2. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

2.1. Bevezetés

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítása. A számítások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer. Az előző fejezet végén láttuk, hogy a síkbeli egyenes egyenletének általános alakja

$$Ax + By = C,$$

ahol A, B és C konstansok. Ennek általánosításaként jutunk a lineáris egyenlet fogalmához. Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.1}$$

alakra hozható egyenletet az x_1, $x_2 \dots x_n$ ismeretlenekben *lineáris egyenletnek* nevezzük, ahol a_1, a_2,… és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, a_2,… és a_n konstansokat az egyenlet *együtthatóinak* b-t az egyenlet *konstans tagjának* nevezzük.

Lineáris: a *vonalas* jelentésű latin lineāris szóból ered, mely a *lenfonal*, *horgászzsinór*, átvitt értelemben *vonal*, *határvonal* jelentésű līnea szó származéka. A matematikában *egyenessel kapcsolatba hozható*, illetve *elsőfokú* értelemben szokás használni.

2.1. példa: Lineáris egyenlet. Az alábbi egyenletek lineárisak:

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5-\pi)x_3 = 0, \quad a\cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

Az utolsó egyenletben $a\cos 0.87$ szerepel óvatosságból, mert $\cos 0.87a$ félreérthető. Vagy a tényezők átrendezésével, vagy zárójelezéssel egyértelművé tehető: $a\cos 0.87 = (\cos 0.87)a$, de $\cos(0.87a)$ mást jelent, és nem lineáris. A következő egyenletek nem lineárisak az x, y és z ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x\sin z + y\cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az x és y ismeretlenekben, hisz ekkor z paraméterré válik, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek. Az

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az x, y és z ismeretlenekben lineárisak, mert azonos átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

Másrészt az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

nem lineáris, mert a z-vel való beszorzás nem azonos átalakítás, tehát a lineáris $x + y + 2z = 0$ egyenlettel nem ekvivalens.

Lineáris egyenletek egy halmazát *egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenei mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A világos áttekinthetőség kedvéért az egyenletrendszereket úgy írjuk fel, hogy az ismeretlenek mindegyik egyenletben ugyanabban a sorrendben szerepeljenek. Egy egyenletrendszer egy egyenletből is állhat.

2.2. példa: Lineáris egyenletrendszerek. Lineáris egyenletrendszerek például a következők:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 2y &= 6 \\ x + y &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} &= 3 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad 2x - 3y + z - w = 6.$$

Elképzelhető, hogy egy egyenletrendszer átalakítása közben olyan egyenletet kapunk, melyben minden együttható 0, azaz amely $0 = b$ alakú. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes konstans együtthatók paraméterek, azaz pontos értéküket (még) nem ismerjük. Ilyenkor tudnunk kell, mely változók az ismeretlenek, melyek a paraméterek. Így tehát az x, y ismeretlenekben lineáris egyenletrendszerek a következők is:

$$\begin{aligned} ax + \phantom{\frac{1}{a}}y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 2y &= 6 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2. \end{aligned}$$

Paraméterek használatával az összes adott számú egyenletből álló és adott számú ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer felírható. Például az összes 3-ismeretlenes, 3 egyenletből álló egyenletrendszer a következő alakú:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

2.3. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER. *Lineáris egyenletrendszer*en ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.2}$$

ahol x_1, x_2,... x_n az ismeretlenek, a_{ij} az i-edik egyenletben az x_j ismeretlen együtthatóját jelöli, és b_i az i-edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, *homogén lineáris egyenletrendszerről* beszélünk, ha csak egy is különbözik 0-tól *inhomogénnek* nevezzük a lineáris egyenletrendszert.

2.4. DEFINÍCIÓ: LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA. Azt mondjuk, hogy a rendezett $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ szám-n-es *megoldása* a (2.2) egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz minden egyenletet kielégít az $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$,... $x_n = u_n$ helyettesítéssel. Ha e szám-n-est vektornak tekintjük, *megoldásvektorról* beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer *megoldáshalmaz*ának nevezzük. Egy egyenletrendszert *megoldhatónak* nevezünk, ha van megoldása, azaz ha megoldáshalmaza nem üres.

2.5. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER EGY MEGOLDÁSA. Megadjuk a 2.2. példa egyenletrendszereinek egy-egy megoldását, melyet behelyettesítéssel ellenőrizhetünk: $(x, y) = (2, 4)$, $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, 4)$, $(x, y, z, w) = (2, 0, 2, 0)$, $(x, y) = (1, a)$, $(x, y) = (2, 4)$. A harmadik egyenletnek végtelen sok megoldása van, például egy másik megoldás az $(x, y, z, w) = (3, 0, 0, 0)$. Az utolsó egyenletrendszernek nincs megoldása, hisz nincs olyan x és y érték, melyre fönnállna a $0x + 0y = 2$ egyenlőség. Általában, a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

egyenletnek minden szám-n-es megoldása, míg a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)$$

egyenletnek egyetlen megoldása sincs.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek. Két egyenletrendszert *ekvivalens*nek nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos. Például az alábbi három egyenletrendszer ekvivalens, mert mindegyiknek $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása:

$$\begin{array}{lll} x + y = 3 \qquad & x + y = 3 \qquad & x = 2 \\ x + 2y = 4 & \phantom{x+{}} y = 1 & \phantom{x+{}} y = 1 \end{array} \tag{2.3}$$

A harmadik egyenletrendszerrel nem kell tenni semmit, megoldása azonnal leolvasható: $x = 2$, $y = 1$. A második egyenletrendszer is könnyen megoldható, csak az utolsó egyenletből az $y = 1$ értéket vissza kell helyettesíteni az első egyenletbe, amiből kapjuk, hogy $x = 2$. Az első egyenletrendszerrel pedig azt tudjuk tenni, hogy ekvivalens átalakításokkal a második vagy a harmadik egyenletrendszerhez hasonló alakra hozzuk.

2.6. TÉTEL: EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK. Az alábbi három transzformáció minden egyenletrendszert vele ekvivalens egyenletrendszerbe visz át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.

BIZONYÍTÁS. Az első két elemi átalakításra ez nyilvánvaló. Nézzük a harmadikat, legyen c egy tetszőleges konstans. Egy megoldást az egyenletrendszerbe helyettesítve, majd az i-edik c-szeresét hozzáadva egy másik egyenlethez, például a j-edikhez, könnyen látható, hogy a régi egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Ezután az új egyenletrendszer i-edik egyenletének $-c$-szeresét hozzáadjuk a j-edikhez. Így visszakapjuk a régi egyenletrendszert, tehát az előző gondolatmenet szerint az új egyenletrendszer minden megoldása a réginek is megoldása. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az elemi átalakítás is ekvivalens átalakítás. ■

Mátrix: a latin māter (*anya*, *szülőanya*, *forrás*) szó származéka a mātrīx, melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat*, *vemhes állat*, *anyaméh*, *bezárt hely, ahonnan valami kifejlődik*, *bezárt, körülzárt dolgok sokasága*, *tömbje.* Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

Mátrixok. Az egyenletrendszer megoldásában az azonos átalakítások során a műveleteket csak az egyenletrendszer együtthatóival és konstans tagjaival végezzük, az ismeretlenek másolgatása felesleges, ezért az együtthatókat és a konstans tagokat egy táblázatba gyűjtjük – megőrizve az egyenletrendszerbeli egymáshoz való helyzetüket –, és az egyenletrendszer megoldásainak lépéseit csak ezen hajtjuk végre. Az ilyen speciális számtáblázatokat *mátrixoknak* nevezzük, ezekkel később külön fejezetben foglalkozunk. A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük..

Az egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített* vagy *kibővített* mátrixa az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban egy függőleges vonallal el szokás választani az együtthatókat a konstans tagoktól. A 2.3. definícióbeli általános alakhoz tartozó együttható-, illetve bővített mátrixok:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

A gyakorlatban gyakran kell igen nagy méretű egyenletrendszereket, s ezzel ugyancsak nagy méretű mátrixokat kezelni. A feladatok egy részében azonban a hatalmas méretű mátrixok elemeinek nagy része 0. Az ilyen mátrixokat *ritka mátrixoknak* nevezzük. Szokás az ilyen együtthatómátrixú egyenletrendszereket is ritkának nevezni. A nem ritka mátrixokat sűrűnek nevezik. Az ebben a szakaszban tárgyalt módszerek sűrű egyenletrendszerekre hatékonyak. A ritka egyenletrendszerekre hatékony módszereket a 2.5. szakasz tárgyalja.

2.7. PÉLDA: BŐVÍTETT MÁTRIX. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert! A megoldást kövessük a bővített mátrixon is.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Két lehetséges megoldást is mutatunk. Az elsőben a (2.3) középső egyenletrendszernél látott háromszög alakra hozzuk az egyenletrendszert, a másodikban a (2.3) jobb oldali egyenletrendszerében látott átlós alak elérése lesz a célunk.

Először írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Kicseréljük az első és a második egyenletet:

Kicseréljük az első és a második sort:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Az első egyenlet 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből. Mondhatjuk azt is, hogy az első egyenlet -2-szeresét hozzáadjuk a második és harmadik egyenlethez.

Az első sor kétszeresét kivonjuk a második és harmadik sorból, vagy másként fogalmazva az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a második és harmadik sorhoz.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszerről látjuk, hogy már tudjuk y és z értékét. Ezért ezeket az első egyenletbe helyettesítve megkapjuk x értékét is, nevezetesen $x + y + z = 3$, azaz $y = 1$ és $z = 0$ behelyettesítése után: $x + 1 + 0 = 3$, vagyis $x = 2$. De a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát is:

Kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletet az első egyenletből:

Kivonjuk a második, majd a harmadik sort az elsőből:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$. ∎

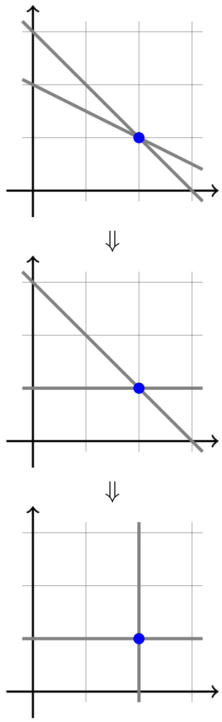
A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy $m \times n$-es mátrixnak m sora és n oszlopa van. A vektorokat is szokás mátrix jelöléssel, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni. Az $n \times 1$-es mátrixot így *oszlopvektornak*, az $1 \times n$-es mátrixot *sorvektornak* is szokás nevezni. Annak a kérdésnek az eldöntése, hogy egy n-dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés kérdése. Manapság sokkal jobban el van terjedve a vektorok oszlopvektoros jelölése, ezért e könyvben, ha külön nem említjük, alapértelmezésként mi is ezt a jelölést fogjuk használni. Így tehát az $(1, 2, 3)$ vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

amelyek közül, ha mást nem mondunk, az utóbbit fogjuk a vektor mátrixos jelöléseként használni.

Első geometriai modell: hipersíkok. A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általános fogalmak megértésében.

Tekintsük a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet, ahol a, b és c valós konstansok. Ha a és b legalább egyike nem 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok halmaza egy egyenes, vagyis a megoldáshalmaz egy egyenest alkot. (Ha $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x + 0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, vagyis az egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza az egész sík. Ha pedig $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.)



2.1. ábra. Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése

2.8. példa: Két kétismeretlenes egyenlet. Tekintsük az

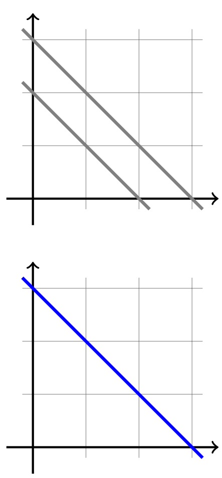
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Oldjuk meg az egyenletrendszert ekvivalens átalakításokkal, és ábrázoljuk az egyenesek grafikonját minden lépésben.

Megoldás. Két lépésben megoldhatjuk az egyenletrendszert, ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, majd az így kapott egyenletrendszerben a második egyenletet kivonjuk az elsőből, azaz:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x \phantom{{}+y} &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer két egyenlete egy-egy egyenes egyenlete a síkban. Az, hogy az egyenletrendszer megoldható, pontosan azt jelenti, hogy a két egyenesnek van közös pontja, példánkban a $(2, 1)$ pont. A 2.1. ábra a megoldás lépéseit szemlélteti az egyenletek grafikonjával. ■



2.2. ábra. A megoldás szemléltetése, ha 0 a bal oldal

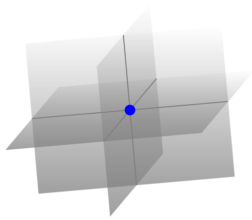
2.9. példa: Ha 0 lesz a bal oldal. Tekintsük az

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

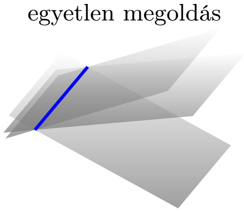
egyenletrendszert. Látható, hogy ez két párhuzamos egyenes egyenlete, melyeknek nincs közös pontjuk, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0 = -1$ egyenletet kapjuk, vagyis így is arra jutottunk, hogy az egyenletrendszer nem oldható meg. Az

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 3 \end{aligned}, \quad \text{vagy az} \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszerekben az első egyenlettel a második $0 = 0$ alakra hozható, aminek minden számpár megoldása, így elhagyható. Így csak az $x + y = 3$ egyenlet marad. Ennek összes megoldása paraméteres alakba írva például $(x, y) = (3 - t, t)$.



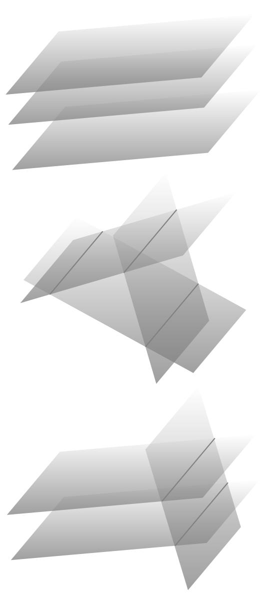
(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás



(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak

(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.3. ábra. Megoldható egyenletrendszerek



2.4. ábra. Nem megoldható egyenletrendszerek

Ezután vizsgáljuk meg a 3 egyenletből álló 3-ismeretlenes egyenletrendszereket.

Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.3. (a) ábra). Például a 2.7. példában szereplő egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \tag{2.4}$$

egyenletrendszert. Ennek egy megoldása $(x, y, z) = (2, 1, 0)$, ugyanakkor a három sík normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis

$$(2, 1, 2) + (1, 1, 1) = (3, 2, 3).$$

Mindhárom normálvektorra merőleges például a $(2, 1, 2) \times (1, 1, 1) = (-1, 0, 1)$ vektor, akkor viszont e vektor párhuzamos mindhárom síkkal. A $(2, 1, 0)$ ponton átmenő, és $(-1, 0, 1)$ irányvektorú egyenes tehát benne van mindhárom síkban (ilyen esetet ábrázol a 2.3. (b) ábra). Az összes megoldás tehát megkapható ennek az egyenesnek a paraméteres vektoregyenletéből:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hamarosan ugyanezt a megoldást elemi sorműveletekkel is meg tudjuk határozni.

Hasonló esetet ábrázol a 2.4. középső ábra, ahol mindhárom sík párhuzamos egy egyenessel, de nincs az egyenletrendszernek megoldása. Ilyen például az előző kis változtatásával kapott

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.5}$$

egyenletrendszer. Vegyük észre, hogy míg a (2.4) egyenletrendszerben a harmadik egyenletből kivonva az első kettőt az elhagyható $0 = 0$ egyenletet kapjuk, addig a (2.5) egyenletrendszerben az ellentmondó $0 = 1$ egyenletre jutunk. Vagyis ennek az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Végül tekintsük a

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \\ 3x + 3y + 3z &= 9 \end{aligned} \tag{2.6}$$

egyenletrendszert! Látható, hogy a második és a harmadik egyenlet az első konstansszorosa, azaz az első egyenlet kétszeresét kivonva a másodikból és a háromszorosát kivonva a harmadikból, az egyetlen egyenletből álló

$$x + y + z = 3$$

egyenletrendszert kapjuk. Az y-nak és z-nek tetszőleges értéket választunk, például legyen $y = s$, $z = t$, akkor $x = 3 - y - z$, azaz $x = 3 - s - t$. Így az összes megoldás: $(x, y, z) = (3 - s - t, s, t)$. Ezt oszlopvektorokkal fölírva kapjuk, hogy a megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Második geometriai modell: vektor előállítása lineáris kombinációként. Az előző paragrafusban egy geometriai modellt mutattunk az egyenletrendszerre. E paragrafusban egy másik, nagyon fontos modellt mutatunk. E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan egyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például az

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

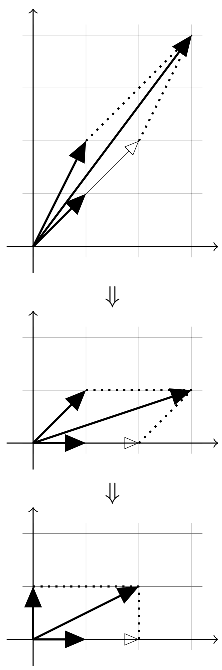
egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

egyenlettel. Itt az a feladat, hogy megkeressük az $(1,1)$ és $(1,2)$ vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a $(3,4)$ vektorral. Az egyenletrendszert megoldottuk a 2.8. példában, a megoldás lépései:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

E lépéseket szemléltetjük e vektormodellben a 2.5. ábrán.



2.5. ábra. A megoldás lépései a vektormodellben.

Általánosan, a 2.3. definícióban megadott (2.2) egyenletrendszer a következő egyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

Azokat az eseteket is jól tudjuk vizsgálni, amikor $m \neq n$. Például tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 4 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

Ez ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix}.$$

Az $(1,1,1)$ és az $(1,1,2)$ vektorok benne fekszenek az $x = y$ egyenletű síkban, mivel első két koordinátájuk megegyezik, ezért minden lineáris kombinációjuk is ebbe a síkba esik. A $(3,4,4)$ vektor viszont nem esik e síkba, így *független* az előbbi kettőtől, tehát nem áll elő azok lineáris kombinációjaként. Vagyis ez az egyenletrendszer nem oldható meg.

E modellben egy egyenletrendszer akkor nem oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjának halmazába nem esik bele a konstans tagokból álló vektor. Például

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 4 \\ 3x + 4y + 8z &= 9 \end{aligned}$$

Ez ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} y + \begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix} z = \begin{bmatrix}3\\4\\9\end{bmatrix}.$$

Itt az együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a $2x+y-z=0$ egyenletű síkban, a $(3,4,5)$ vektor viszont nem, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg. Ugyanakkor a

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 4y + 8z &= 9 \end{aligned}$$

illetve a vele ekvivalens

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} y + \begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix} z = \begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix}.$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van, mert egyrészt a $(3,3,9)$ vektor is a $2x+y-z=0$ egyenletű síkban van, másrészt az együtthatómátrix három oszlopvektora nem lineárisan független.

Mely egyenletek lineáris egyenletek az x, y és z változókban az alábbiak közül?

1 $3x-(\ln 2)y+e^3z=0.4$ **2** $xy-yz-zx=0$

3 $a^2x-b^2y=0$ **4** $(\sin 1)x+(\cos 1)y-\pi z=0$

5 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ **6** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős alakját az alábbi mátrixoknak!

7 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&3&2&3&4\\1&2&1&2&3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&0&-1\\0&1&0&1&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

8 $\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\2&3&2&3&4\\3&2&1&2&3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&1&2\\0&0&1&0&-1\end{bmatrix}$$

9 Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix}3&4&1&1\\7&8&3&7\\11&7&-2&2\end{bmatrix}$$

Igen.

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

10 $\begin{cases}3x+2y-2z=1\\2x+3y-3z=-1\\4x+2y=8\end{cases}$ $\begin{cases}2x+2y-2z=0\\3x+3y-2z=3\\5x-3y+2z=5\end{cases}$

Igen, mindkettőnek $(x,y,z)=(1,2,3)$ az egyetlen megoldása, azaz megoldáshalmazaik megegyeznek.

11 $\begin{cases}2x+3y+5z=0\\3x+2y+2z=3\\5x-4z=9\end{cases}$ $\begin{cases}x-y-3z=3\\5x+5y+7z=3\end{cases}$

Igen, mindkettő bővített együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja a zérussor nélkül

$$\begin{bmatrix}1&0&-0.8&1.8\\0&1&2.2&-1.2\end{bmatrix}$$

2.2. Kiküszöbölés

E fejezeben alaposabban megismerjük a lineáris egyenletrendszerek megoldásának legelterjedtebb módszerét, a kiküszöbölést.

Elemi sorműveletek. A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk, melyből visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat a bővített mátrixon hajtjuk végre úgy, hogy a nekik megfelelő átalakítások az egyenletrendszeren ekvivalens átalakítások legyenek. A 2.6. tételben felsoroltunk három ekvivalens átalakítást. Az egyenletrendszer bővített mátrixán az ezeknek megfelelő átalakításokat elemi sorműveleteknek nevezzük.

2.10. definíció: Elemi sorműveletek. Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket *elemi sorműveleteknek* nevezzük:
1. *Sorcsere:* két sor cseréje.
2. *Beszorzás:* egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.
3. *Hozzáadás:* egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla c számmal, hisz az az $1/c$-vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorból egy másik sor c-szeresét, hisz az a $-c$-szeresének hozzáadásával ekvivalens.

Az elemi átalakításokra a következő jelöléséket fogjuk használni:
1. $S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje.
2. cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel.
3. $S_i + cS_j$: A j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása.

Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók, de azokat ritkán használjuk. Jelölésükre értelemszerűen az $O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i, $O_i + cO_j$ formulákat használjuk.

Lépcsős alak. Az eddig megoldott egyenletrendszerekben igyekeztünk átlós, vagy legalább átló alatt kinullázott alakra hozni az egyenletrendszert, mint azt például a 2.7. példában tettük. Ez nem mindig sikerül, mert néha nem kívánt elemek is kinullázódnak, de a következőkben definiált lépcsős alakhoz mindig el tudunk jutni.

2.11. definíció: Lépcsős alak. Egy mátrix *lépcsős*, vagy *sorlépcsős alakú*, ha kielégíti a következő két feltételt:
1. a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
2. bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét *főelemnek*, *vezérelemnek* vagy *pivotelemnek* hívjuk. Egy főelem oszlopának *főoszlop* vagy *bázisoszlop* a neve.

2.12. példa: Lépcsős alak. A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix}3&2\\0&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&0&-5&6\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0&1&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

2.13. példa: A lépcsős alak nem egyértelmű. Egy mátrix elemi sorműveletekkel több különböző lépcsős alakra is hozható, mint azt az alábbi két átalakítás is mutatja. Az első:

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}\overset{\substack{S_2-S_1\\S_3-2S_1}}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-2&2\\0&-4&4\end{bmatrix}\overset{S_3-2S_2}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-2&2\\0&0&0\end{bmatrix},$$

míg a második:

$$\begin{bmatrix}1&3&0\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}\overset{S_1\leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&0\\2&2&4\end{bmatrix}\overset{\substack{S_2-S_1\\S_3-2S_1}}{\Longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Gauss-módszer. A *Gauss-módszer* vagy más néven *Gauss-kiküszöbölés* vagy *Gauss-elimináció* lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A Gauss-módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszerre láttunk már példát, ilyen volt a 2.7. példa első megoldása. Most lássunk két további példát.

2.14. példa: Gauss-módszer, egy megoldás. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x+y+2z&=0\\2x+2y+3z&=2\\x+3y+3z&=4\\x+2y+z&=5\end{aligned}$$

Megoldás. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\2&2&3&2\\1&3&3&4\\1&2&1&5\end{array}\right]\overset{\substack{S_2-2S_1\\S_3-S_1\\S_4-S_1}}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&0&-1&2\\0&2&1&4\\0&1&-1&5\end{array}\right]\overset{S_2\leftrightarrow S_3}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&2&1&4\\0&0&-1&2\\0&1&-1&5\end{array}\right]\overset{S_4-\frac{1}{2}S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&2&1&4\\0&0&-1&2\\0&0&-\frac{3}{2}&3\end{array}\right]\overset{S_4-\frac{3}{2}S_3}{\Longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&2&1&4\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{aligned}x+y+2z&=0\\2y+z&=4\\-z&=2\end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $z=-2$, ezt a másodikba helyettesítve $y=3$, ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x=1$, azaz az egyetlen megoldás $(x,y,z)=(1,3,-2)$. ■

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változóit, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változónak* nevezzük.

2.15. példa: Gauss-módszer, végtelen sok megoldás. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5&=1\\x_1+2x_2+3x_3+3x_4+x_5&=0\\3x_1+6x_2+7x_3+8x_4+3x_5&=1\end{aligned}$$

Megoldás. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{S_2-S_1}{\underset{S_3-3S_1}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{S_3-2S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a redukált lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz x_1 és x_3. A szabad változók: x_2, x_4, x_5. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$. Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük x_3-at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az x_1-et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ x_3 &= -\frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{2}t \end{aligned}.$$

Innen az egyenletrendszer megoldása

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u\right),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Később különösen az utóbbi – vektorok lineáris kombinációjára bontással való – felírás lesz hasznos. ■

Világos, hogy ha a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, akkor a fenti példában mutatott módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását leírtuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásnak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az $s = 0$, $t = 1$, $u = 2$ értékekhez tartozó

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2, 0, -1, 1, 2).$$

Lényeges e megoldási módban, hogy a bővített mátrixot lépcsős alakra tudtuk hozni. Ez vajon mindig sikerül?

2.16. Tétel: Lépcsős alakra hozás. Bármely mátrix elemi sorműveletekkel *lépcsős* alakra hozható.

Bizonyítás. Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$-es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, a_{ij} pedig a letakarások után maradt mátrix i-edik sorában lévő j-edik elemet.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot nem találunk, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.

2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben $a_{11} \neq 0$.

3. Vegyük az i-edik sort $i = 2$-től $i = m$-ig, és ha a sor első eleme $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}/a_{11}$-szeresét adjuk hozzá. Mivel $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$, ezért e lépés után az a_{11} alatti elemek 0-vá válnak.

4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor nem marad a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart sorokat feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.■

Egy inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénből a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.17. PÉLDA: HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA. Oldjuk meg a 2.15. példabeli egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszert.

MEGOLDÁS. Oldjuk tehát meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

A megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa az elemi sorműveletek alatt nem változik. Az együtthatómátrix redukált lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.15. példa megoldásában, azaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne, csak a konstans tagok nem szerepelnek:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek kapcsolatára még visszatérünk. ■

Végül egy alkalmazás:

2.18. PÉLDA: SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA. Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának paraméteres alakját!

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 4y \phantom{{}+z} &= 2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A fenti két egyenlettel megadott sík metszésvonalának, pontosabban a metszésvonal paraméteres egyenletrendszerének meghatározásához egyszerűen meg kell oldani a két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{array}\right] \overset{S_2-3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

Ebből $z = t$ paraméterválasztással $y = 3t - 1$ és $x = -4t + 2$, azaz

$$(x, y, z) = (-4t + 2, 3t - 1, t) = (2, -1, 0) + t(-4, 3, 1), \text{ vagy}$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ha a vektorok mátrixjelölését használjuk. ■

Redukált lépcsős alak. A 2.7. példa második megoldási módszerében átlós alakra hoztuk az együtthatómátrixot, azaz nem elégedtünk meg azzal, hogy a főelemek alatt kinulláztunk minden együtthatót, hanem a főelemeket 1-re változtattuk a sor beszorzásával, és a főelemek fölött is elimináltunk.

2.19. DEFINÍCIÓ: REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK. Egy mátrix *redukált lépcsős*, vagy *redukált sorlépcsős alakú*, ha kielégíti a következő feltételeket:
1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem 0;

A főelemet itt *vezéregyesnek* vagy *vezető egyesnek* is szokás nevezni.

2.20. PÉLDA: REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK. A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A 2.13. példában láttuk, hogy a lépcsős alak nem egyértelmű.

2.21. PÉLDA: REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK. Hozzuk redukált lépcsős alakra a 2.13. példában szereplő mátrixot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \overset{-\frac{1}{2}S_2}{\Longrightarrow}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3+4S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{S_1-3S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vajon tudunk-e két különböző redukált lépcsős alakra jutni?

Gauss – Jordan-módszer. A *Gauss – Jordan-módszer*, más néven *Gauss – Jordan-kiküszöbölés* vagy *Gauss – Jordan-elimináció* lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel *redukált* lépcsős alakra hozzuk. Ebből az alakból azonnal leolvasható a megoldás. Adjunk új megoldást a Gauss-módszernél látott feladatokra.

2.22. PÉLDA: GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS. Oldjuk meg a 2.14. példában felírt egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.14. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\2&2&3&2\\1&3&3&4\\1&2&1&5\end{array}\right] \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&2&1&4\\0&0&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right] \overset{\frac12 S_2}{\underset{-S_3}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&0\\0&1&\frac12&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right] \overset{S_1-S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac32&-2\\0&1&\frac12&2\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right] \overset{S_2-\frac12 S_3}{\underset{S_1-\frac32 S_3}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{rl}x &= 1\\ y &= 3\\ z &= -2\end{array}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. ■

2.23. PÉLDA: GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS. Oldjuk meg a 2.15. példabeli egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!

MEGOLDÁS. A 2.15. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\1&2&3&3&1&0\\3&6&7&8&3&1\end{array}\right] \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\0&0&2&1&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right] \overset{1/2S_2}{\underset{S_1-S_2}{\Longrightarrow}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&3/2&1&3/2\\0&0&1&1/2&0&-1/2\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{rl}x_1+2x_2 \quad +\frac{3}{2}x_4+x_5 &= \frac{3}{2}\\ x_3+\frac{1}{2}x_4 \qquad &= -\frac{1}{2}\end{array}$$

Végezzük el az $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$ helyettesítést, az x_1 és x_3 változók azonnal kifejezhetők. Így a megoldás:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac32 - 2s - \frac32 t - u\\ s\\ -\frac12 - \frac12 t\\ t\\ u\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac32\\0\\-\frac12\\0\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-\frac32\\0\\-\frac12\\1\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Természetesen ugyanazt a megoldást kaptuk, mint a 2.15. példában. ■

A redukált lépcsős alak egyértelműsége. Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.24. TÉTEL: A REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK EGYÉRTELMŰ. Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. Legyen adva egy valós mátrix. Először lépcsős alakra hozzuk (a 2.16. tétel szerint minden mátrix lépcsős alakra hozható). Azután minden sort elosztunk főelemével, a főelemek helyén így vezéregyesek lesznek. Az első vezéregyes az első sorban van, fölötte nincsenek mátrixelemek. Vegyük a második vezéregyest és elimináljuk a fölötte lévő elemet, amennyiben az nem 0. Mivel e vezéregyes előtt csak zérusok vannak, az elimináció nem váloztatja meg a mátrix előző oszlopait. Hasonlóképp vegyük sorra a vezéregyeseket, és elimináljuk a fölöttük lévő elemeket. Az eredményül született mátrix redukált lépcsős alakú.

Belátjuk, hogy az elvégzett elemi sorműveletektől függetlenül, e mátrix egyértelmű (e bizonyítás az [1] cikken alapul). Tegyük fel indirek módon, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra is hozható. Jelölje ezeket $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$. Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatóak, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előttük álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje $\mathbf{R}'$ és $\mathbf{S}'$. Tehát $\mathbf{R}' \neq \mathbf{S}'$, mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{9} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \mathbf{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tekintsük az így kapott $\mathbf{R}'$, $\mathbf{S}'$ mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának. Ezek általános alakja tehát a következő:

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{R}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

és

$$\mathbf{S}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \mathbf{S}' = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az $\mathbf{R}'$ és $\mathbf{S}'$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\mathbf{R}' = \mathbf{S}'$, ami ellentmondás. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy a kiinduló $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ feltevés helytelen volt, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{S}$. ∎

Szimultán egyenletrendszerek. Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyekben csak a konstans tagok változnak. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához kell.

2.25. definíció: Szimultán egyenletrendszerek. Több egyenletrendszer halmazát *szimultán egyenletrendszernek* nevezünk, ha együtthatómátrixaik azonosak.

2.26. példa: Szimultán egyenletrendszer megoldása. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!

$$\begin{aligned} x+\ y+\ z&=3 \\ 2x+3y+2z&=7 \\ 2x+2y+3z&=6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u+\ v+\ w&=3 \\ 2u+3v+2w&=7 \\ 2u+2v+3w&=7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r+\ s+\ t&=0 \\ 2r+3s+2t&=0 \\ 2r+2s+3t&=1 \end{aligned}$$

Megoldás. Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss – Jordan-módszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-2S_1 \\ S_3-2S_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{S_1-S_2 \\ S_1-S_3}}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

és ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

2.27. példa: Szimultán egyenletrendszer bővített mátrixa. Oldjuk meg azt a szimultán egyenletrendszert, melynek bővített mátrixa

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Megoldás. A Gauss – Jordan-módszer lépései:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{S_2-\frac{5}{2}S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \overset{2S_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \overset{S_1-S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$-ben. Ha p prím, akkor a modulo p maradékosztályok közti műveletek rendelkeznek minden olyan tulajdonsággal, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss – Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók $\mathbb{Z}_p$ fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még a 29. oldalon az algebrai testről írtakat.)

2.28. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_2$ FÖLÖTT. 4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje a, b, c és d. Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen a $b+c+d$, $a+c+d$ és $a+b+d$ bitet Az összeadás itt természetesen $\mathbb{Z}_2$ fölött értendő. Például a 0110 kódszó helyett a 0110011 kódszót küldjük. Egy ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az a $(?, ?, ?, ?, 1, 0, 1)$ kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?

MEGOLDÁS. Az a, b, c és d bitek ismeretlenek, csak annyit tudunk, hogy

$$\begin{aligned} b+c+d&=1\\ a+\phantom{b+{}}c+d&=0\\ a+b+\phantom{c+{}}d&=1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss – Jordan kiküszöböléssel $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ne felejtsük, hogy $\mathbb{Z}_2$-ben $1+1=0$, így $1=-1$, azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0&1&1&1&1\\ 1&0&1&1&0\\ 1&1&0&1&1 \end{array}\right] \overset{S_1\leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 1&1&0&1&1 \end{array}\right] \overset{S_3+S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&1 \end{array}\right] \overset{S_3+S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2+S_3\\ S_1+S_3}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&1&0&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right]$$

Visszaírva egyenletrendszerré:

$$\begin{aligned} a\phantom{{}+b}+c\phantom{{}+d}&=0\\ b+c\phantom{{}+d}&=1\\ d&=0 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $d=0$, a másodikból $b=1-c$, azaz $b=1+c$ és az elsőből $a=-c$, azaz $a=c$. Eszerint c szabad változó, legyen értéke s, a többi kötött. A megoldás általános alakban $(a, b, c, d) = (s, 1+s, s, 0)$, azaz $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$. Az $s=0$ és az $s=1$ értékekhez tartozó megoldások tehát: $(0, 1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$.

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja.

Megjegyezzük e kódról, melyet $[7, 4, 3]_2$ bináris *Hamming-kódnak* neveznek, hogy a kód 16 szóból áll, bármely szavának bármely 4 bitje egyértelműen meghatározza a maradék hármat. Így ha legföljebb 3 bit megváltozik egy szóban, akkor az kimutatható, és ha csak egy bit változik meg, az kijavítható. ■

2.29. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_5$ FÖLÖTT. Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött.

$$\begin{aligned} 2x+3y&=1 \qquad & 2x+3y&=1\\ 3x+2y&=4 \qquad & 3x+4y&=3 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk a 29. oldalon található 1.26. ábra szorzástábláját.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2&3&1\\ 3&2&4 \end{array}\right] \overset{3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1&4&3\\ 3&2&4 \end{array}\right] \overset{S_2-3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1&4&3\\ 0&0&0 \end{array}\right],$$

azaz az egyenletrendszer alulhatározott. Itt persze ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok megoldás van, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut $\mathbb{Z}_5$ összes elemén. Szabad változó az y, legyen $y = s$, így $x = 3 - 4s = 3 + s$, tehát $(x, y) = (3 + s, s)$, azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{array}\right] \overset{S_2-3S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right],$$

amiből $2y = 4$, azaz $y = 2$, $x + 4 \cdot 2 = 3$, azaz $x = 0$. Tehát a megoldás $(x, y) = 0, 2)$. ■

Bizonyítás.

1• **Sorműveletek reverzibilitása.** Mutassuk meg, hogy minden elemi sorművelettel átalakított mátrixhoz van egy olyan sorművelet, mely azt visszaalakítja.

2.3. Megoldhatóság, és a megoldások tere

Az előző szakaszban megismertük a kiküszöbölés módszerét, mellyel meg tudjuk oldani a lineáris egyenletrendszereket. E szakaszban az egyenletrendszer megoldhatóságának és a megoldáshalmaz jellemzésének kérdését járjuk körül.

Kötött változók száma, mátrix rangja. A redukált lépcsős alak egyértelműségének egy nyilvánvaló, de fontos folyománya az alábbi eredmény:

2.30. következmény: Főelemek oszlopai. Egy valós mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.

A bizonyítás azonnal adódik abból, hogy bármely lépcsős alak főelemeiből kapjuk a redukált lépcsős alak vezéregyeseit, így bármely lépcsős alak főelemei ugyanott vannak, ahol a vezéregyesek, a redukált lépcsős alak pedig egyértelmű.

Ebből az is következik, hogy bármely valós mátrix esetén

bármely lépcsős alak főelemeinek száma =
bármely lépcsős alak nemzérus sorainak száma =
a redukált lépcsős alak vezéregyeseinek száma.

Ez a következő definícióhoz vezet.

2.31. definíció: Mátrix rangja. Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix *rangjának* nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix rangját $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$ jelöli.

2.32. példa: Mátrix rangjának kiszámítása. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{bmatrix}2&3\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&4\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

Megoldás. Az első és második mátrix lépcsős alakú, rangjuk azonnal leolvasható: 1 és 2. A harmadik és negyedik mátrix elemi sorműveletekkel

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&-2\\0&0&-2&2\\0&0&0&-4\end{bmatrix},\ \text{illetve}\ \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

alakra hozható, tehát a rang 4, illetve 2. ∎

2.33. állítás: Kötött és szabad változók száma. Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer megoldható, és együtthatómátrixának rangja r, akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma r, a szabad változók száma $n-r$.

Fontos megjegyezni, hogy egyelőre csak annyit tudunk bizonyítani, hogy ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja r, akkor az egyenletrendszernek *van olyan megoldása*, amelyben a kötött változók száma r, a szabad változóké $n-r$, és egy ilyen megoldás megkapható a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel. Ez abból következik, hogy a rang megegyezik a főelemek számával, az pedig a kötött változók számával. Mi történik azonban, ha más módszerrel keresünk megoldást, vagy ha például felcseréljük az ismeretlenek sorrendjét? Arról még nem tudunk semmit, hogy a mátrix rangja vajon megváltozik-e, ha fölcseréljük az oszlopait. A változók sorrendjének cseréje viszont oszlopcserét okoz az együtthatómátrixon. A következő fejezetben be fogjuk azt is látni, hogy a kötött és szabad változók száma független a változók sorrendjétől, sőt a megoldás módszerétől is.

2.34. példa: Kötött és szabad változók száma. Egy lineáris egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának egy lépcsős alakja a következő:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 0.145 & 0.016 & 0.755 & 0.649 & 0.625 & 0.426 & 0.859 & 0.040 \\ 0.000 & 0.901 & 0.015 & 0.397 & 0.076 & 0.690 & 0.007 & 0.755 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.969 & 0.085 & 0.889 & 0.304 & 0.296 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.368 & 0.027 & 0.497 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{array}\right].$$

Látható, hogy a mátrix rangja 4, az egyenletrendszer ismeretlenjeinek száma 7, a szabad változók száma 3.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele. Tudjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor *nem* oldható meg, ha a bővített mátrix lépcsős alakjának van olyan sora, melyben csak az utolsó oszlopbeli elem nem 0. Ez ugyanis egyenletté visszaírva $0 = c$ alakú, ahol $c \neq 0$, és ennek az egyenletnek nincs megoldása. Ez viszont azt jelenti, hogy ilyenkor a bővített mátrix rangja nagyobb az együtthatómátrix rangjánál. E megállapítás azonnali következménye a következő tétel.

2.35. tétel: Egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele. Legyen egy n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa $\mathbf{A}$, a konstans tagokból álló vektora $\mathbf{b}$.

1. Ez az egyenletrendszer *pontosan akkor oldható meg*, ha az együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik, azaz

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg *egyértelműen*, ha az együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik az ismeretlenek számával, azaz

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

Az utóbbi állítás abból következik, hogy az egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha megoldható, és nincs szabad változója, azaz $n - r = 0$, vagyis az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

Az előzőekből az is adódik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egynél több megoldása, ha

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n.$$

(Miért nem lehet $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) > n$?)

Ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor a megoldások száma, a két rang és az ismeretlenek száma közt a következő a kapcsolat:

Feltétel	Megoldások száma
$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < \operatorname{rank}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	0
$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = n$	1
$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) < n$	∞

Ha az egyenletrendszer homogén lineáris, azaz mindegyik konstans tag 0, akkor az elemi sorműveletek közben a bővített mátrix utolsó oszlopában minden elem 0 marad, így ebben az oszlopban biztosan nem lesz főelem. Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszerek mindig megoldhatók, hisz esetükben a $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ összefüggés mindig fönnáll. A megoldhatóság persze e feltétel ellenőrzése nélkül is látszik, hisz az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ mindig megoldás! Mivel $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$ megegyezik a redukált lépcsős alak főelemeinek számával, ezért $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \le m$ és $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) \le n$ is fönnáll, m az egyenletek, n az ismeretlenek száma. Így viszont $m < n$ esetén $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ nem állhat fönn, tehát a homogén lineáris egyenletrendszernek van az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektoron kívül is megoldása. Összefoglalva:

2.36. tétel: Homogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága. A homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, mert az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ún. triviális megoldás mindig megoldás. Pontosan akkor van nemtriviális, vagyis a $\mathbf{0}$-vektortól különböző megoldása, ha

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n,$$

ahol n az ismeretlenek száma, és $\mathbf{A}$ az együtthatómátrix. Speciálisan, az m egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszernek $m < n$ esetén mindig van nemtriviális megoldása.

2.37. példa: Egyenletrendszer megoldásainak száma. Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, illetve ∞ sok megoldása?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= a \\ ax_1 + x_2 + x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

Megoldás. Hozzuk az bővített mátrixot lépcsős alakra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right] \overset{\substack{S_2-S_1\\ S_3-aS_1}}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right] \overset{S_3+S_2}{\Longrightarrow}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array}\right]$$

Látható, hogy $a = 1$ esetén az utolsó két sorban minden elem 0, így az egyenletrendszer az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlettel ekvivalens, melynek megoldása: $(x_1, x_2, x_3) = (1 - s - t, s, t)$, azaz oszlopvektor alakba írva:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha $a = -2$, akkor az utolsó sornak megfelelő egyenlet $0 = 3$ alakú, azaz ekkor nincs megoldás. Minden egyéb esetben, azaz ha $a \ne 1$ és $a \ne -2$, akkor egyetlen megoldás van:

$$x_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = -\frac{a+1}{a+2}.$$

Feltehető a kérdés: mi értelme az utóbbi tételeknek, ha a rang megállapításához ugyanúgy a lépcsős alakra hozást kell végrehajtani, mint a megoldáshoz? Amikor a rangra vonatkozó állításokat ellenőrizhetnénk egy lineáris egyenletrendszeren, már a megoldást is meghatározhatjuk!

Ez valóban igaz, azonban a rang szoros kapcsolatban van a lineáris függetlenséggel, amelyen keresztül mélyebbre jutunk az egyenletrendszerek megoldhatóságának és a megoldáshalmaz struktúrájának megértésében! A 4. fejezetben látni fogjuk, hogy a rang a lineárisan független egyenletek maximális számát adja.

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere. Tekintsünk egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszert. Együtthatómátrixát jelölje $\mathbf{A}$. Mint a 2.36. tételben láttuk, ez biztosan megoldható, és a megoldások halmazában a nullvektor benne van. Mit mondhatunk a megoldások halmazáról, ha több megoldása is van a homogén egyenletrendszernek? Igaz a következő állítás:

2.38. Állítás: Megoldások lineáris kombinációja. Tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja megoldás.

Bizonyítás. Elég az állítást két megoldásra bizonyítani. Jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ két tetszőleges megoldás, azaz

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n &= \mathbf{0}\\ \mathbf{a}_1y_1 + \mathbf{a}_2y_2 + \ldots + \mathbf{a}_ny_n &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

és c, d legyen két tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy ekkor $c\mathbf{x}+d\mathbf{y}$ is megoldás, ugyanis

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(x_2 + dy_2) + \ldots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) =\\ &(c\mathbf{a}_1x_1 + d\mathbf{a}_1y_1) + (c\mathbf{a}_2x_2 + d\mathbf{a}_2y_2) + \ldots + (c\mathbf{a}_nx_n + d\mathbf{a}_ny_n) =\\ &c(\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n) + d(\mathbf{a}_1y_1 + \mathbf{a}_2y_2 + \ldots + \mathbf{a}_ny_n) =\\ &\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

azaz $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás. Ez bizonyítja állításunkat. ∎

Az, hogy vektorok egy H halmaza olyan, hogy a H-beli vektorokból képzett lineáris kombinációk is mind H-ban vannak, azzal ekvivalens, hogy bármely H-beli vektor skalárszorosa és bármely két H-beli vektor összege is H-beli (ld. a 2.3.1. feladatot). Másként fogalmazva: a vektorok skalárral való szorzása és vektorok összege nem vezet ki H-ból.

Az $\mathbb{R}^n$ tér ilyen típusú részhalmazai igen fontosak. Például a síkban egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) ilyenek. Hasonlóképp, a térben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai ilyenek. Ez vezet a következő definícióhoz.

(a)???
???
(b)???
???

2.6. ábra. *(a)* Egy origón átmenő egyenes és *(b)* egy origón átmenő sík bármely vektorának konstansszorosa, illetve bármely két vektorának összege *(a)* az egyenesbe *(b)* a síkba esik.

2.39. definíció: Altér. Az $\mathbb{R}^n$ tér vektorainak olyan részhalmazát, mely zárt a vektorok skalárral való szorzásának és a vektorok összegének műveletére, az $\mathbb{R}^n$ *alterének* nevezzük.

A paragrafus elején leírtak szerint tehát igaz a következő fontos állítás:

Megoldások altere. Egy n-változós *homogén* lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.

Ezt a teret szokás *nulltérnek* nevezni, illetve az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak terét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének.

Később meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. a sík összes vektora.

$\mathbb{R}^3$ alterei:

1. a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
2. egy origón átmenő egyenes összes vektora,
3. egy origón átmenő sík összes vektora,
4. a tér összes vektora.

Mivel egy egyetlen n-ismeretlenes egyenletből álló egyenletrendszer megoldáshalmaza egy $\mathbb{R}^n$-beli hipersík, ezért az origón átmenő hipersíkok is alterek.

A homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását néhány vektor lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A megoldások alterét tehát „generálja" vagy más szóval „kifeszíti" néhány megoldásvektor. Erre utal a következő definíció. Az, hogy az altér szót a definícióban használhatjuk, az azt követő állítás bizonyítja.

2.40. DEFINÍCIÓ: KIFESZÍTETT ALTÉR. A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok összes

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációját a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$ vektorok által *kifeszített altérnek* nevezzük, és $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$-val jelöljük. Képletben:

$$\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = \{\, c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k : c_1, c_2 \ldots, c_k \in \mathbb{R}\,\}.$$

Valóban, az elnevezés jogos:

2.41. ÁLLÍTÁS: A KIFESZÍTETT ALTÉR ALTÉR. A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok által kifeszített $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vektorhalmaz $\mathbb{R}^n$ egy altere.

BIZONYÍTÁS. Be kell látni, hogy $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ bármely vektorának skalárszorosa és bármely két vektorának összege is ide tartozik. Legyen

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k, \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$$

a $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (c_1+d_1)\mathbf{v}_1+(c_2+d_2)\mathbf{v}_2+\ldots+(c_k+d_2)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

2.42. PÉLDA: NULLTÉR. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix nullterét. Keressünk olyan vektorokat (véges sokat), melyek kifeszítik e teret!

MEGOLDÁS. Az adott mátrix a 2.17. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa. A homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza épp a nulltér vektoraiból álló halmaz. A nulltér vektorai tehát

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

alakba írhatók, amiből leolvasható, hogy e teret három vektor feszíti ki. ■

A kifeszített altér fogalma kapcsán több elgondolkodtató kérdés is fölmerül:

1. Igaz-e hogy minden altér kifeszített altér?
2. Mitől függ, hogy egy alteret hány vektor feszít ki, és mennyi a lehető legkevesebb vektor, mely kifeszíti?
3. Hogyan kapható meg egy alteret kifeszítő minimális számú vektorhalmaz?
4. Az inhomogén egyenletrendszer megoldásai is alteret alkotnak?

E kérdések többségével a következő fejezetben foglalkozunk, most azonban megválaszoljuk az utolsó kérdést.

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere. Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret. Legegyszerűbben ez onnan látszik, hogy a zérusvektor minden altérnek eleme, viszont egyetlen inhomogén egyenletrendszernek sem megoldása! Ugyanakkor az inhomogén lineáris egyenletrendszer és a homogén részének megoldásai közt van egy igen fontos kapcsolat.

2.43. TÉTEL: HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI. Az inhomogén lineáris $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldása megkapható úgy, hogy egy partikuláris megoldásához hozzáadjuk a hozzá tartozó homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer általános megoldását.

inhomogén általános megoldása	=	inhomogén egy partikuláris megoldása	+	homogén általános megoldása

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ az inhomogén egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…,$\mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorait, H a homogén, I az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + H = I$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + H \subseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hoz adjuk a H egy tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in H$ elemét, az inhomogén egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n &= \mathbf{b}, \text{ illetve}\\ \mathbf{a}_1y_1 + \mathbf{a}_2y_2 + \ldots + \mathbf{a}_ny_n &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

egyenletnek. Ebből

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1(x_1 + y_1) + \mathbf{a}_2(x_2 + y_1) + \ldots + \mathbf{a}_n(x_n + y_1) =\\ &(\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n) + (\mathbf{a}_1y_1 + \mathbf{a}_2y_2 + \ldots + \mathbf{a}_ny_n) =\\ &\mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},\end{aligned}$$

tehát $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in I$.

$\mathbf{x} + H \supseteq I$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in I$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in H$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}_1(z_1 - x_1) + \mathbf{a}_2(z_2 - x_1) + \ldots + \mathbf{a}_n(z_n - x_1) =\\ &(\mathbf{a}_1z_1 + \mathbf{a}_2z_2 + \ldots + \mathbf{a}_nz_n) - (\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_nx_n) =\\ &\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in H$. Ezzel kész a bizonyítás. ■

E tétel azt jelenti, hogy ugyan az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza *nem altér*, de egy altér *eltolásával* megkapható. Az ilyen halmazokat *affin altereknek* nevezzük.

(a) Egy térbeli egyenes, rajta egy pont $\mathbf{x}_0$ jelöléssel
(b) Egy térbeli sík, rajta egy pont $\mathbf{x}_0$ jelöléssel

2.7. ábra. *(a)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás egyparaméteres; *(b)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris

Együtthatómátrix sor- és oszloptere. Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú egyenletrendszerről mind $\mathbf{A}$ sor-, mind oszlopvektorai sokat mondanak.

A második geometriai modell leírásában láttuk a 49. oldalon, hogy az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként! Másként fogalmazva, az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített altérben.

Az $\mathbf{A}$ sorvektorai is érdekes tulajdonsággal rendelkeznek. Egy lineáris egyenletrendszer minden egyenletének bal oldala az együtthatómátrix egy sorvektorának és a megoldásvektornak a skaláris szorzata. Ha az egyenletrendszer homogén, akkor e skaláris szorzat mindegyike 0, tehát a megoldásvektor merőleges az együtthatómátrix minden sorvektorára.

2.44. DEFINÍCIÓ: SORTÉR, OSZLOPTÉR. Egy mátrix sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek, az oszlopvektorok által kifeszített alteret oszloptérnek nevezzük.

2.45. PÉLDA: KIFESZÍTETT ALTÉR VEKTORAI. Határozzuk meg, hogy az $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e a $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Ha igen, adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt is! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek?

MEGOLDÁS. Olyan x_1, x_2, x_3 valósokat keresünk, melyekkel $x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2+x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ fennáll. Ez egy négy egyenletből álló egyenletrendszerrel ekvivalens, melynek bővített mátrixa a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ és $\mathbf{u}$ vektorokból áll. Az egyenletrendszer együtthatómátrixát lépcsős alakra hozva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$.

A másik kérdésre a választ az adja, hogy $\mathbf{u}$ helyett $\mathbf{w}$-vel számolva olyan egyenletrendszert kapunk, melynek nincs megoldása, tehát $\mathbf{w}$ valóban nincs benne a megadott altérben. ■

2.46. PÉLDA: VEKTOROKRA MERŐLEGES ALTÉR. Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$-ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ vektorok mindegyikére!

MEGOLDÁS. Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$. Ezt koordinátákkal felírva két egyenletet kapunk, melynek együtthatómátrixa és annak lépcsős alakja a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora. ■

Bizonyítások.

1• Mutassuk meg, hogy tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmazra a következő két állítás ekvivalens:

1. bármely véges sok H-beli vektor bármely lineáris kombinációja H-ban van;
2. bármely H-beli vektor tetszőleges skalárszorosa, és bármely két H-beli vektor összege H-ban van.

2• Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok mindegyikére merőleges vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben!

2.4. Kiküszöbölés a gyakorlatban

E szakaszban a Gauss- és Gauss – Jordan-kiküszöbölés gyakorlati alkalmazásaiban fontos kérdéseket vizsgálunk. Mennyi a különböző változatok műveletigénye? Mennyire megbízható a végeredmény, ha ismerjük bemeneti adataink pontosságát? Hogyan csökkenthető a számítások közben fellépő hibák nagysága?

A kiküszöbölés műveletigénye. Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. Szokás az algoritmusok műveletigényét *flopban* mérni (flop = **fl**oating point **op**eration), ahol 1 flop egy lebegőpontos alapműveletet jelent ($+$, $-$, $*$ vagy $/$). A processzorok sebességét gyakran az egy másodperc alatt elvégzett flopok számával mérik (itt a flops a **fl**oating point **op**eration per **s**econd rövidítése). Mivel a szorzás (osztás) processzorideje bizonyos gépeken hosszabb lehet az összeadásénál (kivonásénál), ezért külön fogjuk számolni e műveletek számát.

Ha egy algoritmus műveletigénye a feladat méretének egy polinomja, általában elég a legmagasabb fokú tagot figyelni, ugyanis egy algoritmus műveletigénye csak nagyobb méret esetén kezd érdekes lenni, a méret növekedtével pedig az alacsonyabb fokú tagok részesedése a polinom értékéből elenyészik. Precízen fogalmazva ennek oka, hogy tetszőleges k-nál kisebb fokú $p(x)$ polinomra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k+p(n)}{n^k}=1.$$

2.47. példa: Flop és flops. Egy algoritmus műveletigénye n méretű bemenet esetén $n^3+1000n$, egy másiké n^3-100n^2 flop. Milyen gyorsan futnak le e programok egy 10 gigaflops sebességű gépen, ha $n=10000$?

Megoldás. 10gigaflops $=10\cdot10^9$flops, $n^3+1000n=(10^4)^3+1000(10^4)=10^{12}+10^7$, $n^3-100n^2=(10^4)^3-100(10^4)^2=10^{12}-10^{10}$, vagyis a két futási idő $(10^{12}+10^7)/10^{10}=100.001$, illetve $(10^{12}-10^{10})/10^{10}=99$ másodperc. ■

2.48. tétel: A kiküszöbölés műveletigénye. A Gauss- és a Gauss – Jordan-módszer műveletigénye egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6}\ \text{összeadás/kivonás},\quad \frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}\ \text{szorzás/osztás}.$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n\,\text{flop},$$

azaz jó közelítéssel $2n^3/3$ flop.

Bizonyítás. Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\qquad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához $\frac13n^3-\frac13n$ összeadás és $\frac13n^3+\frac12n^2-\frac56n$ szorzás szükséges. A visszahelyettesítés $\frac12n^2-\frac12n$ összeadásból és $\frac12n^2+\frac12n$ szorzásból áll. Ha a Gauss – Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az $\frac13n^3-\frac13n$ összeadás mellett $\frac13n^3+\frac12n^2+\frac16n$ szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához $\frac12n^2-\frac12n$ összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra bízzuk. ■

Numerikusan instabil egyenletrendszerek. A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 6.73x - 8.97y &= 5.61 \\ 4.79x - 6.39y &= 3.99 \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1.5$, $y = 0.5$. Az első egyenletben az x együtthatóját újra mérjük, és másodszorra egy századdal kevesebbnek, 6.72-nek adódik. Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert is! Az eredmény meglepő módon nagyon messze van az előzőtől: $x \approx -2.26$, $y \approx -2.32$. Újabb mérés az y együtthatóját -8.96-nak mutatja. E két együttható egy századdal való megváltozása után a megoldás messze van mindkét előző eredménytől: $x \approx 4.35$, $y \approx 2.64$. Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor $x \approx 7.21$, $y \approx 4.78$ lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek $x = 1.5$, $y = 0.5$ értékeket kapjuk. Ilyen megbízhatatlan eredményekkel a gyakorlatban semmit nem lehet kezdeni!

A fenti egyenletrendszeren – tovább változtatva az együtthatókat, de mindegyiket legföljebb egy századdal – az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

$$\begin{aligned} 6.72x - 8.96y &= 5.60 \\ 4.80x - 6.40y &= 4.00 \end{aligned}$$

ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorosa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk.

Numerikusan instabil egyenletrendszer. Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabilnak* vagy *rosszul kondicionáltnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak. Később precízen definiálva számmal fogjuk mérni a kondicionáltság fokát, de azt, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a ??. ábra. Kétváltozós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel" van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem" lineáris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

A lebegőpontos számábrázolás. Tudjuk, hogy minden valós szám fölírható tizedestört alakban. Ha a szám racionális, azaz fölírható két egész szám hányadosaként, akkor a tizedes tört alak véges vagy végtelen periodikus. Az irracionális számok tizedes tört alakja mindig végtelen sok számjegyből áll. Véges tizedes tört alakkal – márpedig a számítógépek csak ilyenek kezelésére képesek – a végtelen tizedestörteket csak közelíteni tudjuk. A lebegőpontos számábrázolás alapötlete az, hogy egy tízhatvánnyal való szorzással minden szám „értékes jegyeit" a tizedes ponthoz képest azonos helyre „toljuk" (oda*lebeg*tetjük). A számok tudományos vagy exponenciális jelölésének normált alakjában ez a hely az első értékes (nem nulla) szám után van. Például $0.123 = 1.23 \cdot 10^{-1}$, $0.000321 = 3.21 \cdot 10^{-4}$, $123000 = 1.23 \cdot 10^{5}$, $.321 \cdot 10^{4} = 3.21 \cdot 10^{3}$.

A számrendszer alapja nem csak 10 lehet. Legyen b egy 1-nél nagyobb egész. Megmutatható, hogy minden valós c szám felírható b alapú számrendszerben, azaz

$$\pm a_0 a_1 \dots a_k . a_{k+1} \dots a_n \dots$$

alakban, ahol a_i egész, $a_0 \neq 0$ és $0 \leq a_i \leq b-1$. Ha $b = 2$, akkor a_i lehetséges értékei 0 és 1, ha $b = 10$, akkor a_i csak a $0, 1, \dots, 9$ jegyek valamelyike lehet. A félreértés elkerülésére a számrendszer alapját a szám után alsó indexbe lehet írni. Pl. 101101_2 egy kettes, míg 101101_3 egy hármas számrendszerbeli számot jelöl. A c szám b alapú fenti felírása azt jelenti, hogy

$$c = \pm a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_k b^0 + a_{k+1} \frac{1}{b} + \dots + a_{k+n} \frac{1}{b^n} + \dots$$

Például a kettes számrendszerbeli 1001.101_2 szám értéke

$$1001.101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2^3} = 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 9\frac{5}{8} = 9.625.$$

2.49. DEFINÍCIÓ: LEBEGŐPONTOS SZÁMOK. A b-alapú, p-jegyű (vagy p értékes jegyű, p pontosságú) lebegőpontos számok közé tartozik a 0, valamint a

$$(-1)^s a_0.a_1 a_2 \dots a_{p-1} \cdot b^e,$$

alakú számok, ahol s értéke 0 vagy 1 aszerint, hogy pozitív vagy negatív számról van szó, $a_0 \neq 0$, és $0 \leq a_i \leq b-1$ minden $i = 0, 1, \dots, p-1$ indexre. E szám értéke

$$(-1)^s \left(a_0 + a_1 \frac{1}{b} + a_2 \frac{1}{b^2} + \dots + a_{p-1} \frac{1}{b^{p-1}} \right) \cdot b^e.$$

A reprezentáció teljes leírásához b és p értéke mellett ismernünk kell e maximális és minimális értékét ($e_{\max}$, $e_{\min}$).

2.50. PÉLDA: LEBEGŐPONTOS SZÁMOK ÉRTÉKE. Adjuk meg az alábbi lebegőpontos bináris számok értékét tízes számrendszerben:

$$1.001 \cdot 2^2,\ 0.111 \cdot 2^4,\ 0.11 \cdot 2^{-2}.$$

MEGOLDÁS. $1.001_2 \cdot 2^1 = 10.01_2 = 2 + \frac{1}{4} = 2.25$, $1.11_2 \cdot 2^3 = 1110_2 = 14$, $1.1_2 \cdot 2^{-3} = 0.0011_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} = 0.1875$. ■

2.51. PÉLDA: LEBEGŐPONTOS SZÁMOK HALMAZA. Mely számok ábrázolhatók a $b = 2$, $p = 3$, $-1 \leq e \leq 1$ paraméterű lebegőpontos számokkal?

MEGOLDÁS. Az adott paraméterű lebegőpontos számok halmaza – kihasználva, hogy a_0 nem lehet 0, tehát értéke csak 1 lehet – a következő:

$$\left\{ \pm \left(1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} \right) \cdot 2^e : a_1, a_2 \text{ értéke 0 vagy 1},\ -1 \leq e \leq 1 \right\} \cup \{0\}.$$

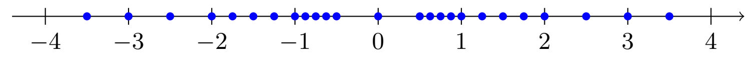
Tehát a halmaz pozitív elemei – jelezve e értékét is:

$$\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}}_{e=-1}, \underbrace{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}}_{e=0}, \underbrace{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}}_{e=1}.$$

E számok tizedestört alakban fölírva:

$$.5, .625, .75, .875, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.5, 3, 3.5.$$

A számok eloszlását mutatja a 2.8. ábra. ■



2.8. ábra. Lebegőpontos számok $b = 2$, $t = 3$, $-1 \leq e \leq 1$ esetén.

IEEE 754 a lebegőpontos aritmetika nemzetközi szabványa, melynek számtalan hardver- és szoftverimplementációja van. 1985-ös változata még csak bináris számábrázolást definiált, 2008-as változata már a decimális számábrázolást is. Az IEEE 754-2008 öt alapformátumot ismer: 32, 64 és 128 bites bináris (más néven single, double, quad), valamint 64 és 128 bites decimális (double, quad) ábrázolást. Ezeken kívül ábrázolja a -0-t (pl. a 0-hoz való balról tartás jelzésére), szubnormális (azaz bizonyos, az alulcsordulás tartományába eső számokat), a két végtelent ($+\infty$, $-\infty$), és két nemszámot (NaN = not a number). A szabvány előírja több aritmetikai művelet, ötféle kerekítési szabály és öt kivétel kezelés megvalósítását (érvénytelen művelet, pl. negatív számból gyökvonás, 0-val osztás, túlcsordulás, alulcsordulás, nem egzakt eredmény jelzése).

A lebegőpontos és a valós számok között az fl függvény létesít kapcsolatot (fl a floating point kifejezésből). Legyen $x = a_0.a_1a_2 \ldots a_{p-1}a_p \ldots \cdot 10^e$ egy tetszőleges pozitív valós szám. Az x szám p értékes jegyre való közelítése

$$\mathrm{fl}(x) = \begin{cases} a_0.a_1a_2 \ldots a_{p-1} \cdot 10^e & \text{ha } 0 \leq a_p < 5, \\ \left(a_0.a_1a_2 \ldots a_{p-1} + \frac{1}{10^{p-1}}\right) \cdot 10^e & \text{ha } 5 \leq a_p \leq 9, \end{cases}$$

vagyis ha az a_p 5-nél kisebb, lefelé, egyébként fölfelé kerekítünk. Az $x \mapsto \mathrm{fl}(x)$ leképezést *kerekítésnek* is nevezik. A valósok kerekítési szabálya más, 10-től különböző alap esetén is hasonlóan definiálható. A számítógépek a kerekítésnek más módját is ismerik és használják.

A modern számítógépek nagy részében a processzor az IEEE 754 szabvány szerint kezeli a lebegőpontos számokat (ld. a széljegyzetet).

Műveletek lebegőpontos számokkal. Jelölje $\circ$ a négy alapművelet valamelyikét, és $\mathcal{F}$ a lebegőpontos számok egy halmazát. A lebegőpontos számok közti műveletek eredménye négy csoportba sorolható:

1. $x \circ y \in \mathcal{F}$, azaz az eredmény *pontos*;
2. $x \circ y$ nem $\mathcal{F}$-beli, de $\mathcal{F}$-belire *kerekíthető*;
3. $|x \circ y|$ nagyobb minden $\mathcal{F}$-belire kerekíthető számnál: ezt nevezzük *túlcsordulásnak*;
4. $|x \circ y|$ kisebb minden $\mathcal{F}$-belire kerekíthető pozitív számnál: ezt nevezzük *alulcsordulásnak*;

Amikor a számítógép kiírja a számokat tízes számrendszerbeli kerekítést végez, ha viszont kettes számrendszerben számol, az eredményt kettes számrendszerben kerekíti. Erre mutatunk egy leegyszerűsített példát.

2.52. példa: Alapműveletek lebegőpontos számokkal. A fenti négy eset mindegyikére keressünk példát a 2.51. példabeli lebegőpontos ábrázolás számaival. Vigyázzunk, itt nem a tízes számrendszerben kell kerekíteni!

Megoldás. Pontos az eredménye például az $1 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$ vagy az $1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ műveleteknek, kerekíthető az eredménye a $\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{21}{32} = .65625 \approx .625 = \frac{5}{8}$, vagy $\frac{3}{2} : \frac{7}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6}{7} \approx .85714 \approx .875 = \frac{7}{8}$. A kerekítéseket úgy végezzük, hogy mindig a legközelebb eső lebegőpontos számra kerekítünk. Túlcsordul például a $\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6$ és a $-\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} = -\frac{35}{4}$ művelet, míg alulcsordul a $-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$ művelet. Ez utóbbi 0-ra kerekíthető e számábrázolásban.■

Szemléltetésül ábrázoljuk az előbbi példa számtartományait:
Mint láttuk, általában

$$\mathrm{fl}(x + y) \neq \mathrm{fl}(x) + \mathrm{fl}(y), \text{ és } \mathrm{fl}(xy) \neq \mathrm{fl}(x)\,\mathrm{fl}(y).$$

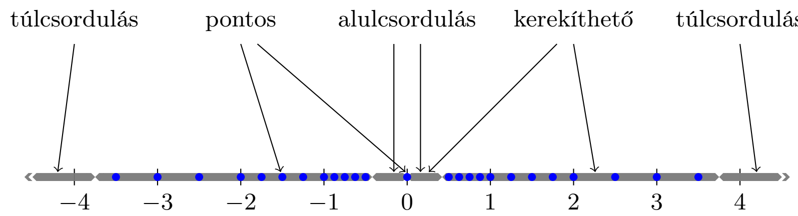
A lebegőpontos aritmetikában több azonosság sem áll fönn, például az asszociativitás, azaz ha x, y és z egy lebegőpontos számábrázolás számai, általában

$$\mathrm{fl}(\mathrm{fl}(x + y) + z) \neq \mathrm{fl}(x + \mathrm{fl}(y + z)).$$

Egy valódi példa látható a széljegyzetben.

```
> a=1; b=c=1.5*10^(-16);
> a+(b+c)==(a+b)+c
ans = 0
```

2.10. programkód. Ha $a = 1$, $b = c = 1.5 \cdot 10^{-16}$, akkor a processzor aritmetika szerint $a + (b + c) \neq (a + b) + c$.



2.9. ábra. A kerekíthető, a pontos, az alul- és túlcsorduló számhalmazok lebegőpontos számábrázolás esetén $b=2$, $t=3$, $-1 \le e \le 1$ paraméterek mellett. A 0 pontos érték, az alulcsorduló számok – feladattól függően – kerekíthetők 0-ra.

Részleges főelemkiválasztás. A következő példákban csak tízes számrendszerbeli aritmetikát használunk. A számításokat úgy kell elvégezni, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt p értékes jegyre kerekítünk.

2.53. példa: Gauss-módszer lebegőpontos számokkal. Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás. Pontosan számolva

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_2-10^4S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right]$$

amiből az eredmény $x=y=\frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$. Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például 10^{-4} helyébe 0-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől: $x=y=2$. Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggyel számolva:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_2-10^4S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right],$$

ahol a közelítésnél a $\mathrm{fl}(-1-10^4)=-10^4$ összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont $x=0$, $y=2$ a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{S_2-10^{-4}S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+10^{-4} & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

amelynek megoldása $x=y=2$, ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz! ■

Mi az oka a két megoldás közti különbségnek, és fel tudnánk-e használni minél jobb megoldás megtalálásában?

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben a kisebb, a másodikban az első oszlop nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis repciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ kerekítés hatása, vagyis a -1 „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

És ennek valóban $x = 0$, $y = 2$ a megoldása! Amikor viszont az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett beszorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis kerekítéskor az eredeti egyenlet együtthatói megmaradtak, az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazunk egy fontos szabályt.

Részleges főelemkiválasztás (részleges pivotálás). A Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajöhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt válasszuk főelemnek!

Bizonyos – a gyakorlatban ritkán előforduló – esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelemkiválasztás* módszerével. Ekkor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Itt oszlopcserékre is szükség van, és műveletigényesebb is ez az eljárás, ezért ritkán alkalmazzák.

2.54. példa: Részleges főelemkiválasztás. Részleges főelemkiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az első oszlop legnagyobb eleme a második sorban van, így az első és a második sor cseréjével kezdünk:

$$\overset{S_1\leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1/4\\ S_3-S_1/2\\ S_4-S_1/3}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{S_1\leftrightarrow S_3}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_3-S_2/3\\ S_4-S_2/2}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{S_3\leftrightarrow S_4}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \end{bmatrix} \overset{S_4-S_3/2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{2.0} \end{bmatrix}$$

Skálázás. A részleges főelemkiválasztásban mindig az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Nem lehet egy elemet nagyobbá tenni, és ezzel az egész módszert elrontani úgy, hogy egy sorát egyszerűen beszorozzuk?

2.55. példa: Sor szorzása. A 2.53. példában szorozzuk meg az első egyenletet 10^5-nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelemkiválasztással.

$$\begin{aligned} 10x + 10^5 y &= 2 \cdot 10^5 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás. Egy egyenlet beszorzása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is $x = y = \frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$ a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelemkiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{S_2-10S_1}{\Longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right],$$

amiből $x = 0$ és $y = 2$. ■

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorzása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtthatóját minden egyenletben 10^6-nal kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenetlenségeiből" származó számítási hibák csökkentésére a következő gyakorlati módszer ajánlható:

Skálázás. A következő két skálázási szabály követése a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelemkiválasztással együtt alkalmazva:

1. *Oszlopok skálázása:* Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együtthatók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
2. *Sorok skálázása:* Az egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixának minden sorát osszuk el az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így $\mathbf{A}$ minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka egyenletrendszerekkel a következő szakasz foglalkozik.

Lebegőpontos számok.

1° Fogalmazzuk meg a 2-es számrendszerre vonatkozó kerekítési szabályt! Számítsuk ki a 2.52. példa megoldásában szereplő műveleteket a kettes számrendszerben és kerekítsük az eredményeket e szabály szerint.

2• Az alábbi két interaktív programkód kiszámítja a $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{n^2+n}$ összeget két különböző sorrendben, de a két eredmény különbözik, és csak a második jó. Vajon miért? (Elemi függvénytanból tudjuk, hogy a fenti összeg ún. teleszkópösszeg, mert átalakítás után a szélső tagokat kivéve minden tag kiesik: $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{9999} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{10000}$.)

```
> format long
> s1 = 0;
> for n = 1:9999
> s1 = s1 + (1/(n^2+n));
> end
> s1
s1 =   0.999900000000001
> s2 = 0;
> for n = 9999:-1:1
> s2 = s2 + (1/(n^2+n));
> end
> s2
s2 =   0.999900000000000
```

2.5. Iteratív módszerek

A Gauss-módszer nagyméretű mátrixon a sok elemi sorművelet közben vétett kerekítési, számábrázolási hiba folytán néha rossz eredményre vezet. Az itt tárgyalandó iterációs módszerek közben az együtthatómátrixon nem változtatunk, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el", mint a Gauss-módszer, mely sok zérust ír fölül.

Iteratív módszerek. E szakaszban csak olyan egyenletrendszerekkel foglalkozunk, melyek n-ismeretlenesek és n egyenletből állnak, tehát melyek együtthatómátrixa négyzetes.

Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál. Első pillanatra meglepőnek tűnhet egy végtelen sorozat generálásával keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még gyorsíthatják is a konvergencia gyorsaságát.

A kiindulási pont – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen f egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \le \frac{1}{2}|b - a|, \text{ azaz } \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \le \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy f összes különbségi hányadosa legfeljebb $1/2$. A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan x^* pont létezik, hogy $x^* = f(x^*)$, és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges x_0 pontból kiindulva képezzük az

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \ldots,\ x_{k+1} = f(x_k), \ldots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$x^* = \lim_{k \to \infty} x_k.$$

A **??**. ábra szemlélteti a fenti állítást. Az $1/2$-es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső konstansra.

A Banach fixponttétel könnyen szemléltethető hétköznapi módon: képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges P_0 pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódáskor hová ugrik, legyen ez a P_1 pont az asztalon. A kinyújtott gumilap P_1 fölötti pontja összehúzódáskor az P_2 pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.

Jacobi-iteráció. Az előző paragrafusban leírtakat követve megpróbáljuk az egyenletrendszert átrendezni úgy, hogy az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakú legyen, ahol $\mathbf{x}$ jelöli az ismeretlenek vektorát.

2.56. PÉLDA: JACOBI-ITERÁCIÓ. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, majd hozzuk $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakra, és egy tetszőleges $\mathbf{x}_0$ vektorból indulva végezzünk az $\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k)$ formulával iterációt. Számoljunk 3 tizedes pontossággal. Hová tart az így kapott vektorsorozat?

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy $\mathbf{x} = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

Hozzuk az egyenletrendszert $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, azaz $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = f(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right])$ alakra. Erre több lehetőség is adódik. Ezek közül talán az a legkézenfekvőbb, hogy az első egyenletből az x-et, a másodikból y-t kifejezzük:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

Válasszunk egy $\mathbf{x}_0$ vektort tetszőlegesen, legyen pl. $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$, azaz $x = y = 0$. A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{x}_1 = (\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}) = (0.5, 1.6)$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
y	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensnek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot. ■

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\;\, \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A k-adik egyenletből fejezzük ki az x_k változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 \qquad\qquad - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 \qquad\qquad - \ldots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\;\;\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} \qquad\qquad) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Válasszunk az ismeretlenek $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorának egy $\mathbf{x}_0$ kezdőértéket, pl. legyen $\mathbf{x}_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. A (2.7) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be $\mathbf{x}_0$ koordinátáinak értékét, a bal oldal adja $\mathbf{x}_1$ koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$,... vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

Gauss – Seidel-iteráció. A Jacobi-iteráció gyorsaságán könnyen javíthatunk, ha a (2.7) egy egyenletének jobb oldalába való behelyettesítés után a bal oldalon kapott változó értékét azonnal fölhasználjuk, nem várunk vele a ciklus végéig. Ezt a módosított algoritmust nevezzük *Gauss – Seidel-iterációnak*.

2.57. PÉLDA: GAUSS – SEIDEL-ITERÁCIÓ. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss – Seidel-iterációval.

MEGOLDÁS. Itt is, mint a Jacobi-iterációnál az

$$\begin{aligned} x &= \frac{y+2}{4} \\ y &= \frac{2x+8}{5} \end{aligned}$$

egyenleteket használjuk, de míg a Jacobi-iterációnál $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ kezdőérték után az $x = \frac{0+2}{4} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{0+8}{5} = \frac{8}{5}$ értékek következtek, a Gauss – Seidel-iterációnál a második egyenletben 0 helyett már az első egyenletben kiszámolt $x = \frac{1}{2}$ értéket helyettesítjük, azaz $y = \frac{2\frac{1}{2}+8}{5} = \frac{9}{5}$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
x	0	0.5	0.95	0.995	1.000
y	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. ■

Mindkét iteráció a 2-ismeretlenes esetben jól szemléltethető. A **??**. és a **??**. ábra

Az iterációk konvergenciája. A fenti példákból nem látszik, hogy vajon a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iterációk mindig konvergálnak-e.

2.58. PÉLDA: DIVERGENS ITERÁCIÓ. Oldjuk meg Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x &= y + 2 \\ y &= 2x - 5 \end{aligned}$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
y	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss – Seidel-iterációnál sem:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	
x	0	2	1	-1	-5	-13
y	0	-1	-3	-7	-15	-31

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! ∎

2.59. DEFINÍCIÓ: SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX. Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix *soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik*, vagy *soronként (szigorúan) domináns főátlójú*, ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben

$$\begin{array}{rcl}
|a_{11}| &>& |a_{12}| + \ldots + |a_{1,n-1}| + |a_{1n}| \\
|a_{22}| &>& |a_{21}| + \ldots + |a_{2,n-1}| + |a_{2n}| \\
\vdots & & \ddots \\
|a_{n-1,n-1}| &>& |a_{n-1,1}| + |a_{n-1,2}| + \ldots + |a_{n-1,n}| \\
|a_{nn}| &>& |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{n,n-1}|
\end{array}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix is.

2.60. PÉLDA: SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIXOK. Az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ 2x - 5y &= -17 \end{aligned}$$

2.61. TÉTEL: ELÉGSÉGES FELTÉTEL AZ ITERÁCIÓK KONVERGENCIÁJÁRA. Ha az n egyenletből álló n-ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iteráció is konvergens.

E tételt nem bizonyítjuk. Megjegyezzük, hogy a tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa. Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss – Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az viszont előfordulhat, hogy a Gauss – Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.5.2. feladat).

A gyakorlatban ezeknek az iterációknak különböző, hatékonyabb javításait használják. E témában az olvasó figyelmébe ajánljuk a „numerikus módszerek” témában írt könyveket, web-oldalakat.

Jacobi-iteráció.

1• Oldjuk meg a

$$4x - y = 8$$
$$2x - 5y = -5$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

Legyen $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. Az iteráció képletei:

$$x = \frac{y+8}{4}, \quad y = \frac{2x+5}{5}.$$

Az iteráció lépéseinek táblázata 3 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$
x	0	2	2.25	2.45	2.48	2.50	2.50
y	0	1	1.80	1.90	1.98	1.99	2.00

Az iteráció lépéseinek táblázata 4 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$	$\mathbf{x}_5$	$\mathbf{x}_6$	$\mathbf{x}_7$	$\mathbf{x}_8$
x	0	2	2.25	2.45	2.475	2.495	2.498	2.500	2.5
y	0	1	1.80	1.90	1.980	1.990	1.998	1.999	2.0

Vegyes feladatok.

2■ **Jacobi-iteráció konvergál, Gauss – Seidel-iteráció nem.** Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$\begin{aligned} x \qquad\quad &+ z = 0 \\ -x + 5/6y \qquad &= 0 \\ x + \quad 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss – Seidel-iteráció nem.

3° **Gauss-elimináció domináns főátlójú mátrixon.** Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelemkiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

4• **Az iterációk szemléltetése.** A A városból elindul egy A jelű vonat a B város felé, vele egyidőben a B városból egy B jelű A felé. A B vonat indulásával egyidőben a B vonat orráról elindul egy légy is A felé, de amint találkozik az A vonattal megfordul, és addig repül, míg a B vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a B vonattal találkozik.

	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
x: távolság A-tól	0	40	48	49.6
y: távolság B-től	0	80	96	99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

2. Milyen messze van A város B-től, ha a légy sebessége 200 km/h?

3. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a léggyel:

	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x: távolság A-tól		30		46		49.2	
y: távolság B-től	0		80		96		99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát!

4. Milyen messze van A város B-től, ha a légy sebessége 200 km/h?

5. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iterációhoz?

A Jacobi-iteráció szerinti módon, a vonatok valamelyikének és a légynek a k-adik találkozásából kiszámítva a $k+1$-edik találkozásra jellemző távolságokat, az $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cy_k + d$ egyenletekre jutunk. Az első táblázat adatait behelyettesítve, és a, b, c és d értékre megoldva az

Projektfeladatok.

5° **Intervallum aritmetika.**

6□ **Lemez hőeloszlásának közelítése.** Képzeljünk el egy lemezt, melynek bizonyos pontokban – mondjuk egy képzeletben a lemezre rajzolt rács pontjaiban – ismerjük kezdeti hőeloszlását. Tegyük fel, hogy a lemez határoló éleit állandó hőmérsékleten tartjuk. A feladat: meghatározni, hogy hogyan változik meg a lemez hőeloszlása? ?????????????

A következő példában az elektromos áramköröket, mint folyamokat vizsgáljuk. Egyszerű fizikai magyarázata van annak, hogy a csomóponti törvény az elektromos áramkörökre is fönnáll. Szokás e törvényt Kirchoff I. törvényének is nevezni. A továbbiakhoz fölelevenítjük Kirchhoff törvényeit, és az Ohm-törvényt.

KIRCHHOFF I. TÖRVÉNYE (CSOMÓPONTI TÖRVÉNY). Egy elektromos áramkör bármely elágazási pontjában a befolyó áramok összege megegyezik az onnan elfolyó áramok összegével.

KIRCHHOFF II. TÖRVÉNYE (HUROKTÖRVÉNY). Bármely zárt áramhurokban a hurok valamely irányítására nézve előjeles részfeszültségek összege zérus.

OHM-TÖRVÉNY. Valamely vezetőben az elektromos áram erőssége (I) egyenesen arányos a vezeték két vége közti elektromos potenciálkülönbséggel (U), azaz e két mennyiség hányadosa konstans. Ez az anyagra jellemző ellenállás. Képletben:

$$R = \frac{U}{I}.$$

Kémiai reakciók egyensúlyi egyenlete. Egy zárt rendszerben végbemenő kémiai reakciók során a rendszerben lévő kémiai alkotóelemek mennyisége nem változik. Így felírható mindig egy olyan egyenlet – ezt nevezzük *reakció egyenletnek*, melynek bal oldalán a reakciók elején jelen lévő vegyületek, jobb oldalán az eredményül kapott vegyületek szerepelnek olyan együtthatókkal megszorozva, melyek a vegyületek mennyiségét fejezik ki.

2.62. PÉLDA: REAKCIÓ EGYENLET. A hidrogén-peroxid (H_2O_2) bomlékony anyag, mely vízre (H_2O) és oxigénre (O_2) bomlik. Keressük meg azokat a legkisebb x_1, x_2 és x_3 pozitív egész számokat, melyek leírják a reakcióban résztvevő vegyületek mennyiségét, azaz keressük a $x_1H_2O_2 = x_2H_2O + x_3O_2$ egyenletben szereplő ismeretlenek legkisebb pozitív egész megoldásait.

MEGOLDÁS. A hidrogén (H) és oxigén (O) atomok mennyisége a reakció egyenlet mindkét oldalán megegyezik, ami két egyenletet ad:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}:&\quad 2x_1 = 2x_2 \\ \mathrm{O}:&\quad 2x_2 = x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

Egy oldalra rendezzük a változókat:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}:&\quad 2x_1 - 2x_2 \phantom{{}- 2x_3} = 0 \\ \mathrm{O}:&\quad \phantom{2x_1 - {}} x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

majd megoldjuk e homogén lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Így $x_3 = s$ választással a megoldás $x_2 = 2s$, $x_1 = 2s$, azaz $(x_1, x_2, x_3) = (2s, 2s, s)$. A legkisebb pozitív egész megoldást $s = 1$ adja: $2H_2O_2 = 2H_2O + O_2$. ■

Egy kémiai reakció egyenletének az anyagmennyiségre vonatkozó megmaradási elv mellett az elektromos töltés megmaradását is ki kell fejeznie. Ha a reakcióegyenletben töltések is szerepelnek, ezekre is fölírható egy egyenlet.

A fenti egyenletrendszer együtthatómátrixához hasonlóan szokás kémiai reakció(k) *formulamátrixát* vagy *atommátrixát* megkonstruálni. Ebben a sorok a kémiai elemeknek, illetve egy sor a töltéseknek, az oszlopok a vegyületeknek felelnek meg. Pl. az előző egyenletben szereplő vegyületekhez tartozó formulamátrix:

	H_2O_2	H_2O	O_2
H	2	2	0
O	2	1	2

Ha több reakció is lezajlik egy folyamatban, az összes a folyamatban szereplő vegyületre fölírható egy atommátrix. Ennek rangja hozzásegít a folyamatban játszódó független reakciók számának meghatározásához (**??**. oldal). A formulamátrix arra is alkalmas, hogy segítségével reakció egyenleteket írjunk fel.

Ha már ismerjük egy folyamatban lejátszódó reakciókat, a köztük lévő lineáris kapcsolatot a *sztöchiometriai mátrix* segítségével írhatjuk le. Ennek minden oszlopa egy reakcióhoz, minden sora egy, a reakciókban szereplő valamelyik vegyülethez tartozik. Az i-edik sorban, j-edik oszlopban álló szám a 0-ra rendezett j-edik reakció egyenletben az i-edik vegyület mennyisége. A szokás az, hogy az egyenlet bal oldalán szereplő együtthatókatat szorozzuk -1-gyel.

Sztöchiometria: a kémiai reakciók során tapasztalható tömeg- és térfogatviszonyok törvényszerűségeivel foglalkozik (az alapanyag és mérték jelentésű görög sztoicheión és metron szavakból).

2.63. példa: Formulamátrix, sztöchiometriai mátrix. A szénsav disszociációját két egyenlet írja le.

$$\begin{aligned} &(1)\quad H_2CO_3 = HCO_3^- + H^+ \\ &(2)\quad HCO_3^- = CO_3^{2-} + H^+ \end{aligned}$$

Írjuk fel e reakció formula mátrixát és sztöchiometriai mátrixát! Határozzuk meg mindkettő rangját!

Megoldás. A formulamátrix

	H_2CO_3	HCO_3^-	H^+	CO_3^{2-}
H :	2	1	1	0
C :	1	1	0	1
O :	3	3	0	3
q :	0	-1	1	-2

Ennek utolsó sora a töltések számát mutatja, melyet q-val jelöltünk. Redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát a rangja 2. A sztöchiometriai mátrix a fejlécekkel:

$$\begin{array}{rrr} & (1) & (2) \\ H_2CO_3 & -1 & 0 \\ HCO_3^- & 1 & -1 \\ H^+ & 1 & 1 \\ CO_3^{2-} & 0 & 1 \end{array} \quad \text{redukált lépcsős alakja} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rangja ennek is 2. ■

2.64. példa: Bruttó reakció. Egy több reakcióból álló folyamatban az alábbi bruttó reakciót mérték:

$$5\mathrm{BrO}_2^- + 2\mathrm{H}^+ = \mathrm{Br}_2 + 3\mathrm{BrO}_3^- + \mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

E reakcióban a következő elemi reakciók mehetnek végbe:

$$\begin{array}{rrrrr}
(1) & \mathrm{BrO}_2^- + & \mathrm{HBrO}_2 = & \mathrm{BrO}_3^- + & \mathrm{BrOH} \\
(2) & \mathrm{BrO}_2^- + & \mathrm{H}^+ = & \mathrm{HBrO}_2 & \\
(3) & \mathrm{BrO}_2^- + & \mathrm{H}_2\mathrm{O}_2 = & \mathrm{BrO}_3^- + & \mathrm{H}_2\mathrm{O} \\
(4) & & 2\mathrm{BrOH} = & \mathrm{Br}_2 + & \mathrm{H}_2\mathrm{O}
\end{array}$$

Melyik elemi reakciónak hányszor kell végbemennie a bruttó reakcióban?

Megoldás. Írjuk fel az elemi reakciók sztöchometriai mátrixát először fejlécekkel, majd anélkül. Jelölje e mátrixot $\mathbf{A}$:

	(1)	(2)	(3)	(4)
BrO_2^-	−1	−1	−1	0
H^+	0	−1	0	0
Br_2	0	0	0	1
BrO_3^-	1	0	1	0
$\mathrm{H}_2\mathrm{O}$	0	0	1	0
HBrO_2	−1	1	0	0
BrOH	1	0	0	−2
$\mathrm{H}_2\mathrm{O}_2$	0	0	−1	1

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Majd írjuk fel a bruttó reakcióra ugyanezeket. Az oszlopmátrixot, mint vektort jelölje $\mathbf{b}$:

	bruttó
BrO_2^-	−5
H^+	−2
Br_2	1
BrO_3^-	3
$\mathrm{H}_2\mathrm{O}$	1
HBrO_2	0
BrOH	0
$\mathrm{H}_2\mathrm{O}_2$	0

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A feladat tehát az, hogy állítsuk elő ez utóbbi oszlopvektort az előbbi mátrix oszlopainak lineáris kombinációjaként! Ez pontosan azt jelenti, hogy oldjuk meg az $\mathbf{A}$ együtthatójú és $\mathbf{b}$ jobb oldalú egyenletrendszert. A bővített mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan a megoldás $(2, 2, 1, 1)$, azaz $2\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$. A feladat nyelvén: az első és második reakció kétszer, a harmadik és negyedik reakció egyszer hajtódik végre a bruttó reakció során. ■

E paragrafus anyaga részben a [2, 3] művekre épül, amelyekben további ismeretek és feladatok találhatóak.

Kifestő.

Véges lineáris ???.

Kémiai reakció egyenletek.

7• $x\mathrm{HClO_4} + y\mathrm{P_4O_{10}} = u\mathrm{H_3PO_4} + v\mathrm{Cl_2O_7}$
$x\mathrm{Ca_3P_2} + y\mathrm{H_2O} = u\mathrm{PH_3} + v\mathrm{Ca(OH)_2}$.

$(x, y, u, v) = (12, 1, 4, 6)$.
$(x, y, u, v) = (1, 6, 3, 2)$.
???????????????????

Az egyszerűség kedvéért jelöljön X_1, X_2,... különböző kémiai vegyületeket, Z_1, Z_1,... reakcióegyenleteket. Például tekintsük a következő képzeletbeli rendszert:

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}_1: &\quad 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ \mathrm{Z}_2: &\quad x_2 - 2x_3 = 0 \mathrm{Z}_3 : x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

???????????????

Tárgymutató