ZH2 A változat
2007 12 07
Feladatok és megoldások

Vetier András

1. Feladat:

Egy véletlenszerű pillanatban, aminek eloszlása 0 és 1 óra között egyenletes, egy ember elkezd pattogtatni egy labdát. Az, hogy az ember mennyi ideig képes a labdát pattogtatni, a kezdési időponttól függetlenül exponenciális eloszlást követ fél óra várható értékkel.

1. Mi a valószínűsége annak, hogy emberünk 2 órakor még pattogtatja a labdát?
2. Ha emberünk a pattogtatás közben 3 km/h sebességgel sétál, akkor mennyi a pattogtatás elrontásáig megtett útjának várható értéke?

Megoldás:

$X =$ amikor elkezdi pattogtatni, $\quad Y =$ amennyi ideig pattogtatja

$f_1(x) = 1 \quad (0 < x < 1) \quad f_2(y) = \lambda e^{-\lambda y} \quad (y > 0)$ **1 pont**

$E(Y) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}, \quad$ tehát $\quad \lambda = 2$ **1 pont**

$f(x,y) = f_1(x) f_2(y) = 2e^{-2y} \quad (0 < x < 1,\ y > 0)$ **1 pont**

$X + Y =$ amikor abbahagyja a pattogtatást

$P($ 2 órakor még pattogtatja a labdát $)$

$= P(X+Y > 2) = \iint_A f(x,y)\ dx\, dy = \iint_A 2e^{-2y}\ dx\, dy$ **2 pont**

ahol $\quad A = \{(x,y) : 0 < x < 1,\ x + y > 2\}$ **2 pont**

$$\iint_A 2e^{-2y}\ dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{2-x}^{\infty} 2e^{-2y}\ dy \right) dx$$ **1 pont**

$$= \int_0^1 \left[-e^{-2y}\right]_{2-x}^{\infty} dx = \int_0^1 \left(0 - (-e^{-2(2-x)}\right) dx = \int_0^1 e^{2x-4} dx$$

$$= \left[\frac{e^{2x-4}}{2}\right]_0^1 = \frac{e^{-2} - e^{-4}}{2}$$ **1 pont**

$$= 0,0585$$

$Z =$ amilyen messzire eljut $= 3Y$

$E(Z) = 3E(Y) = 1,5$ **1 pont**

Második megoldás $P(X + Y > 2)$ meghatározására:

$f_1(x) = 1 \quad (0 < x < 1) \quad f_2(y) = 2e^{-2y} \quad (y > 0)$ **2 pont**

$Z = X + Y$ sűrűségfüggvénye konvolúcióval számolható. $z > 1$ -re:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy = \int_{z-1}^{z} 2e^{-2y}\, dy$$ **4 pont**

Megjegyzés: Az integrál határainak meghatározását részletezzük. A $-\infty$ és ∞ helyett azért kell mást írni a határokba, mert figyelembe kell venni az $f_1(x)$ és az $f_2(y)$ függvények értelmezésében szereplő egyenlőtlenségeket. A következőképpen kell eljárni.

Tekintjük az $f_1(x)$ függvény értelmezésében szereplő

$0 < x < 1$ azaz $0 < x$ és $x < 1$

egyenlőtlenségeket, továbbá az $f_2(y)$ függvény értelmezésében szereplő

$y > 0$

egyenlőtlenséget. Az egyenlőtlenségeket egybe gyűjtve az alábbi egyenlőtlenségeket kapjuk:

$0 < x \quad x < 1 \quad y > 0$

Az egyenlőtlenségekben az $x = z - y$ helyettesítést alkalmazzuk:

$0 < z - y \quad z - y < 1 \quad y > 0$

Kaptunk y-ra egy egyenlőtlenségrendszert, amiben z mint paraméter szerpel. Ezt az egyenlőtlenségrendszert kell megoldani y-ra. $z > 1$ esetén a megoldás (tessék meggongolni):

$z - 1 < y < z$

Ez azt jelenti, hogy a fenti integrálban a határok $z-1$ és z.

Bár a kérdezett valószínűség meghatározásához $r(z)$ képletére $0 < z < 1$ esetén nincsen szükség, mégis megemlítjük, hogy ilyen z értékekre a fenti egyenlőtlenségrendszer a megoldása y-ra (ezt is könnyű meggongolni):

$$0 < y < z$$

Tehát $0 < z < 1$-re a határok 0 és z:

$$r(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y)\, f_2(y)\, dy = \int_0^z 2e^{-2y}\, dy = 1 - e^{-2z} \qquad (0 < z < 1)$$

Ennek az integrálnak a kiszámítására ebben a megoldásban nincs szükség, de megjegyezzük, hogy $0 < z < 1$-re:

$$r(z) = \int_0^z 2e^{-2y}\, dy = 1 - e^{-2z} \qquad (0 < z < 1)$$

Visszatérünk a bennünket ténylegesen érdeklő $z > 1$ esethez:

$$r(z) = \int_{z-1}^{z} 2e^{-2y}\, dy$$

$$= \left[-e^{-2y}\right]_{z-1}^{z} = -e^{-2(z-1)} - e^{-2z} = e^{-2z}\left(e^2 - 1\right)$$ **1 pont**

A kérdezett valószínűség:

$$P(Z > 2) = \int_2^{\infty} r(z)\, dz = \int_2^{\infty} e^{-2z}\left(e^2 - 1\right)\, dz$$ **1 pont**

$$= \left(e^2 - 1\right) \int_2^{\infty} e^{-2z}\, dz = \left(e^2 - 1\right) \left[\frac{e^{-2z}}{-2}\right]_2^{\infty} = \left(e^2 - 1\right) \frac{e^{-4}}{2}$$

$$= \frac{e^{-2} - e^{-4}}{2}$$ **1 pont**

$$= 0,0585$$

---

2. Feladat:

Kalkulátorral generálunk egy 0 és 1 között egyenletes eloszlást követő véletlen számot. Ennek köbgyökét jelöljük X-szel. Ezután egy másik, az előzőtől független véletlen számmal megszorozzuk X-et. A szorzatot jelöljük Y-nal.

1. Határozza meg X eloszlásfüggvényének képletét!

2. Határozza meg Y sűrűségfüggvényének a képletét!

Megoldás:

$$F_1(x) = P(X < x) = P(\sqrt[3]{\text{RND}} < x) = P(\text{RND} < x^3) = x^3$$

$$(0 < x < 1) \qquad \textbf{2 pont}$$

$$f_1(x) = F_1'(x) = 3x^2 \qquad (0 < x < 1) \qquad \textbf{1 pont}$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x} \qquad (0 < y < x,\ 0 < x < 1) \qquad \textbf{2 pont}$$

$$f(x,y) = f_1(x)\ f_{2|1}(y|x) = 3x^2\ \frac{1}{x} = 3x$$

$$(0 < y < x,\ 0 < x < 1) \qquad \textbf{2 pont}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\ dx = \int_y^1 3x\ dx \qquad \textbf{2 pont}$$

$$= \frac{3}{2}(1 - y^2) \qquad (0 < y < 1) \qquad \textbf{1 pont}$$

Második megoldás Y sűrűségfüggvényének meghatározására:

(RND_1, RND_2) egyenletes eloszlású az egységnégyzeten **1 pont**

$Z = \sqrt[3]{RND_1} RND_2$ eloszlásfüggvénye:

$$R(z) = P(Z < z) = P\left(\sqrt[3]{RND_1} RND_2 < z\right) = P\left(RND_2 < z\ RND_1^{-\frac{1}{3}}\right)$$

Itt egy rajz kell az egységnégyzetről és az $y = z\ x^{-\frac{1}{3}}$ grafikonjáról

$$= z^3 + \int_{z^3}^1 x^{-\frac{1}{3}}\ dx \qquad \textbf{4 pont}$$

$$= z^3 + z\left[\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_{z^3}^1 = z^3 + z\frac{1 - z^2}{\frac{2}{3}} = z^3 + \frac{3}{2}(z - z^3)$$

$$= \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3 \qquad (0 < z < 1) \qquad \textbf{2 pont}$$

$Z =$ sűrűségfüggvénye:

$$r(z) = R'(z) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z^2 \qquad (0 < z < 1) \qquad \textbf{1 pont}$$

---

3. Feladat:

Tegyük fel, hogy az egy kilósnak nevezett kenyerek tényleges súlyának a várható értéke $1\ kg$, a szórása pedig $5\ dkg$. A névnapi bulimra 25 ilyen kenyeret viszek haza a hátizsákomban.

1. Mi a valószínűsége annak, hogy a 25 kg-tól legfeljebb 25 dkg-mal tér el a zsákomban lévő kenyér súlya?
2. Mennyi az a c érték, amire igaz az, hogy 95% valószínűséggel legalább ennyi kg kenyér lesz a zsákomban?

Megoldás:

$X =$ a zsákomban lévő kenyér súlya

X-t normális eloszlásúnak vesszük **1 pont**

$E(X) = 25 \cdot 1 = 25 \quad (kg)$ **1 pont**

$\sigma(X) = \sqrt{25} \cdot 0,05 = 0,25 \quad (kg)$ **2 pont**

$P(|X - 25| < 0,25) = P(24,75 < X < 25,25)$

$= F(25,25) - F(24,75)$ **1 pont**

$$= \Phi\left(\frac{25,25 - 25}{0,25}\right) - \Phi\left(\frac{24,75 - 25}{0,25}\right)$$

$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,68$ **1 pont**

$P(X > c) = 0,95$

$P(X < c) = 0,05$

$F(c) = 0,05$

$\Phi\left(\frac{c - 25}{0,25}\right) = 0,05$ **2 pont**

$$\frac{c - 25}{0,25} = \Phi^{-1}(0,05)$$

$c = 25 + 0,25\ \Phi^{-1}(0,05)$ **2 pont**

$= 25 - 0,25\ \Phi^{-1}(0,95)$

$= 25 - 0,25 \cdot 1,65 = 24,59$
