(\mu_2+r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)\right)}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\right)^2}$$

A kapott képletből kiolvashatjuk, hogy az $X = x$ feltétel mellett az Y feltételes eloszlása normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

és szórása

$$\sigma_2\sqrt{1-r^2}$$

A feltételes sűrűségfüggvény az $Y = y$ feltétel mellett a megfelelő vízszintes egyenes mentén hasonló:

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-r^2}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\left(\mu_1+r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}}\right)^2}$$

A képletből látjuk, hogy az $Y = y$ feltétel mellett az X feltételes eloszlása normális eloszlás, melynek várható értéke

$$\mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

szórása:

$$\sigma_1\sqrt{1-r^2}$$

12.6. Feltételes medián és várható érték

A fentiek szerint tehát az $X = x$ feltétel mellett az Y várható értéke és mediánja:

$$\mathrm{E}(\, Y \mid X = x\,) = \mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

Hasonlóképpen az $Y = y$ feltétel mellett az X várható értéke és mediánja:

$$\mathrm{E}(\, X \mid Y = y\,) = \mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

Látjuk, hogy a feltételes várható érték és medián lineárisan függ a feltételtől. A lineáris függésben a meredekség $r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$; illetve $r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Az

$$y = \mu_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

egyenletű egyenest **első regressziós egyenes**nek nevezzük. Hasonlóképpen az

$$x = \mu_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)$$

egyenletű egyenest **második regressziós egyenes**nek nevezzük.

12.7. Feltételes szórás

Az $X = x$ feltétel mellett az Y szórása is kiolvashoató a feltételes sűrűségfüggvény képletéből:

$$\mathrm{SD}(\, Y \mid X = x\,) = \sigma_2\sqrt{1-r^2}$$

Hasonlóképpen az $Y = y$ feltétel mellett az X szórása:

$$\mathrm{SD}(\, X \mid Y = y\,) = \sigma_1\sqrt{1-r^2}$$

Látjuk, hogy a feltételes szórás nem függ a feltételtől, és kisebb, mint a feltétel nélküli szórás.

$$\mathrm{SD}(\, Y \mid X = x\,) = \sigma_2\sqrt{1-r^2} < \sigma_2$$

illetve

$$\mathrm{SD}(\, X \mid Y = y\,) = \sigma_1\sqrt{1-r^2} < \sigma_1$$

12.8. Példa: testmagasság és testsúly

Véletlenszerűen választunk egy felnőtt férfit, és megmérjük testmagasságát centiméterekben és testsúlyát (pontosabban: testtömegét) kilogramokban:

$$X = \text{testmagasság} \qquad\qquad Y = \text{testsúly}$$

Tegyük fel, hogy

- a testmagasság várható értéke 180 (cm)
- a testmagasság szórása 15 (cm)
- a testsúly várható értéke 80 (kg)
- a testsúly szórása 10 (kg)
- a korrelációs együttható pedig 0.6

Ha az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóval kapcsolatos számításokban kétdimenziós normális eloszlással dolgozunk, az alábbi numerikus eredményeket kapjuk.

1. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott felnőtt férfi 90 kg-nál súlyosabb:

   $$\text{P}(\ Y > 90\ ) = \texttt{1 - NORM.DIST(90 ; 80 ; 10 ; TRUE)} = 0.16$$

2. Tekintsünk egy tetszőleges x testmagasság értéket! Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak közül csak azokat tekintjük, akiknek a testmagassága körülbelül x (cm), akkor az ő testsúlyaik szórása nem 10 (kg), hanem csak:

   $$\text{SD}(\ Y \mid X = x\ ) = 10\ \sqrt{1 - 0.6^2} = 8$$

   Kiemeljük, hogy ennek a feltételes szórásnak az értéke nem függ x-től.

3. Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak testmagassága körülbelül egyforma, mondjuk $x,$ akkor a testsúly várható értéke – a feltételezett x függvényében – így alakul:

   - $x = 170$ esetén Y feltételes várható értéke:

     $$\text{E}(\ Y \mid X = 170\ ) = 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(170 - 180) = 76$$

     Tehát a körülbelül 170 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 76 kg.

   - $x = 180$ esetén Y feltételes várható értéke:

     $$\text{E}(\ Y \mid X = 180\ ) = 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(180 - 180) = 80$$

     Tehát a körülbelül 180 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 80 kg.

- $x = 190$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ Y \mid X = 190\ ) = 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(190 - 180) = 84$$

Tehát a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 84 kg.

- $x = 200$ esetén Y feltételes várható értéke:

$$\mathrm{E}(\ Y \mid X = 200\ ) = 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(200 - 180) = 88$$

Tehát a körülbelül 200 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 88 kg.

A számadatokból kiolvashatjuk, hogy 10 cm-rel magasabb felnőtt férfiak átlagosan 4 kg-mal nehezebbek, mint a 10 cm-rel alacsonyabbak. Tehát 1 cm magasságnövekedés átlagosan 0.4 kg testsúly növekedést eredményez. Vegyük észre, hogy a testsúly szórása és a testmagasság szórásának aránya a korrelációs együtthatóval szorozva adja ki ezt az átlagos testsúly növekedést:

$$\frac{10}{15} \cdot 0.6 = 0.4$$

4. Annak a valószínűsége, hogy egy felnőtt férfi 90 kg-nál súlyosabb – a feltételezett testmagasság függvényében – így alakul:

- $x = 170$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$\mathrm{P}(\ Y > 90 \mid X = 170\ ) = \texttt{1 - NORM.DIST(90 ; 76 ; 8 ; TRUE)} = 0.04$$

Tehát a körülbelül 170 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 4 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 180$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$\mathrm{P}(\ Y > 90 \mid X = 180\ ) = \texttt{1 - NORM.DIST(90 ; 80 ; 8 ; TRUE)} = 0.11$$

Tehát a körülbelül 180 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 11 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 190$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$\mathrm{P}(\ Y > 90 \mid X = 190\ ) = \texttt{1 - NORM.DIST(90 ; 84 ; 8 ; TRUE)} = 0.23$$

Tehát a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 23 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

- $x = 200$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

$$\mathrm{P}(\ Y > 90 \mid X = 200\ ) = \texttt{1 - NORM.DIST(90 ; 88 ; 8 ; TRUE)} = 0.40$$

Tehát a körülbelül 200 cm magas felnőtt férfiaknak körülbelül 40 %-a súlyosabb 90 kg-nál.

5. Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott felnőtt férfi 200 cm-nél magasabb:

$$\mathrm{P}(\ X > 200) = \texttt{1 - NORM.DIST(200 ; 180 ; 15 ; TRUE)} = 0.09$$

6. Tekintsünk egy tetszőleges y testsúly értéket! Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak közül csak azokat tekintjük, akiknek a testsúlya körülbelül y (kg), akkor az ő testmagasságaik szórása nem 15 (cm), hanem csak:

$$\text{SD}(\ X \mid Y = y\ ) = 15\ \sqrt{1 - 0.6^2} = 12$$

Kiemeljük, hogy ennek a feltételes szórásnak az értéke nem függ y-tól.

7. Ha a véletlenszerűen választott felnőtt férfiak testsúlya körülbelül egyforma, mondjuk y (kg), akkor a testmagasság várható értéke – a feltételezett y függvényében – így alakul:

- $y = 76$ esetén X feltételes várható értéke:

$$\text{E}(\ X \mid Y = 76\ ) = 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(76 - 80) = 176.4$$

Tehát a körülbelül 76 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 176.4 cm.

- $y = 80$ esetén X feltételes várható értéke:

$$\text{E}(\ X \mid Y = 80\ ) = 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(80 - 80) = 180.0$$

Tehát a körülbelül 80 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 180.0 cm.

- $y = 84$ esetén X feltételes várható értéke:

$$\text{E}(\ X \mid Y = 84\ ) = 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(84 - 80) = 183.6$$

Tehát a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 183.6 cm.

- $y = 88$ esetén X feltételes várható értéke:

$$\text{E}(\ X \mid Y = 88\ ) = 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(88 - 80) = 187.2$$

Tehát a körülbelül 88 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 187.2 cm.

A számadatokból kiolvashatjuk, hogy 4 kg-mal nehezebb felnőtt férfiak átlagosan 3.6 cm-rel magasabbak, mint a 4 kg-mal alacsonyabbak. Tehát 1 kg súlynövekedés átlagosan 0.9 cm testmagasság növekedést eredményez. Vegyük észre, hogy a testmagasság szórása és a testsúly szórásának aránya a korrelációs együtthatóval szorozva adja ki ezt az átlagos testsúly növekedést:

$$\frac{15}{10} \cdot 0.6 = 0.9$$

8. Annak a valószínűsége, hogy egy felnőtt férfi 200 cm-nél magasabb – a feltételezett testsúly függvényében – így alakul:

- $y = 76$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

P($X > 200 \mid Y = 76$) = `1 - NORM.DIST( 200 ; 176.4 ; 12 ; TRUE )` = 0.02

Tehát a körülbelül 76 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 2 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 80$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($X > 200 \mid Y = 80$) $=$ `1 - NORM.DIST( 200 ; 180.0 ; 12 ; TRUE )` $= 0.05$

  Tehát a körülbelül 80 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 5 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 84$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($X > 200 \mid Y = 84$) $=$ `1 - NORM.DIST( 200 ; 183.6 ; 12 ; TRUE )` $= 0.09$

  Tehát a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 9 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

- $y = 88$ esetén a feltételes valószínűség értéke:

  P($X > 200 \mid Y = 88$) $=$ `1 - NORM.DIST( 200 ; 187.2 ; 12 ; TRUE )` $= 0.14$

  Tehát a körülbelül 88 kg testsúlyú felnőtt férfiaknak körülbelül 14 %-a súlyosabb magasabb 200 cm-nél.

Kiemelünk két tényt a fentiek közül:

- $x = 190$ esetén Y feltételes várható értéke:

  $$\mathrm{E}(\ Y \mid X = 190\ ) = 80 + 0.6\ \frac{10}{15}(190 - 180) = 84$$

  vagyis a körülbelül 190 cm magas felnőtt férfiak átlagos testsúlya körülbelül 84 kg.

- $y = 84$ esetén X feltételes várható értéke:

  $$\mathrm{E}(\ X \mid Y = 84\ ) = 180 + 0.6\ \frac{15}{10}(84 - 80) = 183.6$$

  vagyis a körülbelül 84 kg testsúlyú felnőtt férfiak átlagos testmagassága körülbelül 183.6 cm.

Lehet, hogy furcsának tűnik, de mégis ez az igazság: a 190 cm magas férfiak átlagos testsúlya 84 kg, de a 84 kg testsúlyú férfiak átlagos testmagssága nem 190 cm, hanem csak 183.6 cm.

12.9. Példa: A műszer hibáját korrigáljuk

Tegyük fel, hogy egy áramkörben a feszültség névleges értéke 230 V, de az igazság az, hogy a tényleges feszültség ingazdozik, egyszer több, máskor kevesebb, mint 230 V. Tegyük fel, hogy a tényleges feszültség normális eloszlású valószínűségi változó 230 várható értékkel és 10 szórással.

Ha valakinek tökéletes műszere van, akkor a tényleges feszültséget pontosan ki tudja mérni. De ha a műszer tévedhet, és a leolvasott feszültség a tényleges feszültségnél több is kevesebb is lehet, akkor felmerül a kérdés: hogyan következtessünk a leolvasott feszültségből a tényleges feszültségre?

Tegyük fel, hogy a műszer hibája – a tényleges feszültségtől független, és normális eloszlást követ 0 V várható értékkel és 5 V szórással. Ha a leolvasott értéket a tényleges feszültség és a műszer hibájának az összege, akkor így okoskodhatunk.

Legyen X a tényleges feszültség, H a műszer hibája, Y a leolvasott érték: $Y = X + H$. A feltételek szerint

- X normális eloszlású $\mu_1 = 230$ várható értékkel és $\sigma_1 = 10$ szórással,

- H független X -től, és normális eloszlású $\mu_H = 0$ várható értékkel és $\sigma_H = 5$ szórással,

amiből következik, hogy

- Y normális eloszlású
$$\mu_2 = \mu_1 + \mu_H = 230 + 0 = 230$$
várható értékkel és
$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_H^2} = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125}$$
szórással.

Y feltételes szórása X adott értéke esetén a hiba szórásával, vagyis 5 -tel egyenlő. Ezért az

$$\mathrm{SD}(\, Y \mid X = x\,) = \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}$$

összefüggés miatt az

$$5 = \sqrt{125}\,\sqrt{1 - r^2}$$

egyenletet kapjuk, amiből a korrelációs együtthatóra az alábbi érték jön ki:

$$r = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

Ezek alapján – a tanultak szerint – a legjobb tipp Y -ból X -re az alábbi képlettel adódik:

$$x \;=\; \mu_1 \;+\; r\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,(\;y \;-\; \mu_2\;)$$

$$x \;=\; 230 \;+\; \sqrt{\frac{4}{5}}\;\frac{10}{\sqrt{125}}\,(\;y \;-\; 230\;)$$

$$x \;=\; 230 \;+\; \frac{20}{25}\,(x - 230)$$

$$x \;=\; 230 \;+\; 0.8\,(\;y \;-\; 230\;)$$

Ezek szerint, ha valaki rendszeresen következtet a leolvasott feszültségből a tényleges feszültségre, és a hiba négyzetének (vagy abszolút értékének) a várható értékét igyekszik minimalizálni, akkor – például – 240 V feszültség leolvassása esetén a tényleges feszültséget 238 V -nak kell vennie.

12.10. Gyakorló feladatok

1.

2.

13. Kovariancia

13.1. Kovariancia adatrendszerekre

13.1.1. Kétdimenziós adatrendszer fogalma

Számpároknak egy sorozatát *kétdimenziós adatrendszer*nek hívjuk. Egy számpár egy vektort is jelent:

- ha a számpár elemeit egymás mellé, azaz "egy sorba" írjuk, akkor a *sorvektor*t kapunk
- ha a számpár elemeit egymás alá, azaz "egy oszlopba" írjuk, akkor a *oszlopvektor*t kapunk

Izlés dolga, és igazából egyremegy, hogy sor- vagy oszlopvektorokkal dolgozunk, de választani kell a két lehetőség közül, és a a két lehetőséget nem szabad összekeverni. Mi itt ebben a könyvben oszlopvektorokat fogunk használni.

Vektorok összege, átlaga jól ismert fogalmak, ezért egy kétdimenziós adatrendszer *átlag*ának fogalma sem szorul sok magyarázatra. Nyilvánvaló, hogy egy kétdimenziós adatrendszer átlagának koordinátái a koordináták külön-külön vett átlagaival egyenlő.

1. Példa: Kétdimenziós adatrendszer 5 elemből. Az alábbi adatrendszer 5 számpárból áll:

x	54	55	44	44	60
y	85	83	92	65	75

Vegyük most minden (x, y) adat esetén az $x \cdot y$ szorzatot, és tekintsük ezeknek a szorzatoknak az átlagát. Ezt az átlagot a kétdimenziós adatrendszer *vegyes (második) momentum*ának nevezünk:

						átlag
$x \cdot y$	4 590	4 565	4 048	2 860	4 500	4 112.6
						vegyes momentum

A vegyes momentum fogalma akkor jut szerephez, amikor egy kétdimenziós adatrendszerből – például – az

x	54	55	44	44	60
y	85	83	92	65	75

adatrendszerből a megfelelő x és y értékek összeadásával egy új egydimenziós adatrendszert állítunk elő:

$x + y$	139	138	136	109	135

Ennek az egydimenziós adatrendszernek a második momentumát a szokásos módon kiszámíthatjuk. A második momentum értéke 17 393.4.

A középiskolai tanulmányainkból jól ismert $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ azonosság mintájára egyszerűen adódik, hogy *az összegzéssel kapott adatrendszer második momentuma egyenlő a külön-külön vett egydimenziós adatrendszerek* *második momentumainak az összegével plusz 2-szer a vegyes momentum.* A mi numerikus példánkra ez a szabály teljesül:

$$17\,393.4 = 2\,682.6 + 6\,485.6 + 2 \cdot 4\,112.6$$

Az általános formula megfogalmazása és annak algebrai úton való bizonyítása legyen az Olvasó feladata.

Ha a kétdimenziós adatrendszer elemeit oszlopvektorként kezeljük, és az adatokat egymás mellé írjuk, akkor az egymás mellé írt oszlopvektorok egy mátrixot alkotnak. A mátrixnak két sora van, és annyi oszlopa, ahány számpárból áll az adatrendszer.

Ha a kétdimenziós adatrendszer által definiált mátrixot megszorozzuk jobbról az ő transzponáltjával, és osztunk még az adatok számával (ami itt 5), akkor egy olyan 2×2-es mátrixot kapunk, melynek

- bal felső eleme az x-koordináták adatrendszerének második momentuma
- jobb alsó eleme az y-koordináták adatrendszerének második momentuma
- a bal alsó és a jobb felső eleme pedig a vegyes momentum

Az állítás igazságát a kétdimenziós példánkon ellenőrizhetjük:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 54 & 55 & 44 & 44 & 60 \\ 85 & 83 & 92 & 65 & 75 \end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{cc} 54 & 85 \\ 55 & 83 \\ 44 & 92 \\ 44 & 65 \\ 50 & 75 \end{array}} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\begin{array}{cc} 2\,682.6 & 4\,112{,}6 \\ 4\,112.6 & 6\,485{,}6 \end{array}}$$

Ennek a mátrixnak a neve: a kétdimenziós adatrendszer *második momentum mátrix*a.

13.1.2. Kovariancia és kovariancia mátrix

Ha egy kétdimenziós adatrendszernek vesszük egy elemét, és ebből az elemből kivonjuk az adatrendszer átlagát, (vagyis az első koordinátájából kivonjuk az első koordináták átlagát, és a második koordinátájából kivonjuk a második koordináták átlagát), akkor a szóbanforgó elem *cenralizáltjá*hoz jutunk. A centralizálással kapott számpár megadja a szóbanforó elemnek az átlaghoz viszonyított helyzetét. Ha az adatrendszer minden elemének vesszük a centralizáltját, akkor a kapott kétdimenziós adatrendszert az eredeti *adatrendszer centralizáltjá*nak nevezzük. Az adatrendszer centralizáltja az adatrendszernek az átlaghoz viszonyított helyzetét adja meg.

Példa: A

						átlag
x	54	55	44	44	60	51.4
y	85	83	92	65	75	80

kétdimenziós adatrendszer centralizáltja:

$x - x$ átlag	2.6	3.6	-7.4	-7.4	8.6
$y - y$ átlag	5	3	12	-15	-5

A centralizált adatrendszer vegyes momentumát az eredeti adatrendszer *kovarianciá*jának nevezzük. Egyszerűen igazolható tény, hogy

$$\text{kovariancia} \;=\; \text{vegyes momentum} \;-\; \text{első momentumok szorzata}$$

A centralizált adatrendszer momentum mátrixát az eredeti adatrendszer *kovariancia mátrixá*nak nevezzük. Nem nehéz belátni, hogy

$$\text{kovariancia mátirx} \;=\; \text{második momentum mátrix} \;-\; \text{várható értékek oszlopvektora} \cdot \text{várható értékek sorvektora}$$

A kovarinacia mátrix

- bal felső eleme az x-koordináták adatrendszerének varianciája
- jobb alsó eleme az y-koordináták adatrendszerének varianciája
- a bal alsó és a jobb felső eleme pedig a kovariancia

Az állítás igazságát a kétdimenziós példánkon ellenőrizhetjük:

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} 2.6 & 3.6 & -7.4 & -7.4 & 8.6 \\ 5 & 3 & 12 & -15 & -5 \end{array}} \cdot \boxed{\begin{array}{cc} 2.6 & 5 \\ 3.6 & 3 \\ -7.4 & 12 \\ -7.4 & -15 \\ 8.6 & -5 \end{array}} \cdot \frac{1}{5} = \boxed{\begin{array}{cc} 40.6 & 0.6 \\ 0.6 & 85.6 \end{array}}$$

Mint fentebb tisztáztuk: *az összegzéssel kapott adatrendszer második momentuma egyenlő a külön-külön vett egydimenziós adatrendszerek második momentumainak az összege plusz 2-szer a vegyes momentum.* Ezt a alkalmazva centralizált kétdimenziós adatrendszerre azt kapjuk, hogy *az összegzéssel kapott adatrendszer varianciája egyenlő a külön-külön vett egydimenziós adatrendszerek varianciáinak az összege 2-szer a kovariancia.*

13.1.3. Kovariancia mátrix transzformálódása

Ha egy kétdimenziós oszlopvektort megszorzunk balról egy 2×2 -es ún. "transzformációs" mátrixszal, akkor egy másik oszlopvektort kapunk. Ha egy ilyen szorzást megcsiálunk egy kétdimenziós adatrenszer minden oszlpvektorával, akkor egy új kétdimenziós adatrendszert kapunk. Ha az új adatrendszerre előállítjuk a előző részben leírt módon a kovariancia mátrixot, akkor az egész procedúrából balról kiemelhető a 2×2 -es transzformációs mátrix, jobbról pedig a transzformációs mátrix transzponáltja, és kiadódik a következő szabály: *az új kétdimenziós adatrendszer kovariancia mátrixa egyenlő az eredeti adatrendszer kovariancia mátrix balról megszorozva a transzformációs mátrixszal, jobbról pedig a transzformációs mátrix transzponáltjával.*

Ha a transzformációs mátrix egy olyan sorvektor, mely egy egységvektor koordinátáiból áll, akkor transzformációs mátrixszal balról szorozva egy oszlopvektort a szorzat értéke az oszlopvektornak az egységvektor irányára vonatkozó vetületét adja. Ezért *ha egy egységvektornak megfelelő sorvektorral balról, és az ő transzponáltjával jobbról szorzunk egy kovariancia mátrixot, akkor az eredmény annak az adatrendszernek a varianciáját adja, melyet akkor kapunk, ha a kétdimenziós adatrendszer elemeit a sorvektor irányára vetítjük.*

Ezért a kovariancia mátrix segítségével a kétdimenziós adatrendszer mindenféle vetületeinek a varianciáját ki lehet számolni. Ilyen értelemben a kovariancia mátrix a variancia fogalmának többdimenzióra vonatkozó kiterjesztésének tekinthető.

13.2. Kovariancia valószínűségi változókra

13.2.1. A kovariancia fogalma

Az X és az Y valószínűségi változók szorzatának $\mathrm{E}\,(X\;Y)$ várható értékét **vegyes (második) momentumnak**nak nevezzük. Az X és az Y valószínűségi változók centralizáltjai szorzatának a várható értékét **kovarianciá**nak nevezzük:

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \mathrm{E}\left(\,[X-\mathrm{E}(X)\,]\,[Y-\mathrm{E}(Y)\,]\,\right)$$

Könnyű belátni, hogy a kovarianciát úgy is megkapjuk, hogy a vegyes momentumból kivonjuk a várható értékek szorzatát:

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \mathrm{E}(X\;Y) - \mathrm{E}(X)\;\mathrm{E}(Y)$$

13.2.2. A kovariancia tulajdonságai

1. *Egy valószínűségi változó önmagával vett kovarianciája a valószínűségi változó varianciájával egyenlő:*

$$\mathrm{COV}(X,X) = \mathrm{VAR}(X)$$

2. *A kovariancia szimmetria tulajdonsága:*

$$\mathrm{COV}(Y,X) = \mathrm{COV}(X,Y)$$

3. *A kovariancia linearitási tulajdonsága:*

   - Két tagra:

$$\mathrm{COV}(\;a\;X + b\;Y\;,\;Z) = a\;\mathrm{COV}(X,\;Z) + b\;\mathrm{COV}(Y,\;Z)$$

   - Több tagra:

$$\mathrm{COV}(a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n, Y) = a_1\;\mathrm{COV}(X_1,Y) + a_2\;\mathrm{COV}(X_2,Y) + \ldots + a_n\;\mathrm{COV}(X_n,Y)$$

4. *A kovariancia abszolút értéke mindig kisebb vagy egyenlő, mint a szórások szorzata:*

$$|\mathrm{COV}(X,Y)| \le \mathrm{SD}(X)\;\mathrm{SD}(Y)$$

5. *Független valószínűségi változók között a kovariancia 0:*

$$\mathrm{COV}(X,Y) = 0$$

6. *Összeg varianciája:*

$$\mathrm{VAR}(X+Y) = \mathrm{VAR}(X) + \mathrm{VAR}(Y) + 2\;\mathrm{COV}(X,Y)$$

7. *Egymástól független vektorváltozók összegének koordinátái közötti kovariancia egyenlő a tagok koordinátái közötti kovarianciák összegével:*

   - Két tagra:
     Ha az $(X_1,Y_1),\;(X_2,Y_2)$ véletlen vektorok függetlenek egymástól, és

$$(X,Y) = (X_1,Y_1) + (X_2,Y_2)$$

     akkor

$$\mathrm{COV}(X,Y) = \mathrm{COV}(X_1,Y_1) + \mathrm{COV}(X_2,Y_2)$$

- Több tagra:
  Ha az $(X_1, Y_1), \ldots\ (X_n, Y_n)$ véletlen vektorok függetlenek egymástól, és

$$(X, Y) = (X_1, Y_1) + \ldots + (X_n, Y_n)$$

  akkor

$$\text{COV}(X, Y) = \text{COV}(X_1, Y_1) + \ldots + \text{COV}(X_n, Y_n)$$

Megjegyzés: A feltételben nem az X_1 független Y_1-tól, illetve X_2 független Y_2-től, hanem az (X_1, Y_1) vektor független az (X_2, Y_2) vektortól.

8. *Független vektor valószínűségi változók összegének koordinátái közötti kovariancia, amikor a tagok koordinátái közötti kovarianciák azonosak:* Ha az $(X_1, Y_1), \ldots\ (X_n, Y_n)$ véletlen vektorok függetlenek egymástól, és mindegyik tag esetében a koordiánáták közötti kovariancia azonos, azaz

$$\text{COV}(X_i, Y_i) = c \quad \text{minden } i\text{-re}$$

és

$$(X, Y) = (X_1, Y_1) + \ldots + (X_n, Y_n)$$

akkor az összeg koordiánáti közötti kovariancia $(c\, n)$ -nel egyenlő:

$$\text{COV}(X, Y) = c\, n$$

13.2.3. A korrelációs együttható fogalma és tulajdonságai

1. Az X és az Y valószínűségi változók standardizáltjai szorzatának a várható értékét **korrelációs együtthatójának**nak nevezzük:

$$\text{CORR}(X, Y) = \text{E}\left(\frac{X - \text{E}(X)}{\text{SD}(X)} \cdot \frac{Y - \text{E}(Y)}{\text{SD}(Y)} \right)$$

2. *A korrelációs együttható abszlút értéke mindig kisebb vagy egyenlő, mint 1:*

$$|\text{CORR}(X, Y)| \le 1$$

3. *Egy valószínűségi változónak bármely lineáris transzormáltjával vett korrelációs együtthatója* 1*-gyel egyenlő:*

$$\text{CORR}(X, aX + b) = 1$$

4. *Ha X és Y között a korreláció -1 vagy $+1$, akkor vannak olyan a és b konstansok, hogy*

$$Y = aX + b \quad \text{fennáll 1 valószínűséggel, azaz} \quad \text{P}(Y = aX + b) = 1$$

vagyis az X és Y véletlen értékek között determinisztikus lineáris kapcsolat áll fenn.

5. *Független valószínűségi változók között a korreláció 0:*

$$\text{CORR}(X, Y) = 0$$

13.2.4. A kovariancia mátrix fogalma és tulajdonságai

1. Az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó **kovariancia mátrix**ának definíciója:

   $$C = \begin{pmatrix} \text{COV}(X, X) & \text{COV}(X, Y) \\ \\ \text{COV}(Y, X) & \text{COV}(Y, Y) \end{pmatrix}$$

   azaz

   $$C = \begin{pmatrix} \text{VAR}(X) & \text{COV}(X, Y) \\ \\ \text{COV}(X, Y) & \text{VAR}(Y) \end{pmatrix}$$

   A kovariancia mátrix a variancia fogalmának általánosítása kétdimenzióra.

2. *Várható érték vektor és kovariancia mátrix transzformálódása lineáris transzofrmáció esetén.*

   Ha az **x**-síkról egy kétdimenziós eloszlást az

   $$\mathbf{u} = \mathbf{A}\ \mathbf{x}\ +\ \mathbf{b}$$

   lineáris transzformációval az **u**-síkra képezünk, akkor a kapott új eloszlás várható érték vektora a régi $\mathbf{m}_{\text{régi}}$ várható érték vektor lineáris transzformáltja:

   $$\mathbf{m}_{\text{új}} = \mathbf{A}\ \mathbf{m}_{\text{régi}}\ +\ \mathbf{b}$$

   Ha a régi eloszlás kovariancia mátrixa $\mathbf{C}_{\text{régi}}$, akkor a transzformációval kapott új eloszlás kovariancia mátrixa

   $$\mathbf{C}_{\text{új}} = \mathbf{A}\ \mathbf{C}_{\text{régi}}\ \mathbf{A}^T$$

3. *Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa.* Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa egyenlő a tagok kovariancia mátrixainak összegével.

4. *Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa, amikor a tagok kovariancia mátrixai azonosak.* Független vektor valószínűségi változók összegének kovariancia mátrixa, amikor a tagok kovariancia mátrixai azonosak, egyenlő a tagok közös kovariancia mátrixa szorozva a tagok számával.

13.3. Gyakorló feladatok

1.

2.

14. NSZT a vegyes momentumra, kovarianciára, korrelációs együtthatóra

Heurisztikus megfogalmazás: Tekintsünk egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változót. A kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásából ki lehet számolni a vegyes momentumot, a kovarianciát, a korrelációs együtthatót. Ha a kétdimenziós valószínűségi változóra N kísérletet végzünk, és a kísérleti eredmények

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_N, Y_N)$$

akkor a kísérleti eredményekből adódó kétdimenziós adatrendszer vegyes momentuma, kovarianciája, korrelációs együtthatója szintén kiszámolható. Fontos – matematikailag precízen is igazolható – tény, hogy *nagy kísérletszám esetén a kísérleti eredményekből adódó kétdimenziós adatrendszer vegyes momentuma, kovarianciája, korrelációs együtthatója körülbelül egyenlő az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlásából kiszámolt vegyes momentumával, kovarianciájával, korrelációs együtthatójával.*

14.1. Gyakorló feladatok

1.

2.

15. Kétdimenziós normális eloszlások alakja *(Extra tananyag)*

15.1. A korrelációs együttható szemléletes jelentése

Ez itt csak rövid emlékeztetője az alőadáson elhangzottaknak. A készülő jegyzetben alaposabban lesz kifejtve. Az előadás gondolatmenetének fontos részét képezi az idevonatkozó Excel fájl, ami a tárgy honlapján elérhető.

A kétdimenziós normális eloszlásokkal kapcsolatban a korrelációs együttható és az eloszlás alakja között kapcsolatot áll fenn. A kapcsolat leírásának céljából tekintsük a

$$(\mu_1 - \sigma_1 \;\;;\;\; \mu_1 + \sigma_1) \quad \text{és a} \quad (\mu_2 - \sigma_2 \;\;;\;\; \mu_2 + \sigma_2)$$

intervallumok direktszorzataként adódó téglalapot, vagy általánosabban a

$$(\mu_1 - s \cdot \sigma_1 \;\;;\;\; \mu_1 + s \cdot \sigma_1) \quad \text{és a} \quad (\mu_2 - s \cdot \sigma_2 \;\;;\;\; \mu_2 + s \cdot \sigma_2)$$

intervallumok direktszorzataként adódó téglalapot, ahol $s = 1$ vagy $s = 2$ vagy $s = 3$. Ezeket a téglalapokat a **szórások alapján felvett téglalapok**nak nevezzük. Képzeljünk el egy-egy skálát -1 -től 1 -ig a téglalapok minegyik oldalán úgy, hogy

- a vízszintes oldalak bal végében a -1, a jobb végében pedig a 1 helyezkedik el
- a függőleges oldalak alsó végében a -1, a felső végében pedig a 1 helyezkedik el

Mindegyik oldalon tekintsük most az r értékhez tartozó pontot, ahol r a korrelációs együttható. Így négy pontot jelöltünk ki a síkon. Ezen a négy ponton át nem nehéz egy olyan ellipszist rajzolni, mely belülről érinti a téglalapot. **Ez az ellipszis a normális eloszlás sűrűségfüggvényének egy színvonala**. Ez az ellipszis meghaározza a normális eloszlás alakját, mert a többi színtvonal ennek az ellipszisnek a kicsinyítsével, vagy nagyításával keletkezik.

15.2. A kovariancia mátrix sajátvektorai, sajátértékei

Egy kétdimenziós normális eloszlás sűrűséfüggvényének színtvonalai olyan ellipszisek, melyek tengelyinek irányát a kovariancia mátrix sajátvektorai adják meg. Az ellipszisek tengelyeinek hosszai pedig arányosak a sajátértékek négyzetgyökeivel.

15.3. Gyakorló feladatok

1.
2.

16. Polinomiális eloszlás közelítése kétdimenziós normális eloszlással *(Extra tananyag)*

Ha az n paraméter elég nagy, és a p_1, p_2 paraméterek se a 0-hoz se az 1-hez nincsenek túl közel, akkor a síkon vett n-ed rendű, (p_1, p_2) paraméterű polinomiális eloszlás közelíthető kétdimenziós normális eloszlással. A normális eloszlás paramétereit a polinomiális eloszlás paramétereihez úgy kell hozzáigazítani, hogy a megfelelő paraméterek (várható értékek, szórások, korrelációs együttható) megegyezzenek, vagyis

$$\mu_1 = np_1 \qquad \mu_2 = np_2 \qquad \sigma_1 = \sqrt{np_1(1-p_1)} \qquad \sigma_2 = \sqrt{np_2(1-p_2)} \qquad r = -\sqrt{\frac{p_1}{(1-p_1)}\,\frac{p_2}{(1-p_2)}}$$

16.1. Gyakorló feladatok

1.
2.

17. Többdimenziós normális eloszlások transzformációi *(Extra tananyag)*

17.1. A standard normális eloszlás lineáris transzformációi

Jön majd ide

17.2. Tetszőleges normális eloszlás lineáris transzformációi

Jön majd ide

17.3. Khí-négyzet eloszlás

Ez itt csak rövid emlékeztetője az alőadáson elhangzottaknak. A készülő jegyzetben alaposabban lesz kifejtve. Az előadás gondolatmenetének fontos részét képezi az idevonatkozó Excel fájl, ami a tárgy honlapján elérhető.

Ha n darab független standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzetét összeadjuk, akkor egy valószínűségi változóhoz jutunk. Ennek a valószínűségi változónak az eloszlását n **szabadságfokú khí-négyzet eloszlás**nak hívjuk.

17.4. Gyakorló feladatok

1.
2.

18. Lineáris regresszió

18.1. Általános probléma

Tekintsünk egy (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változót. Célunk hogy az, hogy megtaláljuk azokat az A és B konstansokat, melyekre az

$$\mathrm{E}\left((Y-(AX+B))^2\right) = \iint\limits_{R^2} (y-(Ax+B))^2 \ f(x,y)\,dx\,dy$$

várható érték miniális.

Megoldás: Ha a fenti integrálban elvégezzük a négyzetre emelést, és az integrált tagokra bontjuk, akkor hat tagot kapunk:

$$\mathrm{E}\left((Y-(AX+B))^2\right) =$$

$$= \iint\limits_{R^2} y^2 \ f(x,y)\,dx\,dy + A^2 \iint\limits_{R^2} x^2 \ f(x,y)\,dx\,dy + B^2 \iint\limits_{R^2} f(x,y)\,dx\,dy -$$

$$-2A \iint\limits_{R^2} xy \ f(x,y)\,dx\,dy - 2B \iint\limits_{R^2} y \ f(x,y)\,dx\,dy + 2AB \iint\limits_{R^2} x \ f(x,y)\,dx\,dy$$

Az itt szereplő integrálok értékei konstansokat adnak, ezért A -ra, B -re nézve egy kvadratikus formulát kaptunk. Azokat az A, B értékeket, melyreke ez a kvadratikus formula minimális, megkaphatjuk például úgy, hogy parciálisan deeriválunk A és B szerint, majd a parciális deriváltakat nullával tesszük egyenlővé, és az így kiadódó egyenletrendszert A -ra, B -re megoldjuk. A számolás részleteitől eltekintünk, csak az eredményt közöljük:

$$A_{\text{opt}} = r \ \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

$$B_{\text{opt}} = \mu_2 \ - \ r\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ \mu_1$$

Az optimumot nyújtó lineáris függvény tehát így fest:

$$y = \mu_2 + r \ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \ (x - \mu_1)$$

Az egyenletet átírhatjuk erre a – könnyebben megjegyezhető – formára is:

$$\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} = r \ \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$$

A kapott egyenes neve: **regressziós egyenes**.

18.2. Számolós példa

Legyen $X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$ és $Y = \mathrm{RND}_1$. Határozzuk meg

- X, Y, XY várható értékét,
- X, Y varianciáját, szórását,
- az X és közötti Y kovarianciáját és a korrelációs együtthatót!
- Írjuk fel a regressziós egyenes egyenletét, ha Y -ból akarunk X -re tippelni!
- Írjuk fel a regressziós egyenes egyenletét, ha X -ből akarunk Y -ra tippelni!

Megoldás:

$$\mathrm{E}\left(X\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\cdot\mathrm{RND}_2\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\right)\cdot\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\mathrm{E}\left(X^2\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1^2\cdot\mathrm{RND}_2^2\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1^2\right)\cdot\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_2^2\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\mathrm{VAR}\left(X\right)=\mathrm{E}\left(X^2\right)-\left(\mathrm{E}\left(X\right)\right)^2=\frac{1}{9}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{7}{144}$$

$$\mathrm{SD}\left(X\right)=\sqrt{\mathrm{VAR}\left(X\right)}=\sqrt{\frac{7}{144}}$$

$$\mathrm{E}\left(Y\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\right)=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{E}\left(Y^2\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1^2\right)=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{VAR}\left(Y\right)=\mathrm{E}\left(Y^2\right)-\left(\mathrm{E}\left(Y\right)\right)^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$$

$$\mathrm{SD}\left(Y\right)=\sqrt{\mathrm{VAR}\left(Y\right)}=\sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$\mathrm{E}\left(X\cdot Y\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1\mathrm{RND}_2\cdot\mathrm{RND}_1\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1^2\cdot\mathrm{RND}_2\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_1^2\right)\cdot\mathrm{E}\left(\mathrm{RND}_2\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$\mathrm{COV}\left(X;Y\right)=\mathrm{E}\left(X\cdot Y\right)-\mathrm{E}\left(X\right)\cdot\mathrm{E}\left(Y\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

$$\mathrm{CORR}\left(X;Y\right)=\frac{\mathrm{COV}\left(X;Y\right)}{\mathrm{SD}\left(X\right)\mathrm{SD}\left(Y\right)}=\frac{\frac{1}{24}}{\sqrt{\frac{7}{144}}\sqrt{\frac{1}{12}}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$y=\mu_2+r\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,\left(x-\mu_1\right)$$

$$y=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{7}}\,\frac{\sqrt{\frac{1}{12}}}{\sqrt{\frac{7}{144}}}\,\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$$y=\frac{6}{7}x+\frac{2}{7}$$

18.3. Gyakorló feladatok

1. Legyen $X = \mathrm{RND}_1 \cdot \mathrm{RND}_2$ és $Y = \mathrm{RND}_1^2$. Határozza meg

   (a) X, Y, (X, Y) sűrűségfüggvényének képletét, majd ezekből számolja ki

   (b) X, Y, XY várható értékét,

   (c) X, Y varianciáját, szórását,

   (d) az X és közötti Y kovarianciát és a korrelációs együtthatót!

   (e) Írja fel a regressziós egyenes egyenletét, ha Y -ból akarunk X -re tippelni!

   (f) Írja fel a regressziós egyenes egyenletét, ha X -ből akarunk Y -ra tippelni!

2.

19. Statisztika *(Extra tananyag)*

19.1. Khí-négyzet próba

Tekintsünk egy r elemű teljes eseményrendszert. Az egyes események valószínűségei legyenek

$$p_1 \ , \ p_2 \ , \ \dots \ , \ p_r$$

Ha N kísérletet végzünk, akkor nézhetjük, hogy a teljes eseményrendszer egyes elemei hányszor következnek be. Legyenek ezek a gyakoriság értékek:

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ \dots \ , \ X_r$$

Legyenek

$$p_1^{\text{hip}}, p_2^{\text{hip}}, \dots, p_r^{\text{hip}}$$

valamilyen **hipotetikus valószínűségek**, vagyis olyan valószínűségek, melyeket valaki csak úgy gondol, képzel, és épp a kísérleti eredményekből akarja eldönteni, hogy az események igazi valószínűségei mind megegyeznek-e az általa gondolt hipotetikus valószínűségekkel:

$$p_1 = p_1^{\text{hip}} \ , \quad p_2 = p_2^{\text{hip}} \ , \ \dots \ , \ p_r = p_r^{\text{hip}} \qquad ?$$

Az

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ \dots \ , \ X_r$$

valószínűségi változók mindegyike binomiális eloszlást követ, ezért a várhatató értékeik:

$$Np_1 \ , \quad Np_2 \ , \ \dots \ , \ Np_r$$

Ha a tényleges valószínűségek mind megegyeznek a hipotetikus valószínűségekkel, akkor az

$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ \dots \ , \ X_r$$

gyakoriságok várható értékei:

$$Np_1^{\text{hip}} \ , \quad Np_2^{\text{hip}} \ , \ \dots \ , \ Np_r^{\text{hip}}$$

Ezért ezeket a szorzatokat **hipotetikus várható értékek**nek nevezzük.

Tekintsük a gyakoriságoknak a hipotetikus várható értékektől való eltérésének a négyzetét:

$$\left(X_1 - N\,p_1^{\text{hip}}\right)^2 \ , \ \left(X_2 - N\,p_2^{\text{hip}}\right)^2 \ , \ \dots \ , \ \left(X_r - N\,p_r^{\text{hip}}\right)^2$$

aztán az alábbi hányadosokat:

$$\frac{\left(X_1 - N\,p_1^{\text{hip}}\right)^2}{Np_1^{\text{hip}}} \ , \ \frac{\left(X_2 - N\,p_2^{\text{hip}}\right)^2}{Np_2^{\text{hip}}} \ , \ \dots \ , \ \frac{\left(X_r - N\,p_r^{\text{hip}}\right)^2}{Np_r^{\text{hip}}}$$

s végül ezeknek az összegét, amit $\chi^2_{\text{megfigyelt}}$ -tel jelölünk, és **megfigyelt khí-négyzet érték**nek nevezünk:

$$\chi^2_{\text{megfigyelt}} \ = \ \frac{\left(X_1 - N\,p_1^{\text{hip}}\right)^2}{Np_1^{\text{hip}}} + \frac{\left(X_2 - N\,p_2^{\text{hip}}\right)^2}{Np_2^{\text{hip}}} + \dots + \frac{\left(X_r - N\,p_r^{\text{hip}}\right)^2}{Np_r^{\text{hip}}}$$

Tegyük fel, hogy az N kísérletszám annyira nagy, hogy hipotetikus várható értékek mindegyike nagyobb 10 -nél. (Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor az alábbi eljárás – pontatlansága miatt – nem használható.)

Be lehet látni, hogy az alábbiak igazak:

- *Ha a tényleges valószínűségek mind megegyeznek a hipotetikus valószínűségekkel, akkor a megfigyelt khí-négyzet érték közelítőleg* $r-1$ *szabadságfokú khí-négyzet eloszlást követ.*
- *Ha pedig a tényleges valószínűségek nem mind egyeznek meg a hipotetikus valószínűségekkel, akkor a megfigyelt khí-négyzet érték eloszlása jelentősen eltér az* $r-1$ *szabadságfokú khí-négyzet eloszlástól, és a megfigyelt khí-négyzet érték általában nagy.*

Ezeket a tényeket érezhetővé tehetjük, ha a megfigyelt khí-négyzet értéket az alábbi alakra hozzuk:

$$\chi^2_{\text{megfigyelt}} = N \cdot \left[\frac{\left(\frac{X_1}{N} - p_1^{\text{hip}}\right)^2}{p_1^{\text{hip}}} + \frac{\left(\frac{X_2}{N} - p_2^{\text{hip}}\right)^2}{p_2^{\text{hip}}} + \ldots + \frac{\left(\frac{X_r}{N} - p_r^{\text{hip}}\right)^2}{p_r^{\text{hip}}} \right]$$

Ugyanis ebből az alakból láthatóak, hihetőek az alábbiakiak:

- Ha a tényleges valószínűségek mind megegyeznek a hipotetikus valószínűségekkel, akkor minden i -re az $\frac{X_i}{N}$ relatív gyakoriság – nagy N esetén – közel van a van a p_i^{hip} hipotetikus valószínűséghez, és így a most felírt kifejezés szögletes zárójelében álló tagok mind kicsik. N növekedtével a tagok még kisebbek, hiszen a relatív gyakoriságok még közelebb kerülnek a valószínűséghez. Emiatt elhihető, elképzelhető, hogy a szögletes zárójelben lévő összeg értéke N -nel megszorozva (ahogy a megfigyelt khí-négyzet értéket kapjuk) olyan véletlen érték, ami közelítőleg egy jól meghatározott eloszlást követ. Ez az eloszlás történetesen az $r-1$ szabadságfokú khí-négyzet eloszlás. Tehát ilyenkor a megfigyelt khí-négyzet érték közelítőleg $r-1$ szabadságfokú khí-négyzet eloszlást követ.
- Ha pedig a tényleges valószínűségek nem mind egyeznek meg a hipotetikus valószínűségekkel, akkor van olyan i, hogy az $\frac{X_i}{N}$ relatív gyakoriság – nagy N esetén – a p_i^{hip} hipotetikus valószínűségtől különböző p_i -hez lesz közel, és így az

  $$\frac{\left(\frac{X_i}{N} - p_i^{\text{hip}}\right)^2}{p_i^{\text{hip}}}$$

  kifejezés értéke a pozitív

  $$\frac{\left(p_i - p_i^{\text{hip}}\right)^2}{p_i^{\text{hip}}}$$

  szám közelében lesz. Mivel a szögeletes zárójelben álló kifejezés a $\frac{\left(\frac{X_i}{N} - p_i^{\text{hip}}\right)^2}{p_i^{\text{hip}}}$ tagnál nagyobb, a szögletes zárójel előtt álló N -nel való szorzás – nagy N esetén – a megfigyelt khí-négyzet értéket naggyá teszi. Ha N nagyobb, akkor még nagyobbá. Tehát ilyenkor – nagy N esetén – a megfigyelt khí-négyzet érték szeret nagy lenni.

Az $r-1$ szabadságfokú khí-négyzet eloszlás segítségével tudunk választani egy χ^2_{kritikus} -sal jelölt ún. **kritikus khí-négyzet érték**et, mely arról nevezetes, hogy az $r-1$ szabadságfokú khí-négyzet eloszlást követő valószínűségi változó 0.95 valószínűséggel kisebb, 0.05 valószínűséggel nagyobb ennél a χ^2_{kritikus} -sal jelölt értéknél. (Arról, hogy itt miért éppen a 0.05 valószínűség érték áll, és nem valami más, később ejtünk szót.) A χ^2_{kritikus} értéket az $F(x)$ baloldali- vagy a $T(x)$ jobboldali eloszlásfüggvény inverzével kapjuk a

$$\chi^2_{\text{kritikus}} = F^{-1}(0.95) \qquad \chi^2_{\text{kritikus}} = T^{-1}(0.05)$$

összefüggések valamelyikéből.

Ennek segítségével így dönthetünk afelől, hogy a tényleges valószínűségek mind megegyeznek-e a hipotetikus valószínűségekkel:

- **Ha a megfigyelt khí-négyzet érték kisebb, mint a kritikus khí-négyzet érték, $\chi^2_{\text{megfigyelt}} < \chi^2_{\text{kritikus}}$, akkor arra tippelünk, hogy a tényleges valószínűségek mind megegyeznek a hipotetikus valószínűségekkel.**
- **Ha a megfigyelt khí-négyzet érték nagyobb mint a kritikus khí-négyzet érték, $\chi^2_{\text{megfigyelt}} > \chi^2_{\text{kritikus}}$, akkor arra tippelünk, hogy a tényleges valószínűségek nem mind egyeznek meg a hipotetikus valószínűségekkel.**

Ez az eljárás – a fentebb mondottak miatt – ilyen:

- *Ha a tényleges valószínűségek mind megegyeznek-e a hipotetikus valószínűségekkel, akkor kb.* 0.95 *valószínűséggel a megfigyelt khí-négyzet érték kisebb, mint a kritikus khí-négyzet érték, és így az eljárás helyesen dönt, és csak kb.* 0.05 *valószínűséggel lesz a megfigyelt khí-négyzet érték nagyobb, mint a kritikus khí-négyzet érték, ami miatt az eljárás hibázik.*
- *Ha pedig a tényleges valószínűségek nem mind egyeznek meg a hipotetikus valószínűségekkel, akkor nagy valószínűséggel a megfigyelt khí-négyzet érték nagyobb, mint a kritikus khí-négyzet érték, és így az eljárás helyesen dönt, és csak kis valószínűséggel lesz a megfigyelt khí-négyzet érték kisebb, mint a kritikus khí-négyzet érték, ami miatt az eljárás hibázik.* (Azt, hogy a "nagy valószínűséggel", "kis valószínűséggel" kifejezések pontosan mit jelentenek, itt nem vizsgáljuk.)

Eléggé elterjedt az alkalmazók körében, hogy a kritikus értéket úgy választják meg, hogy a hipotézis fennállása esetén a hipotézis elfogadásának (a helyes döntésnek) a valószínűsége 0.95, az elutasítás (a hibás döntésnek) a valószínűsége 0.05 legyen. A 0.95, 0.05 értékek kitüntetett szerepét igazából semmi sem indokolja. Egyes esetekben más **elfogadási-** és **elutasítási valószínűség**ek használata is indokolt lehet. Az elfogadási- és elutasítási valószínűségek megválasztása nem matematikai kérdés, az alkalmazók szubjektív választásán múlik.

- Ha valakinek az a fontos, hogy az eljárás alkalmazásakor a hipotézis fennállása esetén ritkábban tévedjen, akkor az eljárást a 0.95 helyett nagyobb – mondjuk – 0.99 elfogadási- és 0.01 elutasítási valószínűség értékkel – és ennek megfelelően – nagyobb kritikus értékkel kell használnia.
- Ha pedig az a fontos, hogy lehetőleg ne tévedjünk, amikor a hipotézis nem áll fenn, akkor 0.95 helyett kisebb – mondjuk – 0.90 elfogadási és 0.10 elutasítási valószínűség értékkel és így kisebb kritikus értékkel kell dolgoznunk.

A két igény, hogy se a hipotézis fennállása, se a hipotézis nem fennállása esetén ne tévedjünk, egymásnak ellentmond. Az egyik igény javítása csak a másik kárára történhet.

19.1.1. Prüntyőke fiókák száma

Már rég megfigyelték, hogy a prüntyőke madarak fészkében tavaszi költéskor a tojások száma 2, 3 vagy 4. Mostanában olvatam egy újságban, hogy valaki – elméleti kutatómunkája eredményeként – azt hozta ki, hogy

P(2 tojás) = 0.2 P(3 tojás) = 0.5 P(2 tojás) = 0.3

Én – gyakorlati oldalról – kissé utánanéztem a dolognak. Nem kis munkával 90 fészket kutattam fel. 12 esetben 2 tojást, 43 esetben 3 tojást, 35 esetben 4 tojást láttam. Tehát a korábbi jelölésekkel:

$$r = 3\,, \quad p_1^{\text{hip}} = 0.2\,, \quad p_2^{\text{hip}} = 0.5\,, \quad p_3^{\text{hip}} = 0.3\,, \quad N = 90\,, \quad X_1 = 12\,, \quad X_2 = 43\,, \quad X_3 = 35$$

A megfigyelt khí-négyzet értéket könnyűszerrel kiszámoltam: $\chi^2_{\text{megfigyelt}} = 4.46$. Ezt összevetve a 0.95 -ös elfogadási valószínűséghez tartozó $\chi^2_{\text{kritikus}} = 5.99$ -es kritikus értékkel, levontam a következtetést. Mivel $\chi^2_{\text{megfigyelt}} < \chi^2_{\text{kritikus}}$, a megfigyelésem nem mond ellent a tudós állításának, ezért elfogadtam a tudós által kijelentett valószínűség értékeket.

1. Megjegyzés: Fontos, hogy a 0.95 -ös elfogadási valószínűség jelentését ne értsük félre. A 0.95 nem azt jelenti, hogy a tudós állítása 0.95 valószínűséggel igaz. Azt sem jelenti, hogy az én ítéletem 0.95 valószínűséggel helyes. A 0.95 -ös elfogadási valószínűség az általam használt döntési eljárásnak a jellemzője: a döntési eljárás, amit én itt most egyszer használtam olyan, hogy ha igazak a

P(2 tojás) = 0.2 P(3 tojás) = 0.5 P(2 tojás) = 0.3

valószínűségek, akkor

- 0.95 a valószínűsége annak, hogy a megfigyelt khí-négyzet érték az 5.99 -es kritikus értéknél kisebbnek adódik
- 0.05 a valószínűsége annak, hogy a megfigyelt khí-négyzet érték az 5.99 -es kritikus értéknél nagyobbnak adódik

Másszóval

- 0.95 a valószínűsége annak, hogy az eljárás helyesen dönt
- 0.05 a valószínűsége annak, hogy az eljárás tévesen dönt

2. Megjegyzés: Megjegyezzük, hogy ha a 90 fészek közül 8 -ban 2 tojást, 47 -ben 3 tojást, 35 -ben 4 tojást találtam volna, akkor a megfigyelt khí-négyzet érték 8.01 -nek adódott volna, ami – 0.95 -ös elfogadási valószínűség mellett – már a tudós állításának az elutasítást indikálná.

3. Megjegyzés: Ámde a 0.95 -nél nagyobb 0.99 -es elfogadási valószínűség mellett ugyanez a 8.01 -es megfigyelt khí-négyzet érték – mivel a kritikus érték 9.21 – a tudós állításának az elfogadást indikálná. Nem meglepő, hogy ha növeljük az elfogadási valószínűséget, akkor elfogadóbbá válunk.

19.1.2. Madárfiókák helyett színes golyók

Lehet, hogy van, akinek segít a fenti probléma megemésztésében az alábbi könnyen elképzelhető modell, mely ekvivalens az előző pontban tálalt problémával.

Tegyük fel, hogy egy dobozban 10 színes golyó van: pirosak, fehérek és zöldek. Valaki azt állítja, hogy

2 piros, 5 fehér és 3 zöld golyó van a dobozban

Én nem nézhetek bele a dobozba, viszont csukott szemmel húzhatok a dobozból – mondjuk – 90 -szer, és – mielőtt visszateszem a golyókat, mindig megnézhetem a színüket.

Tegyük fel, hogy a 90 húzásból 12 esetben pirosat, 43 esetben fehéret, 35 esetben zöldet húztam. Elfogadjam-e, hogy 2 piros, 5 fehér és 3 zöld golyó van a dobozban?

Az okoskodás pontosan ugyanaz lenne, mint a prüntyőke fiókák számával kapcsolat fentebb volt. A

$$r = 3\,, \quad p_1^{\text{hip}} = 0.2\,, \quad p_2^{\text{hip}} = 0.5\,, \quad p_3^{\text{hip}} = 0.3\,, \quad N = 90\,, \quad X_1 = 12\,, \quad X_2 = 43\,, \quad X_3 = 35$$

adatokból kiszámolt megfigyelt khí-négyzet érték: $\chi^2_{\text{megfigyelt}} = 4.46$, amit összevetve a 0.95 -ös elfogadási valószínűséghez tartozó $\chi^2_{\text{kritikus}} = 5.99$ -es kritikus értékkel, elfogadtam a doboz állított összetételét.

19.1.3. Egyforma esélyűek a lottószámok?

1956 óta 3120 húzás volt az ötöslottón. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az eltelt 60 év során az egyes számokat hányszor húzták ki:

1	188	16	166	31	156	46	171	61	166	76	185
2	159	17	158	32	172	47	186	62	162	77	195
3	202	18	187	33	171	48	153	63	145	78	179
4	176	19	178	34	174	49	177	64	180	79	166
5	147	20	178	35	178	50	169	65	174	80	154
6	163	21	163	36	176	51	185	66	195	81	179
7	180	22	185	37	172	52	177	67	173	82	157
8	156	23	183	38	176	53	164	68	159	83	179
9	160	24	185	39	157	54	178	69	191	84	176
10	193	25	177	40	158	55	181	70	158	85	176
11	178	26	168	41	171	56	192	71	181	86	194
12	185	27	174	42	194	57	175	72	183	87	148
13	191	28	162	43	178	58	155	73	185	88	135
14	163	29	201	44	161	59	177	74	164	89	154
15	190	30	157	45	175	60	177	75	197	90	171

Látjuk, hogy a 3 -as számot 202 -szer, a 88 -at pedig csak 135 -ször. Mivel a 202 a 135 -nek másfélszerese, felmerülhet bennünk a gyanu, hogy a lottószámok nem egyformán valószínűek. Pedig úgy illene, hogy a 90 lottó szám egyformán valószínű legyen!

Ha a hipotézisünk az, hogy a lottószámok húzásánál minden szám valószínűsége $\frac{1}{90}$, akkor a fenti táblázatban olvasható gyakoriságokkal számolva (aki nem hiszi, számoljon utána) a megfigyelt khí-négyzet érték:

$$\chi^2_{\text{megfigyelt}} = 95.91$$

A 89 szabadságfogú khí-négyzet eloszlásból a 0.95 elfogadási szinthez tartozó kritikus érték

$$\chi^2_{\text{kritikus}} = F^{-1}(0.95) = 112.02$$

Mivel a megfigyelt khí-négyzet érték kisebb, mint a kritikus érték, a táblázat adatai nem mondanak ellent a hipotézisnek, elfogadhatjuk, hogy a lottószámok egyformán valószínűek.

19.2. U-próba

19.2.1. Döntés az átlag alapján

Tegyük fel, hogy a férfiak testmagassága a Föld minden országában normális eloszlást követ 10 cm szórással és valamilyen – az országra jellemző – várható értékkel. A várható érték más-más lehet: pl. a svédek magasabbak, a pigmeusok alacsonyabbak, de a szórásról azt feltételezzük, hogy minden országban $= 10$ cm.

Egy marslakó leszáll a Földre, kinéz az űrhajóból, és látja a nagy plakátot: "Ebben az országban a férfiak tesmagasságának a várható értéke 180 cm". A marslakó el akarja dönteni, hogy a plakát igazat beszél-e. Tanult valószínűségszámítást, tudja, hogy a várható érték az országos átlagot jelenti. Tisztában van vele, hogy az ország minden férfi emberének magasságát nem tudja megmérni, ezért 4 véletlenül odaverődő, bámészkodó férfi testmagasságát megméri. Tegyük fel, hogy ezeket az adatokat kapja: 177.3, 174.8, 184.2, 178.5 cm. Kiszámolja az átlagot, ami 178.7.

Vakarja is ám a fejét a marslakó: mert a 178.7 nem 180, ahogy a plakáton látja. Először – elhamarkodottan – azt gondolja: lám, hazudnak! De hamar rájön, hogy nagy butaság lenne, ha csak akkor adna igazat a plakáton látottaknak, ha a 4 megmért ember magasságának az átlaga pontosan 180 lenne! Hiszen annak a valószínűsége, hogy egy folytonos valószínűségi változó, mint amilyen a négy mérési eredmény átlaga, pontosan egyenlő egy adott értékkel – mint azt jól megtanulta – nullával egyenlő.

Gondolkodni kezd. A 178.7 -nek és a 180 -nak az eltérése nem túl nagy, ezért elképzelhető, hogy a várható érték mégis 180. Vagy mégse? Hiszen a 178.7 -nek és a 180 -nak az eltérése azért mégse olyan kicsike, hiszen 1 -nél azért csak nagyobb.

Segítsünk a nagy hezitálásban szenvedő marslakónak! Szeretné elkerülni, hogy hibázzon.

- Hiba lenne a 180 -as országos átlag teljesülése esetén elutasítani a 180 -as átlagot.
- De hiba lenne az is, hogy ha az országos átlag nem 180, és ő mégis elfogadja a plakáton reklámozott 180 -as átlagot.

Mivel a marslakó döntési eljárásába a véletlen is beleszól (véletlentől függ, hogy az ország sok lakosa közül éppen ki az a 4 odaverődő, bámészkodó ember, akiket megmér), nyilvánvaló, hogy bele kell törödnie abba, hogy esetleg hibázik.

Naív álmai szerint azt szeretné, hogy a döntési eljárás olyan legyen, hogy

- ha az országos átlag 180, akkor a döntési eljárás 1 valószínűséggel a 180 mellett döntsön,
- ha az országos átlag különbözik 180 -tól, akkor a döntési eljárás 0 valószínűséggel döntsön a 180 mellett.

Hamar ráébred, hogy meg kell elégednie egy olyan döntési eljárással, ami olyan, hogy

1. ha az országos átlag 180, akkor a döntési eljárás 1-hez közeli p_0 valószínűséggel a 180 mellett dönt,
2. ha az országos átlag különbözik 180 -tól, akkor a döntési eljárás p_0 -nál kisebb valószínűséggel dönt a 180 mellett.
3. ha az országos átlag nagyon különbözik 180 -tól, akkor a döntési eljárás csak kis valószínűséggel dönt a 180 mellett.

Mindebből kirajzolódik, hogy választani kell egy alkalmas $\Delta\mu_0$ értéket (hogy hogyan, arra lejjebb rávilágítunk), és

- ha az N kísérleti eredmény $overlineX_N$ átlagának és a hipotetikus $\mu_0 = 180$ értéknek az egymástól való távolsága kisebb $\Delta\mu_0$ -nél, azaz
$$\mid \overline{X}_N - \mu_0 \mid < \Delta\mu_0$$
akkor elfogadjuk a hipotézist, vagyis azt, hogy a plakát igazat mond,
- ha pedig
$$\mid \overline{X}_N - \mu_0 \mid \; > \; \Delta\mu$$
akkor elutasítjuk a hipotézist, vagyis azt mondjuk, hogy a plakát nem mond igazat.

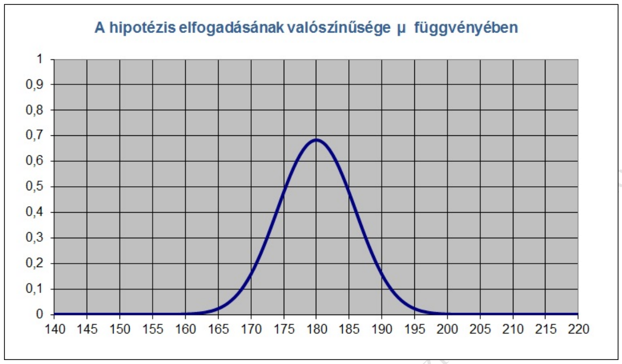
A hipotézis elfogadásának a
$$\mathrm{P}\left(\mid \overline{X}_N - \mu_0 \mid \; < \; \Delta\mu_0 \right)$$

valószínűsége nyilván a μ paraméter függvénye, hiszen az $\overline{X}_N$ átlag olyan valószínűségi változók átlaga, melyek μ várható értékű normális eloszlást követnek! A függvény képletének felírása céljából említjük, hogy $\overline{X}_N$ normális eloszlást követ μ várható értékkel és $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ szórással, ezért a hipotézis elfogadásának a valószínűsége:

$$\mathrm{P}\left(\left| \overline{X}_N - \mu_0 \right| < \Delta\mu_0 \right) = \mathrm{P}\left(\mu_0 - \Delta\mu_0 < \overline{X}_N < \mu_0 + \Delta\mu_0 \right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{(\mu_0 + \Delta\mu_0) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \Delta\mu_0) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right)$$

Ennek a függvénynek a grafikonját a mellékelt ábrán a $\mu_0 = 180,\ \sigma = 10,\ N = 4,\ \Delta\mu_0 = 5$ paraméter értékek mellett megadjuk $140 < \mu < 220$ -re.



93. ábra. *Elfogadás valószínűsége* $\mu_0 = 180,\ \sigma = 10,\ N = 4,\ \Delta\mu_0 = 5$ *esetén*

Az ábráról leolvassuk, hogy a hipotézis elfogadásának a valószínűsége $\mu = \mu_0 = 180$ esetén a legnagyobb. Azt is látjuk, hogy ha μ távolodik μ_0 -tól, akkor a hipotézis elfogadásának a valószínűsége egyre csökken és 0 -hoz tart.

A hipotézis elfogadásának a valószínűsége $\mu = \mu_0$ esetén külön figyelmet érdemel. Jelölésére a p_0 -t vezetjük be.

A p_0 valószínűség könnyen kifejezhető a $\sigma,\ N,\ \Delta\mu_0$ paraméterekkel, hiszen ha $\mu = \mu_0$, akkor

$$\Phi\left(\frac{(\mu_0 + \Delta\mu_0) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \Delta\mu_0) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) = \Phi\left(\frac{\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) - \Phi\left(\frac{-\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) =$$

$$= 2\,\Phi\left(\frac{\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) - 1$$

Tehát

$$p_0 = 2\,\Phi\left(\frac{\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) - 1$$

Ebből az egyenletből $\Delta\mu_0$ is és N is kifejezhető a többi paraméter segítségével, íme:

$$\Delta\mu_0 = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1 + p_0}{2} \right)$$

$$N = \left[\frac{\sigma}{\Delta\mu_0} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1 + p_0}{2} \right) \right]^2 \qquad \textit{felfelé kerekített értéke}$$

ahol Φ^{-1} a Φ függvény inverzét jelenti.

Ezen a ponton az internet és a számítógép adta lehetőségeket hívjuk segítségül. Az Olvassó nyissa meg a

`http://math.bme.hu/~vetier/2017_osz/A4_vill_2017_osz.html` honlapcímen a lap felső részében a mellékletek között található

`U-próba Elfogadás valószínűsége` nevű linkkel hívható

`U-proba__Elfogadas_vsz-e.xlsx` című Excel fájlt,

és a zöld hátterű cellákban található paraméterek változtatásával vizsgálja meg hogyan változik a hipotézis elfogadása valószínűségének az ábrája. Ebben a nyomtatott jegyzetben az ábrák az alábbi paraméter értékek mellett láthatóak:

1. $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 4$, $\Delta\mu_0 = 5$
2. $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 4$, $\Delta\mu_0 = 10$
3. $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 4$, $\Delta\mu_0 = 2$
4. $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 20$, $\Delta\mu_0 = 2$
5. $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 100$, $\Delta\mu_0 = 2$

Az első, a második és a harmadik esetben $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 4$, és csak a $\Delta\mu_0$ értéke változik:

- $\Delta\mu_0 = 5$
- $\Delta\mu_0 = 10$
- $\Delta\mu_0 = 2$

A harmadik, a negyedik és az ötödik esetben $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $\Delta\mu_0 = 2$, és csak az $N = 4$ értéke változik:

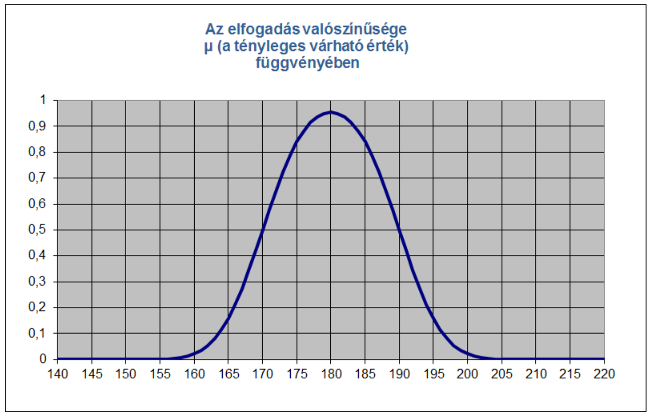
- $N = 4$
- $N = 20$
- $N = 100$

Az Olvasó feladata észrevenni, hogy a N növelésével és $\Delta\mu_0$ csökkentésével elérhető, hogy a grafikon a $\mu_0 = 180$ helyen megközelítse az 1 értéket, egyéb helyeken pedig a 0 -t.

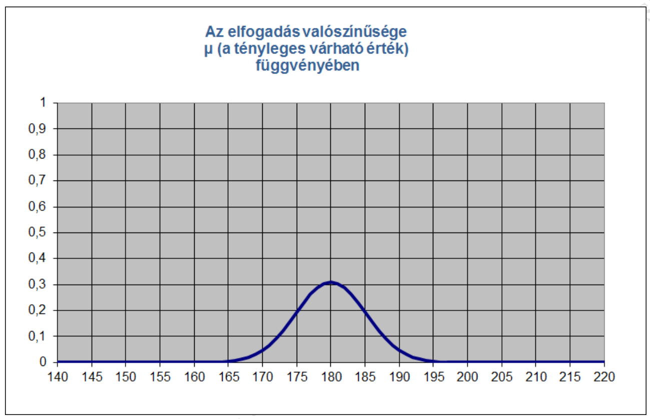
Bár a marslakó naív álmait nem lehet teljesen kielégíteni, az álmokat megközelíteni egészen jól lehet! Ennek persze ára van: a kísérletek számát kell kellően nagyra venni, amit kimondani könnyű, de a gyakorlatban megvalósítani sok esetben nem lehet. Bele kell törődni, hogy a valóság az álmoktól néha messze van. Ilyenkor általában azt szokták csinálni, hogy szubjektív igények alapján először megválasztják a p_0 értéket. Ismételjük: a p_0 megválasztásával azt szabályozzuk be, hogy a hipotézis fennállása, azaz $\mu = \mu_0$ esetén a döntési eljárásunk milyen valószínűséggel fog helyesen, azaz a hipotézis fennállása mellett dönteni. $1 - p_0$ valószínűséggel sajnos hibázni fog, mert a hipotézis tagadása mellett dönt. Valamiért szinte az egész világon a $p_0 = 0.95$ a leghasználatosabb érték. Egyéb μ -k esetén hipotézis elfogadása, ami hibának számit, olyan (a μ tényleges értékétől függő!) valószínűséggel következik be, ahogy azt fentebb kiszámoltuk, és ahogy az

`U-proba__Elfogadas_vsz-e.xlsx` című Excel fájl

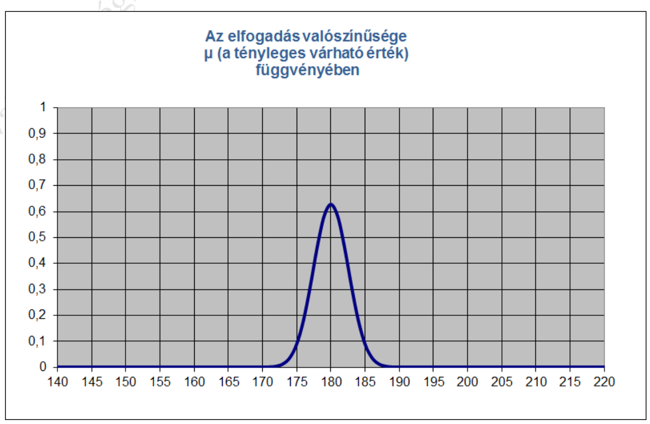
azt kirajzolja.



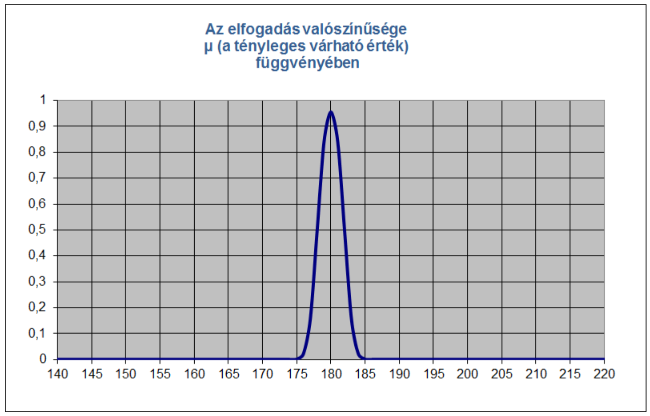
94. ábra. *Elfogadás valószínűsége* $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 4$, $\Delta\mu_0 = 10$ *esetén*



95. ábra. *Elfogadás valószínűsége* $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 4$, $\Delta\mu_0 = 2$ *esetén*



96. ábra. *Elfogadás valószínűsége* $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 20$, $\Delta\mu_0 = 2$ *esetén*



97. ábra. *Elfogadás valószínűsége* $\mu_0 = 180$, $\sigma = 10$, $N = 100$, $\Delta\mu_0 = 2$ *esetén*

1. Feladat: Fűrészgép beállításának ellenőrzése. Egy faüzemben egy automata géppel deszkákat vágnak, melyek hossza 2 méter szeretne lenni, de ez sajnos (legalább) két okból nem teljesül. Egyrészt a fűrészgép lötyög-zötyög, és emiatt a tényleges hossz véletlentől is függ. Feltesszük, hogy ez a valószínűségi változó normális eloszlást követ valamilyen várható értékkel és $\sigma = 4.5$ cm szórással. Másrészt a μ várható érték sem állandó, mert a használat során a fűrész beállítása elmozdul a kívánt $\mu_0 = 200$ értéktől. Reggel ugyan beállítják a várható értéket 200 cm -re, de néhány óra múlva μ értéke a kívánt 200 -tól már jelentősen eltérhet. Ezért időnként ellenőrizni kell, hogy a tényleges μ egyenlő-e a kívánt μ_0 értékkel. Az ellenőrzés céljából valahány – mondjuk 5 – frissen gyártott deszkát leveszenk a futószalagról és lemérnek. Veszik az átlaghosszukat, és ha az 197 és 203 cm közé esik, akkor a beállítást jónak minősítik, ellenkező esetben leállítják a gépet (hogy - nem kis munkával – újra beállítsák és újraindítsák). Kérdés: hogyan függ a hipotézis elfogadásának s valószínűsége a tényleges μ értéktől?

Megoldás: Ha a beállítás jó, vagyis $\mu = \mu_0 \ (= 200)$, akkor a helyes döntés valószínűsége:

$$p_0 = 2\,\Phi\left(\frac{\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}\right) - 1 = 2\,\Phi\left(\frac{3}{\frac{4.35}{\sqrt{10}}}\right) - 1 = 0.86$$

(A $\Delta\mu_0 = 3$ és $N = 5$ értékeket helyettesítettük be a képletbe.) Mint fentebb kiszámoltuk, tetszőleges μ esetén a hipotézis elfogadásának a valószínűsége

$$\Phi\left(\frac{(\mu_0 + \Delta\mu_0) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}\right) - \Phi\left(\frac{(\mu_0 - \Delta\mu_0) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}\right)$$

Ezért $\mu \neq \mu_0$ esetén ez a képlet adja meg a hibás döntés valószínűségét, amit 1 -ből kivonva kapjuk meg a helyes döntés valószínűségét. Néhány $\mu \neq \mu_0$ értékre táblázatba foglaltuk a helyes döntés valószínűségét:

	μ	Elfogadás valószínűsége
	191	0.00
	192	0.01
	193	0.02
	194	0.07
	195	0.16
	196	0.31
	197	0.50
	198	0.68
	199	0.82
$\mu_0 =$	200	**0.86**
	201	0.82
	202	0.68
	203	0.50
	204	0.31
	205	0.16
	206	0.07
	207	0.02
	208	0.01
	209	0.00

Táblázat: *A hipotézis elfogadásának a valószínűsége* μ *függvényében annál a döntési eljárásnál, amikor* $\Delta\mu_0 = 3$ *és* $N = 5$

Tessék meggondolni, hogy az lenne a jó, ha a táblázatban a vastagított **0.86** érték közelebb lenne az 1 -hez, a többi érték pedig a 0 -hoz! Ilyen lesz a gép következő beállítása.

2. Feladat: Fűrészgép beállításának másfajta ellenőrzése. Ha az ellenőrzés céljából nem 5, hanem 20 deszkát vizsgálnak, és annak alapján döntenek, hogy az átlaghosszuk az előzőnél rövidebb $(198; 202)$ intervallumba esik, akkor a $\mu_0 = 200$ esetén a helyes döntés valószínűsége 0.86 -ról 0.95 -re emelkedi. Néhány $\mu \neq \mu_0$ értékre a helyes döntés valószínűségét az alábbi táblázat mutatja:

	μ	Elfogadás valószínűsége
	195	0.00
	196	0.02
	197	0.16
	198	0.50
	199	0.84
$\mu_0 =$	200	**0.95**
	201	0.84
	202	0.50
	203	0.16
	204	0.02
	205	0.00

Táblázat: *A hipotézis elfogadásának a valószínűsége* μ *függvényében annál a döntési eljárásnál, amikor* $\Delta\mu_0 = 2$ *és* $N = 20$

Érdemes a két táblázat megfelelő soraiban álló valószínűségeket együtt szemrevételezni, és láttottak jelentésén elgondolkodni.

3. Feladat: Ha jól működik, ne állítgassuk túl gyakran! Elrendeli a főnök: olyan vizsgálatot kell csinálni, hogy

- 10 deszka hosszát mérjék csak meg, mert nem lehet méricskéléssel pocsékolni az időt,
- és amikor jól működik a gép (mert általában azért jól működik!), akkor legalább 99% legyen a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat elfogadja a beállítást, és ezért elkerüljük a gép fölösleges állítgatását!

Milyen kritikus értékek mellett teljesülnek ezek a kívánaságok (parancsok)?

Megoldás: A

$$\Delta\mu_0 \;=\; \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1+p_0}{2}\right)$$

. egyenletből $\Delta\mu_0 \;=\; 3.7$ jön ki, így a kritikus értékek: 203.7 és 196.3 .

	μ	Elfogadás valószínűsége
	192	0.00
	193	0.01
	194	0.05
	195	0.18
	196	0.42
	197	0.69
	198	0.88
	199	0.97
$\mu_0 \;=$	200	**0.99**
	201	0.97
	202	0.88
	203	0.69
	204	0.42
	205	0.18
	206	0.05
	207	0.01
	208	0.00

Táblázat: *A hipotézis elfogadásának a valószínűsége* μ *függvényében annál a döntési eljárásnál, amikor* $\Delta\mu_0 = 3.7$ *és* $N = 10$

4. Feladat: Hány deszka hosszából számoljuk ki az átlagot? Elrendeli a főnök, hogy a kritikus határok ne legyenek a 200-tól annyira messze, inkább 198 cm és 202 cm legyenek. Ragaszkodik korábbi elvárásához is, hogy amikor jól működik a gép, akkor legalább 99% legyen a valószínűsége annak, hogy a vizsgálat elfogadja a beállítást. Kérdés most, hogy hány deszka átlaghosszának kiszámolásával lehet ezt garantálni?

Megoldás: A

$$N \;=\; \left[\frac{\sigma}{\Delta\mu_0} \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1+p_0}{2}\right)\right]^2 \qquad \textit{felfelé kerekített értéke}$$

képletből $N = 34$ adódik. Vakarja is a fejét a főnök: 34 deszka méricskélése az bizony sok idő. De beletőrődik, hogy a $\sigma = 4.5$ cm szórás mellett a megadott $\Delta\mu_0 = 2$ cm pontosság és a $p_0 = 0.99$ biztonság elérésének – ha tetszik, ha nem – ez az ára.

	μ	Elfogadás valószínűsége
	196	0.00
	197	0.10
	198	0.50
	199	0.90
$\mu_0 =$	200	**0.99**
	201	0.90
	202	0.50
	203	0.10
	204	0.00

Táblázat: *A hipotézis elfogadásának a valószínűsége* μ *függvényében annál a döntési eljárásnál, amikor* $\Delta\mu_0 = 2$ *és* $N = 34$

19.2.2. Döntés az U-érték alapján

Világos, hogy a fentebb vizsgált

$$\left| \, \overline{X}_N - \mu_0 \, \right| \; < \; \Delta\mu_0$$

esemény ekvivalens az

$$\left| \, \frac{\overline{X}_N - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \, \right| < \frac{\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

eseménnyel. Ezért ha bevezetjük az *u-érték*nek nevezett

$$U \; = \; \frac{\overline{X}_N - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

valószínűségi változót és a

$$c \; = \; \frac{\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

értéket, akkor – egyrészt – a fentebbi

$$\left| \, \overline{X}_N - \mu_0 \, \right| \; < \; \Delta\mu_0$$

eseményt az alábbival helyettesíthetjük:

$$| \, U \, | \; < \; c$$

– másrészt – a fentebbi

$$p_0 \; = 2 \, \Phi \left(\frac{\Delta\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \right) \; - \; 1$$

egyenlet is egyszerűsödik:

$$p_0 \; = 2 \, \Phi \, (c) \; - \; 1$$

Ezzel a hozzáállással a döntési eljárás például így tervezhető meg és hajtható végre: a

$$p_0 \; = 2 \, \Phi \, (c) \; - \; 1$$

egyenletből adott p_0 -hoz a

$$c \; = \; \Phi^{-1} \left(\frac{1 + p_0}{2} \right)$$

összefüggés alapján meghatározzuk a c "kritikus" értéket, majd az U nagyságát összevetjük c -vel:

- ha $\mid U \mid \ < c$, akkor elfogadjuk a hipotézist,
- ha $\mid U \mid \ > c$, akkor elutasítjuk a hipotézist.

1. Megjegyzés: Mivel az

$$U \;=\; \frac{\overline{X}_N - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

valószínűségi változót általában U betűvel szokták jelölni, a döntési eljárás neve: *u-próba*. Kivétel az USA, ahol a Z betűt és a *z-próba* elnevezést használják.

2. Megjegyzés: Jó tiszában lenni az alábbi két ténnyel:

- A hipotézis teljesülése, azaz $\mu = \mu_0$ esetén az U érték nem más, mint az $\overline{X}_N$ érték standardizáltja, és az U eloszlása standard normális eloszlás.
- Tetszőleges μ esetén az U eloszlása normális eloszlás

$$\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} \quad \text{várható értékkel és} \quad 1 \quad \text{szórással.}$$

- Ha μ eltér $\mu = \mu_0$ -tól, vagy N értéke elég nagy, akkor U eloszlása jelentősen eltér a standard normális eloszlástól. Igazából ez a tény biztosítja, hogy a próba rendesen működjön.

19.3. T-próba

JÖN MAJD IDE.

De aki a t-próbával kapcsolatan az előadáson elhangzottakon túl kíváncsi még másra is, egyrészt hamar megöregszik, másrészt írja be

`https://www.wikipedia.org/` címen ekérhető angol nyelvű Wikipédiába, hogy

`T-test` és akkor eljut erre a címre:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Student%27s_t-test` ahonnan kíváncsiságát kielégítheti.

19.4. Tapasztalati eloszlásfüggvény

Ha egy valószínűségi változóra végzünk mondjuk N kísérletet, akkor minden x valós szám esetén megnézhetjük, hogy a kísérleti eredmények alapján mi a relatív gyakorisága annak az eseménynek, hogy a véletlen X érték kisebb mint a szóbanforgó x. Ha a relatív gyakoriságot x függvéyněben ábrázoljuk, akkor egy olyan monoton növekedő "lépcsős" függvényt kapunk, aminek grafikonja vízszintes szakaszokból áll, és a vízszintes szakaszok közötti ugrások nagysága $\frac{1}{N}$. Ezt a függvényt *tapasztalati eloszlásfüggvény*nek nevezzük.

Ha például a kísérleti eredmények:

$$0.73\,, \quad 24.50\,, \quad 10.46\,, \quad 9.81\,, \quad 22.78$$

amik sorba rendezve így festenek:

$$0.73\,, \quad 9.81\,, \quad 10.46\,, \quad 22.78\,, \quad 24.50$$

akkor a tapasztalati eloszlásfüggvény grafikonja úgy fest, ahogy a

`A tapasztalati eloszlásfüggvény 5 kísérletből`

felíratú ábrán láthatjuk. A rajz elkészítését megkönnyíti, ha az ugrásoknál függőleges szakaszokat húzunk, ahogy

`Az ugrásoknál függőleges szakaszok`

felíratú ábrán láthatjuk. Végül

`A tapasztalati eloszlásfüggvény közelíti az elméleti eloszlásfüggvényt`

felíratú ábrán pedig azt a fontos tényt szemléltetjük a $\lambda = 0.1$ paraméterű exponenciális eloszlás példáján, hogy 100 kísérlet esetén a tapasztalati eloszlásfüggvény milyen jól közelíti az elméleti eloszlásfüggvényt.

Az Olvassó megnyithatja a

`http://math.bme.hu/~vetier/2017_osz/A4_vill_2017_osz.html` honlapcímen a lap felső részében a mellékletek között található

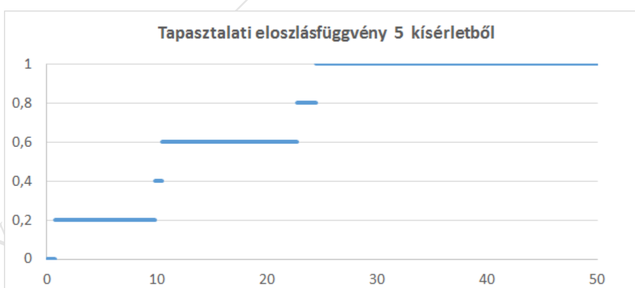
`Tapasztalati_eloszlás_függvény` nevű linkkel hívható

`Tap_el_fv.xlsx` nevű Excel fájlt,

és a számítógép `F9` gombjának ismételt nyomogatásával meggyőződhet, hogy a 100 kísérletre épített tapasztalati eloszlásfüggvény mennyire jól közelíti az elméleti eloszlásfüggvényt.

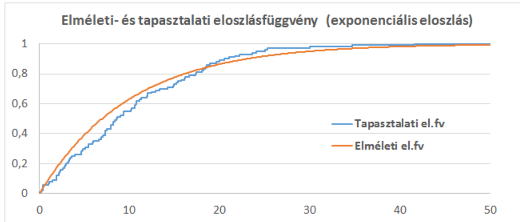
Igaz a következő fontos állítás:

Matematikai statisztika alaptétele: Ha a kísérletek száma tart a végtelenhez, akkor tetszőleges eloszlás esetén a tapasztalati elsozlásfüggvények sorozata 1 valószínűséggel egyenletesen konvergál az elméleti eloszlásfüggvényhez.



98. ábra. *A tapasztalati eloszlásfüggvény 5 kísérletből*

99. ábra. *Az ugrásoknál függőleges szakaszok*



100. ábra. *A tapasztalati eloszlásfüggvény közelíti az elméleti eloszlásfüggvényt*

19.5. Gyakorló feladatok

1.

2.

20. Folytonos, de nem abszolút folytonos eloszlás a síkon *(Extra tananyag)*

Feladat: Három izzó az áramkörben, de csak kettő érdekel. Tegyük fel, két párhuzamosan kötött – mondjuk – piros és kék izzó mellett, velük sorba kötve, van még egy harmadik, ami – mondjuk – fehér. Tegyük fel, hogy a három élettartam egymástól független, és mindegyik élettartam exponenciális eloszlást követ. Azt is feltesszük, hogy a három izzó egyforma típusú, és ezért várható értékeik egyenlőek – mondjuk – 1000 óra várható értékkel.

Az élettartamok függetlensége és azonos eloszlása miatt

- annak a valószínűsége, hogy a fehér lámpa ég ki elsőnek, $1/3$ -dal egyenlő,
- annak a valószínűsége, hogy az egyik színes lámpa ég ki elsőnek, $2/3$ -dal egyenlő.

Jelöljük X -szel azt az időtartamot, amig a piros lámpa világít, Y -nal azt, amig a kék lámpa világít, Z -vel azt, amig a fehér lámpa világít. A piros lámpa két okból fejezheti be fényes működését:

- az egyik az, hogy – puff neki! – kiég, és így nem világít tovább,
- a másik pedig az, hogy a fehér lámpa ég ki, és akkor a soros kötés miatt a piros lámpa se világít tovább.

Ezért nyilván igaz, hogy

$$X = \text{a piros lámpa élettartama és a fehér lámpa élettartama közül a kisebbik}$$

Hasonló okok miatt igaz, hogy

$$Y = \text{a kék lámpa élettartama és a fehér lámpa élettartama közül a kisebbik}$$

Nyilvánvaló, hogy

- ha a piros lámpa ég ki elsőnek, akkor $X < Y$,
- ha a kék lámpa ég ki elsőnek, akkor $X > Y$,
- ha a fehér lámpa ég ki elsőnek, akkor $X = Y$.

Mivel mindegyik lámpa $1/3$ valószínűséggel ég ki elsőnek, az

$$X < Y \qquad\qquad X > Y \qquad\qquad X = Y$$

események mindegyikének $1/3$ a valószínűsége.

Fókuszáljunk az (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változóra, vagyis figyeljük meg mennyi ideig világít a piros és mennyi ideig világít a kék lámpa! A fehér lámpával nem törödünk. Nyilván igaz, hogy (X, Y) minden (x, y) értéket 0 valószínűséggel vesz, ezért (X, Y) folytonos valószínűségi változó.

Viszont ennek az (X, Y) valószínűségi változónak – mindjárt látjuk – a korábban folytonosnak nevezett valószínűségi változókkal szemben van valami furcsasága. A korábbi folytonos valószínűségi változók esetében bármely halmaz valószínűsége a kétdimenziós sűrűségfüggvényből kettősintegrállal volt kiszámítható. Egy nulla területű halmazon vett kettős integrál értéke természetesen nulla, ezért a korábbi folytonos valószínűségi változók esetében bármely olyan esemény valószínűsége, mely nulla területű halmazhoz kérődött, nulla volt. Most viszont az az esemény, hogy (X, Y) a nulla területű $x = y$ egyenletű egyenesre esik, nem nulla: mint fentebb leszögeztük, $1/3$ -dal egyenlő!

És akkor most töredelmesen be kell ismernünk, hogy azokat a síkbeli folytonos eloszlásokat, amilyenekkel eddig foglalkoztunk, és csak egyszerűen folytonosnak neveztünk, igazából *a síkon abszolút folytonos* vagy *síkbeli sűrűségfüggvénnyel difiniált* eloszlásoknak is szokás hívni. Tehát – ezzel a terminológiával élve azt kell mondanunk, hogy – eddig mi csak abszolút folytonos síkbeli eloszlásokkal foglalkoztunk, de a rövidség kedvéért az "abszolút" jelzőt elhagytuk. Eme pongyolaság utólagos magyarázatául még az alábbi érveket hozzuk fel:

- a "folytonos" jelzőt a "diszkrét" ellenpólusaként használtuk,
- amiket folytonosnak neveztünk, azok tényleg folytonosak voltak, sőt mi több,
- abszolút folytonosak is, de a kezdő diákot nem akartuk az "abszolút" szó – talán akkor még nehezebben emészthető – jelentésével terhelni.

Ezzel a most bevezetett terminológiával élve azt mondhatjuk, hogy az előbb – lámpák segítségével – definiált (X, Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása a síkon – bár folytonos –, de nem nem abszolút folytonos,