1. fejezet

Vektorok, terek, egyenletek

1.1. Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

E fejezetben röviden áttekintjük a sík és a tér vektoraira vonatkozó geometriai alapismereteket.

Skalár, skaláris: a *lépcső*, *létra* jelentésű latin scālae szóból ered. E szó származéka a skála szó is, mely jól őrzi az eredeti jelentést. A skalár vagy skaláris szót a matematikában szám vagy számszerű értelemben használjuk, például olyankor, amikor egy mennyiségről azt akarjuk hangsúlyozni, hogy irány nélküli, azaz nem vektor jellegű.

Vektorok. A természeti jelenségek leírásakor sok összefüggést számszerű adatokkal, ún. *skalárokkal* vagy *skalármennyiségekkel* fejezünk ki, míg mások leírásához a számadat mellett egy irány megadása is szükséges, ez utóbbiakat vektoroknak vagy vektormennyiségeknek nevezzük.

Skalárra példa egy gépkocsi sebességmérőn mutatott pillanatnyi sebessége, egy futballmérkőzés levegőjének hőmérséklete, egy Forma1-es autó hátsó kerekének súrlódási tényezője vagy a vesztaszüzek pofonerőssége egy számítógépes kalandjátékban. Vektorra példa egy sárkányrepülő szárnyára ható erő a felemelkedés pillanatában, a sebességvektora ugyanebben a pillanatban, vagy az az elmozdulásvektor, mely a megtett teljes utat mutatja.

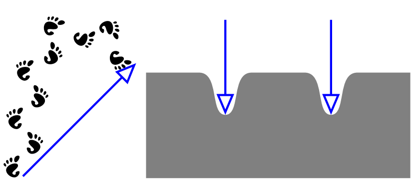
A vektor a lineáris algebra egyik legfontosabb alapfogalma, mely geometriai eredetű, de nem azonos az irányított szakasszal.

Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjain megadunk egy sorrendet, azaz kijelöljük, hogy melyik a *kezdő-* és melyik a *végpontja*. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

Vektor: a *hordozó, vivő, utazó* jelentésű latin *vector* szóból származik. A tudomány más területein hordozó anyag, az élettanban vírushordozó értelemben használják.

Alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy jelenség különböző irányított szakaszokkal is ekvivalens módon leírható. *Vektorról* akkor beszélünk, ha megadjuk azt is, hogy két irányított szakaszt mikor tekintünk ekvivalensnek. A fizikában több különböző vektorfogalmat használnak, mi csak kettővel foglalkozunk.

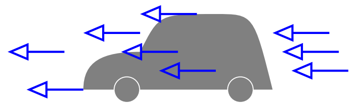
Kötött vektorokról beszélünk, ha két irányított szakaszt csak akkor tekintünk ekvivalensnek, ha kezdő és végpontjaik is egybe esnek. Természetes példa kötött vektorra az elmozdulásvektor, mely megadja, hogy egy tárgy a tér mely pontjából melyik pontjába jutott. Másik példa kötött vektorra a rugalmas testen alakváltozást okozó erőt leíró vektor (1.1. ábra).



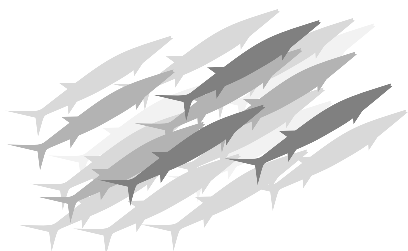
(a) *(b)*

1.1. ábra. Kötött vektorok: *(a)* elmozdulásvektor (lábnyomokkal), *(b)* rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora

A vektor fenti definíciója magától értetődőnek tűnik, hisz két kötött vektor pontosan akkor azonos, ha mint irányított szakaszok azonosak. A gyakorlatban azonban olyan esetekkel is találkozunk, és minket ezek jobban fognak érdekelni, amikor egy irányított szakasszal leírt jelenségen semmit sem változtat, ha az irányított szakaszt önmagával párhuzamosan eltoljuk. Például ha egy tárgy mozgását egy olyan irányított szakasszal jellemezzük, melynek hossza az időegység alatt megtett út hosszával egyenlő, iránya pedig a mozgás irányát jelzi, akkor mindegy hogy a tér melyik pontjából indítjuk e szakaszt, a mozgást ugyanúgy leírja (1.2. ábra). Az ilyen vektorokat *szabad vektoroknak* nevezzük. Szabad vektorra példa még a sík vagy a tér egészének eltolását megadó eltolásvektor, vagy a merev testre ható nyomatékvektor. *Szabad vektorok esetén két irányított szakaszt akkor tekintünk ekvivalensnek, ha párhuzamos eltolással egyik a másikkal fedésbe hozható*, vagyis az egymásba tolható irányított szakaszok ugyanazt a szabad vektort reprezentálják (1.2. ábra). Matematikán kívüli hasonlattal élve: ha az irányított szakasz a hal, a szabad vektor a halraj, melyben minden hal azonos irányba és azonos sebességgel halad (1.3. ábra). Összefoglalva:



1.2. ábra. Példa szabad vektorra



1.3. ábra. „a vektor egy halraj”

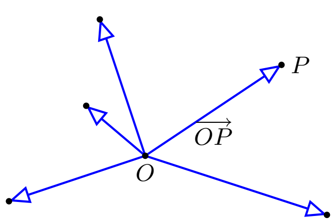
Szabad vektor. Az irányított szakaszok osztályokba sorolhatók úgy, hogy az egy osztályba került irányított szakaszok mind párhuzamosan egymásba tolhatók legyenek, a különböző osztályokba került szakaszok viszont nem. Szabad vektorokon ezeket az osztályokat értjük. A könyv további részében a jelző nélkül használt *vektor* szót *mindig szabad vektor* értelemben fogjuk használni.

Vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, pl. $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, stb. A műszaki és fizikai szakirodalomban a félkövér nagy betű is előfordul, pl. az $\mathbf{F}$ erő, a $\mathbf{B}$ indukció is vektormennyiségek.

Ha a továbbiakban egy irányított $\overrightarrow{AB}$ szakaszra azt mondjuk, hogy $\overrightarrow{AB}$ vektor, akkor mindig úgy értjük, hogy az irányított $\overrightarrow{AB}$ szakasz által reprezentált szabad vektor. Hasonlóképp, ha egy $\mathbf{a}$ vektort egy irányított szakasszal ábrázolunk, úgy értjük, hogy az irányított szakasz az $\mathbf{a}$ szabad vektor egy reprezentánsa.

Vektorok jelölése: Műszaki, fizikai szövegek szedésének tipográfiai szabályait az ISO 31-11 szabvány írja le. Eszerint a vektorok félkövér betűkkel szedendők. Kézírásban szokás aláhúzással, vagy fölé írt nyíllal jelezni a vektort (pl. $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\vec{v}\dots$), de körültekintő jegyzetelés esetén elhagyhatók a jelzések. Felsőbb matematikai vagy tudományos művek viszont gyakran elhagyják a megkülönböztetést (x, u, $v\dots$), mondván, kiderül a szövegből, hogy vektorról van-e szó.

Vektor magadása. Egy vektor megadható egy irányított szakasszal, azaz két pont és a köztük lévő sorrend kijelölésével. Valójában ennyi adat felesleges, hisz egy irányított szakasz önmagával párhuzamosan eltolva ugyanazt a vektort adja meg, ezért például kiköthető, hogy a kezdőpont a sík (tér) egy előre adott pontja legyen. Tehát az összes vektor reprezentálható, azaz megadható egy előre rögzített pontból induló irányított szakasszal. Ezt a rögzített pontot nevezzük *origónak*. Egy origóból induló irányított szakaszt egyértelműen definiálja a végpontja, így a vektorok megadásához elég egyetlen pont, a végpont megadása. Ezzel a sík vagy tér pontjai és vektorai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk (1.4. ábra). A későbbiekben gyakran fogunk egy ponthalmazt úgy jellemezni, hogy az origóból a ponthalmaz pontjaiba mutató vektorokat jellemezzük. Amikor vektorok végpontjairól beszélünk, mindig a vektorokat reprezentáló, az origóból indított irányított szakaszok végpontjaira gondolunk.

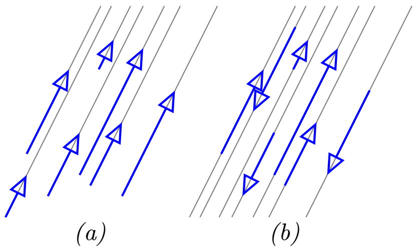


1.4. ábra. A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg.

Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja egybeesik, *zérusvektor*nak vagy *nullvektor*nak nevezzük. A zérusvektort általában félkövér zérussal, azaz $\mathbf{0}$-val jelöljük. A pontok és vektorok közti megfeleltetésben a zérusvektornak az origó felel meg.

A vektort végpontjain kívül egyéb tulajdonságaival is meg lehet adni, például a hosszával és az irányával. Vektor *hosszán* vagy *abszolút értékén* két végpontjának távolságát értjük. Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékét $|\mathbf{a}|$ jelöli. Az abszolút érték másik neve *euklideszi norma*, ugyanis speciális esete egy később részletezendő fogalomnak, a normának. Az $\mathbf{a}$ vektor euklideszi normájára az abszolút értékre emlékeztető, de attól különböző jelölés használatos: $\|\mathbf{a}\|$.

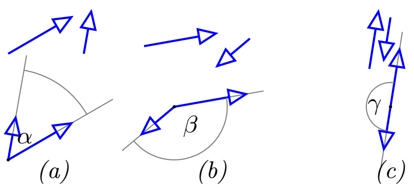
Az irány fogalmát a **??**. feladatban definiáljuk. Itt megelégszünk annyival, hogy két nemzérus vektort *azonos irányú*nak vagy *egyirányú*nak nevezünk, ha a kezdőpontjukból induló, és a végpontjukon áthaladó félegyenesek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók (1.5. *(a)* ábra). Két nemzérus vektort *kollineáris*nak vagy *párhuzamos*nak nevezünk, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Két vektort, amely párhuzamos, de nem egyirányú, *ellenkező irányú*nak nevezünk (1.5. *(b)* ábra).



1.5. ábra. *(a)* egyirányú vektorok, *(b)* kollineáris (párhuzamos) vektorok, vannak köztük egyirányúak és ellenkező irányúak

A zérusvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük, így az bármely vektorral egyirányú. Belátható, hogy a vektort egyértelműen meghatározza hossza és iránya.

Vektor irányának meghatározásakor gyakran hívjuk segítségül a szög fogalmát.



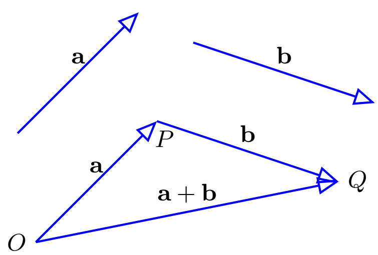
1.6. ábra. Két vektor szöge ($0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$). Az ábra felső felén a két adott vektor, alatta szögük meghatározásának módja szerepel.

1.1. definíció: Két vektor szöge. Két vektor szögén azt a szöget értjük, melyet a sík vagy tér egy tetszőleges pontjából kiinduló és az adott vektorokkal egyirányú félegyenesek zárnak be (1.6. ábra). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$ jelöli.

Két vektor szöge tehát mindig 0° és 180° – radiánban mérve 0 és π – közé esik, beleértve a határokat is. Egyirányú vektorok szöge 0, ellenkező irányúaké π.

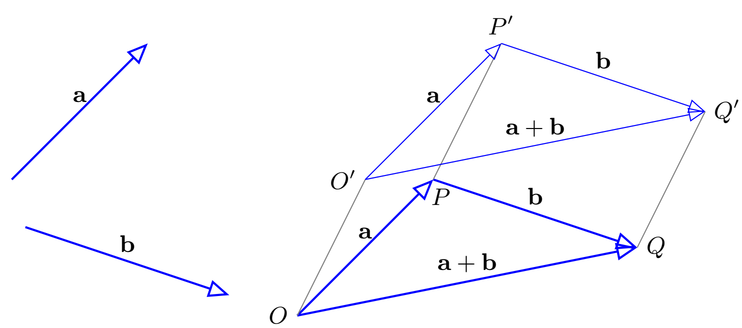
Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben. A vektorműveletek – azaz az összeadás és a számmal való szorzás – definíciója természetes módon adódik, ha a vektorok legtipikusabb alkalmazásaira gondolunk. Például magától értetődő, hogy két elmozdulás összegén az elmozgatások egymás után való elvégzését, egy eltolás kétszeresén egy azonos irányú, de kétszer olyan hosszú eltolást értsünk. Vektorok összegének definiálására az ún. háromszögmódszert használjuk:

1.2. definíció: Két vektor összege – háromszögmódszer. Legyen adva két vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Vegyünk föl egy tetszőleges O pontot. Indítsunk belőle egy $\mathbf{a}$-val egyenlő $\overrightarrow{OP}$ vektort, ennek végpontjából pedig egy $\mathbf{b}$-vel egyenlő $\overrightarrow{PQ}$ vektort. Az $\overrightarrow{OQ}$ vektort az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összegének nevezzük és $\mathbf{a} + \mathbf{b}$-vel jelöljük (ld. 1.7. ábra)



1.7. ábra. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor összege

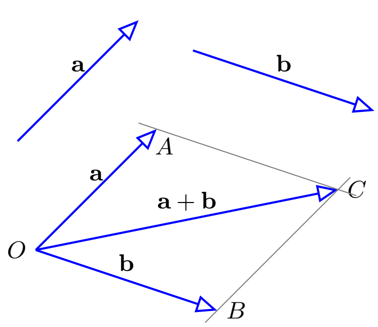
Könnyen belátható, hogy az eredmény független az O pont megválasztásától, tehát vektorok összeadásának művelete definiálható e módszerrel (1.8. ábra).



1.8. ábra. Az ábráról leolvasható annak bizonyítása, hogy az összeg vektor független az O pont megválasztásától, ugyanis az $\overrightarrow{OQ}$ és az $\overrightarrow{O'Q'}$ vektorok egyenlőek.

Egy másik módszert is ismertetünk két nem kollineáris vektor összegének megszerkesztésére:

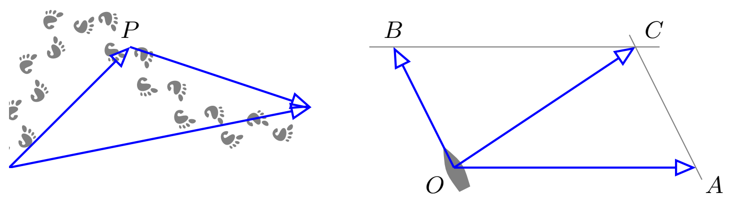
Parallelogramma-módszer. Ha a közös kezdőpontból indított $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok *nem kollineárisak*, akkor összegük a következőképp is megkapható: húzzunk $\mathbf{a}$ végpontján át egy $\mathbf{b}$ egyenesével, $\mathbf{b}$ végpontján át egy $\mathbf{a}$ egyenesével párhuzamos egyenest. Ezek metszéspontja legyen C. Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok összege (ld. 1.9. ábra).



1.9. ábra. Parallelogramma-módszer

A parallelogramma-módszer kicsit körülményesebben úgy is megfogalmazható, hogy kollineáris vektorokra is érvényes legyen.

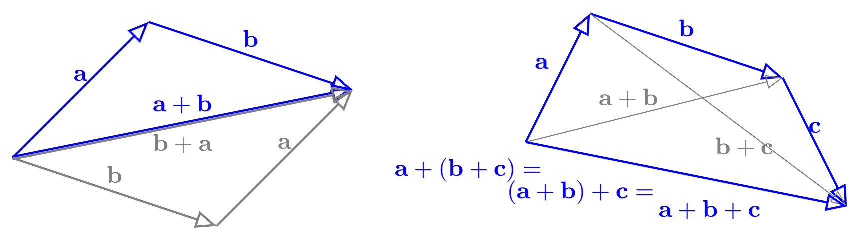
Az alkalmazásokban hol a háromszög-, hol a parallelogramma-módszer tűnik kézenfekvőbbnek, de vigyázzunk, ennek lehet az is az oka, hogy valójában nem szabad, hanem kötött vektorokról van szó, mint pl. az 1.10. *(a)* ábrán.



1.10. ábra. Az *(a)* ábrán a lábnyomok O-ból P-be, majd onnan Q-ba vezetnek. Az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ elmozdulásvektorok összege $\overrightarrow{OQ}$ (háromszögmódszer). A *(b)* ábrán a csónak az $\overrightarrow{OB}$ irányba evez, de a folyó $\overrightarrow{OA}$ irányba folyik. A két sebesség eredője, azaz összege $\overrightarrow{OC}$ (parallelogramma módszer).

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két térbeli vektor, akkor a háromszögmódszerben és a parallelogramma-módszerben is az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszok egy síkba esnek. Általában azt mondjuk, hogy néhány térbeli vektor egy síkba esik, más szóval *komplanáris*, ha van olyan sík, hogy mindegyik vektort reprezentáló irányított szakasz párhuzamosan betolható e síkba. Eszerint tehát az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorok mindig komplanárisak.

A vektorműveletek algebrai tulajdonságait nem bizonyítjuk, de az összeadás kommutativitása ($\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$) vagy asszociativitása ($\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$) könnyen leolvasható az 1.11. ábráról. Az asszociativitás következtében több tag összeadásánál elhagyható a zárójel, például az ábrabeli három vektor összegére $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ írható.



1.11. ábra. A vektorösszeadás kommutativitása és asszociativitása.

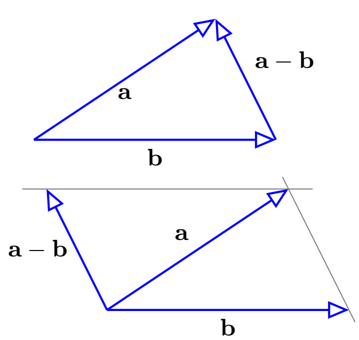
Vektorok különbsége. Megmutatható, hogy bármely két $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorhoz egyértelműen létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{x}$. Ezt a vektort $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ különbségének nevezzük és $\mathbf{a}-\mathbf{b}$-vel jelöljük.

Könnyen megkapható a különbségvektor akár a háromszög-, akár a parallelogramma-módszerrel (ld. 1.12. ábra), ha arra gondolunk, hogy $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ az a vektor, melyet $\mathbf{b}$-hez adva $\mathbf{a}$-t kapunk, azaz

$$\mathbf{a}=\mathbf{b}+(\mathbf{a}-\mathbf{b}).$$

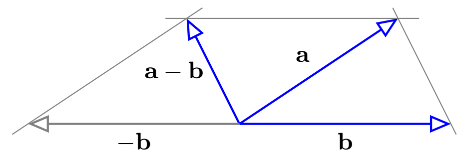
Az 1.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha a $\mathbf{b}$ vektorral egyenlő hosszúságú, de ellenkező irányú vektort $-\mathbf{b}$ jelöli, akkor fönnáll az $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ összefüggés, és így az is igaz, hogy $\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=\mathbf{0}$.

Érdekes megjegyezni, hogy ha P és Q két tetszőleges pont, akkor az $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ vektort akkor is ismerjük – hisz az a $\overrightarrow{PQ}$ vektor – ha az O pontot nem. Sok hasonló jelenség vezetett a *torzor* fogalmához, melyet egy rövid széljegyzetben ismertetünk.



1.12. ábra. A különbségvektor kiszámítása háromszög- és parallelogramma-módszerrel.

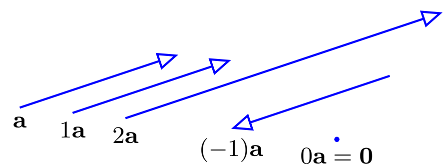
Torzor: a modern matematika fogalma. Néhány példa, mielőtt defini-



1.13. ábra. Az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ szemléltetése.

VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL. Legyen k valós szám. Az $\mathbf{a}$ vektor k-szorosán azt a vektort értjük, melynek hossza az $\mathbf{a}$ hosszának $|k|$-szorosa, iránya

- tetszőleges, ha $k = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$,
- megegyezik $\mathbf{a}$ irányával, ha $k > 0$, és
- ellentétes, ha $k < 0$ (ld. 1.14. ábra).



1.14. ábra. Vektor skalárszorosai

A skalárral való szorzás definíciójából azonnal látszik, hogy minden $\mathbf{a}$ vektorra $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

E paragrafus végén összefoglaljuk a vektorműveletek legfontosabb tulajdonságait, melyek segítségével később általánosítani fogjuk a vektor fogalmát.

1.3. TÉTEL: A VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI. Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:

(a)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	*(e)*	$r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$
(b)	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	*(f)*	$r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}$
(c)	$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	*(g)*	$(r + s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$
(d)	$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	*(h)*	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség.

Ha vektorokra a skalárral való szorzás és az összeadás műveletét alkalmazzuk, akkor e vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk. Pontosabban:

1.4. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ. Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,... $\mathbf{a}_k$ vektorok *lineáris kombináció*ján egy

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor *előáll* az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.

Gyakori feladat, hogy egy vektort elő kell állítani más vektorok lineáris kombinációjaként, ha egyáltalán lehet.

Ha egy vektort egy skalárral beszorzunk, az előző definíció szerint egy lineáris kombinációját kapjuk, mely vele párhuzamos, azaz kollineáris. Ennél több is igaz:

1.5. TÉTEL: VEKTORRAL PÁRHUZAMOS VEKTOROK. Ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor bármely párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{a}$ skalárszorosa, azaz van olyan c valós szám, hogy $\mathbf{v} = c\mathbf{a}$, más szóval $\mathbf{v}$ előáll az $\mathbf{a}$ valamely lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő c konstans egyszerűen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados (-1)-szerese. ■

A háromszögmódszerből jól látszik, hogy két tetszőleges vektor bármely lineáris kombinációja velük komplanáris vektor lesz. Az állítás megfordítása is igaz:

1.6. TÉTEL: KÉT VEKTORRAL EGY SÍKBA ESŐ VEKTOROK. Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egy síkba eső $\mathbf{v}$ vektor előáll az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan v_1 és v_2 konstans, hogy $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható a **??**. ábráról. A $\mathbf{v}$ végpontjából húzzunk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött nem elfajuló parallelogramma két oldala az előző tétel szerint $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ konstansszorosa, melyek összege a parallelogramma szabály szerint épp $\mathbf{v}$. Előállítottuk tehát $\mathbf{v}$-t $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2.$$

a $\mathbf{v}$ vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 = (w_2 - v_2)\mathbf{a}_2$. Mivel $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fönn, ha $(v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) = 0$, azaz ha $v_1 = w_1$ és $v_2 = w_2$. Tehát a felbontás egyértelmű. ■

Abban nincs semmi meglepő, hogy a tér három nem egy síkba eső vektorának bármely lineáris kombinációja térbeli vektor, az állítás megfordítása viszont igen fontos:

1.7. TÉTEL: TÉRBELI VEKTOROK. Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem egy síkba eső vektorok, akkor a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora előáll az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan v_1, v_2 és v_3 konstans, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3. \tag{1.1}$$

Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás alapötlete az, hogy a $\mathbf{v}$ vektor V végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az $\mathbf{a}_3$ vektorral, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkját egy C pontban metszi. Az $\overrightarrow{OC}$ vektor pedig az előző tétel szerint egyértelműen előáll $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként (**??**. ábra), azaz $\overrightarrow{OC} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$. Másrészt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$, ahol $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$, így $\overrightarrow{CV} = v_3\mathbf{a}_3$ valamely v_3 valósra. Tehát $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$.

Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2 + w_3\mathbf{a}_3$$

a $\mathbf{v}$ két felbontása. Ekkor $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 + (v_2 - w_2)\mathbf{a}_2 + (v_3 - w_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Ez azt jelenti, hogy ha $v_1 \neq w_1$, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_2 - \frac{v_3 - w_3}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_3.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem esnek egy síkba. Így tehát $v_1 = w_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $v_2 = w_2$ és $v_3 = w_3$, azaz az (1.1) előállítás egyértelmű. ■

Az előző két tételből világos, hogy a tér három vektora vagy egy síkba esik, és akkor valamelyik vektor a másik kettő lineáris kombinációja, vagy nem esnek egy síkba, és akkor egyikük sem áll elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. Ez esetben viszont a tér minden vektora előáll az ő lineáris kombinációjukként. Látjuk, alapvető fogalom az, hogy egy vektor kifejezhető-e más vektorok lineáris kombinációjaként.

1.8. DEFINÍCIÓ: VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE. Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor *lineárisan független* az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,... $\mathbf{a}_n$ ($n \geq 1$) vektoroktól (vagy e vektorokból álló vektorrendszertől), ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,... $\mathbf{a}_n$ ($n \geq 2$) vektorok *lineárisan függetlenek* (vagy az e vektorokból álló vektorrendszer *lineárisan független*), ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük *függ* a többitől, akkor e vektorokat *lineárisan összefüggőeknek* nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.

Például egy térbeli vektor, mely nem esik egy adott síkba, független a síkba eső vektorok bármely rendszerétől (**??**. *(a)* ábra). Egy kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai lineárisan függetlenek (**??**. *(b)* ábra). Általában: a sík bármely két nem kollineáris vektora lineárisan független, hasonlóképp, a tér bármely három nem komplanáris, azaz nem egy síkba eső vektora lineárisan független.

Az 1.6. tétel tehát a következőképp fogalmazható át:

1.9. TÉTEL: SÍKBELI VEKTOR FELBONTÁSA. Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$

Hasonlóképp az 1.7. tétel így fogalmazható át:

1.10. TÉTEL: TÉRBELI VEKTOR FELBONTÁSA. Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

A következő szakaszban e két tétel lesz alapja a koordinátarendszer bevezetésének.

Speciális lineáris kombinációk. A sík és a tér bizonyos konfigurációi jól jellemezhetők lineáris kombinációkkal, ha a kombinációs együtthatókra kikötünk bizonyos feltételeket.

1.11. PÉLDA: KÉT PONTON ÁTMENŐ EGYENES JELLEMZÉSE. Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Jellemezzük az összes olyan $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ lineáris kombinációt, melynek végpontja az A és B ponton átmenő egyenes van.

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, és $\mathbf{x}$ mutasson az AB egyenes valamely X pontjára, azaz legyen $\mathbf{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BA}$ valamilyen r valós számra, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós r számra az $r\mathbf{a}+(1-r)\mathbf{b}$ vektor végpontja az AB egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél $r+s=1$. ■

1.12. PÉLDA: INTERVALLUM PONTJAINAK JELLEMZÉSE. Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Jellemezzük az A és B pontot összekötő szakasz összes pontját az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok lineáris kombinációival!

MEGOLDÁS. Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a $\overrightarrow{BX}=r\overrightarrow{BA}$ összefüggés csak 0 és 1 közé eső r értékekre igaz. Tehát

$$\mathbf{x}=r\mathbf{a}+(1-r)\mathbf{b},\ \text{ahol } 0\le r\le 1.$$

Másként fogalmazva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok a $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben $r+s=1$ és $0\le r,s\le 1$. ■

Hasonló összefüggés igaz három vektor esetén is, azaz megmutatható, hogy a nem kollineáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjaira fektetett sík pontjaiba pontosan azok a vektorok mutatnak, melyeket $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ alakba írva $r+s+t=1$. Ha még azt is kikötjük e három számról, hogy legyen $0\le r,s,t\le 1$, akkor az $r\mathbf{a}+s\mathbf{b}+t\mathbf{c}$ alakú vektorok a három vektor végpontja által meghatározott háromszög pontjaiba mutatnak (ld. ???. feladat).

1.13. TÉTEL: SZAKASZT $m:n$ ARÁNYBAN OSZTÓ PONT. Ha az $\overline{AB}$ szakaszt a P pont úgy bontja ketté, hogy $|\overline{AP}|:|\overline{PB}|=m:n$, akkor bármely O pontra igaz, hogy

$$\overrightarrow{OP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Speciálisan, az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjába az

$$\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

vektor mutat.

BIZONYÍTÁS. Ha $|\overline{AP}|:|\overline{PB}|=m:n$, akkor $|\overline{AB}|:|\overline{PB}|=(m+n):n$, amiből $\overrightarrow{BP}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$. De $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$ és $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, így $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az $m=n=1$ esetben kapjuk, és ekkor valóban $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$. ■

Távolság és szög: skaláris szorzás. A fizikában az erő által végzett munka az út hosszának és az erő elmozdulás irányába eső merőleges vetülete hosszának szorzata. Vagyis két vektorjellegű mennyiségből egy skalármennyiséget kapunk eredményül. Ha $\mathbf{F}$ jelöli az erővektort, $\mathbf{s}$ az elmozdulásvektort, $\mathbf{F}_s$ az elmozdulás irányába eső merőleges vetületi vektort és γ az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{s}$ vektorok hajlásszögét, akkor a munka értéke $|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}|=|\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos\gamma$. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.14. DEFINÍCIÓ: KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA. Két vektor *skaláris szorzat*án a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok skaláris szorzatát $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ jelöli, tehát

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor a két vektor szöge, s így annak koszinusza sem határozható meg egyértelműen, a skaláris szorzat viszont ekkor is egyértelmű, éspedig 0, hisz a zérusvektor abszolút értéke 0, és 0 bármivel vett szorzata 0.

Egy tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0 = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

Szokás $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$-vel is jelölni, de ezt e könyvben nem fogjuk használni a mátrixszorzással való összekeverés elkerülése érdekében. Hasonlóképp nem fogunk $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ helyett $\mathbf{a}^2$-et írni.

1.15. tétel: Mikor 0 a skaláris szorzat. Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra.

Bizonyítás. ($\Longleftarrow$) Ha $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, akkor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = \pi/2$, azaz $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, tehát $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

($\Longrightarrow$) Ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$. Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektoréra merőlegesnek tekinthető. Ha viszont $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ és $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, akkor $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, a cos függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumban csak $\pi/2$-ben van zérushelye, tehát a két vektor merőleges egymásra. ■

1.16. definíció: Egységvektor. Minden olyan vektort, melynek abszolút értéke 1, egységvektornak nevezünk.

Ha $\mathbf{a}$ egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ugyanis abszolút értéke 1:

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

1.17. tétel: Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése. Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor az $\mathbf{a}' = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}$ vektor az $\mathbf{a}$ vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére való merőleges vetülete. Az $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}$ szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha $\mathbf{a}'$ és $\mathbf{e}$ egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, azaz abszolút értéke 1, akkor $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e} = |\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{e})_\angle$, ez pedig a koszinusz függvény definíciója szerint $\mathbf{a}$ merőleges vetületének előjeles hosszát jelenti. E szám $\mathbf{e}$-szerese pedig egy $\mathbf{e}$ irányú, és ilyen hosszú vektort ad, mely épp $\mathbf{a}$ vetületi vektora. ■

Jelölje a továbbiakban az $\mathbf{a}$ vektornak a $\mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektorát $\operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$. Eszerint ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}}\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}.$$

Alapvető feladat egy vektornak egy másikkal párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére való felbontása, amit másként merőleges összetevőkre bontásnak nevezünk.

1.18. tétel: Vektor felbontása merőleges összetevőkre. Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ a sík vagy a tér két vektora, és $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}$-nak a $\mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}.$$

Az $\mathbf{a}$-nak a $\mathbf{b}$ egyenesére merőleges összetevője

$$\mathbf{a} - \operatorname{proj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}.$$

A bizonyítást feladatnak hagyjuk, de megjegyezzük, hogy az első képlet következik az egységvektorral szorzás geometriai jelentéséről szóló tételből (1.17. tétel), míg az állítás második képlete abból, hogy a két összetevő összege $\mathbf{a}$.

1.19. TÉTEL: A SKALÁRIS SZORZÁS TULAJDONSÁGAI. Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:

(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativitás)

(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ (disztributivitás)

(c) $r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b})$

(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A bizonyítást most az olvasóra hagyjuk, de vissza fogunk még térni ezekre a tulajdonságokra a vektorok koordinátás alakjának vizsgálatakor.

Merőlegesség és orientáció: vektori szorzás. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymásra merőleges nemzérus vektorok a síkban. Ekkor merőlegesek $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ is, azaz $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = (\mathbf{a}, -\mathbf{b})_\angle = \pi/2$. Csak az $\mathbf{a}$ ismeretében meg tudjuk-e különböztetni a $\mathbf{b}$ és $-\mathbf{b}$ vektorokat? Hasonló kérdés a térben is fölmerül: ha $\mathbf{c}$ merőleges a nem kollineáris $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok mindegyikére, akkor $-\mathbf{c}$ is. Vajon $\mathbf{c}$ és $-\mathbf{c}$ hogy különböztethető meg egymástól?

A válaszhoz a sík, illetve tér irányításának, más szóval orientációjának fogalma vezet. E fogalmat precízen később definiáljuk (ld. ???. szakasz), az alapgondolat viszont egyszerű. A síkban a két független vektorból álló párokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a tenyérrel fölfelé fordított jobb vagy bal kezünk első két ujjával szemléltethetőek (**??**. ábra) (hüvelyk az első, mutató a második vektor). Hasonlóképp: a térben a független vektorokból álló hármasokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy jobb vagy bal kezünk első három ujjával szemléltethetőek (**??**. ábra). Aszerint, hogy egy vektorpár a síkban, illetve egy vektorhármas a térben melyik osztályba esik, azt mondjuk, hogy *jobbrendszert*, illetve *balrendszert* alkot. A síkban ezt azzal is ki tudjuk fejezni, hogy két független vektor szögét előjellel látjuk el, nevezetesen pozitívval, ha jobbrendszert, és negatívval, ha balrendszert alkotnak. Az így kapott szöget a két vektor *irányított szögének* nevezzük. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ irányított szögét $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\sphericalangle$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = (\mathbf{b}, \mathbf{a})_\angle$, addig $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\sphericalangle = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_\sphericalangle$, és ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\sphericalangle = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})_\sphericalangle = -\pi/2$. Ez tehát a válasz a paragrafus elején feltett kérdésre.

A fizikában több olyan jelenség is van, melyben két térbeli vektorhoz keresünk egy mindkettőre merőleges harmadikat, melynek az irányát is meg kell adni. Legszebb példa talán a mágneses térben mozgó töltés, melyre a mágneses tér irányára és a mozgásirányra is merőleges erő hat. Konkrétabban, ha $\mathbf{B}$ egy homogén mágneses tér indukcióvektora, és egy egységnyi pozitív töltés $\mathbf{v}$ sebességgel mozog e térben, akkor a rá ható $\mathbf{F}$ erő abszolút értéke

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{v}||\mathbf{B}| \sin(\mathbf{v}, \mathbf{B})_\angle,$$

$\mathbf{F}$ merőleges $\mathbf{v}$-re és $\mathbf{B}$-re, valamint $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{F}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. Ha az elemi részecske negatív töltésű, akkor e vektorok balrendszert alkotnak. Hasonló összefüggés érvényes a forgatónyomaték számításánál is (ld. az 1.1.2. feladatot). Ezek általánosítása a következő definícióhoz vezet:

1.20. DEFINÍCIÓ: VEKTORI SZORZAT. A 3-dimenziós tér két vektorának *vektori szorzatán* (külső szorzatán) azt a vektort értjük, melynek

(a) *abszolút értéke* a két vektor abszolút értékének és a közbezárt szög szinuszának szorzata,

(b) *iránya* merőleges mindkét vektor irányára és az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

E definíció alapján is kimondható: zérusvektor vektori szorzata bármely vektorral zérusvektort ad, hisz annak hossza 0, iránya tetszőleges, így kielégíti a definícióbeli két feltételt.

Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektori szorzatát $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b”-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ egy vektor, melyre

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle,$$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

1.21. tétel: Mikor 0 a vektori szorzat. Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

Bizonyítás: ($\Longleftarrow$) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak (más szóval kollineárisak), akkor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$ vagy π, tehát $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, így $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|0 = 0$, azaz $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$.
($\Longrightarrow$) Ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$. Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektoréval párhuzamosnak tekinthető. Ha viszont $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ és $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$, akkor $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, a szinusz függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumban a 0 és a π helyen van zérushelye, tehát a két vektor vagy egyirányú, vagy ellenkező irányú, tehát párhuzamos.

1.22. tétel: Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése. Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által meghatározott parallelogramma területének mérőszámával egyenlő.

Bizonyítás: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített parallelogramma oldalainak hossza $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$, az $\mathbf{a}$ oldalhoz tartozó magassága pedig $m = |\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$. A parallelogramma területe $|\mathbf{a}|m = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ (**??**. ábra).

1.23. példa: i, j, k vektori szorzata. Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ három egymásra páronként merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk művelettáblát vektori szorzataikról!

Megoldás. Mivel $(\mathbf{i},\mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i},\mathbf{j})_\angle = 90°$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{j}| = 1$, azaz $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ is egységvektor. Ráadásul $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ merőleges $\mathbf{i}$-re és $\mathbf{j}$-re, és $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ valamint $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. Ebből következik, hogy $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$. Hasonlóképp $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$. Ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jobbrendszert alkot, akkor $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ és $\mathbf{k}$ balrendszert, így $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Mindezeket összefoglalva a **??**. ábra művelettábláját kapjuk.

E három vektor közti szorzatok könnyen megjegyezhetőek, ha egy szabályos háromszög csúcsaira írjuk őket pozitív körüljárás szerint. Ekkor két különböző vektor szorzata a harmadik, ha a két vektor pozitív körüljárás szerint követi egymást, egyébként a harmadik vektor -1-szerese (**??**. ábra). ■

1.24. tétel: Vektori szorzás tulajdonságai. Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

(a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)
(b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ (disztributivitás)
(c) $r(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (r\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times(r\mathbf{b})$
(d) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2}$

A tétel bizonyítása megtalálható a feladatok megoldásai közt.

Vektori szorzat.

1° Mutassuk meg, hogy ha **u** merőleges a **v** és **w** vektorokra, akkor merőleges minden lineáris kombinációjukra is.

2▲ Egy merev test legyen rögzítve az O pontjában, egy **F** erő pedig hasson a P pontjában. A P ponton átmenő, **F** irányú egyenesnek az O-tól való távolságát az erő karjának nevezzük. Az **F** hatására a test O körül elfordul. Ennek jellemzésére tudnunk kell a forgás tengelyét, a forgás „nagyságát”, és azt, hogy a tengely körüli két forgásirány közül melyikről van szó. Erre alkalmas lehet egy vektor – ezt nevezzük forgatónyomatéknak –, melynek iránya a forgástengellyel párhuzamos, hossza a forgás nagyságát írja le, és a forgástengellyel párhuzamos két vektorirány a két forgásirányhoz tartozik. Hogyan definiálható a forgatónyomaték vektor, ha tudjuk, hogy abszolút értéke az erőkar hosszának és az erő abszolút értékének szorzata?

Az erő karja $|\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_\angle$, így az **M** forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}||\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_\angle.$$

A forgás tengelye nyilván merőleges **F**-re és $\overrightarrow{OP}$-re is, csak abban kell megegyezni, hogy az $\overrightarrow{OP}$, **F** és **M** vektorok jobb- vagy balrendszert alkossanak. A fizikusok a jobbrendszert választották, tehát a forgatónyomaték az $\mathbf{M} = \overrightarrow{OP}\times\mathbf{F}$ vektori szorzattal definiálható.

3• Három lineárisan független vektornak hány sorrendje van? E sorrendek közül hány alkot jobb- és hány balrendszert?

Három különböző dolog (így három vektor is) hatféleképp rakható sorba. Ha az **a**, **b** és **c** vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor ugyancsak jobbrendszert alkotnak a **b**, **c**, **a** és a **c**, **a**, **b** vektorhármasok is. A további három esetben, azaz a **c**, **b**, **a**, a **b**, **a**, **c** és az **a**, **c**, **b** hármasok esetén balrendszert kapunk. A „bizonyítás” egyelőre a kezünk három ujjáról való leolvasással történik. Később matematikai bizonyítást is adunk, lásd ???.

4° **Szögfelező.** Legyenek **a** és **b** nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy a $|\mathbf{b}|\mathbf{a}+|\mathbf{a}|\mathbf{b}$ vektor felezi **a** és **b** szögét!

Egyik lehetőség a megoldásra: $||\mathbf{b}|\mathbf{a}| = ||\mathbf{a}|\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, ezért a parallelogramma-módszert egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a parallelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$-szerese ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor.

5• **Háromszög szögfelezője.** Az előző feladat eredményét felhasználva mutassuk meg, hogy a háromszög egyik szögének szögfelezője a szemközti oldalt a két szomszédos oldal hosszának arányában osztja fel.

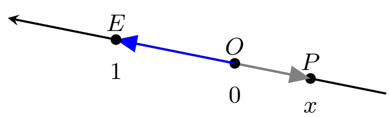
1.2. Vektorok koordinátás alakban

A koordináták bevezetésével egyrészt új, algebrai eszközökhöz jutunk a vektorok és a különféle geometriai alakzatok vizsgálatában, másrészt lehetővé válik a vektor fogalmának kiterjesztése.

René Descartes (Renatus Cartesianus) (1596–1650) francia filozófus és matematikus, a modern filozófia atyja, az analitikus geometria egyik megalkotója. Filozófiáját a puszta hitre alapozott állításokkal szemben a racionális érvelések útján kívánta fölépíteni (lásd *descartesi kételkedés* és „gondolkodom, tehát vagyok"). Orvostudományt és jogot tanult, végül hadmérnöki képesítést szerzett. Több háborúban is részt vett. 1619-ben egy Magyarországot is érintő hosszú útján egy Ulm melletti parasztházban három álmot látott, melyek megfejtése „egy csodálatos tudományhoz" vezette, ami filozófiája alapjává vált.

Descartes-féle koordinátarendszer. Descartes 1637-ben *La Géométrie* című művében egy szép ötlettel összekapcsolta a geometriát az algebrával. Alapgondolata az volt, hogy a sík pontjai és a rendezett valós számpárok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre az azóta róla elnevezett *Descartes-féle koordinátarendszer* segítségével, így bizonyos geometriai alakzatok algebrai egyenletekkel leírhatóvá és vizsgálhatóvá válnak.

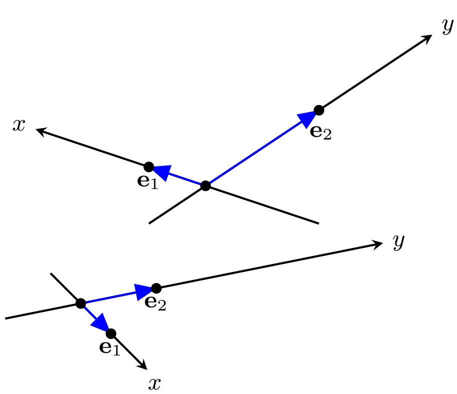
A Descartes-féle koordinátarendszer ismertetését az 1-dimenziós geometriai térrel, vagyis az egyenessel kezdjük. Itt az egyenes pontjai és a valós számok közt fogunk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíteni. Más szóval bevezetünk rajta egy koordinátarendszert. Az egyenesen tetszőlegesen választunk egy pontot, ez lesz az *origó*, amihez a 0 számot rendeljük. Ezután egy tetszőleges, az origótól különböző pontot választunk, amihez az 1 számot rendeljük. Jelölje e pontot E, az origót O, és legyen az egyenes egy tetszőleges pontja P. A „vektorral párhuzamos vektorok" című 1.5. tétel szerint bármely P ponthoz egyértelműen létezik olyan x szám, hogy $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OE}$. Ez az x szám lesz a P pont *koordinátája*. Az $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ vektort a koordinátarendszer *alapvektorának*, illetve e koordinátarendszer *bázisának* nevezzük.



1.15. ábra. Az egyenes koordinátázása: a 0 és 1 koordinátájú pontok mellett egy harmadik pontot is ábrázoltunk.

A 2-dimenziós tér, azaz a sík esetén vegyünk két tetszőleges lineárisan független vektort, jelölje ezeket $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$. E vektorokat a koordinátarendszer *alapvektorainak* vagy *bázisvektorainak* nevezzük, e két vektorból álló rendszert pedig *bázisnak* vagy alapvektorrendszernek. Jelöljük ki a sík egy tetszőleges pontját, legyen ez az origó.

Az origón átmenő, és az alapvektorokkal párhuzamos egyeneseket *koordinátatengelyeknek* nevezzük. A koordinátatengelyeket szokás valamely betűvel jelölni. Például az első tengelyt gyakran x-szel, míg a másodikat y-nal jelöljük (ld. 1.16. ábra).



1.16. ábra. Két koordinátarendszer. Mindkettőn – az elterjedt szokásnak megfelelően – az első tengelyt x, a másodikat y betűvel jelöltük.

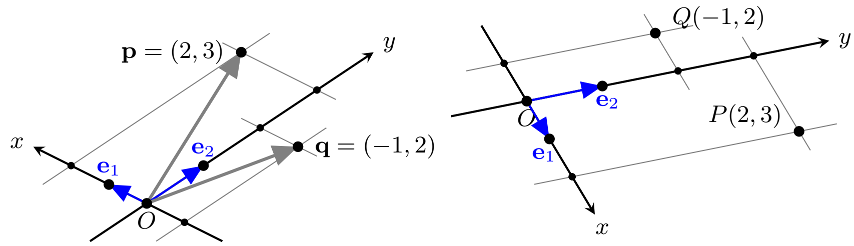
A síkbeli vektor felbontásáról szóló 1.9. tétel szerint, mivel $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ két lineárisan független vektor, a sík tetszőleges $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2.$$

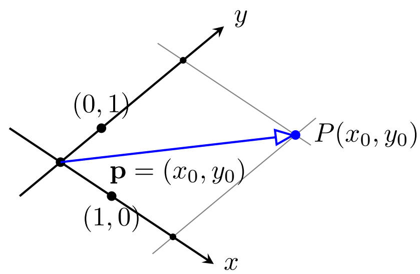
Ez azt jelenti, hogy a sík pontjai, vektorai és a rendezett számpárok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk. Azt mondjuk, hogy a V pont, illetve az $\overrightarrow{OV}$ vektor *koordinátás alakja* (v_1, v_2). A pont és koordinátás alakja közti kapcsolatot egyszerű egymás mellé írással fogjuk jelezni: $V(v_1, v_2)$, míg a vektor és koordinátás alakja közti kapcsolatot egyenlőségjellel: $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$. Az, hogy a számpár pontot és vektort is jelölhet, sosem fog zavart okozni, hisz e koordinátás alaknak csak egy adott koordinátarendszerben van értelme, ahol viszont a koordinátás alakkal végzett műveletből mindig világos lesz, hogy egy pontra, vagy az origóból oda mutató vektorra gondolunk.

Az 1.17. ábrán két pontot ábrázoltunk, a $(2, 3)$ és a $(-1, 2)$ pontokat, illetve az oda mutató vektorokat két különböző koordinátarendszerben. Az elsőn a pontokba mutató vektorokat $\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$, a másodikon a pontokat P és Q jelöli.

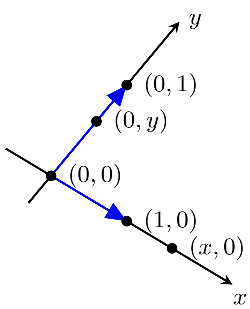
Látható, hogy ha egy pont az első tengelyen van, és azon az egyenesen x az 1-dimenziós koordinátája, akkor síkbeli koordinátás alakja $(x, 0)$ lesz.



1.17. ábra. A $(2,3)$ és a $(-1,2)$ pontok illetve vektorok két különböző koordinátarendszerben.



1.18. ábra. A $P(x_0,y_0)$ pont, és az origóból oda mutató irányított szakasz, azaz a $\mathbf{p} = (x_0,y_0)$ vektor kapcsolata.



1.19. ábra. Pontok a koordinátarendszer tengelyein.

Hasonlóképp a második tengely minden pontjának $(0,y)$ a koordinátás alakja. Az origóé $(0,0)$ (ld. 1.19. ábra). Az alapvektorok koordinátás alakja $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0,1)$.

A 3-dimenziós koordinátarendszer megkonstruálása és a tér pontjai, illetve vektorai koordinátás alakjának előállítása az 1.10. tételre épül.

A 3-dimenziós koordinátarendszer megkonstruálásához legyen $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ három tetszőleges lineárisan független térbeli vektor. Ezek leszenek koordinátarendszerünk *alapvektorai* (*bázisvektorai*). A sík egy tetszőleges pontját válasszuk origónak.

A térbeli vektor felbontásáról szóló 1.10.tétel szerint, mivel $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ három lineárisan független vektor, ezért a tér tetszőleges $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3.$$

Ezzel a tér pontjai, vektorai és a rendezett számhármasok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthető. Azt mondjuk, hogy a V pont, illetve az $\overrightarrow{OV}$ vektor *koordinátás alakja* (v_1,v_2,v_3). A V pont és koordinátás alakjának összetartozását a $V(v_1,v_2,v_3)$ írásmód jelzi. Szokás a vektorokat úgynevezett *oszlopvektor* alakba is írni, mi e könyvben ekkor kerek helyett szögletes zárójelet használunk, például:

$$\overrightarrow{OV} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

E jelölés előnyeivel hamarosan találkozunk.

Az origón átmenő és az alapvektorokkal párhuzamos egyeneseket itt is koordinátatengelyeknek nevezzük, az origón átmenő, és 2 tengelyt tartalmazó síkokat pedig *koordinátasíkoknak*. Ezekből is három van.

Könnyen látható, hogy a koordinátatengelyekre eső pontok 3-dimenziós koordinátás alakja $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, illetve $(0,0,z)$ attól függően, hogy melyik tengelyről van szó. A koordinátasíkok pontjainak alakja $(x,y,0)$, $(x,0,z)$, illetve $(0,y,z)$. Az origóé $(0,0,0)$, míg az alapvektoroké $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_1 = (0,0,1)$.

Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal. Legyen adva a térben egy koordinátarendszer, és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor. E paragrafusban megkeressük a vektorműveletek koordinátás alakját. A kérdés tehát az, hogy hogyan kapható meg $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ koordinátás alakja.

Mindegyik műveletnél felhasználjuk a vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációjaként való előállítását. Az adott két vektor összege

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)\\ &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\\ &= (u_1+v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2+v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3+v_3)\mathbf{e}_3\\ &= (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3).\end{aligned}$$

Hasonló képlet adódik a különbségre

$$\mathbf{u}-\mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3).$$

A skalárral való szorzás is a koordinátánként való végrahajtás lehetőségét mutatja:

$$\begin{aligned}c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = c(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3)\\ &= cu_1\mathbf{e}_1 + cu_2\mathbf{e}_2 + cu_3\mathbf{e}_3\\ &= (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Összefoglalva tehát a következő állítást kapjuk:

1.25. Állítás: Vektorműveletek koordinátás alakja. Adva van a térben egy koordinátarendszer, és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor, valamint egy tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ valós szám. Ekkor a vektorok összegének, különbségének és skalárszorosának koordinátás alakja rendre

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3),\\ \mathbf{u}-\mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1-v_1, u_2-v_2, u_3-v_3),\\ c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3).\end{aligned}$$

Az áttekinthetőbb oszlopvektor jelölést használva

$$\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\\u_3-v_3\end{bmatrix}, c\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}cu_1\\cu_2\\cu_3\end{bmatrix}.$$

A síkbeli vektorokra hasonló állítások igazak, csak két koordinátával. Érdekesebb a helyzet a skaláris szorzással. Kezdjük két síkbeli vektorral.

1.26. Példa: Skaláris szorzás koordinátarendszerben. Tekintsünk egy olyan síkbeli koordinátarendszert, ahol az első alapvektor hossza 1, a másodiké 2, és a kettőjük közti szög $\pi/3$. Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (1, 1)$ és a $\mathbf{b} = (-5/2, 1)$ vektorok skaláris szorzatát.

Megoldás. Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = 1\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 1.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} &= (\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\cdot(-\frac{5}{2}\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\\ &= -\frac{5}{2}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + (1-\frac{5}{2})\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2\\ &= -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + 4\\ &= 0,\end{aligned}$$

tehát a két vektor merőleges egymásra.

Érdekességként meghatározzuk e koordinátarendszerben a skaláris szorzás általános képletét:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2)\cdot(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2)\\ &= u_1v_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 + u_2v_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2\\ &= u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + 4u_2v_2.\end{aligned}$$

Ebből látható, hogy a skaláris szorzat koordinátás alakja függ a koordinátarendszertől is. ■

A derékszögű koordinátarendszer. A természeti törvények különös fontosságot adnak az egymásra merőleges irányoknak, ezért például igen gyakran érdemes olyan koordinátarendszert választani, amelyben az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra. A bázisvektorok szöge mellett azok hosszát is érdemes standardizálni, nevezetesen egységnyi hosszúnak választani, így mindegyik koordináta egyúttal távolságot is jelent. Az egységvektorokból álló ortogonális bázist *ortonormáltnak* nevezzük.

Az egységes tárgyalás érdekében a bázisvektorok körüljárását is előírhatjuk: általánosan elterjedt szokás a jobbrendszert választani. Az így konstruált bázis vektorait síkban $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, térben $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jelöli.

A két és háromdimenziós térben a skaláris szorzat egyszerű alakot ölt, ha a koordinátarendszer derékszögű.

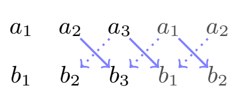
1.27. Állítás: Skaláris szorzat derékszögű koordinátarendszerben. A síkbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, illetve a térbeli $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektorok skaláris szorzata derékszögű koordinátarendszerben

$$\mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2, \text{ illetve } \mathbf{uv} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Bizonyítás. A síkbeli esetben kihasználjuk, hogy $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j})\cdot(v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j})\\ &= u_1v_1\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} + u_2v_2\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}\\ &= u_1v_1 + u_2v_2\end{aligned}$$

A térbeli eset hasonlóan bizonyítható. ■



1.20. ábra. A vektori szorzat kiszámítása a két vektor koordinátáiból: írjuk a két vektort egymás alá, majd az első két koordinátát másoljuk a vektorok végére, végül az X alakba rakott nyílpároknál a ↘ nyíl végein lévő számok szorzatából vonjuk ki a ↙ szerinti szorzatot. Az eredmény: $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.

1.28. Állítás: Vektori szorzat derékszögű koordinátarendszerben. A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektori szorzata derékszögű koordinátarendszerben

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Bizonyítás. Az alapvektorok egymással való vektori szorzatait már kiszámoltuk az 1.23. példában. Kihasználva, hogy $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$,..., kapjuk hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})\\ &= a_2b_3\mathbf{j}\times\mathbf{k} + a_3b_2\mathbf{k}\times\mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{k}\times\mathbf{i} + a_1b_3\mathbf{i}\times\mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{i}\times\mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j}\times\mathbf{i}\\ &= a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k}\\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).\end{aligned}$$

1.29. példa: Parallelogramma területe. Mutassuk meg, hogy az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített parallelogramma területe

$$|ad - bc|.$$

Mi a jelentése az $ad - bc$ előjelének?

Megoldás. Két 3-dimenziós vektor által kifeszített parallelogramma területe a vektori szorzatuk abszolút értéke. Ágyazzuk be a megadott két vektort a tér egyik koordinátasíkjába, tekintsük például az $(a, b, 0)$ és a $(c, d, 0)$ vektorokat. Vektori szorzatuk

$$(a, b, 0) \times (c, d, 0) = (0, 0, ad - bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad - bc|$.

Mivel az $(a, b, 0)$, $(c, d, 0)$ és $(0, 0, ad - bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és $ad-bc$ pontosan akkor negatív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok balrendszert alkotnak (gondoljuk meg!). ■

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz. Láttuk, hogy 2-dimenziós, illetve 3-dimenziós vektorjellegű mennyiségek leírhatók egy rendezett számpárral, illetve számhármassal. Izgalmas a fordított helyzet, amikor legalább 4, de akár több millió szorosan összefüggő adatból képzett, rendezett szám-n-essel dolgozunk. Vajon értelmes dolog-e e szám-n-eseket egy n-dimenziós tér vektorainak, vagy pontjainak tekinteni? És van-e értelme a 2- és 3-dimenziós térben használt fogalmak általánosításának n dimenzióra? A válasz mindegyik kérdésre határozott igen, amit a fizika 4-dimenziós tér-idő fogalma, számtalan gazdasági, vagy internettel kapcsolatos probléma megoldása fényesen bizonyít.

Egy tetszőleges H halmaz elemeiből képzett rendezett elem-n-esek halmazát H^n-nel jelöljük.

Például ha $H = \{0, 1\}$, akkor

$$H^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$$

vagyis H^3 a H elemeiből képzett rendezett elemhármasok halmaza. Eszerint a sík pontjait $\mathbb{R}^2$, a térét $\mathbb{R}^3$ elemeivel koordinátáztuk.

A fenti jelölésnek megfelelően $\mathbb{R}^n$ *a valós számokból képzett rendezett szám-n-esek halmazát jelöli.* Így pl. mondhatjuk azt, hogy az $(1, 3, 0, 9, 5)$ számötös eleme az $\mathbb{R}^5$ halmaznak. Később $\mathbb{R}^n$ elemein vektorműveleteket fogunk bevezetni, és $\mathbb{R}^n$-ről, mint vektortérről fogunk beszélni. Hasonlóképp fogjuk $\mathbb{R}^n$-t geometriai vagy ponttérnek tekinteni, ha elemeire, mint pontokra fogunk gondolni, és köztük geometriai műveleteket fogunk végezni. E sokféleség sosem fog gondot okozni: $\mathbb{R}^n$ szerepét mindig az fogja meghatározni, hogy mit teszünk elemeivel, vagyis a szám-n-esekkel.

....

1.21. ábra.

Az $\mathbb{R}^n$ megismerésében az *analógia* fonalán fogunk haladni, a 2- és 3-dimenziós tér fogalmait fogjuk átvinni, általánosítani n dimenzióra. Ez az analógia fog segíteni abban, hogy magabiztosan érezzük magunkat n dimenzióban is, akkor is, ha ott „nem látunk olyan jól”, mint 3 dimenzióban. Bevezető példaként az analógiára – képernyővédők kedvenc témáját – egy 4-dimenziós kocka 2-dimenziós vetületét mutatjuk az 1.21. ábrán.

Műveletek $\mathbb{R}^n$ vektoraival. ???

1.3. Vektorok véges halmazból

Az informatika, a kódelmélet és a kriptográfia is használ vektorokat, de ott a valós számok helyett véges algebrai struktúrák elemei szerepelnek. Mégis meglepően sok az analógia.

Bit: az angol ***b**inary dig**it*** kifejezésből képzett szó, ami magyarul bináris, azaz kettes számrendszerbeli számot jelent. A szoftver (software) szót is megalkotó John W. Tukey ötlete.

Bitvektorok. A modern számítógépek memóriájában vagy háttértárolóin az adatok tárolásának legkisebb egysége a bit. Egy bittel két állapot tárolható, melyeket a 0 és 1 számokkal jelölünk, de amelyek több mindent is reprezentálhatnak: hamis/igaz, nem/igen, ki/be,.... A biteket a hardver lehetőségei és a feladat igényei szerint csoportokba, sorozatokba, vektorokba gyűjtik, melyekkel különféle műveletek végezhetők. Ezek attól is függnek, hogy a bitvektorok milyen adatokat kódolnak. E műveletek közül minket azok fognak érdekelni, melyek algebrailag a korábban megismert vektorműveletekre hasonlítanak. Később látni fogjuk, hogy itt többről van szó, mint véletlen hasonlóságról.

A bitvektorok jelölése a számítástechnikában leginkább a biteket jelölő számjegyek egyszerű egymás mellé írásával történik, vagyis pl. 01110101 a $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1)$ vektort jelöli. Mi mindkét jelölést használni fogjuk.

Kódvektorok, kódok. Az információ tárolásához, továbbításához szükség van kódolásra, gyakran egymás után több különböző kódolási eljárás alkalmazására is. Például ha valaki egy gondolatát leírja egy papírra, majd onnan begépeli egy számítógépbe és egy adott formátumban elmenti, egy tömörítő programmal összetömöríti, egy titkosító szoftverrel titkosítja, végül egy biztonságos internetes csatornán továbbküldi valakinek, hat kódolási lépést hajthatott végre.

A kódoláshoz mi a továbbiakban mindig egy rögzített, véges kódábécét használunk, amelynek betűi általában a 0-tól $n-1$-ig terjedő egészek lesznek. Az ábécé „betűiből”, azaz elemeiből képzett vektorokat *kódvektor*oknak vagy *kódszavak*nak nevezzük. A bitvektorok is kódvektorok, ahol a kódábécé a kételemű $\{0, 1\}$ halmaz.

A kódvektorok koordinátáinak számát, vagyis a kódvektor dimenzióját a kód *hosszának* nevezzük. Ez természetesen nem analóg fogalom a vektor abszolút értékével.

A személyi szám egy olyan kódvektorra példa, melynek hossza 11, az ábécé pedig a 10-elemű $\{0, 1, \ldots, 9\}$ halmaz. Nem minden 11-hosszú decimális kódvektor érvényes személyi szám, vagyis a személyi számok a 11-hosszú kódvektorok halmazának egy részhalmazát alkotják. Az ilyen részhalmazokat nevezzük kódnak.

1.30. DEFINÍCIÓ: KÓD. A *kód* azonos ábécéből képzett azonos hosszúságú kódszavak egy halmaza. *Kódolás* az a folyamat, amikor az üzenethez kódszavakat rendelünk, *dekódolás* az ellenkező irányú folyamat.

1.31. PÉLDA: BCD-KÓD. Decimális számok egyik szokásos kódolása a BCD (Binary Coded Decimal), mely a számok kódolására a kettes számrendszerbe való átírás helyett a számjegyenként való kódolást választja. Több változata is van, a legegyszerűbbikben egy-egy számjegynek 4-4 bit felel meg, így a 16 lehetséges 4-hosszú kódszó helyett csak tízet használ: a 0, 1,..., 9 jegyek kódja rendre 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001. Például az 561 BCD-kódja három kódvektorból áll: 0101 0110 0001. (Kettes számrendszerbeli alakja 1000110001.)

Aritmetika véges halmazon. Olyan műveleteket keresünk a véges ábécé elemei közt, melyek eredménye is az ábécébe esik. Több ilyen példát is ismertetünk:

(a)

+	prs	ptl
prs	prs	ptl
ptl	ptl	prs

×	prs	ptl
prs	prs	prs
ptl	prs	ptl

(b)

XOR	h	i
h	h	i
i	i	h

AND	h	i
h	h	h
i	h	i

(c)

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

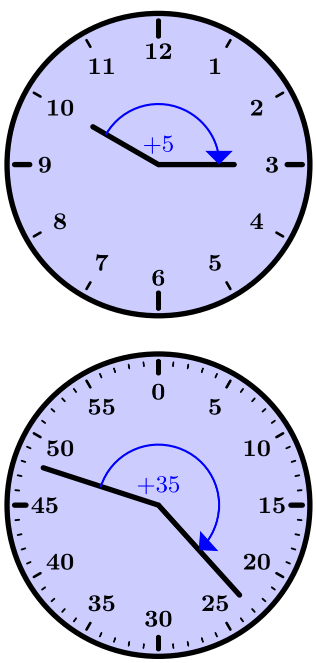
1.22. ábra. Műveletek kételemű ábécéken: *(a)* egészek közti műveletek paritása (prs = páros, ptl = páratlan), *(b)* a logikai AND és XOR műveletek (h = hamis, i = igaz), *(c)* e műveletek a $\{0, 1\}$ ábécén.

1.32. példa: Egészek paritása. Tudjuk, hogy egész számokkal végzett összeadás és szorzás eredményének paritása csak az összeadandók, illetve szorzandók paritásától függ (művelettábláit lásd az 1.22. *(a)* ábrán). Például egy páros és egy páratlan szám összege mindig páratlan.

1.33. példa: XOR és AND. Az előző példabelihez hasonló művelettáblákat kapunk két logikai művelettel is, melyeket az informatikában gyakran használunk. Egyik a logikai „és” művelete (AND), a másik a „kizáró vagy” (XOR = eXclusive OR). A p és q – igaz vagy hamis logikai értékű – állítást az „és” szóval összekapcsolva olyan állítást kapunk, mely pontosan akkor igaz, ha p és q is igaz. E műveletet szokás logikai szorzásnak is nevezni, hisz ha a hamis állítás logikai értékét 0, az igazét 1 jelöli, akkor e művelet eredménye megegyezik e két számmal végzett szorzás eredményével (1.22. *(b)* és *(c)* pont).

Például a „ma este moziba megyünk” és a „beülünk valahová vacsorázni” állítások összekapcsolásával kapott „ma este moziba megyünk, *és* beülünk valahová vacsorázni” állítás pontosan akkor igaz, ha moziban is megyünk és vacsorázni is. A „kizáró vagy” művelete, melyet legtöbbször a „vagy… vagy…” kötőszavakkal fejezünk ki pontosan akkor ad igaz eredményt, ha csak egyetlen argumentuma igaz. Például a „ma este *vagy* moziba megyünk, *vagy* beülünk valahová vacsorázni” állítás pontosan akkor igaz, ha az egyik helyre elmegyünk, de mindkettőre nem. E két művelet művelettábláit lásd az 1.22. *(b)* ábrán. Ha a páros számokhoz és a hamis állításhoz a 0 számot, a páratlanok számokhoz és az igaz állításhoz az 1-et rendeljük, akkor mindkét előző táblából az 1.22. *(c)* ábrán látható művelettáblát kapjuk.

A számok paritása úgy is kifejezhető, hogy egy egész szám páros, ha 2-vel való osztási maradéka 0, és páratlan, ha osztási maradéka 1, vagyis amikor paritásokkal számolunk, mondhatjuk, hogy a 2-vel való osztási maradékokkal számolunk. A maradékokkal való hasonló számolással a hétköznapokban másutt is találkozunk, pl. az időpont kiszámításakor, de ott nem 2-vel, hanem 12-vel, 24-gyel vagy 60-nal kell osztani.



1.23. ábra. Számolás az órán

1.34. példa: Számolás az órán. Ha most 10 óra van, 5 óra múlva 3 óra lesz, azaz 10-hez 5-öt adva 3-at kapunk, ha órákban számolunk. Hasonlóképp 21 órához 4-et adva 1-et kapunk. Ha a percmutató most 48 percet mutat, akkor 35 perc múlva 23-at fog.

Ha $m > 1$ egész szám és a tetszőleges egész, akkor a maradékos osztás szabálya szerint egyetlen olyan q és r egész szám létezik, melyekre

$$a = mq + r,$$

és ahol $0 \leq r < m$. Ezt az r számot az a szám m-mel való *osztási maradékának* nevezzük, és az $a \bmod m$ kifejezéssel jelöljük. Kimondva: „a modulo m”. Például $20 \bmod 3 = 2$, hisz $20 = 6 \cdot 3 + 2$. Hasonlóképp kapjuk, hogy $-12 \bmod 10 = 8$, ugyanis $-12 = -2 \cdot 10 + 8$. Azokat az egészeket, amelyek ugyanazt a maradékot adják modulo m, egy osztályba soroljuk. Ezeket az osztályokat *maradékosztályoknak* nevezzük. Például a 13, 33, 103 ugyanabba a maradékosztályba tartoznak modulo 10.

Modulo: a mérték jelentésű latin modulus szó származéka. Itt a maradékosztályok számát jelenti.

Könnyen megmutatható, hogy bármely két egész szám összegének, különbségének és szorzatának m-mel való osztási maradéka csak a két szám osztási maradékától függ, magától a két számtól nem. Például a $11 + 5 = 16$, $2 + 2 = 4$, $-1 + 8 = 7$ összadások mindegyikében két olyan számot adtunk össze, melyek 3-mal osztva 2-t adnak maradékul, az eredmény pedig mindig 1-et.

1.35. definíció: $\mathbb{Z}_m$. Legyen $m > 1$ egész szám, és jelölje $\mathbb{Z}_m$ a $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ halmazt, melyen két műveletet definiálunk. Ha $a, b \in \mathbb{Z}_m$, akkor jelölje $a + b$, illetve ab azt a $\mathbb{Z}_m$-beli elemet, melyet a és b egész számként való összegének, illetve szorzatának m-mel való osztási maradékaként kapunk.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

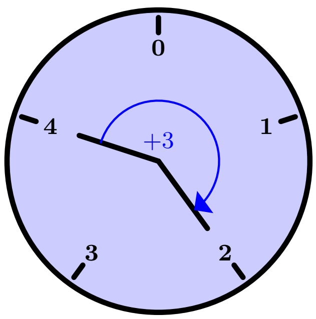
1.24. ábra. $\mathbb{Z}_3$ művelettáblái

Mivel sem az összeadás sem a szorzás műveletén, sem a számokon nem látszik, hogy egész számok közti műveletről, vagy valamilyen m-re $\mathbb{Z}_m$-beli műveletről van-e szó, ezért a fenti definícióbeli műveletek csak úgy egyértelműek, ha az elemekről tudjuk, hogy mely $\mathbb{Z}_m$ elemei. Pl. $\mathbb{Z}_2$-ben $1+1=0$, de $\mathbb{Z}_3$-ban $1+1=2$ (ld. az 1.24. ábrát).

1.36. Példa: Számolás $\mathbb{Z}_m$-ben. Számítsuk ki $\mathbb{Z}_{60}$-ban a $48+35$, $\mathbb{Z}_5$-ben a $4+3$ és $\mathbb{Z}_{11}$-ben a $3\cdot 7+10$ kifejezések értékét!

Megoldás. Ha $\mathbb{Z}_m$ művelettáblái rendelkezésre állnak, használhatjuk, egyébként úgy számolhatunk, hogy egészeknek tekintjük a számokat, és vesszük az eredmények maradékát modulo m:
$48+35 \bmod 60 = 83 \bmod 60 = 23$,
$4+3 \bmod 5 = 7 \bmod 5 = 2$,
$3\cdot 7+10 \bmod 11 = 31 \bmod 11 = 9$.

$\mathbb{Z}_m$ műveletettábláival, vagy pl. $\mathbb{Z}_{12}$ és $\mathbb{Z}_{60}$ esetén egy óra mutatójával is számolhatunk, de más m-re is használhatunk „órát”: $\mathbb{Z}_{60}$-ban: $48+35=23$, $\mathbb{Z}_5$-ben: $4+3=2$ és $\mathbb{Z}_{11}$-ben: $3\cdot 7+10=10+10=9$. ■



1.25. ábra. „Óra” a $\mathbb{Z}_5$-beli számoláshoz

1.37. Példa: Műveletettábla. Készítsünk műveletettáblát a $\mathbb{Z}_5$- és a $\mathbb{Z}_6$-beli szorzáshoz!

Megoldás. A műveletettáblák elkészítése az 5-tel, illetve 6-tal vett maradékokkal számolva könnyen megkapható. Pl. $3\cdot 4 \bmod 5 = 12 \bmod 5 = 2$, tehát $3\cdot 4 = 2$ a $\mathbb{Z}_5$-ben. ■

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

1.26. ábra. $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_6$ szorzástáblája

A két műveletettábla közt két fontos különbség vehető észre. Az egyik, hogy míg $\mathbb{Z}_5$-nél az első sort és oszlopot kivéve minden sorban és oszlopban minden szám pontosan egyszer szerepel, addig $\mathbb{Z}_6$-nál nem. Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{Z}_5$ szorzásművelete a 0 elemet elhagyva invertálható, azaz bármely két $a, b \in \mathbb{Z}_5 \setminus 0$ elemre az $ax = b$ egyenlet megoldható. Más szóval $\mathbb{Z}_5$-ben van osztás, és minden nemzérus elemnek van reciproka, azaz multiplikatív inverze. Épp úgy, mint $\mathbb{R}$-ben. Az is látható, hogy $\mathbb{Z}_6$-ban két nemzérus érték szorzata lehet 0 is.

1.38. Példa: Osztás, reciprok. Oldjuk meg a $3\cdot x = 2$ egyenletet és határozzuk meg a 3 reciprokát $\mathbb{Z}_5$-ben és $\mathbb{Z}_6$-ban!

Megoldás. Mivel $\mathbb{Z}_5$-ben $3\cdot 4 = 2$, és $3\cdot 2 = 1$, ezért az egyenlet megoldása $x = 2$, és 3 reciproka 2, azaz $1/3 = 2$. $\mathbb{Z}_6$-ban az egyenletnek nincs megoldása, és 3-nak nincs reciproka. ■

Megmutatható, hogy $\mathbb{Z}_m$-ben a szorzás pontosan akkor invertálható, ha m prím. Ez esetben $\mathbb{Z}_m$-et $\mathbb{F}_m$ jelöli annak kihangsúlyozására, hogy itt az osztás művelete is elvégezhető.

A valósok $\mathbb{R}$, a racionálisok $\mathbb{Q}$ és az imént tárgyalt $\mathbb{F}_p$ (p prím) struktúrák a következő algebrai tulajdonságokkal rendelkeznek: Az összeadás és a szorzás is kommutatív, asszociatív művelet, tetszőleges a elemre $1a = a$ és $0a = 0$, az összeadás invertálható művelet, a szorzás invertálható a 0 elhagyása mellett, és végül a szorzás disztributív az összeadásra nézve. Az ilyen algebrai struktúrákat (algebrai) *testnek* nevezik. Vannak egyéb testek is, de ebben a könyvben a fent felsoroltakon kívül csak a komplex számok $\mathbb{C}$-vel jelölt testével fogunk foglalkozni.

Vektorműveletek $\mathbb{Z}_m^n$-ben. A korábban bevezetett jelölések szerint $\mathbb{Z}_m^n$ a $\mathbb{Z}_m$-beli n-hosszú vektorokból áll. E vektorok összeadása, skalárral való szorzása és skaláris szorzása a $\mathbb{Z}_m$-beli műveletekkel az $\mathbb{R}^n$-beli vektorműveletekhez hasonlóan végezhető el. Ennek következtében a lineáris kombináció, lineáris függetlenség itt is ugyanúgy definiálható és használható.

1.39. PÉLDA: LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ $\mathbb{Z}_m^n$-BEN. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}_2^5$-beli

$$\mathbf{a} = (1,0,0,1,1,0),\ \mathbf{b} = (0,1,0,1,0,1) \text{ és } \mathbf{c} = (0,0,1,0,1,1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_2$-beli együtthatókkal, valamint a $\mathbb{Z}_3^3$-beli

$$\mathbf{u} = (1,1,0) \text{ és } \mathbf{v} = (0,1,1)$$

vektorok összes lineáris kombinációját $\mathbb{Z}_3$-beli együtthatókkal.

1.27. táblázat. Vektorok lineáris kombinációi *(a)* $\mathbb{Z}_2$ és *(b)* $\mathbb{Z}_3$ fölött.

$x\ y\ z$	$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$
0 0 0	$(0,0,0,0,0,0)$
1 0 0	$(1,0,0,1,1,0)$
0 1 0	$(0,1,0,1,0,1)$
0 0 1	$(0,0,1,0,1,1)$
1 1 0	$(1,1,0,0,1,1)$
1 0 1	$(1,0,1,1,0,1)$
0 1 1	$(0,1,1,1,1,0)$
1 1 1	$(1,1,1,0,0,0)$

(a)

$x\ y$	$x\mathbf{u}+y\mathbf{v}$
0 0	$(0,0,0)$
1 0	$(1,1,0)$
2 0	$(2,2,0)$
0 1	$(0,1,1)$
1 1	$(1,2,1)$
2 1	$(2,0,1)$
0 2	$(0,2,2)$
1 2	$(1,0,2)$
2 2	$(2,1,2)$

(b)

MEGOLDÁS. A lehetséges $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ alakú lineáris kombinációk száma 8, hisz $x, y, z \in \mathbb{Z}_2$, vagyis mindegyik együtthatónak 0 vagy 1 az értéke, és ez $2\cdot2\cdot2 = 8$ eshetőség. Az $x = y = z = 0$ eset a zérusvektort adja. Ha x, y és z közül csak egyikük értéke 1, a többi 0, akkor a három adott vektort kapjuk vissza. Azok az esetek maradnak, amikor legalább két vektort kell összeadni. Például $1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 0\mathbf{c} = (1,0,0,1,1,0) + (0,1,0,1,0,1) = (1,1,0,0,1,1)$. Az összes lineáris kombináció az 1.27. táblázatban látható.

Az $x\mathbf{u}+y\mathbf{v}$ alakú lineáris kombinációk száma 9, mivel $x, y \in \mathbb{Z}_3$, azaz lehetséges értékük 0, 1 vagy 2, ami $3 \cdot 3 = 9$ lehetőséget ad. Példaként egy lineáris kombináció, a többi az 1.27. táblázatban látható: $2\mathbf{u} + 1\mathbf{v} = 2(1,1,0) + (0,1,1) = (2,2,0) + (0,1,1) = (2,0,1)$. ■

E paragrafus további részében a vektorműveletekre két alkalmazást mutatunk.

1.40. PÉLDA: ONE TIME PAD – A TÖKÉLETES TITKOSÍTÁS. Tegyük fel, hogy az üzenet küldése előtt a küldő és a fogadó megegyezett egy titkos kulcsban, mely egy olyan hosszú véletlen bitvektor, mint amilyen az üzenet legföljebb lehet. Legyen a kulcs $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_2^m$. Legyen a titkosítandó üzenet $\mathbf{u} \in \mathbb{Z}_2^m$. A titkosítás egyszerűen annyi, hogy küldő kiszámolja az $\mathbf{u}+\mathbf{k}$ vektort, és azt küldi a fogadónak, aki a titkosított üzenethez maga is hozzáadja a kulcsot, és mivel bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^m$ vektorra $\mathbf{x} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ezért $(\mathbf{u}+\mathbf{k})+\mathbf{k} = \mathbf{u}+(\mathbf{k}+\mathbf{k}) = \mathbf{u}$, vagyis a fogadó így valóban megfejti az üzenetet. Példaként egy üzenet, egy kulcs és a kettő összege a tömör bitvektor-jelöléssel:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 010101010000111111111111 \\ \mathbf{k} &= 001011000101101001011010, \text{ ekkor} \\ \mathbf{u}+\mathbf{k} &= 011110010101010110100101 \end{aligned}$$

E titkosítás hátránya, hogy a $\mathbf{k}$ kulcs csak egyszer használható fel, mert két különböző $\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}$ és $\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}$ üzenetet elcsípve és összeadva az $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{k}) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{k}) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ vektorban már nem szerepel $\mathbf{k}$, és ez statisztikai módszerekkel már megfejthető.

A kódelmélet egyik célja, hogy redundáns információ hozzáadásával elérje az elküldött üzenet megérkezését zajos, veszteséges csatornán keresztül is. Ennek két gyakran alkalmazott típusa a hibajelző és a hibajavító kód: az előbbi az átvitel során bekövetkezett bizonyos hibákat jelez a fogadó számára, míg az utóbbi bizonyos hibák kijavítását is lehetővé teszi. Az 1.39. példában előállított lineáris kombinációk hibajelző kódok, egyikük hibajavító is. A **??**. feladat arra kérdez, hogy milyen hibát jeleznek, illetve javítanak.

Az elektronikus számítógépek adatkezelésének egyik első ötlete az adattárolás vagy továbbítás biztonságosabbá tételére a paritásbit. Ha egy n-hosszú $\mathbf{b}$ bitvektorhoz még egy bitet csatolunk, melynek értéke 1, ha $\mathbf{b}$-ben páratlan sok bit egyenlő 1-gyel, egyébként 0, akkor olyan $(n+1)$-hosszú vektort kapunk, melyben páros sok 1-esnek kell lenni. Ha egy bit elromlik, páratlan sok 1-es lesz, tehát e bit hibajelző. Ezt az $(n+1)$-edik bitet nevezzük *paritásbit*nek.

1.41. PÉLDA: PARITÁSBIT. Írjuk fel a paritásbitet skaláris szorzatként, és döntsük el, mely vektorokra igaz, hogy minden bitjük a vektor maradék részének paritásbitje.

MEGOLDÁS. A paritásbit $\mathbb{Z}_2$ fölött $\mathbf{1} \cdot \mathbf{b}$ alakba írható, ahol $\mathbf{1}$ a $\mathbf{b}$-vel azonos hosszúságú és csupa 1-esből álló vektor.

Minden olyan vektor, amelyben páros sok 1-es van, eleget tesz a feladatbeli feltételnek, a többi nem. ■

A paritásbit általánosítása az ún. *ellenőrző összeg*, melyre számtalan példát találunk a mindennapi életben.

A magyar személyi szám a személyre jellemző 10 jegyből áll, melyet egy ellenőrző összeg követ. Az e ellenőrző összeg kiszámítási képlete

$$\mathbb{Z}_{11}\text{-ben számolva } e = (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) \cdot \mathbf{u}.$$

A személyi szám 8-10-edik jegye úgy van megválasztva, hogy $e \neq 10$, így az ellenőrző összeg egyjegyű. 2007 előtt egy hasonló képlettel számolták a könyvek ún. ISBN-10 kódjának ellenőrző jegyét, ami ha 10 volt, X-et írtak (római 10-es).

A termékek EAN-kódja (European Article Number) egy 13-jegyű, a termék azonosítására szolgáló kód, melyhez egy vonalkód is tartozik. A 13-dik jegy az ellenőrző összeg. Ha az EAN kódvektort $\mathbf{v}$ jelöli, akkor fönn kell állni

$$\mathbb{Z}_{10}\text{-ben számolva az } (1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1) \cdot \mathbf{v} = 0$$

összefüggésnek. E képlet az ellenőrző összeg meghatározására is használható. 2007 óta a könyvek ISBN-száma (ISBN-13) megegyezik EAN-kódjával (1.28. ábra).

ISBN 978-963-545-398-6

9 789635 453986 >

1.28. ábra. Egy könyv ISBN kódja, ami egyúttal az EAN kódja is, a hozzá tartozó vonalkóddal

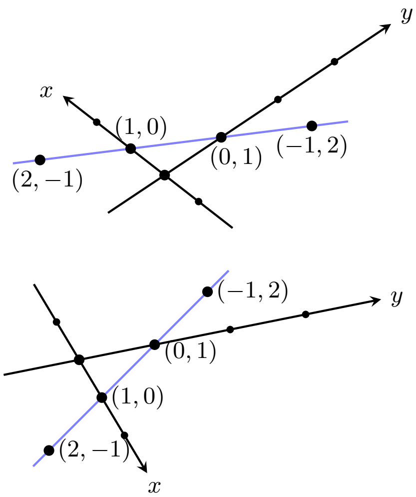
1.42. PÉLDA: ELLENŐRZŐ ÖSSZEG. Csak az ellenőrző összeget nézve érvényes személyi szám-e a 26012310018, és érvényes EAN-kód-e a 9998887776665?

MEGOLDÁS. Ez a személyi szám érvényes, mert
$(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) \cdot (2,6,0,1,2,3,1,0,0,1) =$
$1\cdot 2+2\cdot 6+3\cdot 0+4\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3+7\cdot 1+8\cdot 0+9\cdot 0+10\cdot 1 \bmod 11 =$
$63 \bmod 11 = 8$.

Ez az EAN-kód nem érvényes, mert
$(1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1) \cdot (9,9,9,8,8,8,7,7,7,6,6,6,5) =$
$(9+3\cdot 9+9+3\cdot 8+8+3\cdot 8+7+3\cdot 7+7+3\cdot 6+6+3\cdot 6+5) \bmod 10 =$
$183 \bmod 10 = 3 \neq 0$. ■

1.4. Egyenes és sík egyenlete

Alakzatok és egyenletek.



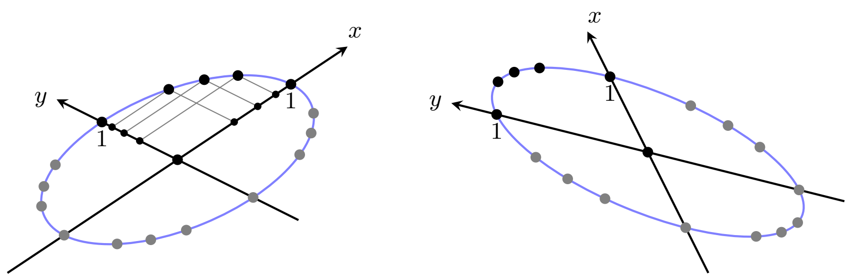
1.29. ábra. Az $x+y=1$ egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordinátarendszerben.

1.43. példa: Az $x + y = 1$ egyenlet. Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x + y = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

Megoldás. Az alábbi ábrán két különböző koordinátarendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejthetjük, hogy az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. Ezt az egyenest is berajzoltuk. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. ■

1.44. példa: Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet. Egy tetszőleges síkbeli koordinátarendszerben ábrázoljunk néhány pontot, melynek koordinátái kielégítik az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet. Fogalmazzunk meg sejtést az egyenlet összes megoldásának megfelelő pontok halmazáról!

Megoldás. Az alábbi ábrán néhány koordinátarendszert ábrázoltunk, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő néhány ponttal. A ??? fejezetben visszatérünk e feladatra, és meg fogjuk mutatni, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak.



1.30. ábra. Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza két koordinátarendszerben.

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett*, *rejtett*, ami az összeköt, összefügg, összekever, körülcsavar jelentésű *implicō* szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha. . . , akkor. . . ” szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.

1.45. definíció: Alakzat (implicit) egyenletrendszere. Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó *(implicit) egyenletrendszerén* olyan egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik a térnek az alakzathoz tartozó pontjai, de más pontok nem. Ha az egyenletrendszer egy egyenletből áll, az alakzat *egyenletéről* beszélünk. Az egyenletet *vektoregyenletnek* nevezzük, ha nem a pontok koordinátáira, hanem a pontokba mutató vektorokra írjuk fel. Egy alakzat m egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja

$$\left\{\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\\ &\vdots\\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \text{illetve} \qquad \left\{\begin{aligned} F_1(\mathbf{r}) &= 0\\ F_2(\mathbf{r}) &= 0\\ &\vdots\\ F_m(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}\right.$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ a tér egy pontja, és $\mathbf{r}$ az oda mutató vektor.

Középiskolai tanulmányainkban több példát láttunk alakzat egyenletére, például tudjuk, hogy a síkban a koordinátatengelyek szögét felező egyenes egyenlete $y = x$, azaz $x - y = 0$. Ortonormált bázist választva az origó középű egységsugarú kör egyenlete $x^2 + y^2 = 1$. Az előző két egyenlet mindegyikéből *kifejezhető* a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az $y = x$ egyenlet ekvivalens az

$$x = t$$
$$y = t$$

egyenletrendszerrel, míg az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet ekvivalens az

$$x = \cos t$$
$$y = \sin t$$

egyenlettel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk a oszlopvektoros jelölést:

A latin eredetű *explicit* szó jelentése *kifejtett*, *világosan kimondott*, ami a kibont, szétterít, kiszabadít, átvitt értelemben tisztáz, kifejt, megfejt jelentésű *explicō* szó származéka. E szó a matematikában az explicit alak, explicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. ki van fejezve a többi segítségével.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

E két példa vezet a következő általános fogalomhoz.

1.46. DEFINÍCIÓ: ALAKZAT (EXPLICIT) EGYENLETRENDSZERE. Egy geometriai alakzat egy adott koordinátarendszerre vonatkozó *(explicit) egyenletrendszerén* olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

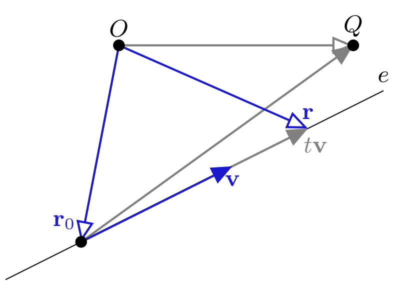
ahol $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2, \dots$, $t_n \in I_n$, és $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $\mathbf{f}$ egy $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ függvény. Az explicit egyenletrendszereket szokás *paraméteres egyenletrendszernek* is nevezni.

A következő paragrafusokban egyenes és sík különböző egyenleteit, egyenletrendszereit fogjuk áttekinteni példákat adva a fenti két általános definícióra.

Síkbeli egyenes egyenletei. Tekintsük a sík egy tetszőleges e egyenesét, és jelöljük ki a síkban az O origót. Legyen a nemzérus $\mathbf{v}$ egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, kijelölt pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám. Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ vektor nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, tehát nem is konstansszorosa, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t-re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban. Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.



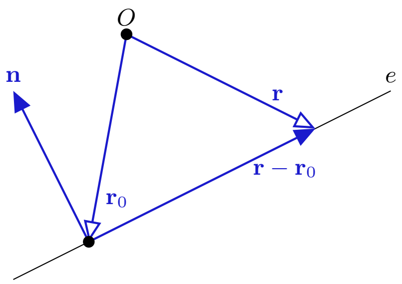
1.31. ábra. Egyenes explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

1.47. ÁLLÍTÁS: SÍKBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE. A sík minden egyenesének van

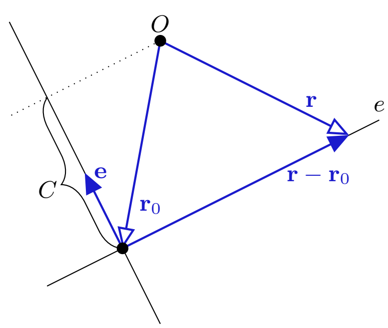
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{1.2}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvektorainak* nevezzük. Legyen $\mathbf{n}$ egy tetszőleges, a $\mathbf{v}$-re merőleges vektor, azaz legyen $\mathbf{n}$ az e egy normálvektora. Azt, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ merőleges $\mathbf{n}$-re. A merőlegesség pedig kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk: $\mathbf{r}$ pontosan akkor mutat az e egy pontjába, ha $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$. Ez az egyenlet átrendezés után $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ alakra, majd a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelölés bevezetésével $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ alakra hozható.



1.32. ábra. Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.



1.33. ábra. Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$. Ha $\mathbf{n} = \mathbf{e}$ egységvektor, akkor az $\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = C$ geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetülete C.

1.48. Állítás: Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete. A sík minden egyenesének van

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{1.3}$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \tag{1.4}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ az egyenes egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.

Az (1.3) alakú egyenlet könnyen átírható (1.4) alakúvá a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$, akkor találunk olyan $\mathbf{r}_0$ vektort, melyre $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = C$. Ez azért igaz, mert ha tetszőleges $\mathbf{n}$-re nem merőleges $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = D$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\frac{C}{D}\mathbf{v}) = C$, így az $\mathbf{r}_0 = \frac{C}{D}\mathbf{v}$ megfelel.

Az $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

1.49. Állítás: Síkbeli egyenes explicit egyenletrendszere. A sík minden egyenesének van

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \tag{1.5}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b) az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, és így egy implicit egyenletet kapunk.

1.50. Állítás: Síkbeli egyenes (implicit) egyenlete. A sík minden egyenesének van

$$Ax + By = C \tag{1.6}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

A bizonyítás előtt érdemes megjegyezni, hogy az egyenes fenti implicit egyenlete az egyenes $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből azonnal megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Legyen $(A, B) = (b, -a)$. Ez az egyenes egy normálvektora, hisz merőleges az (a, b) irányvektorra. Továbbá $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$, ezért a vektoregyenlet

$$(A, B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

alakú lesz, ami a skaláris szorzást elvégezve az $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ formulát adja. Ha a koordinátarendszer nem ortonormált, az (A, B) vektor nem szükségképpen normálvektor, és a skaláris szorzás képlete is más, de azért az (1.6) egyenletről mondott állítás igaz. A ??. fejezetben tanultak alapján az egyenes egyenletét a vektoregyenletből majd nem ortonormált koordinátarendszer esetén is le tudjuk vezetni, most viszont egy olyan bizonyítást adunk, mely az explicit egyenletrendszerre épül.

BIZONYÍTÁS. Ha a vagy b valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha $a = 0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az $x = x_0$ egyenlettel, hisz az $y = y_0 + bt$ semmi mást nem mond, mint hogy y egy valós szám. Mivel $(a, b) \neq (0, 0)$, ezért csak az az eset marad, amikor a és b egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető t, és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Legyen a továbbiakban $A = b$ és $B = -a$. Ekkor a fenti egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstanst C-vel jelölve az egyenes egyenlete $Ax + By = C$ alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az $Ax + By = C$ egyenlet visszaírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakba, hisz az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenletben $A \neq 0$ esetén egy tetszőleges y_0-t választva, egyértelműen kifejezhető x_0. (A $B \neq 0$ eset analóg.) Ennek alapján felírható az (1.5) egyenletrendszer. ■

1.51. PÉLDA: SÍKBELI EGYENES EGYENLETEI. Írjuk fel annak az egyenesnek összes egyenletét vagy egyenletrendszerét, mely átmegy a $(2, 3)$ és az $(1, 1)$ koordinátájú pontokon.

MEGOLDÁS. Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz $\mathbf{v} = (2, 3) - (1, 1) = (1, 2)$. Legyen $\mathbf{r}_0 = (1, 1)$, de az $\mathbf{r}_0 = (2, 3)$ választás is megfelelő.

Az irányvektor segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Paraméteres egyenletrendszer alakban:

$$\begin{aligned} x &= 1 + \ \ t \\ y &= 1 + 2t \end{aligned}.$$

Az irányvektorból $(A, B) = (2, -1)$, innen az egyenes egyenlete $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$, azaz

$$2x - y = 1.$$

Ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2, -1) \cdot (x - 1, y - 1) = 0$$

egyenletet kapjuk vektoregyenletként, mely kiszámolva az előző egyenletet adja. ■

Síkbeli pont egyenletei. Tekintsük a síkbeli (x_0, y_0) pontot. Ennek explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez annyira nyilvánvaló, semmitmondó, hogy a gyakorlatban nem is szoktunk pont egyenleteiről beszélni, e könyvbe is csak didaktikai okokból került, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében gyakran nagy segítségünkre van a szélső, extremális esetek megértése, vizsgálata.

Mivel itt az alakzat csak egyetlen pontból áll, nincs szükség paraméterre, így ez az alak egyúttal implicitnek is tekinthető. Ekkor úgy tekintünk ugyanerre az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai $(1, 0)$ illetve $(0, 1)$, és amelyek metszéspontja a keresett pont:

$$\begin{aligned} x \quad &= x_0 \\ y &= y_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y &= x_0 \\ 0x + \quad y &= y_0 \end{aligned}$$

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned}$$

Az azonban itt nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

Térbeli sík egyenletei. Tudjuk, hogy két lineárisan független $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.6. és 1.9. tételek). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató $\mathbf{r}_0$ vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakban.

1.52. Állítás: Sík explicit vektoregyenlete. Bármely síknak van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \tag{1.7}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ a sík két lineárisan független vektora, és $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.1.1. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az $\mathbf{n} = \mathbf{u}\times\mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

1.53. ÁLLÍTÁS: SÍK IMPLICIT VEKTOREGYENLETE. A háromdimenziós térben minden síknak van

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{1.8}$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \tag{1.9}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ a sík egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.

Az állítás igazolása analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal.

Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

1.54. ÁLLÍTÁS: SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE. A háromdimenziós tér minden síkjának van

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t \end{aligned} \tag{1.10}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a_1, b_1, c_1) és (a_2, b_2, c_2) a sík két lineárisan független vektora, és (x_0, y_0, z_0) a sík egy tetszőleges rögzített pontja.

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(x - x_0) + (c_1a_2 - c_2a_1)(y - y_0) + (a_1b_2 - b_1a_2)(z - z_0) = 0.$$

Az $(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ jelöléssel a sík egyenlete $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

1.55. ÁLLÍTÁS: SÍK IMPLICIT EGYENLETE. A háromdimenziós térben minden síknak van

$$Ax + By + Cz = D \tag{1.11}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

A sík fenti egyenlete a sík $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből is megkapható, de ezt egyelőre csak *ortonormált* koordinátarendszerben tudjuk könnyen igazolni. Mivel

$$(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1), \tag{1.12}$$

ami épp az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral egyenlő, ezért (A, B, C) merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet koordinátás alakba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

1.56. PÉLDA: SÍK EGYENLETEI. Írjuk fel annak a síknak az egyenleteit, mely átmegy a $(0, -1, 2)$, a $(-1, 0, 7)$ és a $(2, 1, 4)$ pontokon.

Megoldás. A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= (2,1,4)-(0,-1,2) = (2,2,2), \text{ és}\\ \mathbf{v} &= (-1,0,7)-(0,-1,2) = (-1,1,5).\end{aligned}$$

Ezek alapján például az $\mathbf{r}_0 = (0,-1,2)$ választás mellett a sík explicit vektoregyenlete

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\1\\5\end{bmatrix},$$

explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned}x &= \phantom{-1+{}}2s - t\\ y &= -1 + 2s + t\\ z &= 2 + 2s + 5t\end{aligned}$$

Mivel az (1.12) képlet szerint $(A,B,C) = (8,-12,4)$, ezért a sík implicit egyenlete $8(x-0)-12(y-(-1))+4(z-2)=0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordinátarendszerben a

$$(2,-3,1)\cdot(x,y,z) = 5, \text{ vagy } (2,-3,1)\cdot(x,y+1,z-2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlet alakja. ■

Térbeli egyenes egyenletei. Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk a 33. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az e egyenest, melynek irányvektora $\mathbf{v}$, és amely átmegy azon a ponton, melybe az $\mathbf{r}_0$ vektor mutat. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám, és az e-re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

1.57. Állítás: Térbeli egyenes explicit vektoregyenlete. A háromdimenziós tér minden egyenesének van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{1.13}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felveszünk egy koordinátarendszert, melyben $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0,y_0,z_0)$ és $\mathbf{v} = (a,b,c)$:

1.58. Állítás: Térbeli egyenes explicit egyenletrendszere. A tér minden egyenesének van

$$\begin{aligned}x &= x_0 + at\\ y &= y_0 + bt\\ z &= z_0 + ct\end{aligned} \tag{1.14}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a,b,c) az egyenes egy irányvektora, és (x_0,y_0,z_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

A fenti paraméteres egyenletrendszerből a paraméter kiküszöbölhető. Ha az a, b és c számok valamelyike 0, akkor a neki megfelelő fenti egyenletben már nem szerepel t, akkor nincs is mit tennünk. Ha legalább két egyenletben szerepel t, akkor mindegyikből kifejezve t-t, majd egyenlővé téve őket paraméter nélküli egyenleteket kapunk. Például ha a, b és c egyike sem 0, akkor

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

A t-t elhagyva valójában három egyenletet kaptunk:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Annak az egyenletnek nincs értelme, amelyikben a nevező 0, de a nevezőkkel való bővítés után kapott

$$b(x - x_0) = a(y - y_0) \qquad c(x - x_0) = a(z - z_0) \qquad c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

egyenletek mindegyike korrekt akkor is, ha 0 valamelyik együttható. E három egyenlet három sík egyenlete, melyek metszésvonala az adott egyenes. A három síkból azonban már kettő is meghatározza az egyenest, így két egyenletből álló egyenletrendszerrel is megadható az egyenes. Bizonyítható az alábbi állítás:

1.59. Állítás: Térbeli egyenes implicit egyenletrendszere. A tér minden egyenesének van két egyenletből álló egyenletrendszere. A két egyenlet az alábbi három közül bármelyik kettő, amelyik nem $0 = 0$ alakú.

$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\ c(y - y_0) &= b(z - z_0) \end{aligned} \tag{1.15}$$

1.60. példa: Térbeli egyenes egyenletrendszerei. Írjuk fel annak az egyenesnek a paraméteres és paraméter nélküli egyenletrendszerét, mely átmegy az $A(1, 3, 4)$ és a *(a)* $B(3, 3, 1)$ *(b)* $B(5, 5, -2)$ ponton.

Megoldás. (a) A két pontot összekötő vektor $= (2, 0, -3)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 \\ z &= 4 - 3t \end{aligned}$$

második egyenlete $y = 3$ egy xz-síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenlet mindegyikéből kifejezve t-t, majd egyenlővé téve őket, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszésvonala. Az első egyenletből $t = \frac{1}{2}(x - 1)$, a harmadikból $t = -\frac{1}{3}(z - 4)$ hogy $3x + 2z = 11$. Így az előző egyeneshez a következő paraméter nélküli egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$\begin{aligned} 3x \quad + 2z &= 11 \\ y \quad &= 3 \end{aligned}$$

(b) A két pontot összekötő vektor itt $= (4, 2, -6)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 - 6t \end{aligned}$$

Mindegyik egyenletből kifejezve t-t, és ezeket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2}, \qquad \frac{z-4}{-6} = \frac{x-1}{4}, \qquad \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} x - 2y \phantom{{}+2z} &= -5 \\ 3x \phantom{{}-2y} + 2z &= 11 \\ 3y + z &= 13 \end{aligned}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszere. ■

Térbeli pont egyenletei. Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli (x_0, y_0, z_0) pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y+z} &= x_0 \\ y \phantom{{}+z} &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{vagy minden együtthatót kiírva} \quad \begin{aligned} x + 0y + 0z &= x_0 \\ 0x + y + 0z &= y_0 \\ 0x + 0y + z &= z_0 \end{aligned}$$

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3 \end{aligned}$$

Itt is óvatosnak kell lennünk, mert nem minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere. Például három sík metszheti egymást egy egyenesben, de párhuzamos síkok esetén az is előfordulhat, hogy nincs közös pontjuk. E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

Egyenletek $\mathbb{R}^n$-ben. Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete $\mathbb{R}^n$-ben is ugyanolyan alakú, mint $\mathbb{R}^3$-ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, a síké $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakú.

1.61. PÉLDA: EGYENES ÉS SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE. Írjuk fel az $A(1,1,1,1)$, $B(2,3,2,4)$ pontokon átmenő egyenes, és az A, B és $C(3,2,1,0)$ pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét!

MEGOLDÁS. Az $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2,1,0,-1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható az egyenes és a sík egyenlete is:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \text{illetve} \ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ alakú. E két esetben ez az egyenlet tehát az n-dimenziós tér ($n = 2, 3$) egy $n - 1$-dimenziós alakzatának egyenlete. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az $\mathbb{R}^n$ térben az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$egyenletet kielégítő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c,$$

ahol $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

1.62. PÉLDA: HIPERSÍK EGYENLETE. Mutassuk meg, hogy az

$$x + 2y + 3z + 6w = 12$$

egyenletű hipersík bármely két pontját összekötő vektor merőleges az $(1, 2, 3, 6)$ vektorra, azaz vele való skaláris szorzata 0.

MEGOLDÁS. Ha az (x_1, y_1, z_1, w_1) és az (x_2, y_2, z_2, w_2) pontok a megadott hipersíkon vannak, akkor

$$\begin{aligned} x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 6w_1 &= 12 \\ x_2 + 2y_2 + 3z_2 + 6w_2 &= 12 \end{aligned}$$

Ha a két egyenletet kivonjuk egymásból, akkor az

$$(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 3(z_1 - z_2) + 6(w_1 - w_2) = 0$$

egyenlethez jutunk, amely skalárszorzat alakban

$$(1, 2, 3, 6) \cdot (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2, w_1 - w_2) = 0,$$

ami épp azt jelenti, hogy a két pontot összekötő vektor merőleges az $(1, 2, 3, 6)$ vektorra. ■

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a továbbiak szempontjából legfontosabb egyenleteit. Az $\mathbb{R}^n$-beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, viszont arra bíztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

		Implicit vektoregyenlet	Explicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Tárgymutató