3. fejezet

Mátrixok

Az előző fejezetben a mátrixokat csak egyszerű jelölésnek tekintettük, mely az egyenletrendszer együtthatóinak tárolására, és az egyenletrendszer megoldása közbeni számítások egyszerüsítésére való. E fejezetben először a számok közti műveleteket kiterjesztjük számtáblázatokra, majd ezeket átültetjük mátrixokra, és megvizsgáljuk algebrai tulajdonságaikat. E műveletek segítségével újra vizsgáljuk az egyenletrendszerek megoldhatóságának és a megoldások kiszámításának kérdését. Végül megvizsgálunk több érdekes alkalmazást.

3.1. Bevezetés: műveletek táblázatokkal

A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők táblázatok közti műveletekre.

Táblázatok. Táblázatokkal nap, mint nap találkozunk. Fogalmát nem fogjuk precízen definiálni. Számszerű adatok áttekinthető összefoglalására való. Használatuk kikerülhetetlen a legegyszerűbb gazdasági adatok kezelésében, így minden irodai szoftvercsomag tartalmaz táblázatkezelőt, de a gazdaságtudományi, mérnöki vagy természettudományos közleményekben is nélkülözhetetlen eszköz.

E fejezetben olyan táblázatokkal fogunk foglalkozni, melyekben a téglalap alakban, sorokba és oszlopokba elrendezett számok minden sora előtt, és minden oszlopa fölött van egy *fejléc*, melyben az adott sor, illetve oszlop adatait jellemző valamely információ áll. A mátixra tehát úgy is tekinthetünk, mint amelyet egy olyan absztrakció során kapunk a táblázatból, melyben azt megfosztjuk fejléceitől, az adatokból pedig csak a számokat őrizzük meg, azok jelentésétől, mértékegységétől eltekintünk.

Táblázatok összeadása. A kerti asztalon 3 alma van. Ráesik a fárol még 2 alma. Az almák számának meghatározásához az összeadás műveletét használjuk. Az asztalon vendégséghez megterítve két gyümölcskosár van, bennük zöld és piros alma és szőlő. Számukat két táblázatban foglalhatjuk össze. Miután az egyik kosár tartalmát a másikba öntöttük, a gyümölcsök számát könnyen kiszámoljuk a két táblázatból. Például:

	zöld (db)	**piros** (db)
alma	3	2
szőlő	2	1

+

	zöld (db)	**piros** (db)
alma	2	2
szőlő	0	1

=

	zöld (db)	**piros** (db)
alma	5	4
szőlő	2	2

Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja az, ha az azonos pozícióiban lévő elemek összeadásával képezzük az összeget.

Táblázat szorzása számmal. Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorzunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab). Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

$$3 \cdot \begin{array}{lcc} & \textbf{zöld} & \textbf{piros} \\ & \text{(db)} & \text{(db)} \\ \hline \textbf{alma} & 3 & 2 \\ \textbf{szőlő} & 2 & 1 \end{array} = \begin{array}{lcc} & \textbf{zöld} & \textbf{piros} \\ & \text{(db)} & \text{(db)} \\ \hline \textbf{alma} & 9 & 6 \\ \textbf{szőlő} & 6 & 3 \end{array}$$

Táblázatok szorzása. Egy adag (e példában a továbbiakban mindig 10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal. Mennyi 5 adag energiatartalma. A választ ismét szorzással kapjuk meg, de most mindkét mennyiség mértékegységgel is rendelkezik:

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150\,\text{kcal}.$$

Több gyümölcsből (alma, banán, narancs) többféle (A, B, C) gyümölcssalátát készítünk, és a szénhidrát- és energiatartalmukat szeretnénk összehasonlítani. Két táblázatot készítünk, egyikbe a gyümölcssaláták összetételét, a másikba az összetevők szénhidrát- és energiatartalmát írjuk. Mindkét táblázatban a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek összetételét/összetevőit részletezzük, az oszlopokba pedig az összetevők.

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)
A	5	1	4
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

Első pillanatban furcsának tűnő számításokat kell végeznünk, ha meg akarjuk tudni az A saláta energiatartalmát:

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 1\,\text{adag} \cdot 105\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 4\,\text{adag} \cdot 40\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 415\,\text{kcal},$$

vagyis az első táblázat egy sorának és a második táblázat egy oszlopának kellett a skaláris szorzatát venni. Végezzük el e számításokat mindhárom gyümölcssaláta szénhidrát és energiatartalmára is, és az eredményt ismét egy olyan táblázatba tegyük, melynek soraiba a részletezendő tételek (A, B, C saláta), oszlopaiba a tartalmi összetevők (szénhidrát-, energiatartalom) kerüljenek.

	Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	91	415
B	140	620
C	108	490

Az áttekinthetőség kedvéért a két összeszorzandó mátrixot és az eredményt úgy helyezzük el, hogy az elvégzett műveletek jobban követhetőek legyenek. Az A saláta energiatartalmát kiemeljük:

	Szénhidrát (g/adag)	**Energia (kcal/adag)**
Alma	7	**30**
Banán	24	**105**
Narancs	8	**40**

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)
A	**5**	**1**	**4**
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	91	**415**
B	140	620
C	108	490

Érdemes megfigyelni, hogy ha csak az A és C gyümölcssalátákra vagyunk kiváncsiak, elég az első táblázat és a végeredmény második sorát elhagyni, hasonlóképp ha csak az energiatartalmat figyeljük, elég a második táblázat és a végeredmény második oszlopát megtartani. Az is látszik, hogy az első táblázat oszlopainak és a második táblázat sorainak száma megegyezik. Általában az igaz, hogy (a fejléceket nem számolva) egy $m \times n$-es táblázat csak olyan $p \times k$-as táblázattal szorozható össze, ahol $p = n$, és az eredmény $m \times k$-as lesz.

Lineáris helyettesítés. A lineáris algebra alapvető fogalmai megfogalmazhatóak a lineáris helyettesítés nyelvén.

3.1. definíció: Lineáris helyettesítés. Lineáris helyettesítésről akkor beszélünk, ha változók egy halmazát más változók konstansszorosainak összegeként állítjuk elő, azaz változókat más változók lineáris kifejezéseivel helyettesítünk.

Például

$$h = f + g, \qquad \begin{aligned} u &= x + y + z \\ v &= \quad\; - 9y + 2z \\ w &= \qquad\qquad 3z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} r &= \;\;\,0.25p - 0.12q \\ s &= -0.45p + 2.11q \\ t &= \qquad\quad\;\; - 0.39q \end{aligned}$$

három lineáris helyettesítés. Tekintsük a következő két lineáris helyettesítést:

$$\begin{aligned} a &= 5x + \;\,y + 4z \\ b &= 4x + 4y + 2z \\ c &= 4x + 2y + 4z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x &= \;\,7s + \;\,30k \\ y &= 24s + 105k \\ z &= \;\,8s + \;\,40k \end{aligned} \tag{3.1}$$

Egy néhány sor erejéig a lineáris helyettesítést is táblázatokkal írjuk le. Az előző két lineáris helyettesítés táblázatba foglalva:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline a & 5 & 1 & 4 \\ b & 4 & 4 & 2 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} & s & k \\ \hline x & 7 & 30 \\ y & 24 & 105 \\ z & 8 & 40 \end{array} \tag{3.2}$$

3.2. példa: Lineáris helyettesítések kompozíciója. Tekintsük a (3.1)-ben megadott két lineáris helyettesítést! Az első majd a második helyettesítés egymás után való elvégzése – más szóval *kompozíciója* – milyen helyettesítéssel egyenértékű, és az lineáris-e?

Megoldás. Az $a = 5x + y + 4z$ kifejezésben helyettesítsük x, y és z helyébe a második lineáris helyettesítés szerinti kifejezéseket, azaz

$$a = 5x + y + 4z = 5(7s + 30k) + (24s + 105k) + 4(8s + 40k) = 91s + 415k.$$

Emeljük ki pl. k együtthatójának kiszámítását:

$$5 \cdot 30 + 1 \cdot 105 + 4 \cdot 40 = 415.$$

Mint látjuk ez az első helyettesítés táblázata első sorának és második táblázat második oszlopának skaláris szorzata. Hasonló módon b és c is kifejezhető s és k segítségével, így kapjuk, hogy a két lineáris helyettesítés egymásutánja ekvivalens a

$$\begin{aligned} a &= 91s + 415k \\ b &= 140s + 620k \\ c &= 108s + 490k \end{aligned}$$

helyettesítéssel. Ez lineáris, hisz a számolás közben lineáris kifejezéseket csak konstanssal szoroztunk, és ezeket adtuk össze. Ennek a helyettesítésnek a táblázata

	s	k
a	91	415
b	140	620
c	108	490

vagyis azt kaptuk, hogy a lineáris helyettesítések kompozíciójának táblázataik szorzata felel meg. ■

1• Anti, Bori, Cili almát, banánt és citromot vesz a piacon, a hipermarketben vagy a csarnokban. Ha csak az ár számít, melyikük hol vásároljon?

	alma (kg)	banán (kg)	citrom (kg)
Anti	2	2	1
Bori	3	2	0.5
Cili	2	1	1

	csarnok (Ft)	hipermarket (Ft)	piac (Ft)
alma	180	100	130
banán	390	420	360
citrom	210	210	230

A két táblázat szorzata:

	csarnok	hipermarket	piac
Anti	1350	1250	1210
Bori	1425	1245	1225
Cili	960	830	850

Tehát Antinak és Borinak a piacon, Cilinek a hipermarketben érdemes vásárolnia.

2• Egy $f(x, y)$ kifejezésben elvégezzük az

$$\begin{aligned} x &= 2a + b \\ y &= 3a + b \end{aligned}$$

helyettesítést, majd az így kapott $f(2a + b, 3a + b)$ kifejezésben az

$$a = -3s + t \tag{3.3}$$
$$b = 4s - t \tag{3.4}$$

helyettesítést. Számítsuk ki a két helyettesítés kompozícióját a helyettesítések végrehajtásával, és a nekik megfelelő táblázatok szorzásával is, azaz írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

A két helyettesítést elvégezve:

$$\begin{aligned} x &= 2a + b = 2(-3s + t) + (4s - t) = -2s + t, \\ y &= 3a + b = 3(-3s + t) + (4s - t) = -5s + 2t. \end{aligned}$$

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline x & 2 & 1 \\ y & 3 & 1 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline a & -3 & 1 \\ b & 4 & -1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline x & -2 & 1 \\ y & -5 & 2 \end{array}$$

3• Tegyük fel, hogy egy kifejezésben elvégezzük a következő helyettesítést:

$$\begin{aligned} x &= 2a + b + 6c \\ y &= 4a + b + 7c \\ z &= 3a + b + 6c \end{aligned}$$

majd azt követően a következő helyettesítést:

$$a = -s + u \tag{3.5}$$
$$b = -3s - 6t + 10u \tag{3.6}$$
$$c = s + t - 2u \tag{3.7}$$

Hogyan számíthatjuk ki a két helyettesítés kompozícióját? Írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható. E szorzatból az olvasható le, hogy a kompozícióval kapott helyettesítés: $x = s$, $y = t$, $z = u$. Ez azt jelenti, hogy a két helyettesítés valamilyen értelemben egymás inverze.

3.2. Mátrixműveletek

A mátrixműveletek definiálása a táblázatok műveletei alapján magától értetődő.

Alapfogalmak, jelölések. Az eddigiek alapján megfogalmazhatjuk: az m sorba és n oszlopba rendezett mn darab szám rendszerét $m \times n$-típusú *mátrixnak* nevezzük. A mátrixban szereplő számokat a mátrix elemeinek nevezzük. E megfogalmazás még mindig nem tekinthető precíz definíciónak, mert nincs tisztázva, mik is azok a számok, amik egy mátrix elemei lehetnek. Egyelőre tekintsük úgy, hogy mindig egy algebrailag jól definiálható számhalmaz elemeit írhatjuk egy mátrixba, ennek megfelelően fogunk egész elemű, racionális elemű vagy valós elemű, illetve az egész számok, a racionálisok, a valósok fölött definiált mátrixról beszélni. Később ezt is tágítani fogjuk, pl. vizsgálni fogunk számértéket adó függvényekből álló mátrixokat.

A matematikában elterjedt az a szokás, hogy a mátrixot jelölő nagy betűvel azonos kis betűk jelölik a mátrix elemeit, tehát $\mathbf{A}$ elemei a_{11}, a_{12}.... Az $m \times n$-típusú

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixra szokás még a tömörebb

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n} \quad \text{vagy egyszerűen az} \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

jelölést használni.

Mindig az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát, tehát a_{23} a 2-dik sor 3-adik oszlop kereszteződésében álló elemet jelöli. Időnként, a félreérthetőség elkerülésére a_{ij} helyett $a_{i,j}$-t írunk (pl. $a_{n,n-1}$). Általában $\mathbf{a}_j$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopvektorát, ha csak oszlopvektorokkal dolgozunk. Ha sor- és oszlopvektorok is együtt szerepelnek, az i-edik sorvektort $\mathbf{a}_{i*}$, a j-edik oszlopvektort $\mathbf{a}_{*j}$ jelöli összhangban az elemek indexelésével. Ehhez hasonló jelölést használnak a mátrix alapú nyelvek is (ld. a széljegyzetet). Az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j-edik oszlopára az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

A programnyelvekben – ellentétben a matematikával – a kisbetűvel/nagybetűvel való jelölésnek nincs a mátrixot az elemétől való megkülönböztető szerepe. A legtöbb magasszintű nyelvben az `A`-val jelölt mátrix (informatikai szóhasználattal *tömb*) i-edik sorának j-edik elemét `A[i,j]` vagy `A(i,j)` jelöli. Az alacsonyabb szintű C-típusú nyelvekben nincs 2-dimenziós tömb, a mátrixot egy olyan 1-dimenziós tömb reprezentálja, melynek minden eleme 1-dimenziós tömb, így `A[i]` az i-edik sort, `A[i][j]` az i-edik sor j-edik elemét jelöli. A mátrix alapú nyelvekben egy mátrix egy sorvektora vagy oszlopvektora könnyen kiemelhető, pl. az `A` mátrix 2. sorát az `A(2,:)`, 3. oszlopát a `A(:,3)` kóddal érhetjük el.

3.3. példa: Mátrixok és elemeik. Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$c_{23} = 7, \ \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_{3*} = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

3.4. definíció: Mátrixok egyenlősége. Két mátrixot akkor tekintünk egyenlőnek, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlőek.

Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & x \end{bmatrix}$$

```
> a = [1 2 3
>       4 5 7]
a =
    1    2    3
    4    5    7

> b = [1 2;3 4]
b =
    1    2
    3    4

> diag([1,2,3])
ans =
    1    0    0
    0    2    0
    0    0    3

> a(2,3)
ans =   7
> a(2,:)
ans =
    4    5    7

> a(:,3)
ans =
    3
    7

> v = [1 2 3]
v =
    1    2    3

> w = [1;2;3]
w =
    1
    2
    3

> size(v)
ans =
    1    3

> size(w)
ans =
    3    1
```

3.1. programkód. Mátrix megadása, elemeinek, sorainak és oszlopainak és azok számának lekérdezése mátrix alapú nyelvekben.

egyenlőség pontosan akkor áll fönn, ha $x = 4$. Fontos felidézni, hogy minden vektornak megfeleltethetünk egy sor- vagy oszlopvektor alakba írt mátrixot, azok azonban nem egyenlők egymással. Például

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},$$

mert nem azonos típusúak, így el kell dönteni, hogy e két mátrix közül melyik reprezentálja a $(1, 2, 3)$ vektort. Mint említettük, a modern matematika legtöbb területén alapértelmezésben az oszlopvektorokat rendeljük a vektorokhoz. E könyvben mi is így teszünk, kivéve a kódelméleti alkalmazásokat, ahol a kódvektoroknak sorvektorokat feleltetünk meg.

Egy mátrix *négyzetes*, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójának elemei a_{11}, a_{22}, a_{33},.... Ez nem csak négyzetes mátrixra értelmezhető. Az olyan négyzetes mátrixot, melynek főátlón kívüli elemei mind nullák, *diagonális mátrixnak* nevezzük. Az ilyen mátrixok egyszerű megadására a diag függvényt használjuk, melynek argumentumába a főátló elemei vannak felsorolva. Például

$$\operatorname{diag}(1, 2, 3) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

Gyakran fogunk azonos típusú mátrixokkal dolgozni. Rendszerint az is fontos, hogy a mátrixok elemei ugyanabból az algebrai struktúrából valók legyenek. Pl. vizsgálhatjuk a 3×2-es valós mátrixok vagy a 4×4-es egész elemű mátrixok halmazát.

3.5. DEFINÍCIÓ: ADOTT TÍPUSÚ MÁTRIXOK TERE. Legyen S egy tetszőleges halmaz (általában S egy algebrai struktúra, pl. $S = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$...). Az S elemeiből képzett összes $m \times n$-es mátrixok halmazát jelölje

$$S^{m \times n}.$$

Azt mondjuk, hogy $S^{m\times n}$ az S fölötti $m \times n$ típusú *mátrixok tere*.

Például az $\left[\begin{smallmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{smallmatrix}\right]$ mátrix eleme az $\mathbb{N}^{2\times2}$, $\mathbb{Z}^{2\times2}$, $\mathbb{Q}^{2\times2}$, $\mathbb{R}^{2\times2}$ terek mindegyikének.

Elemenkénti mátrixműveletek. Több olyan mátrixműveletet ismerünk, melyben a számok közt már értelmezett műveletet úgy általánosítjuk mátrixokra, hogy azt a mátrix vagy mátrixok minden elemén végrehajtjuk. Ilyen pl. a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása.

3.6. DEFINÍCIÓ: MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE. Az $m \times n$-es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ mátrixok összegén azt az ugyancsak $m \times n$-es típusú, és $\mathbf{A} + \mathbf{B}$-vel jelölt mátrixot értjük, melynek i-edik sorában a j-edik elem $a_{ij} + b_{ij}$, ahol $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Képletben:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}].$$

Hasonlóan definiálható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ különbsége is, azaz $\mathbf{A} - \mathbf{B} := [a_{ij} - b_{ij}]$.

3.7. PÉLDA: MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE. Ellenőrizzük az alábbi műveleteket!

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\1 & 3 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\1 & 4 & 5\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

3.8. DEFINÍCIÓ: ZÉRUSMÁTRIX. A csupa nullából álló mátrixokat zérusmátrixoknak nevezzük. Az $m \times n$-es zérusmátrixot $\mathbf{O}_{m\times n}$, míg az $n \times n$-es négyzetes zérusmátrixot $\mathbf{O}_n$ jelöli.

Tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixhoz egy azonos típusú zérusmátrixot adva $\mathbf{A}$-t kapunk, azaz $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{O}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

3.9. definíció: Mátrix szorzása skalárral. Az $m \times n$-es típusú $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ mátrix c számmal képzett szorzatán azt az ugyancsak $m\times n$-es típusú, és $c\mathbf{A}$-val jelölt mátrixot értjük, melyre

$$c\mathbf{A}=c[a_{ij}]:=[ca_{ij}].$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix *ellentettjének* azt a $-\mathbf{A}$-val jelölt mátrixot nevezzük, melyre $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$. Könnyen megmutatható, hogy ilyen mátrix csak egy van, nevezetesen $-\mathbf{A}=(-1)\mathbf{A}$.

Azonos méretű mátrixokon még számtalan elemenkénti művelet definiálható, ezek azonban az alkalmazásokban és a matematikán belül is lényegesen ritkábban fordulnak elő, ezért nem definiáljuk őket és nem vezetünk be rájuk jelölést. Érdekességként mutatunk egy példát egy ilyen műveletre.

A mátrixalapú nyelvekben mátrixok közötti elemenkénti művelet definiálható a műveleti jel elé tett ponttal. Így az `A` és `B` mátrixok elemenkénti szorzata a `A .* B` paranccsal kapható meg. Eszerint az `A .+ B` és `A + B` kódok ekvivalensek.

3.10. példa: Elemenkénti mátrixművelet a digitális képfeldolgozásban. Az egészelemű $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix reprezentáljon egy $m \times n$ képpontból álló szürkeárnyalatos képet. Minden mátrixelem egy képpont árnyalatát adja meg a $\{0,1,\dots k\}$ tartományból, ahol 0 a fekete, k a fehér színnek felel meg. A háttér fehér, azaz képpontjaihoz a maximális k érték van rendelve és más fehér képpont a képen nincs. Legyen $\mathbf{B}_{m\times n}$ egy tetszőleges másik kép azonos módon reprezentált mátrixa. Konstruáljuk meg azt a $\circledcirc$ jellel jelölt műveletet, amellyel az elemenkénti

$$\mathbf{A}\circledcirc\mathbf{B}:=[a_{ij}\circledcirc b_{ij}]$$

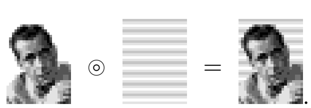
mátrixművelet az $\mathbf{A}$ kép hátterébe másolja a $\mathbf{B}$ képet. Képletben:

$$a_{ij}\circledcirc b_{ij}=\begin{cases} b_{ij}, & \text{ha } a_{ij}=k,\\ a_{ij}, & \text{egyébként.}\end{cases}$$

A megoldásban használhatjuk a $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ függvényt, mely egy x számhoz annak alsó egész részét rendeli.

Megoldás. Ha a a $[0,k]$ intervallumba eső szám, akkor $0\le a/k\le 1$, így a/k egész része 0 vagy 1. Részletezve $\lfloor a/k\rfloor$ pontosan akkor 1, ha $a=k$, egyébként 0. Másrészt $1-\lfloor a/k\rfloor$ pontosan akkor 0, ha $a=k$, egyébként 1. Ezt kihasználva könnyen definiálható a kívánt művelet:

$$a\circledcirc b=\left\lfloor\frac{a}{k}\right\rfloor b+\left(1-\left\lfloor\frac{a}{k}\right\rfloor\right)a.$$



Így e művelettel elemenként definiált $\mathbf{A}\circledcirc\mathbf{B}$ művelet a kívánt eredményt adja. Két 32×24-es mátrixszal szemléltetjük e műveletet a margón, azonban a mátrixokat az általuk mutatott képpel helyettesítve. ■

Mátrixok lineáris kombinációi. A vektorokhoz hasonlóan, a skalárral való szorzás és az összeadás művelete lehetővé teszi, hogy mátrixokra is definiáljuk a *lineáris kombináció*, a *lineáris függetlenség* és a *kifeszített altér* fogalmát. A vektorokra korábban adott definíciók kis változtatással kimondhatók, ha a vektorok helyébe azonos típusú mátrixokat helyettesítünk, ezért ezt az olvasóra bízzuk, de gyakorlásként mutatunk két egyszerű példát.

3.11. példa: Mátrixok lineáris kombinációja. Számítsuk ki az alábbi két mátrix megadott lineáris kombinációját!

$$2\begin{bmatrix}0&1\\2&1\\0&-1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0\\-1&-2\\-1&0\end{bmatrix}.$$

Megoldás. Először a skalárral való szorzásokat végezzük el:

$$2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}, \quad -3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 3 & 6\\ 3 & 0\end{bmatrix},$$

majd az összeadást:

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 3 & 6\\ 3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\ 7 & 8\\ 3 & -2\end{bmatrix}.$$

A műveletek természetesen elemenként is elvégezhetők, pl. a második sor első eleme így is megkapható: $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$. ■

3.12. példa: Mátrixok által kifeszített altér. Jellemezzük az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ térnek azt az alterét, melyet az alább megadott $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok feszítenek ki! Másként fogalmazva: milyen összefüggések állnak fönn azon 2×2-es valós mátrixok elemei között, melyek az alábbi mátrixok lineáris kombinációiként állnak elő?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Megoldás. E mátrixok összes lineáris kombinációja

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \begin{bmatrix}a+b+c & a+c\\ a & b+c\end{bmatrix}$$

alakú. Ha egy tetszőleges $\left[\begin{smallmatrix}u & v\\ w & z\end{smallmatrix}\right]$ mátrixról el akarjuk dönteni, hogy a fenti alakú-e, azaz fönnáll-e valamely a, b, c ismeretlenekre az

$$\begin{bmatrix}a+b+c & a+c\\ a & b+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u & v\\ w & z\end{bmatrix}$$

egyenlőség, akkor meg kell oldani a mátrixok négy elemére vonatkozó négy egyenletből álló 3-ismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a + b + c &= u\\ a \qquad + c &= v\\ a \qquad\qquad &= w\\ b + c &= z \end{aligned}$$

Ha ennek van megoldása, akkor létezik a megfelelő lineáris kombináció, tehát az adott $\left[\begin{smallmatrix}u & v\\ w & z\end{smallmatrix}\right]$ mátrix a kifeszített térbe esik. Ennek az egyenletrendszernek a bővített mátrixát fölírva, majd elemi sorműveletekkel megoldva a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & u\\ 1 & 0 & 1 & v\\ 1 & 0 & 0 & w\\ 0 & 1 & 1 & z\end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & w\\ 0 & 1 & 1 & u-w\\ 0 & 0 & 1 & v-w\\ 0 & 1 & 1 & z\end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & w\\ 0 & 1 & 1 & u-w\\ 0 & 0 & 1 & v-w\\ 0 & 0 & 0 & w+z-u\end{array}\right].$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $w + z - u = 0$. Például az $\left[\begin{smallmatrix}5 & 4\\ 3 & 2\end{smallmatrix}\right]$ mátrix ebbe az altérbe esik. A fenti egyenletrendszer megoldásával az is megkapható, hogy mik a lineáris kombináció együtthatói. Azt kapjuk, hogy $a = 3$, $b = 1$ és $c = 1$. ■

Mátrix transzponáltja. A mátrixalkalmazásokban gyakran nincs olyan természetes elv, amely alapján el lehetne dönteni, hogy mely mennyiségeket rendeljünk a sorokhoz, melyeket az oszlopokhoz. Ugyanakkor a számítások közben ez korántsem mindegy, ezért szükség lehet a következő egyszerű műveletre:

3.13. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA. Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltján azt az $\mathbf{A}^T$-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot értjük, amelyet az $\mathbf{A}$ sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk. Azaz

$$\mathbf{A}^T = [a_{ij}]^T := [a_{ji}].$$

3.14. PÉLDA: MÁTRIX TRANSZPONÁLTJA. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixok transzponáltjai

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzás. A táblázatok szorzásánál látott szabályt követjük a következő definícióban:

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \quad & b_{1j} & \quad \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{tj} & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \quad & c_{ij} & \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

3.15. DEFINÍCIÓ: MÁTRIXOK SZORZÁSA. Egy $m \times t$-s $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$-es $\mathbf{B}$ mátrix szorzatán azt az $\mathbf{AB}$-vel jelölt $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrixot értjük, amelynek i-edik sorában és j-edik oszlopában álló eleme

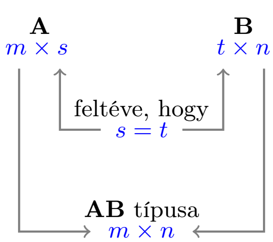
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{it}b_{tj}.$$

A definícióbeli összefüggés több módon is kifejezhető. Szummával fölírva:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj},$$

de mondhatjuk azt is, hogy c_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának és a $\mathbf{B}$ mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzata, azaz

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}.$$



Fontos kiemelni, hogy egy $m \times s$-es $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$-es $\mathbf{B}$ mátrix csak akkor szorozható össze, ha $s = t$, és ekkor a szorzat $m \times n$ típusú.

Nyilvánvaló, hogy a szorzás sorrendje fontos. Lehet, hogy az $\mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető, de a $\mathbf{BA}$ nem, és lehet, hogy elvégezhető, de különböző eredményt kapunk.

3.16. PÉLDA: MÁTRIXOK SZORZÁSA. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Döntsük el, hogy fönnállnak-e az $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, $\mathbf{BC} = \mathbf{CB}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{DC}$ és $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőségek.

Megoldás. A méretek alapján a **BC** szorzat nincs értelmezve, a többi:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}3&2&1\\9&8&7\\3&4&5\end{bmatrix},\ \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}6&5\\6&10\end{bmatrix},\ \mathbf{CB}=\begin{bmatrix}3&2&1\\3&4&5\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{CD}=\begin{bmatrix}-2&-1\\10&11\end{bmatrix},\ \mathbf{DC}=\begin{bmatrix}12&12\\-2&-3\end{bmatrix},\ \mathbf{DE}=\mathbf{ED}=\begin{bmatrix}0&-6\\2&7\end{bmatrix}.$$

Összefoglalva: $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$, mert különböző típusúak, $\mathbf{BC}\neq\mathbf{CB}$, mert az egyik oldal nincs értelmezve, $\mathbf{CD}\neq\mathbf{DC}$, ugyan mindkét oldal értelmezve van és azonos típusú. Ugyanakkor fennáll a $\mathbf{DE}=\mathbf{ED}$ egyenlőség. Azaz vannak felcserélhető mátrixok, de a mátrixszorzás nem felcserélhető (nem kommutatív) művelet! ■

Mivel a mátrixszorzás nem felcserélhető, ha szükséges, az „**A**-t balról szorozzuk **B**-vel”, vagy az „**A**-t jobbról szorozzuk **B**-vel” kifejezésekkel teszünk különbséget a **BA** és az **AB** szorzatok közt.

Fontosak azok a mátrixszorzatok, amelyekben az egyik mátrixnak csak egy sora vagy oszlopa van, tehát sor- vagy oszlopvektor. Egy $1\times m$-es mátrixot, azaz egy sorvektort jobbról, egy $n\times 1$-es mátrixot, azaz egy oszlopvektort balról lehet beszorozni egy $m\times n$-es mátrixszal. Például

$$\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&7\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}0&1&2\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}.$$

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja. Két oszlopvektor nem szorozható össze, ha 1-nél nagyobb dimenziósak. Viszont az egyikük transzponálása után a szorzás elvégezhető.

Legyen **a** és **b** két $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Az $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ szorzat a két vektor skaláris szorzatát adja, azaz

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},$$

ugyanis

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}.$$

Ha a második vektort transzponáljuk, a két vektor lehet különböző dimenziós is.

3.17. DEFINÍCIÓ: DIADIKUS SZORZAT. Legyen $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^m$, $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{uv}^T$ szorzatot a két vektor *diadikus szorzatának*, röviden *diádnak* nevezzük. E szorzat egy $m\times n$-es mátrix:

$$\mathbf{uv}^T=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1&v_2&\dots&v_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1v_1&u_1v_2&\dots&u_1v_n\\u_2v_1&u_2v_2&\dots&u_2v_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\u_mv_1&u_mv_2&\dots&u_mv_n\end{bmatrix}.$$

Két vektor diadikus szorzatát $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ jelöli.

3.18. PÉLDA: SKALÁRIS ÉS DIADIKUS SZORZAT. Legyen $\mathbf{u}=(1,0,2)$, $\mathbf{v}=(3,2,1)$. Írjuk fel mátrixszorzatos alakba skaláris és diadikus szorzatukat, és számítsuk ki!

Megoldás.

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=5,$$

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}=\mathbf{u}\mathbf{v}^T=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\0 & 0 & 0\\6 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja. A mátrixszorzást felhasználva a lineáris egyenletrendszerek egyszerű alakba írhatók.

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja. Ha $\mathbf{A}$ jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve $\mathbf{b}$ a konstans tagok és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \text{és}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+\ a_{12}x_2+\ldots+\ a_{1n}x_n&=\ b_1\\a_{21}x_1+\ a_{22}x_2+\ldots+\ a_{2n}x_n&=\ b_2\\\vdots\qquad\ \vdots\qquad\qquad\ \vdots\ \ &\quad\ \vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

egyenletrendszer

$$\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$$

alakba írható.

3.19. példa: Mátrixszorzatos alak. Könnyen ellenőrizhető a mátrixszorzás elvégzésével, hogy a

$$2x_1+3x_2-x_3=5,\qquad \begin{aligned}ax\qquad &=u\\ by\quad &=v\\ cz&=w\end{aligned}\qquad \text{és}\qquad \begin{aligned}x+2y&=1\\ y&=1\\ 0&=1\end{aligned}$$

egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjai rendre:

$$\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=5,\quad \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

A szimultán egyenletrendszerek (ld. 57. oldal) ugyanígy fölírhatóak mátrixszorzatos alakba.

3.20. példa: Szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja. Írjuk az alábbi két egyenletrendszert egyetlen mátrixszorzatos alakba!

$$\begin{aligned}2x_{11}+3x_{21}&=7 \qquad & 2x_{12}+3x_{22}&=9\\3x_{11}-4x_{21}&=2 \qquad & 3x_{12}-4x_{22}&=5\end{aligned}$$

Megoldás. A két egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjai külön-külön

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\5\end{bmatrix}.$$

Ezek egyetlen mátrixszorzattá olvaszthatók:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Általánosan a szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatóak, ahol $\mathbf{X}$ az ismeretlenekből, $\mathbf{B}$ a jobb oldalakból alkotott mátrix. ■

Lineáris helyettesítés mátrixa. Az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához hasonló a lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja.

Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók lineáris kifejezéseinek az $y_1, y_2, \ldots, y_m$ változók helyébe való helyettesítését általánosan leíró

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

képletek mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax},$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot nevezzük a *lineáris helyettesítés mátrixának*.

Például az

$$\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 4c \\ y &= a - 3b + 2c \\ z &= 2a - b + 2c \end{aligned}$$

helyettesítés mátrixszorzatos alakja

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Egységmátrix, elemi mátrixok. Egy adott $\mathbf{B}$ mátrixhoz találhatunk olyan $\mathbf{A}$-t, hogy az 1-gyel való szorzáshoz hasonlóan $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ legyen. Például

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

esetén

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az azonban már nem igaz, hogy $\mathbf{A}$-t bármely 2×2-es $\mathbf{B}$ mátrixszal szorozva $\mathbf{B}$ lesz az eredmény. Ilyen mátrix is létezik, némi próbálkozás után bárki rátalálhat.

3.21. definíció: Egységmátrix. Az $n \times n$-es

$$\mathbf{I}_n := \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot *egységmátrixnak* nevezzük.

Az *egységmátrix* jelölésére használt $\mathbf{I}$ betű az angol *identity matrix* elnevezés első betűjéből származik. Az *azonosság* vagy *identitás* jelentésű *identity* szó az $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ összefüggésre utal (az $x \mapsto x$ függvényt ugyanezen okból hívjuk identikus függvénynek). Ráadásul az I betű hasonlít legjobban az 1-es számra.

Az egységmátrix elnevezés onnan származik, hogy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n},$$

azaz e mátrix hasonló tulajdonsággal rendelkezik, mint a számok közt az egy.

Az egységmátrixszal már találkoztunk: a Gauss – Jordan-módszernél egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyértelműen megoldható egyenletrendszer együtthatómátrixa az elemi sorműveletek során egységmátrixszá transzformálódik!

Az egységmátrixon végrehajtott elemi sorműveletek olyan mátrixokat eredményeznek, melyek kapcsolatot létesítenek az elemi sorműveletek és a mátrixokkal való szorzás között. E mátrixoknak külön nevet adunk.

3.22. definíció: Elemi mátrixok. Az $\mathbf{I}_n$ egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot *elemi mátrixnak* nevezzük.

3.23. példa: Elemi mátrixok. Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezt igazolja, hogy mindegyikük $\mathbf{I}_4$-ből származik rendre a következő elemi sorműveletekkel: $S_1 \leftrightarrow S_4$, $5S_2$, $S_1 + 2S_3$, $1S_1$. Az utolsó mátrix az egységmátrix, amely maga is elemi mátrix, mert például egy sorának 1-gyel való szorzásával megkapható.

3.24. példa: Mátrix balról szorzása elemi mátrixszal. Az előbbi példa mátrixaival szorozzunk meg egy tetszőleges 4-soros mátrixot balról. Mit tapasztalunk?

Megoldás. Legyen $\mathbf{A}$ egy 4- sorból, és az egyszerűség kedvéért csak 2 oszlopból álló mátrix. Végezzük el a fenti mátrixokkal való balról szorzást:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

azaz a szorzás eredményeként fölcserélődött $\mathbf{A}$ első és negyedik sora. A következő szorzás eredménye

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

azaz az $\mathbf{A}$ második sora be lett szorozva 5-tel. Végül

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{31} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

azaz az $\mathbf{A}$ a szorzás eredményeként az $\mathbf{A}$ első sorához hozzá lett adva harmadik sorának kétszerese. ■

E példa eredménye kimondható tételként, melynek bizonyítása általánosan is úgy történik, mint az előző példában, ezért elhagyjuk:

3.25. TÉTEL: ELEMI SORMŰVELETEK MÁTRIXSZORZÁSSAL. Legyen $\mathbf{E}$ az az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_m$-ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{EA}$ mátrixot kapjuk.

Az elemi sorműveletek mátrixszorzással való elvégzésének nincs számítástechnikai praktikuma, annak célja az elemi sorműveletek – s ezzel az egyenletrendszerek megoldásának – algebraizálása.

Blokkmátrixok. A lineáris egyenletrendszerek bővített mátrixát tekinthetjük úgy, mint amelyet két mátrixból rakunk össze. De fordítva, mondhatjuk, hogy a bővített mátrixot két részmátrixra bontjuk.

Ha egy mátrixot a rajta végighaladó vízszintes és függőleges vonalakkal részmátrixokra bontunk, azt mondjuk, hogy e mátrix a részmátrixokból – más néven blokkokból – alkotott *blokkmátrix*.

Például egy 6-ismeretlenes, 5 egyenletből álló egyenletrendszer $\mathbf{B}$ bővített mátrixa lehet a következő, melynek blokkjait (részmátrixait) a mátrixokéhoz hasonló indexeléssel meg is jelöljük:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{bmatrix}.$$

E felbontásban $\mathbf{B}_{11} = \mathbf{I}_3$, $\mathbf{B}_{21} = \mathbf{O}_{2\times 3}$, $\mathbf{B}_{22} = \mathbf{O}_2$.

A *blokkmátrixokra* a szakirodalomban a *hipermátrix* elnevezés is el van terjedve. Ekkor a blokksorokat hipersoroknak, a blokkoszlopokat hiperoszlopoknak nevezzük. Mi kerüljük e szóhasználatot a hipermátrix másik – többdimenziós tömb értelmű – jelentése miatt.

Egy blokkmátrix sorait és oszlopait szokás a mátrix *blokksorainak* és *blokkoszlopainak* nevezni a közönséges soroktól és oszlopoktól való megkülönböztetés végett. Pl. a fenti blokkmátrix első blokksorának elemei $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$, $\mathbf{B}_{13}$.

3.26. ÁLLÍTÁS: MŰVELETEK BLOKKMÁTRIXOKKAL. Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \qquad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ két blokkmátrix, és minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával, akkor a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával is, azaz $\mathbf{C}$ olyan blokkmátrix, melynek i-edik blokksorában és j-edik blokkoszlopában álló blokk

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

3.27. PÉLDA: MŰVELETEK BLOKKMÁTRIXOKKAL. Végezzük el az $\mathbf{A} + 3\mathbf{C}$ és az $\mathbf{AB}$ műveleteket közönséges mátrixműveletekkel és blokkmátrixként számolva is, ha

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Megoldás. Számoljunk blokkmátrixként kezelve a mátrixokat:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}+3\mathbf{C} &= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] + 3\left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & 3+3\cdot 1 & 0+3\cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Ellenőrizzük a számítást közönséges mátrixműveletekkel! Ezután tekintsük a blokkmátrixok szorzását!

$$
\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 9 \\ \hline 6 & 6 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha ellenőrzésül egyszerű mátrixszorzással is elvégezzük a műveletet! ■

3.28. példa: 2×2-es blokkmátrixok. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két 2×2-es blokkmátrix, azaz legyen

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}.
$$

Írjuk fel szorzatukat a blokkok szorzatai segítségével.

Megoldás. Az $\mathbf{AB}$ szorzat felírható

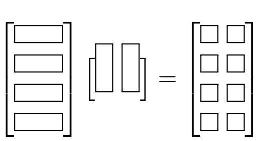
$$
\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}
$$

alakban. A $\mathbf{BA}$ hasonlóképp írható fel! Ellenőrizzük, hogy a 3.26. állítás feltétele (minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával) valóban szükséges, de elégséges is. ■

Vektorokra particionált mátrixok. Fontosak azok a blokkmátrixok, amelyekben vagy oszlopvektor vagy sorvektor minden blokk.

Bontsuk fel az $\mathbf{A}_{m\times t}$ mátrixot sorvektoraira, és a $\mathbf{B}_{t\times n}$ mátrixot oszlopvektoraira, azaz tekintsük a következő két blokkmátrixot:

$$
\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right].
$$

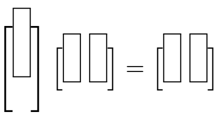


Ekkor $\mathbf{AB}$ a mátrixszorzás definíciója alapján a következő alakba írható:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix},$$

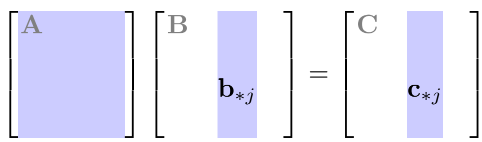
ahol $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{b}_{*j}$ az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának és a $\mathbf{B}$ mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzata.

A blokkmátrixok szorzási szabálya akkor is alkalmazható, ha csak az egyik mátrixot particionáljuk (a másik mátrixot egyszerűen egyetlen blokkból álló mátrixnak tekintjük). Két eset lehetséges. Az első esetben a szorzatmátrixban „mátrixszor oszlopvektorok” szerepelnek:



$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{Ab}_{*1} & \mathbf{Ab}_{*2} & \dots & \mathbf{Ab}_{*n} \end{array}\right]$$

Itt tehát a $\mathbf{C}$ mátrix j-edik oszlopvektora az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{B}$ j-edik oszlopának szorzata, vagyis $\mathbf{c}_{*j} = \mathbf{Ab}_{*j}$. Sematikusan ábrázolva:

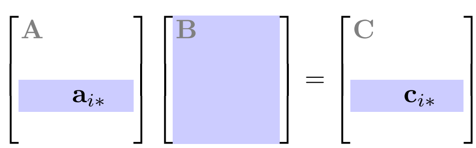


Ezzel az esettel már találkoztunk a szimultán egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjának fölírásánál (3.20. példa). Ha a fenti sematikus ábra egy szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alakját reprezentálja, akkor a kékkel kiemelt rész a szimultán egyenletrendszer egyetlen egyenletrendszerének felel meg.

A másik esetben a szorzatmátrixban „sorvektorszor mátrixok” szerepelnek:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right]\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{a}_{2*}\mathbf{B} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*}\mathbf{B} \end{array}\right]$$

Azaz itt a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ mátrix i-edik sora az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának $\mathbf{B}$-szerese. Másként írva $\mathbf{c}_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$, sematikusan ábrázolva:



A mátrixszorzat egy felbontása megkapható a mátrixok másik partíciójából, azaz amikor $\mathbf{A}$-t oszlopokra, $\mathbf{B}$-t sorokra bontjuk, vagyis

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{a}_{*1} & \mathbf{a}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{*t} \end{array}\right], \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_{1*} \\ \hline \mathbf{b}_{2*} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{b}_{t*} \end{array}\right].$$

Ekkor egyetlen blokksorból álló mátrixot szorzunk egy blokkoszlopból állóval, vagyis egy skaláris szorzatra emlékeztető összeget kapunk:

$$\mathbf{AB} = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

E felbontásban az $\mathbf{AB}$ mátrixot *diádok összegére* bontottuk! Mátrixok diádok összegére bontása olyan technika, amivel később még találkozunk.

3.29. PÉLDA: SZORZAT ELŐÁLLÍTÁSA DIÁDOK ÖSSZEGEKÉNT. Bontsuk fel a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

szorzatot diádok összegére. Vajon felbontható-e a szorzat kevesebb diád összegére?

Megoldás.

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=$$
$$\begin{bmatrix}0&0\\3&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&0\\-8&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&2\\5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&8\end{bmatrix}.$$

Tehát a szorzatot három diád összegére bontottuk, azonban kevesebbre is lehet. Például

$$\begin{bmatrix}0&2\\0&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix},$$

azaz a szorzat maga egy diád (egy diád összege). ■

E felbontásnak fontos speciális esete az, amikor **A** egyetlen sorból, vagy **B** egyetlen oszlopból áll. Tekintsük az előző példában szereplő **A** mátrix első sorát! Ekkor a fenti felbontás a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix}0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&0\\1&1\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-2&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix}.$$

Ez azt jelenti, hogy a szorzat, mely egy sorvektor, a **B** mátrix sorainak lineáris kombinációja. Hasonlóképp, ha **B** csak egyetlen oszlopból áll, a szorzat az **A** mátrix oszlopainak lineáris kombinációja. Például az előző példabeli **B** mátrix második oszlopát megtartva a következő felbontást kapjuk:

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&4&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix}.$$

Összefoglalva:

3.30. Állítás: A szorzat oszlopai és sorai. Az **AB** mátrix minden oszlopa az **A** oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a **B** sorainak lineáris kombinációja.

Bizonyítás. Az **AB** mátrix j-edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j}=\mathbf{A}\mathbf{b}_{*j}=\mathbf{a}_{*1}b_{1j}+\mathbf{a}_{*2}b_{2j}+\ldots+\mathbf{a}_{*t}b_{1t}$$

az i-edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*}=\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}=a_{i1}\mathbf{b}_{1*}+a_{i2}\mathbf{b}_{2*}+\ldots+a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

ami bizonyítja az állítást. ■

Szorzás a standard egységvektorokkal. Könnyen igazolható, de az egységmátrixszal való szorzással és a fenti particionálásokkal is jól szemléltethetőek azok az összefüggések, melyeket a standard egységvektorokkal való szorzással kapunk. Jelölje $\mathbf{e}_i=(0,0,\ldots,1,\ldots,0)$ azt a vektort, melynek i-edik koordinátája 1, a többi 0, a dimenziója pedig annyi, amennyire épp szükség van.

3.31. Állítás: Mátrix elemeinek, sor- és oszlopvektorainak előállítása mátrixszorzással. Legyen **A** egy $m\times n$-es mátrix, $\mathbf{e}_i$ m-dimenziós, $\mathbf{e}_j$ n-dimenziós. Ekkor

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}=\mathbf{a}_{i*}\quad\text{és}\quad\mathbf{A}\mathbf{e}_j=\mathbf{a}_{*j},$$

továbbá

$$a_{ij}=\mathbf{e}_i^T(\mathbf{A}\mathbf{e}_j)=(\mathbf{e}_i^T\mathbf{A})\mathbf{e}_j.$$

Az $\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i^T$ diád egy olyan mátrix, melynek (i,j)-indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix}0 & \dots & 1 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

Mátrixműveletek $\mathbb{Z}_m$-ben. A mátrixműveletek

Igaz – hamis. Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

1° Ha az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzat is értelmezve van, akkor mindkét szorzat négyzetes.

2° Ha az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat elvégezhető, akkor biztosan elvégezhető az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat is.

Mátrixműveletek. Az következőkben legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix}4 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket!

3 $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}^T$

4 $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} + \mathbf{AC} - \mathbf{CA}$

5 $(\mathbf{CD} - \mathbf{DC})(\mathbf{ABC})$

6 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{C}^2$

7 $(\mathbf{C})_{2*}(\mathbf{D})_{*2}$

8 $(\mathbf{A})_{*1}(\mathbf{B})_{2*}$

9• A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{C})^2 = \mathbf{A}^2+2\mathbf{AC}+\mathbf{C}^2.$$

10• A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{C}+\mathbf{D})(\mathbf{C}-\mathbf{D}) = \mathbf{C}^2-\mathbf{D}^2, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{D})(\mathbf{A}-\mathbf{D}) = \mathbf{A}^2-\mathbf{D}^2.$$

Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris és diadikus szorzatát! Írjuk fel mindkét műveletet mátrixszorzatos alakban!

11 $\mathbf{a} = (1,2)$, $\mathbf{b} = (0,1)$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = 2,\ \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

12 $\mathbf{u} = (1,2,0,1)$, $\mathbf{v} = (0,1,2,3)$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{uv}^T = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

13 $\mathbf{a} = (1,2,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,2,3)$

A skaláris szorzat nem végezhető el, a diadikus szorzat

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 4 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzatos alakok. Írjuk fel az alábbi egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakját!

14•
$$\begin{aligned} x + y &= 1\\ x - z &= 2\\ z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$$

15 $3x - 2y + 4z = 5$

16
$$\begin{aligned} 2x + z &= 1\\ x - y - w &= 2\\ y + z + w &= 2\\ 0 &= 3 \end{aligned}$$

Írjuk fel az alábbi lineáris helyettesítések mátrixszorzatos alakját!

17
$$\begin{aligned} u &= 2x - 4y\\ v &= x + 2y \end{aligned}$$

18
$$\begin{aligned} x &= 3a - 2b + c\\ y &= 2a - c\\ z &= b + 2c \end{aligned}$$

19
$$\begin{aligned} x &= 3a + b\\ y &= 2a - b\\ z &= b \end{aligned}$$

20•
$$\begin{aligned} x &= 3a - 2b + c\\ y &= 2a - c \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

Elemi mátrixok. Keressük meg azt az $\mathbf{E}$ mátrixot, mely megoldása az alábbi mátrixegyenletnek!

21 $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \\ c & d \end{bmatrix}$

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

22 $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3c & 3d \\ e & f \end{bmatrix}$

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23 $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c+2e & d+2f \\ e & f \end{bmatrix}$

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24 $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Elemi sorműveletekkel, mátrixszorzás nélkül határozzuk meg az alábbi mátrixszorzatok értékét!

25 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

26 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

Blokkmátrixok. Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott mátrixszorzatokat a kijelölt blokkmátrixokat használva!

27 $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]$

28 $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 14 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$

29 $\left[\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]$

$\left[\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 6 & 7 \\ \hline 12 & 12 \end{array}\right]$

Vegyes feladatok.

30• A *sudoku* egy olyan logikai játék, melyben egy olyan 9×9-es mátrixot kell megadni, melynek ismerjük néhány, de nem minden elemét. A feladat a nem ismert elemek meghatározása. A mátrix 9 darab 3×3-as blokkra van particionálva és eleget tesz annak a feltételnek, hogy minden sorában, minden oszlopában és minden blokkjában az 1-től 9-ig terjedő egészek mindegyike egyszer szerepel. Ez azt jelenti, hogy az egy sorban, egy oszlopban és egy blokkban lévő számok összege mindig 45. Fejezzük ki ezt mátrixműveletekkel, azaz írjunk fel a sudoku tábla $\mathbf{A}$ mátrixát is tartalmazó olyan mátrixegyenleteket, melyeket minden helyesen kitöltött sudoku tábla mátrixa kielégít!

Jelölje $\mathbf{j}$ a csupa 1-esből álló 9-dimenziós vektort, $\mathbf{j}_{456}$ azt, amelynek 4, 5, 6 indexű eleme 1-es, a többi 0. Ekkor a „minden sorösszeg 45" és a „minden oszlopösszeg 45" feltételek ekvivalensek az $\mathbf{Aj} = 45\mathbf{j}$, $\mathbf{j}^T\mathbf{A} = 45\mathbf{j}^T$ egyenletekkel, míg pl. az „első blokkoszlop, második blokksor metszetében álló blokk elemeinek összege 45" feltételnek a $\mathbf{j}_{456}^T\mathbf{A}\mathbf{j}_{123} = 45$ egyenlet felel meg.

31 Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$-nek, azaz a kételemű test fölötti 2×2-es mátrixok terének?

$\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$-be $2^4 = 16$ mátrix tartozik:

$$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] \right\}.$$

3.3. Mátrixműveletek tulajdonságai

Ebben a szakaszban áttekintjük a mátrixműveletek legfontosabb algebrai tulajdonságait. Néhány dologban különböznek a számoknál megismert műveleti tulajdonságoktól.

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai. Mivel a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása elemenként végrehajtható műveletek, ezért műveleti tulajdonságaik természetes módon öröklik meg a számok műveleti tulajdonságait. A legfontosabb ilyen tulajdonságokat sorolja föl a következő tétel.

3.32. TÉTEL: ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ azonos típusú ($m \times n$-es) mátrix, c és d legyenek skalárok. Ekkor

(a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$	felcserélhetőség, kommutativitás
(b) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$	csoportosíthatóság, asszociativitás
(c) $\mathbf{A}+\mathbf{O}_{m\times n}=\mathbf{A}$	zérusmátrix (zéruselem) létezése
(d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}_{m\times n}$	ellentett (additív inverz) létezése
(e) $c(d\mathbf{A})=(cd)\mathbf{A}$	csoportosíthatóság
(f) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}_{m\times n}$	
(g) $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$	
(h) $-1\mathbf{A}=-\mathbf{A}$	
(i) $(c+d)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$	disztributivitás
(j) $c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$	disztributivitás

► A csoportosíthatósági azonosságok következménye, hogy a zárójelek elhagyhatók, így $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ helyett írható $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$, $(cd)\mathbf{A}$ helyett $cd\mathbf{A}$.

► A két létezési állítás tartalma az, hogy *létezik* olyan mátrix, hogy *bármely* vele azonos típusú $\mathbf{A}$ mátrixhoz adva $\mathbf{A}$ lesz az eredmény, illetve minden $\mathbf{A}$ mátrixhoz *létezik* olyan mátrix, mellyel összeadva a zérusmátrixot kapjuk.

BIZONYÍTÁS. Mintaként bebizonyítjuk az *(a)* állítást.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=[a_{ij}]+[b_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]\stackrel{*}{=}[b_{ij}+a_{ij}]=[b_{ij}]+[a_{ij}]=\mathbf{B}+\mathbf{A}.$$

A *-gal jelzett egyenlőségnél használjuk a számok összeadásának kommutativitását.

A többi állítás hasonlóan bizonyítható. ■

A szorzás tulajdonságai. A számok szorzásának algebrai tulajdonságai már nem vihetők át olyan könnyen a mátrixműveletekre, mint az összeadáséi. Sőt, nem is teljesülnek mind, pl. a 3.16. példában láttuk, hogy a mátrixszorzás *nem kommutatív.* A következő példák óvatosságra intenek a mátrixkifejezésekkel való számolásokban.

3.33. PÉLDA: EGYSZERŰSÍTÉS MÁTRIXSZAL. A valós számok közt igaz, hogy ha $a \neq 0$ és $ab = ac$, akkor a-val egyszerűsíthetünk, azaz akkor $b = c$. Mátrixoknál az $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ egyszerűsíthetőséghez nem elég, hogy $\mathbf{A}$ ne legyen zérusmátrix! Például

$$\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ \text{de}\ \begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

3.34. PÉLDA: NULLOSZTÓ. A valósok közt igaz, hogy ha $ab = 0$, akkor vagy $a = 0$, vagy $b = 0$. Mátrixok közt ilyen következtetés nem vonható le:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(*Nullosztónak* nevezzük egy algebrai struktúra olyan nemzérus elemeit, melyek szorzata zérus.)

► Megjegyezzük, hogy a $\mathbb{Z}_m$-ben való számolásnál is hasonlókat tapasztaltunk, ha m összetett. Például $\mathbb{Z}_6$-ban $2 \cdot 3 = 0$, és bár $3 \cdot 2 = 3 \cdot 4$, $2 \neq 4$.

3.35. TÉTEL: MÁTRIXSZORZÁS ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ olyan, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők legyenek, legyen továbbá c skalár. Ekkor

(a) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ felcserélhetőség, asszociativitás

(b) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ disztributivitás

(c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ disztributivitás

(d) $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$

(e) $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times t} = \mathbf{O}_{m\times t}$ szorzás nullmátrixszal

(f) $\mathbf{I}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$ szorzás egységmátrixszal

BIZONYÍTÁS. A fenti tulajdonságok közül csak az elsőt és az utolsót bizonyítjuk, a többit feladatként tűzzük ki, mert vagy hasonlóan, vagy még egyszerűbben bizonyíthatóak.

(a) Vizsgáljuk meg először, hogy három tetszőleges mátrix milyen feltételek mellett szorozható össze! Legyen $\mathbf{A}_{m\times s}$, $\mathbf{B}_{u\times v}$ és $\mathbf{C}_{t\times n}$ három tetszőleges mátrix. Az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzatban $\mathbf{AB}$ csak $s = u$ esetén végezhető el, és a szorzat típusa $m \times v$ lesz. Ez $\mathbf{C}$-vel csak akkor szorozható, ha $v = t$, és a szorzat $m \times n$-es. Tehát e szorzat csak akkor van értelmezve, ha $\mathbf{B}$ típusa $s \times t$. Hasonló érveléssel ugyanezt kapjuk az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzatról is.

Az indexek kezelésének könnyítésére elég lesz a bizonyítást sorvektor alakú $\mathbf{A}$ és oszlopvektor alakú $\mathbf{C}$ mátrixokra elvégezni, ugyanis az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem az $\mathbf{AB}$ i-edik sorának, azaz az $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ sorvektornak és $\mathbf{C}$ j-edik oszlopának szorzata, azaz $(\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B})\mathbf{c}_{*j}$. Hasonlóképp az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem $\mathbf{a}_{i*}(\mathbf{B}\mathbf{c}_{*j})$.

Legyen tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Ekkor a szorzat 1×1-es. Először számoljuk ki az $\mathbf{AB}$ mátrixot, ami $1 \times m$-es: $\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \end{bmatrix}$. Innen számolva $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$-t:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_k b_{kl} c_l.$$

Hasonlóan, először $\mathbf{BC}$-t fölírva, az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ mátrixra kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n} b_{1l}c_l \\ \sum_{k=1}^{m} b_{2l}c_l \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} b_{ml}c_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_l \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_k b_{kl} c_l .$$

Az utolsó lépésben a belső szumma minden tagját beszoroztuk a_k-val, a számok közti összeadás és szorzás közti disztributivitást használva. Vagyis mindkét oldalon olyan összeg áll, amely az összes $a_k b_{kl} c_l$ alakú szorzat összege, csak a tagok csoportosítása más. ■

► Az asszociativitás következménye, hogy a többtényezős mátrixszorzatokat nem kell zárójelezni, hisz bármelyik zárójelezés ugyanazt az eredményt adja. Például

$$\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

Az állítás igaz többtényezős szorzatokra is, vagyis az $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k$ szorzat független a végrehajtás sorrendjétől, de a tényezők sorrendje nem változtatható!

► Indukcióval bizonyítható, hogy a *(g)*-beli összefüggés többtényezős szorzatokra is fönnáll, azaz

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k)^T = \mathbf{A}_k^T \dots \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^T .$$

► Megjegyezzük, hogy az asszociativitás imént leírt bizonyítása hasonlóan mondható el, ha az $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ mátrix nem csak 1 sorból, és a $\mathbf{C} = [c_{lj}]$ mátrix nem csak egy oszlopból áll: ekkor a $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$ szorzat i-edik sorának j-edik elemére azt kapjuk, hogy az az összes $a_{ik}b_{kl}c_{lj}$ alakú szorzatok összege, azaz

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj} .$$

Ez, és az ehhez hasonló számtalan hasonló kifejezés vezette Einsteint arra a felismerésre, hogy az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem. Tehát az előző kettős szumma helyett írhatnánk azt is, hogy

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj} ,$$

hisz a jobb oldalon i és j csak egyszer szerepel, így k-ra és l-re kell összegezni, azt pedig tudjuk, hogy $k = 1, \dots, m$ és $l = 1, \dots, n$. Ezt a jelölésbeli egyszerűsítést *Einstein-konvenciónak* nevezik. Einstein ezt a relativitás általános elméletéről írt híres dolgozatában használta először 1916-ban. A konvenció használata főként a lineáris algebra fizikai alkalmazásaiban terjedt el, mi e könyvben nem fogjuk használni.

Mátrix hatványozása. Csak a négyzetes mátrixok szorozhatók meg önmagukkal, hisz ha egy $m \times n$-es mátrix megszorozható egy $m \times n$-essel, akkor $m = n$. Ezt figyelembe véve természetes módon definiálható négyzetes mátrixok pozitív egész kitevős hatványa:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{AA} \dots \mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}$$

Kicsit elegánsabban – rekurzióval – is definiálhatjuk e fogalmat: $\mathbf{A}^1 := \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{k+1} := \mathbf{A}^k\mathbf{A}$.

Mivel a mátrixszorzás asszociatív, mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a hatványozást. Ezzel igazolható a következő két összefüggés is:

3.36. ÁLLÍTÁS: HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI. Legyen $\mathbf{A}$ egy négyzetes mátrix! Ekkor

(a) $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m}$,

(b) $(\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km}$.

A latin eredetű *precedencia* szó *előzményt* jelent (lásd még precedens). A *precedencia elv* a matematikában fogalmak jelentésének olyan kiterjesztését jelenti, melynek során a korábban megismert tulajdonságok, összefüggések érvényben maradnak.

Ha ki akarjuk terjeszteni a hatványozást 0 kitevőre is, kövessük a precedencia-elvet, azaz olyan értelmet adjunk $\mathbf{A}^0$-nak, hogy a fenti összefüggések érvényben maradjanak. Például tekintsük az *(a)* azonosságot $m = 0$ esetén:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{k+0} = \mathbf{A}^k.$$

Ez minden $\mathbf{A}$ mátrix esetén csak az egységmátrixra igaz, tehát

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n,$$

ahol n a négyzetes $\mathbf{A}$ mérete.

► A valós számoknál tanult, különböző alapú hatványokra érvényes azonosság itt a kommutativitás hiánya miatt nem érvényes, azaz általában $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$.

3.37. PÉLDA: MÁTRIX HATVÁNYOZÁSA. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok k-adik hatványait!

MEGOLDÁS. Számoljuk ki $\mathbf{A}$ hatványait!

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$, ebből pedig látjuk, hogy $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = \mathbf{AA} = \mathbf{I}_2, \ldots$. Tehát általában $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}_2$ és $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$.

A másik feladatot a hatványozás rekurzív definícióját használva indukcióval kényelmesen meg tudjuk oldani. Először számoljuk ki $\mathbf{A}$ néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ebből azt sejtjük, hogy $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Ha be tudjuk látni ennek az összefüggésnek az öröklődését k-ról $k+1$-re, akkor kész vagyunk. Más szóval meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, akkor $\mathbf{A}^{k+1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Ezt a következő szorzás elvégzése igazolja:

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Miután mátrixok lineáris kombinációja és négyzetes mátrixok egész kitevős hatványa értelmezve van, ezért négyzetes mátrixokra is definiálhatjuk skalár együtthatós polinom helyettesítési értékét. Legyen

$$p(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

egy skalár együtthatós polinom. A p polinom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ helyen vett helyettesítési értékén a

$$p(\mathbf{X}) = a_k\mathbf{X}^k + \ldots + a_2\mathbf{X}^2 + a_1\mathbf{X} + a_0\mathbf{I}_n$$

mátrixot értjük.

3.38. példa: Polinom helyettesítési értéke. Legyen

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $p(\mathbf{C}) = \mathbf{O}$, ha $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$.

Megoldás. A $p(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I}$ műveleteit elvégezve kapjuk, hogy

$$p(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -14 \\ 8 & 7 & -12 \\ 14 & 12 & -21 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 6 \\ -7 & -6 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A transzponálás tulajdonságai. A következő tétel a transzponálás és a többi művelet kapcsolatáról szól:

3.39. tétel: Transzponálás tulajdonságai. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ legyenek azonos típusú mátrixok, c tetszőleges skalár. Ekkor

(a) $\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$,

(b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$,

(c) $(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$,

(d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

Bizonyítás. Az első három összefüggés magától értetődő, csak az utolsót bizonyítjuk.

Először megmutatjuk, hogy ha $(\mathbf{AB})^T$ elvégezhető, akkor $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ is. Az $m \times t$ típusú $\mathbf{A}$ és a $t \times n$ típusú $\mathbf{B}$ szorzata $m \times n$-es, transzponáltja $n \times m$-es, így az $n \times t$ típusú $\mathbf{B}^T$ és a $t \times m$-es $\mathbf{A}^T$ összeszorozhatók, szorzatuk $n \times m$-es, így a tételbeli egyenlőség két oldalának típusa azonos.

A tétel azon alapul, hogy két tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$. Ezt az összefüggést a *-gal jelölt egyenlőségnél fogjuk használni. Az $(\mathbf{AB})^T$ i-edik sorának j-edik eleme

$$\left((\mathbf{AB})^T\right)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j*}\,(\mathbf{B})_{*i}\,.$$

A $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ i-edik sorának j-edik eleme

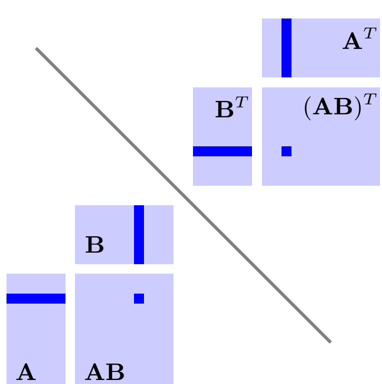
$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\right)_{ij} = \left(\mathbf{B}^T\right)_{i*}\left(\mathbf{A}^T\right)_{*j} \stackrel{*}{=} (\mathbf{A})_{j*}\,(\mathbf{B})_{*i}\,.$$

Tehát $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. ■

► A tétel *(b)* pontjának indukcióval könnyen bizonyítható következménye, hogy többtagú összeg transzponáltja megegyezik a transzponáltak összegével. A *(c)* pontot is figyelembe véve kapjuk, hogy mátrixok lineáris kombinációjának transzponáltja megegyezik a mátrixok transzponáltjainak azonos lineáris kombinációjával, azaz

$$(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \ldots + c_k\mathbf{A}_k)^T = c_1\mathbf{A}_1^T + c_2\mathbf{A}_2^T + \ldots + c_k\mathbf{A}_k^T.$$

► A tétel *(d)* pontjára „szemléletes igazolás” is adható, ami leolvasható az alábbi ábráról.



3.4. Mátrix inverze

Lehet-e mátrixszal osztani, és ha igen, meg tudjuk-e vele oldani az $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ egyenletrendszert úgy, ahogy az $ax = b$ egyenletet megoldjuk az a-val való osztással?

Az inverz. Korábbi tanulmányainkban megtanultuk, hogy az összeadás és a szorzás invertálható műveletek, inverzeik a kivonás, illetve az osztás. De mit is jelent ez pontosan, és vajon a mátrixműveletek invertálhatóak-e?

Egy H halmazon értelmezett kétváltozós (más szóval bináris) *műveleten* egy $H^2 \to H$ függvényt értünk, azaz a művelet H-beli elempárokhoz H-beli elemet rendel. Például a valós számok összeadása esetén e függvény valós számpárhoz valós számot rendel, mondjuk a $(3.7, 6.9)$ számpárhoz a 10.6-ot. Írhatjuk tehát, hogy a '+' jellel egy olyan függvényt jelölünk, melyre

$$+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (a, b) \mapsto a + b.$$

A függvényeknél szokásos prefix „$+(a, b)$" jelölés helyett műveleteknél az ún. infix jelölést használjuk, azaz $a+b$-t írunk (lásd erről még a széljegyzetet).

A számítástechnikában gyakran találkozunk a műveletek *infix* jelölése mellet a *prefix* vagy *lengyel* és a *postfix* vagy *fordított lengyel jelölésével* is. A prefixnél a műveleti jel az argumentumai előtt, a postfixnél után van. Például a $(3+4)\cdot 2$ kifejezést a prefix jelölést használó Lisp nyelvcsalád nyelveiben a

```
(* (+ 3 4) 2)
```

kód, míg például a postfix jelölést használó PostScript nyelvben a

```
3 4 add 2 mul
```

kód számítja ki. (A PostScript nyelvvel találkozhatunk a PDF formátumú fájlokban is.) Ugyanez a formula a komputer algebra nyelvek közül a Mapleben prefix módon

```
‘*‘(‘+‘(3,4),2)
```

a Mathematicában

```
Times[Plus[3,4],2]
```

alakot ölt.

3.40. definíció: Invertálható művelet. Legyen $\circledcirc$ egy H-n értelmezett kétváltozós művelet. Azt mondjuk, hogy e művelet invertálható a H egy R részhalmazán, ha bármely $a, b, c \in R$ elem esetén az

$$a \circledcirc x = b, \qquad y \circledcirc a = c$$

egyenletek mindegyike megoldható, azaz vannak olyan $x, y \in H$ elemek, melyek kielégítik a fenti egyenleteket.

Ha a definícióbeli $\circledcirc$ kommutatív művelet, akkor elég a fenti két egyenlet egyikét tekinteni. Mivel azonban a mátrixszorzás nem kommutatív, mi az általánosabb esetet vizsgáljuk.

Az összeadás invertálható a valós számok halmazán, azaz itt $H = R = \mathbb{R}$, mert minden $a + x = b$ és $y + a = c$ egyenlet megoldható a valósok közt. Ugyanakkor például a valósok szorzása csak a nemnulla számokon invertálható, azaz itt $H = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, mert az $a \cdot x = b$ és az $y \cdot a = c$ egyenletek $a = 0$ esetén nem oldhatók meg. Látható, hogy ha $H = \mathbb{R}^{m\times n}$ az azonos típusú mátrixok halmaza, akkor az összeadás invertálható ezen a halmazon, és az

$$\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{Y} + \mathbf{A} = \mathbf{C}$$

egyenletek megoldásai $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$, illetve $\mathbf{Y} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$.

Elemi ismeret, hogy az $a + x = b$ egyenlet megoldásához elég ismerni a *ellentettjét*, és azt adni b-hez, az $ax = b$ egyenlet megoldásához elég ismerni a *reciprokát*, és azzal szorozni b-t. Ez vezet a következő definícióhoz:

3.41. definíció: Elem inverze. Legyen $\circledcirc$ egy H-n értelmezett kétváltozós művelet, és tegyük fel, hogy van H-ban egy olyan e elem, hogy minden a elemre $a \circledcirc e = e \circledcirc a = a$. Azt mondjuk, hogy a $\circledcirc$ műveletre nézve a inverze b, ha

$$a \circledcirc b = b \circledcirc a = e.$$

A valósok összeadására nézve az e elem szerepét a 0, a szorzásra nézve az 1 játssza. Az a inverze az összeadásra nézve – ezt nevezzük *additív inverznek* – a $-a$ szám, míg az a inverze a szorzásra nézve – ezt nevezzük *multiplikatív inverznek* vagy *reciproknak* – az $1/a$ vagy a^{-1} szám. Az elemek inverzei segítségével a művelet invertálása könnyen elvégezhető, például az $a+x=b$ megoldása $x=-a+b$, az $ax=b$ megoldása $x=a^{-1}b$.

Eszerint a mátrixok (multiplikatív) inverzén olyan $\mathbf{B}$ mátrixot kell érteni, mely kielégíti az $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ egyenletet. Azt reméljük, hogy így a szorzás invertálhatóvá válik, és így például az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenlet könnyen megoldható lesz mindkét oldal $\mathbf{B}$-vel (balról!) való beszorzásával, ugyanis $\mathbf{BAx}=\mathbf{Bb}$, amiből $\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ miatt $\mathbf{x}=\mathbf{Bb}$.

Kérdés még, hogy mátrix inverzét jelölhetjük-e a -1-edik kitevőre emeléssel? A választ erre is a precedencia elv adja. Ha értelmezhető a negatív kitevőjű hatvány, akkor a 3.36. tétel érvényességét megtartva $\mathbf{A}^{-1}$ olyan mátrix kell hogy legyen, melyre $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{A}^{-1+1}=\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$ és ugyanígy $\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{A}^{1-1}=\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$.

Végül, minthogy a mátrixok közti műveleteket is a számok közti műveletek táblázatokra való kiterjesztésén keresztül vezettük be, elvárjuk, hogy az 1×1-es mátrixok inverze essen egybe a számok multiplikatív inverzével, azaz ha $\mathbf{A}=[a]$, akkor $\mathbf{A}^{-1}=[a^{-1}]=[1/a]$ legyen igaz.

E többfelől közelítő bevezetés után a definíció:

3.42. DEFINÍCIÓ: MÁTRIX INVERZE. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n\times n$-es mátrix. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *invertálható*, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ mátrixot $\mathbf{A}$ *inverzének* nevezzük, és $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot *szingulárisnak* nevezzük.

▶ Világos, hogy ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.

▶ A definícióból nem derül ki, hogy egy mátrixnak lehet-e több inverze, és hogy a mátrix milyen tulajdonsága befolyásolja invertálhatóságát. E kérdésekre hamarosan választ adunk.

3.43. PÉLDA: MÁTRIX INVERZE. Tekintsük az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix},\quad \text{és a}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$$

mátrixokat. Számoljuk ki az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzatokat!

$$\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathbf{I}_2.$$

Eszerint $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, és ugyanakkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.

3.44. PÉLDA: SZINGULÁRIS MÁTRIX. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\6&3\end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris, ha nem invertálható, azaz ha nincs olyan $\mathbf{X}$ mátrix, hogy $\mathbf{AX}=\mathbf{XA}=\mathbf{I}_2$. Már az is elég, ha megmutatjuk, hogy az $\mathbf{AX}=\mathbf{I}_2$ sosem állhat fönn! Vegyük észre, hogy $\mathbf{X}$-nek négy eleme van, így $\mathbf{X}$ meghatározása egy 4-ismeretlenes egyenletrendszerre vezet. Valóban, ha $\mathbf{X}=\left[\begin{smallmatrix}u&v\\w&z\end{smallmatrix}\right]$, akkor az $\mathbf{AX}=\mathbf{I}_2$ egyenlet a következő szimultán egyenletrendszerrel ekvivalens:

$$\begin{aligned}2u+w&=1 \qquad & 2v+z&=0\\ 6u+3w&=0 \qquad & 6v+3z&=1\end{aligned}$$

Ennek bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk

$$\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\6&3&0&1\end{array}\right]\Longrightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&0&-3&1\end{array}\right]$$

Ebből látjuk, hogy az egyenletrendszerek legalább egyike nem oldható meg, tehát nincs ilyen $\mathbf{X}$ mátrix, vagyis $\mathbf{A}$ nem invertálható! ■

Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *nilpotensnek* nevezünk, ha van olyan k pozitív egész, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Például az $\left[\begin{smallmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{smallmatrix}\right]$ mátrix nilpotens, mert $\left[\begin{smallmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right]$.

3.45. PÉLDA: $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ INVERZE NILPOTENS $\mathbf{A}$ ESETÉN. Mutassuk meg, ha $\mathbf{A}$ nilpotens, azaz valamely pozitív k-ra $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^{k-1}$.

MEGOLDÁS. Megmutatjuk, hogy $(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^{k-1})\\
&\qquad= \mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^{k-1}-\mathbf{A}-\mathbf{A}^2-\ldots-\mathbf{A}^{k-1}-\mathbf{A}^k\\
&\qquad= \mathbf{I}-\mathbf{A}^k\\
&\qquad= \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Az $(\mathbf{I}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\ldots+\mathbf{A}^{k-1})(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{I}$ összefüggés ugyanígy bizonyítható. ■

Elemi mátrixok inverze. Minden R elemi sorműveletthez van egy olyan R' sorművelet, hogy az R sorművelettel átalakított mátrixot az R' visszaalakítja (ld. 2.2.1. feladat). Nevezzük ezt az R' sorműveletet az R sorművelet inverzének. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelet inverze önmaga, a cS_i inverze $\frac{1}{c}S_i$, és $S_i + cS_j$ inverze $S_i - cS_j$.

3.46. ÁLLÍTÁS: SORMŰVELET INVERZÉNEK MÁTRIXA. Minden elemi mátrix invertálható, nevezetesen egy sorművelet elemi mátrixának inverze megegyezik a sorművelet inverzének elemi mátrixával.

A bizonyításhoz elég belátni, hogy egy sorművelet és az inverz sorművelet mátrixainak szorzata az egységmátrix. Az általános bizonyítás végiggondolását az Olvasóra hagyjuk, itt csak egy-egy konkrét esetet mutatunk meg, nevezetesen 3×3-as mátrixokon az $S_2 \leftrightarrow S_3$, a $3S_2$ és az $S_1 + 4S_3$ sorműveletek és inverzeik mátrixának szorzatát:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac13&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac13&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Az inverz kiszámítása. Ha a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámításához elég lenne az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása (hamarosan kiderül, hogy elég lesz), akkor kész lennénk, hisz ez egyúttal egy szimultán egyenletrendszer is, ami elemi sorműveletekkel megoldható.

Előbb azonban két kérdésre válaszolnunk kell: *(1)* nem fordulhat-e elő, hogy $\mathbf{A}$-nak több inverze is van, és *(2)* nem fordulhat-e elő, hogy az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldható, de a megoldás nem tesz eleget az $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletnek? Négyzetes mátrixok esetén mindkét kérdésre *nem* a válasz, ami azt jelenti, hogy mátrix invertálásához elég az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása!

3.47. TÉTEL: AZ INVERZ EGYÉRTELMŰSÉGE. Ha a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixhoz létezik olyan ugyancsak négyzetes $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{AB} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Ennek következménye, hogy egy mátrixnak legföljebb csak egy inverze lehet.

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}$, ami igazolja az első állítást. Ha $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is inverze volna, fönnállna az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$ egyenlőség is, de ekkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$, tehát az inverz egyértelmű. ∎

3.48. TÉTEL: AZ INVERZ LÉTEZÉSÉHEZ ELÉG EGY FELTÉTEL. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek egyike teljesül. Másként szólva, a fenti két feltétel bármelyikének teljesülése maga után vonja a másik teljesülését is!

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy ha a négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kielégítik az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenletet, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fönnáll, azaz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ inverzek.

Tekintsük az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ezt úgy oldjuk meg, hogy az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot redukált lépcsős alakra hozzuk. Ha ez $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakú, akkor $\mathbf{B}$ az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenlet megoldása, ezért $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ fennáll. A redukált lépcsős alakban zérus sor nem keletkezhet, mert a mátrix jobb oldalát az $\mathbf{I}$ mátrixból kaptuk, ami redukált lépcsős alak, s így egyértelmű. Ha elemi sorműveletekkel zérus sort kapnánk a jobb oldali félmátrixban, akkor volna olyan redukált lépcsős alakja is, mely zérus sort tartalmazna, ami ellentmondás. Ha csak a mátrix bal felén kapnánk zérus sort, akkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletnek nem lenne megoldása, vagyis nem állhatna fenn az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenlőség sem.

Ezután megmutatjuk, hogy $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Ehhez tekintsük a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ennek megoldásához a $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni. A előzőekből tudjuk, hogy elemi sorműveletekkel az

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \Leftrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$$

átalakítás megvalósítható. Az átalakítás lépéseit fordított sorrendben elvégezve az

$$[\mathbf{I}|\mathbf{B}] \Leftrightarrow [\mathbf{A}|\mathbf{I}]$$

transzformációt kapjuk, ahol minden lépésben fölcserélve a két részmátrixot a kívánt

$$[\mathbf{B}|\mathbf{I}] \Leftrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$$

átalakítást kapjuk. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ a megoldása a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletetnek, azaz $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. ∎

Összefoglalva:

INVERZ KISZÁMÍTÁSA ELEMI SORMŰVELETEKKEL. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverze kiszámítható, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot elemi sorműveletekkel $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakra hozzuk, ekkor $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$ lesz. Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja nem az $\mathbf{I}$ mátrix, akkor $\mathbf{A}$ nem invertálható.

3.49. PÉLDA: AZ INVERZ KISZÁMÍTÁSA. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok inverzét!

Megoldás. A kiküszöböléssel oszloponként haladva:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{B}$ inverzének kiszámítása hasonló lépésekkel:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.50. Tétel: 2×2-es mátrix inverze. Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak valóban a fenti mátrix az inverze, egyszerű mátrixszorzással ellenőrizhetjük. Azt, hogy az $ad-bc \neq 0$ feltétel az invertálhatóságnak elégséges feltétele, a képlet bizonyítja. Azt, hogy szükséges feltétele is, úgy lehet bizonyítani, ha észrevesszük, hogy $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa. Ekkor ugyanis az egyik sor kinullázható, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel az egységmátrixba. ■

Az inverz tulajdonságai.

3.51. Tétel: Az inverz alaptulajdonságai. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egyaránt $n \times n$-es invertálható mátrixok, $c \neq 0$ skalár és k pozitív egész. Ekkor igazak a következők:

(a) $\mathbf{A}^{-1}$ invertálható, és inverze $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$,

(b) $c\mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,

(c) $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,

(d) $\mathbf{A}^k$ invertálható, és inverze $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$, definíció szerint ezt értjük $\mathbf{A}^{-k}$-n,

(e) $\mathbf{A}^T$ invertálható, és $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$.

Bizonyítás. Az állítások mindegyikét bizonyítjuk:

(a) $\mathbf{A}^{-1}$ invertálható, ha van olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Ilyen mátrix viszont van, hisz $\mathbf{A}$ invertálható, és inverzére $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Eszerint a $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ választás megfelel, és $\mathbf{A}^{-1}$ inverze $\mathbf{A}$.

(b) A $(c\mathbf{A})(\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}) = (c \cdot \frac{1}{c})(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}$ szorzat bizonyítja az állítást.

(c) Az
$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$
szorzat bizonyítja, hogy $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

(d) Az $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$ egyenlőség igaz volta a
$$\underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} = \mathbf{I}$$
felírásból leolvasható, mert a szorzatok közepén lévő két mátrix szorzata mindig $\mathbf{I}$, ami elhagyható, és e lépést k-szor ismételve végül a kívánt eredményt kapjuk:
$$\underbrace{\mathbf{AA}\ldots(\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{AA}\ldots\mathbf{A}}_{k-1 \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\ldots\mathbf{A}^{-1}}_{k-1 \text{ tényező}} = \cdots = \mathbf{I}.$$

(e) Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, és ennek transzponáltját véve az
$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T = \mathbf{I}^T = \mathbf{I}$$
egyenlőségből leolvasható, hogy $\mathbf{A}^T$ invertálható, és inverze $\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$. ∎

► A *(c)* állítás indukcióval általánosítható véges sok mátrix szorzatára: ha az azonos méretű négyzetes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,… $\mathbf{A}_m$ mátrixok mindegyike invertálható, akkor szorzatuk is, és
$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\ldots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

► A *(c)* állításbeli összefüggéshez hasonlóval találkozhatunk a Rubik-kocka forgatása közben is. Jelölje A az egyik oldal derékszöggel való elforgatását, és B egy másik oldalét. E két forgatás egymás után való elvégzésével kapott transzformációt tekintsük a két forgatás szorzatának, legyen tehát ez AB. E transzformációt invertálni akarjuk, azaz vissza akarjuk állítani az eredeti állapotot, azaz azt az $(AB)^{-1}$ transzformációt keressük, melyet AB után elvégezve az identikus (egy kockát sem mozgató) transzformációt kapjuk. Világos, előbb a B transzformáció inverzét kell végrehajtani, majd azután az A inverzét, azaz $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
► A $\mathbf{A}^{-k}$ *(d)* pontbeli definíciója is a precedencia elvből következik, például az $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$ összefüggés kiterjesztése negatív kitevőre az $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{A}^0$ formulához vezet, amiből azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^k)^{-1}$.

3.52. példa: Inverz tulajdonságainak alkalmazása. A 3.49. példa mátrixainak inverzét használva számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 18 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. A feladatban megadott mátrixok kifejezhetők a 3.49. példában megadott $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokkal. A három invertálandó mátrix: $3\mathbf{A}$, $\mathbf{B}^2$, $2\mathbf{A}^T$. Ezek inverzei az előző tétel szerint rendre $\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{B}^{-1})^2$, $\frac{1}{2}(\mathbf{B}^{-1})^T$. Tehát a három inverz:

$$\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{B}^{-1})^2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0 & 0\\ 6 & -4 & 1 & 0\\ -4 & 6 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(\mathbf{B}^{-1})^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága. A következő tétel a mátrixok invertálhatóságát, az egyenletrendszerek megoldásánál használt elemi sorműveleteket és az egyenletrendszerek megoldhatóságát kapcsolja össze.

3.53. tétel: Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek. Adva van egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) $\mathbf{A}$ invertálható;

(b) az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet bármely $n \times t$-es $\mathbf{B}$ mátrixra egyértelműen megoldható;

(c) az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer bármely n dimenziós $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható;

(d) a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása;

(e) $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}$;

(f) $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

Bizonyítás. Az állítások ekvivalenciáját az *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(d)* $\Rightarrow$ *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* $\Rightarrow$ *(a)*, implikációk igazolásával bizonyítjuk.

(a) $\Rightarrow$ *(b)*: Legyen tehát $\mathbf{A}$ invertálható és legyen $\mathbf{B}$ egy tetszőleges $n \times t$ méretű mátrix. Ekkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}^{-1}$-gyel balról szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, azaz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Ez azt mutatja, hogy egyrészt a mátrixegyenletnek van megoldása, másrészt hogy más megoldása nincs, mivel így minden megoldás megkapható, és $\mathbf{A}$ inverze egyértelmű.

(b) $\Rightarrow$ *(c)*: Nyilvánvaló a $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ választással.

(c) $\Rightarrow$ *(d)*: Nyilvánvaló a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ választással.

(d) $\Rightarrow$ *(e)*: Egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$.

(e) $\Rightarrow$ *(f)*: Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$, akkor létezik elemi sorműveletek olyan sorozata, mely az $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{I}_n$ transzformációt elvégzi. Jelölje az elemi sorműveletekhez tartozó elemi mátrixokat $\mathbf{E}_1, \ldots \mathbf{E}_k$. Ekkor tehát $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \ldots \mathbf{E}_k\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Innen $\mathbf{A}$ kifejezhető az $\mathbf{E}_1^{-1}$-nel,... $\mathbf{E}_k^{-1}$-nel balról való beszorzás után:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \ldots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}.$$

Elemi mátrixok inverze elemi mátrix, tehát $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

(f) $\Rightarrow$ *(a)*: Az $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \dots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}$ mátrix minden tényezője invertálható, mivel mindegyik elemi mátrix, így szorzatuk is, és az inverz

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k.$$

► A tétel sok pontjának ekvivalenciája azt jelenti, hogy közülük bármely kettőre igaz, hogy „az egyik pontosan akkor igaz, ha a másik”. Például „$\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható”.

► Később megmutatjuk azt is, hogy $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden $\mathbf{b}$ vektorra megoldható. Azaz az egyértelműség a feltételből kihagyható. Másként fogalmazva, ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ minden $\mathbf{b}$ vektorra megoldható, akkor a megoldás minden $\mathbf{b}$-re egyértelmű.

3.54. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL. Oldjuk meg az

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ 5x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert mátrixinvertálással.

MEGOLDÁS. Az együtthatómátrix és inverze a 3.50. tétel szerint

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek (x, y) vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

3.55. PÉLDA: MÁTRIXEGYENLET MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL. Oldjuk meg az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix megegyezik az előző feladatbeli mátrixszal, így tudjuk, hogy invertálható, és ismerjük az inverzét. Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5; \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

► Megjegyezzük, hogy lineáris egyenletrendszert mátrixinvertálással ritkán oldunk meg, mert műveleigénye valamivel nagyobb, mint az egyszerű kiküszöbölésnek.

3.56. PÉLDA: MÁTRIX ELEMI MÁTRIXOK SZORZATÁRA BONTÁSA. Bontsuk fel az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixot elemi mátrixok szorzatára!

MEGOLDÁS. A 3.53. tétel bizonyításának *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* lépése szerint ha egy $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel az egységmátrixba lehet transzformálni, akkor az elemi sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve az $\mathbf{I}$-t $\mathbf{A}$-ba transzformálják. Ez viszont azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó elemi mátrixok szorzata épp $\mathbf{A}$.

Elemi sorműveletek		Elemi mátrixok	Elemi mátrixok inverzei
$\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	S_2-3S_1	$\mathbf{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	$-S_2$	$\mathbf{E}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	S_1-2S_2	$\mathbf{E}_3=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$			

A fenti átalakítás nyomán tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A}=\mathbf{I}$, amiből $\mathbf{A}=\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$, azaz

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

így $\mathbf{A}$-t három elemi mátrix szorzatára bontottuk. ∎

Igaz – hamis.

1• A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha elemi sorműveletekkel megkapható az $\mathbf{I}$ mátrixból.

2• Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$-t $\mathbf{B}$-be viszik, akkor az inverz sorműveletek $\mathbf{B}$-t $\mathbf{A}$-ba viszik.

3• Ha elemi sorműveletek $\mathbf{A}$-t $\mathbf{B}$-be viszik, akkor az inverz sorműveletek fordított sorrendben végrehajtva $\mathbf{B}$-t $\mathbf{A}$-ba viszik.

Műveleti azonosságok.

4• Egy algebrai kifejezésben végrehajtjuk az alábbi helyettesítést:

$$\begin{aligned}u&=3x_1+2x_2+4x_3\\v&=\ x_1-3x_2+\ x_3\\w&=2x_1-\ x_2-3x_3\end{aligned}$$

Írjuk fel e lineáris helyettesítést mátrixszorzatos alakban. Legyen $(u^2+v^2+w^2)(2u-v-w)$ az a kifejezés, melyben a helyettestést elvégezzük. Írjuk fel e kifejezést a helyettesítés előtt és után mátrixműveletek segítségével!

Helyettesítés előtt:

$$\mathbf{u}^T\mathbf{u}\begin{bmatrix}2&-1&-1\end{bmatrix}\mathbf{u}.$$

Az $\mathbf{u}=\mathbf{Ax}$ helyettesítés elvégzése után

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}\begin{bmatrix}2&-1&-1\end{bmatrix}\mathbf{Ax},$$

ahol

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ \mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}3&2&4\\1&-3&1\\2&-1&-3\end{bmatrix}.$$

Számítási feladatok.

Bontsuk fel a következő mátrixokat elemi mátrixok szorzatára!

5 $\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

6 $\begin{bmatrix}1&2\\-2&-1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&2\\-2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

7 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

8 $\begin{bmatrix}2&4\\3&8\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&4\\3&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

9 $\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\3&2&7\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\3&2&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

10 $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

11 Határozzuk meg az összes olyan 2×2-es $\mathbf{A}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$. Másként fogalmazva határozzuk meg a nullmátrix összes négyzetgyökét!

Legyen $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. Négyzete a zérusmátrix, azaz

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen vagy $a = d = 0$ és c vagy d legalább egyike 0, vagy $a \neq 0$, $c \neq 0$ és $b = -a^2/c$, $d = -a$.

12• Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix k-adik hatványait!

A feladat érdekes, mert abban a Fibonacci sorozat elemei bukkannak föl. Ez az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ egyenlőségekkel definiált sorozat, melynek első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,.... Tekintsük $\mathbf{B}$ néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}.$$

Ennek alapján azt sejtjük, hogy

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Az állítás $n = 1, 2, 3$ esetén igaz, és n-ről öröklődik $n+1$-re, ugyanis

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n-1} + f_n & f_n + f_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_n & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

13• Írjuk fel a mátrixszorzás definícióját az Einstein-konvenciót használva.

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ Einstein-konvencióval: $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

Blokkmátrixok.

14• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrix invertálható, és inverze

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

továbbá tetszőleges, de megfelelő típusú $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

15• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik.

Az előbbi két feladat valamelyikének felhasználásával számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

16 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 28 & -16 & -17 \end{bmatrix}$$

17 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & -7 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -16 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 28 & -16 & -17 \end{bmatrix}$$

18 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bizonyítások.

19• Bizonyítsuk be, hogy ha $c\mathbf{A} = \mathbf{O}$, akkor vagy $c = 0$, vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

20• Az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorműveletehez tartozó elemi mátrixot jelölje $\mathbf{E}_{ij}$, a cS_i-hez tartozót $\mathbf{E}_i(c)$ és a $S_i + cS_j$ sorművelethez tartozót $\mathbf{E}_{ij}(c)$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{E}_i(c)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{c})$ és $\mathbf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c)$.

21• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}$-vel és $\mathbf{B}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}^{-1}$-gyel is.

A fölcserélhetőségre vonatkozó $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenletet szorozzuk meg mindkét oldalról $\mathbf{B}^{-1}$-gyel:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{BA})\mathbf{B}^{-1}.$$

Az asszociativitást használva

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}),$$

amiből a $\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ azonosság fölhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}.$$

3.5. Műveletek speciális mátrixokkal

A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan speciális mátrixokkal, melyekkel a műveletek egyszerűbben végezhetők el, és olyanokkal, melyek mátrixműveletek segítségével definiálhatók.

Diagonális mátrixok. A mátrixműveletek definíciói alapján magától értetődő, hogy diagonális mátrixokkal hogyan végezhetők el a mátrixműveletek. Először egyszerű példákat mutatunk.

3.57. PÉLDA: MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL. Legyen $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(1,2,3)$, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(5,4,3)$. Ellenőrizzük az alábbi számításokat, és fogalmazzunk meg általános összefüggéseket diagonális mátrixokkal végzett műveletekről.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&0&0\\0&8&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&3^k\end{bmatrix}, \text{ ahol } k \text{ egész szám.}$$

3.58. TÉTEL: MŰVELETEK DIAGONÁLIS MÁTRIXOKKAL. Legyen $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$, és legyen k egész szám. Ekkor

(a) $\mathbf{AB} = \operatorname{diag}(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$,

(b) $\mathbf{A}^k = \operatorname{diag}(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k)$, speciálisan

(c) $\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1})$.

Permutációs mátrixok és kígyók. Könnyen kezelhetők a diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixok.

3.59. PÉLDA: SOROK PERMUTÁCIÓJA MÁTRIXSZORZÁSSAL. Alkalmazzunk több sorcserét az egységmátrixon. Az így kapott mátrixszal balról való szorzás milyen hatással van a beszorzott mátrixra? Szemléltessük ezt $\mathbf{I}_4$-en az $S_1 \leftrightarrow S_2$, $S_2 \leftrightarrow S_4$ sorcserékkel.

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{P}$ az $\mathbf{I}_4$-ből a fent megadott két sorcserével kapott mátrix, és legyen $\mathbf{A}$ egy tetszőleges $4 \times n$-es mátrix. Ekkor

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xRightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \xRightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{41}&a_{42}\\a_{31}&a_{32}\\a_{11}&a_{12}\end{bmatrix}$$

Azt tapasztaljuk, hogy a $\mathbf{PA}$ az $\mathbf{A}$-ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval $\mathbf{I}$-ből a $\mathbf{P}$-t kaptuk. ■

3.60. DEFINÍCIÓ: PERMUTÁCIÓS MÁTRIX, KÍGYÓ. A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot *kígyónak* nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot *permutációs mátrixnak* hívjuk.

► Könnyen látható, hogy a permutációs mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *pontosan* egy 1-es van, az összes többi elem 0. A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *legföljebb* egy nemnulla elem van.
► Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is. Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk.

3.61. PÉLDA: KÍGYÓK. Az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutációs mátrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.62. TÉTEL: MŰVELETEK PERMUTÁCIÓS MÁTRIXOKKAL. Bármely két azonos méretű permutációs mátrix szorzata és egy permutációs mátrix bármely egész kitevős hatványa permutációs mátrix, inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, akkor

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két permutációs mátrix. Szorzatuk sorvektorai $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ alakúak, ahol $\mathbf{a}_{i*}$ megegyezik valamelyik standard egységvektorral, pl. $\mathbf{a}_{i*} = \mathbf{e}_k$. Ekkor a szorzatvektornak csak az az eleme 1, amelyik oszlop $\mathbf{e}_k$-val megegyezik, és ilyen oszlop pontosan egy van. Tehát a szorzatmátrix minden sorában pontosan egy elem 1, a többi 0. Oszlopokra az állítás hasonlóan bizonyítható. A szorzatra vonatkozó állítás természetes következménye a pozitív egész kitevős hatványokra vonatkozó állítás. A negatív egész kitevőkre is igaz az állítás. Ennek igazolásához elég az inverzre belátni.

Tekintsük a $\mathbf{PP}^T$ szorzatot. A $(\mathbf{PP}^T)_{ii}$ elem a $\mathbf{P}_{i*}$ vektornak és a $(\mathbf{P}^T)_{*i} = \mathbf{P}_{i*}$ vektornak a szorzata, vagyis 1, míg

$$(\mathbf{PP}^T)_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^T)_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*},$$

azaz a szorzat i-edik sorának j-edik eleme a $\mathbf{P}$ i-edik és j-edik sorvektorának skalárszorzata, ami 0, mivel két különböző sorban az 1-es különböző helyen van. ■

3.63. PÉLDA: PERMUTÁCIÓS MÁTRIX INVERZE. Az alábbi példa szemlélteti a tételben kimondott egyszerű állítást:

$$\mathbf{PP}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Háromszögmátrixok. A Gauss-kiküszöbölés végrehajtásakor az együtthatómátrixot lépcsős alakra transzformáltuk, melyben a főátló alatt mindig csak nullák szerepelnek. Az ilyen mátrixok nem csak a Gauss-kiküszöbölésnél fontosak.

3.64. definíció: Háromszögmátrix. Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak 0-elemek szerepelnek *felső háromszögmátrixnak*, azokat, melyek főátlója fölött csak 0-elemek vannak *alsó háromszögmátrixnak* nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es áll, *egység háromszögmátrixról* beszélünk.

A Gauss-kiküszöbölésnél kapott felső háromszögmátrixhoz hasonlóan azok az egyenletrendszerek is megoldhatók csak behelyettesítésekkel, amelyek együtthatómátrixa alsó háromszögmátrix. A különbség kizárólag annyi, hogy ekkor az első egyenlettel kezdjük, és az első változóval. Például az

Az angol nyelvű lineáris algebra tankönyvek különbséget tesznek a felső és az alsó háromszögmátrixú egyenletrendszerek megoldása között. *Forward substitution*, illetve *backward substitution* a neve a behelyettesítésnek ha alsó, illetve ha felső háromszögmátrix az együttható mátrix. Ez arra utal, hogy a változókat előre vagy hátra haladva számoljuk ki. Mi nem fogjuk használni e finom különbségtételt.

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+3y+2z} &= 3 \\ 2x + 3y \phantom{{}+2z} &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer első egyenletéből $x = 3$, a másodikba való behelyettesítés után $y = -1$, végül a harmadikba való behelyettesítés után $z = -1$.

3.65. tétel: Műveletek háromszögmátrixokkal. Alsó háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható alsó háromszögmátrix inverze alsó háromszögmátrix. Egy alsó háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus. Analóg tétel igaz a felső háromszögmátrixokra is.

A bizonyítást feladatként az Olvasóra hagyjuk.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok. Az alkalmazásokban gyakran találkozunk olyan mátrixokkal, melyekben az elemek egyenlők vagy ellentettjei a főátlóra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő párjuknak. E tulajdonság a transzponálttal könnyen kifejezhető.

3.66. definíció: Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *szimmetrikus mátrixnak* nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *ferdén szimmetrikus mátrixnak* vagy *ferdeszimmetrikusnak* nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

3.67. példa: Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok. Az alábbi mátrixok közül az $\mathbf{A}$ szimmetrikus, a $\mathbf{B}$ ferdén szimmetrikus, a $\mathbf{C}$ egyik osztályba sem tartozik.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén áll fönn, azaz a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában csupa 0 áll.

3.68. állítás: Műveletek (ferdén) szimmetrikus mátrixokkal. Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze szimmetrikus. Hasonlóan ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, szorzata, inverze ferdén szimmetrikus.

Az állítás bizonyítását feladatként az olvasóra hagyjuk.

3.69. tétel: Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére. Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixra

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)}_{\text{ferdén szimm.}}.$$

Bizonyítás. Ha egy mátrix szimmetrikus, konstansszorosa is, így elég megmutatni, hogy az $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$ mátrix szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}^T+\left(\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$$

Hasonlóképp $\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$ ferdén szimmetrikus, hiszen

$$\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}^T-\left(\mathbf{A}^T\right)^T=\mathbf{A}^T-\mathbf{A}=-\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)$$

Végül a két mátrix összege valóban $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\right)=\frac{1}{2}\mathbf{A}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^T+\frac{1}{2}\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{A}^T=\mathbf{A}.$$

Fontos következményei lesznek az alábbi egyszerű állításnak.

3.70. tétel: $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szimmetrikus. Az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.

Bizonyítás. $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^T=\left(\mathbf{A}^T\right)^T\mathbf{A}^T=\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Az állítás másik fele ugyanígy bizonyítható. ■

Mátrix és egy diád összegének inverze*. Összegmátrix inverzéről – a valósok összegének inverzéhez hasonlóan – általában nem sok mondható, de speciális mátrixokra nagyon hasznos eredmények vannak. Ilyen a következő tétel is.

3.71. tétel: Sherman – Morrison-formula. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\neq 0$. Ekkor $\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ invertálható, és

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy

$$\left(\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)\left(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)=\mathbf{I},$$

mert ez a formula igazolása mellett azt is bizonyítja, hogy $\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ invertálható.

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)\left(\mathbf{A}+\mathbf{u}\mathbf{v}^T\right)\\
&\quad=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\\
&\quad=\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}1\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\\
&\quad=\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^T}{1+\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\\
&\quad\overset{*}{=}\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\\
&\quad=\mathbf{I}.
\end{aligned}$$

A $*$-gal jelzett egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy 1×1-es mátrixszal való szorzás egybeesik a skalárral való szorzással, a skalár tényező pedig egy mátrixszorzatban áttehető más helyre, így az adott törtkifejezésben egyszerűsíthettünk vele. ■

A Sherman – Morrison-formula sokhelyütt használható, mi itt egyet emelünk ki: megvizsgáljuk, hogy hogyan változik egy mátrix inverze, ha a mátrixnak csak egyetlen elemén változtatunk.

3.72. PÉLDA: INVERZ VÁLTOZÁSA. Legyen $\mathbf{A}$ invertálható mátrix, és változtassunk meg az a_{ij} elemet $a_{ij}+\varepsilon$-ra. Fejezzük ki az így kapott mátrix inverzét $\mathbf{A}^{-1}$ segítségével.

MEGOLDÁS. Első lépésként kifejezzük az új mátrixot $\mathbf{A}$-ból mátrixműveletekkel. Legyen $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ az i-edik és j-edik standard egységvektor. Ekkor a módosított mátrix

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T.$$

Erre alkalmazható a Sherman – Morrison-formula az $\mathbf{u}=\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{v}=\varepsilon\mathbf{e}_j$ választással.

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{-1}&=\left(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\right)^{-1}\\&=\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i(\varepsilon\mathbf{e}_j)^T\mathbf{A}^{-1}}{1+\varepsilon\mathbf{e}_j^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i}\\&=\mathbf{A}^{-1}-\varepsilon\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*i}(\mathbf{A}^{-1})_{j*}}{1+\varepsilon(\mathbf{A}^{-1})_{ji}}\end{aligned}$$

3.73. PÉLDA: INVERZ VÁLTOZÁSA SZÁMPÉLDÁN. Adva van egy $\mathbf{A}$ mátrix és annak inverze:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&0&0&3\\3&0&0&2\\4&3&2&1\end{bmatrix}\qquad\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-2/5&3/5&0\\-2/5&7/5&-8/5&3/5\\3/5&-8/5,&7/5&-2/5\\0&3/5&-2/5&0\end{bmatrix}.$$

Változtassuk meg a_{11} értékét 1-ről 11/10-re. Az így kapott mátrixot jelölje $\mathbf{B}$. Határozzuk meg inverzét!

MEGOLDÁS. Az előző példa alkalmazásával

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^{-1}&=\mathbf{A}^{-1}-\frac{1}{10}\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*1}(\mathbf{A}^{-1})_{1*}}{1+\frac{1}{10}(\mathbf{A}^{-1})_{11}}\\
&=\begin{bmatrix}0&-2/5&3/5&0\\-2/5&7/5&-8/5&3/5\\3/5&-8/5&7/5&-2/5\\0&3/5&-2/5&0\end{bmatrix}-\frac{1}{10}\frac{\begin{bmatrix}0\\-2/5\\3/5\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2/5&3/5&0\end{bmatrix}}{1+\frac{1}{10}\cdot 0}\\
&=\begin{bmatrix}0&-2/5&3/5&0\\-2/5&7/5&-8/5&3/5\\3/5&-8/5&7/5&-2/5\\0&3/5&-2/5&0\end{bmatrix}-\frac{1}{10}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&4/25&-6/25&0\\0&-6/25&9/25&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}0&-2/5&3/5&0\\-2/5&173/125&-197/125&3/5\\3/5&-197/125&341/250&-2/5\\0&3/5&-2/5&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

tizedestörtekkel számolva:

$$=\begin{bmatrix}0.000&-0.400&0.600&0.000\\-0.400&1.384&-1.576&0.600\\0.600&-1.576&1.364&-0.400\\0.000&0.600&-0.400&0.000\end{bmatrix}.$$

Gyorsszorzás*. Két 2×2-es mátrix szokásos módon való összeszorzásához 8 szorzásra és 4 összeadásra van szükség. Strassen 1969-ben egy olyan módszert talált, mellyel e mátrixszorzást 7 szorzással is el lehet végezni, igaz azon az áron, hogy az összeadások száma 16-ra nő.

STRASSEN-FORMULÁK. Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is 2×2-es. A $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\
d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\
d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\
d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\
d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\
d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\
d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})
\end{aligned}
$$

Ha olyan számítógépet használunk, melyen a számok szorzása sokkal több időt igényel, mint az összeadása, akkor már ez is gyorsíthatja a műveletet. A módszer azonban kiterjeszthető tetszőleges méretű négyzetes mátrixokra is, és elegendően nagy n-ekre a műveletek összáma is csökken. A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből n^3 szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás – gondoljunk utána!), a Strassen-formulákkal való szorzásé pedig $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$). Ez $n = 2^{10}$ esetén már kevesebb műveletet ad. Az általánosítás lényege, hogy a Strassen-formulák 2×2-es blokkmátrixokra is használhatók, mert a szorzás kommutativitását nem használják, így ha $M(n)$ jelöli két $n \times n$-es mátrix összeszorzásához szükséges szorzások, és $S(n)$ a szükséges összeadások számát, akkor $M(2n) \leq 7M(n)$ és $S(2n) \leq 18n^2 + 7S(n)$. Az $M(1) = 1$, $S(1) = 0$ kezdeti feltételeket is használva megmutatható, hogy $M(2^k) \leq 7^k$, $S(2^k) \leq 6(7^k - 4^k)$. E képletekből a felső egészrész jelét használva és a $k = \lceil \log_2 n \rceil$ jelöléssel az műveletek összámára a $cn^{\log_2 7} \leq cn^{2.81}$ felső becslést kapjuk, ami a $2n^3 - n^2$ értéknél jobb, függetlenül a c konstans konkrét értékétől. Mivel a két összeszorzandó mátrix mindegyikének mind az n^2 elemét használni kell, ezért a szükséges műveletek számának alsó becslése cn^2. A $cn^{2.81}$ felső becslés mára $cn^{2.376}$-ra lett javítva (Coppersmith és Winograd, 1990), de az a sejtés, hogy a kitevő 2-re, de legalább $2 + \varepsilon$-ra lenyomható, ahol ε tetszőlegesen kis pozitív szám.

A módszer gyengéje numerikus instabilitása, így a gyakorlatban csak bizonyos mátrixokra érdemes használni, például nagyméretű egészelemű mátrixokra tetszőleges pontosságú aritmetika használata esetén.

Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

1° Szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is szimmetrikus, így szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is szimmetrikus.

2° Ferdén szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is ferdén szimmetrikus, így ferdén szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is ferdén szimmetrikus.

3• Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, négyzetét és köbét!

$$
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

4 Hogyan oldanánk meg a következő egyenletrendszert a lehető legkevesebb lépésben?

$$
\begin{aligned}
x + 4y + 3z + 5w &= 3 \\
6x + 3y \qquad\qquad &= 3 \\
2x + 3y + 2z \qquad &= 3 \\
2x + 4y + 3z + 5w &= 4
\end{aligned}
$$

Az első egyenletet kivonjuk az utolsóból, innen $x = 1$, ezután visszahelyettesítés a második, harmadik, majd az első egyenletbe.

Bizonyítások.

5• Mutassuk meg, hogy minden permutációs mátrix oszlopcserékkel is megkapható az egységmátrixból, és hogy permutációs mátrixszal jobbról való szorzás a beszorzott mátrix oszlopain ugyanazt a permutációt hajtja végre, mint amellyel a permutációs mátrix az egységmátrixból megkapható.

6• Bizonyítsuk be, hogy bármely két azonos méretű kígyó szorzata és egy kígyó bármely pozitív egész kitevős hatványa kígyó.

7• Mutassuk meg, hogy egy **K** kígyó pontosan akkor invertálható, ha minden sorában pontosan egy elem nem 0, és ekkor inverze megkapható úgy, hogy minden nemnulla elem helyébe annak reciprokát írjuk, majd az így kapott mátrixot transzponáljuk.

8* **Gyorsinvertálás.** Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, mindketten 2×2-es mátrixok. Mutassuk meg, hogy az alábbi eljárással definiált mátrixinvertálás segítségével $n \times n$-es mátrixokra olyan algoritmus készíthető, melynek műveletigénye legföljebb $cn^{2.81}$.

$$\begin{aligned}
c_1 &= a_{11}^{-1} & b_{12} &= c_3c_6 \\
c_2 &= a_{21}c_1 & b_{21} &= c_6c_2 \\
c_3 &= c_1a_{12} & c_7 &= c_3b_{21} \\
c_4 &= a_{21}c_3 & b_{11} &= c_1 - c_7 \\
c_5 &= c_4 - a_{22} & b_{22} &= -c_6 \\
c_6 &= c_5^{-1}
\end{aligned}$$

3.6. Az LU-felbontás

Mátrixok szorzatalakba írásával (faktorizációjával) már találkoztunk, amikor a Gauss – Jordan-kiküszöbölést használva bizonyítottuk, hogy minden invertálható mátrix előáll elemi mátrixok szorzataként. E szakaszban a Gauss-kiküszöbölésből indulva megmutatjuk, hogy egy mátrix felbontható egy alsó és egy felső háromszögmátrix szorzatára. E mátrixfaktorizáció lineáris algebrai feladatok számítógépes megoldásának igen gyakran használt eszköze, sokszor előnyösebb, mint maga a Gauss-kiküszöbölés.

3.74. PÉLDA: GAUSS-KIKÜSZÖBÖLÉS MÁTRIXSZORZÁSSAL. Elemi sorműveletekkel hozzuk az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot lépcsős alakra (azaz felső háromszögmátrix alakra), amit jelöljön $\mathbf{U}$. Az elemi sorműveleteket helyettesítsük mátrixokkal való szorzással. Végül az így kapott mátrixszorzatos alak segítségével állítsuk elő $\mathbf{A}$-t az $\mathbf{U}$ és egy másik mátrix szorzataként.

MEGOLDÁS. Oszloponként haladva végezzük el a Gauss-kiküszöbölést. Minden elemi sorművelet mellett (zárójelben) megadjuk a hozzá tartozó elemi mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_2-1/2S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3-1/4S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix} \overset{S_3-1/2S_2}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1})\mathbf{U}$. Kiszámoljuk az elemi mátrixok inverzeinek szorzatát, azaz az $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixot. Fölhasználjuk a 106. oldalon mondottakat, miszerint $S_i + cS_j$ mátrixának inverze $S_i - cS_j$ mátrixával egyenlő:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Meglepő módon ezeknek az elemi mátrixoknak a szorzata a főátló alatti számok átmásolásával megkapható. Az eredmény egy alsó egység háromszögmátrix. ■

3.75. DEFINÍCIÓ: LU-FELBONTÁS. Azt mondjuk, hogy a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása *LU-felbontás* (*LU-faktorizáció* vagy *LU-dekompozíció*), ha $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix.

Az *LU-felbontásban* az L és U betűk az *alsó* és *felső* jelentésű angol *lower* és *upper* szavak kezdőbetűi.

A 3.74. példában konstruált felbontás LU-felbontás:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Az LU-felbontás használata egyenletrendszer megoldására. Ha ismerjük az $n \times n$-es invertálható $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer könnyen megoldható. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens. Ha ugyanis $\mathbf{x}$ megoldása $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, és $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ jelöléssel $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Másrészt, ha $\mathbf{y}$ megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, és $\mathbf{x}$ az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{y}$-t behelyettesítve $\mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tömören:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ megoldható} \iff \mathbf{Ly} = \mathbf{b},\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ megoldható.}$$

Mivel $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ is háromszögmátrix, ezért az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek egyszerű behelyettesítésekkel megoldhatók. A megoldás mindkét esetben egyértelmű, mert $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ rangja is n.

3.76. PÉLDA: EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA LU-FELBONTÁSSAL. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp a (3.8)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 7$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű behelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_3 = 2$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 1$. A megoldás $\mathbf{x} = (1, 0, 2)$. ■

Mátrix invertálása LU-felbontással. Mátrix invertálásához elég megoldanunk az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletrendszert. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ egy LU-felbontása $\mathbf{A}$-nak, akkor az $\mathbf{LUX} = \mathbf{I}$ megoldása a vele ekvivalens két mátrixegyenlet megoldásával megkapható:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I},\ \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

E két utóbbi egyenletrendszer viszont megoldható kizárólag helyettesítésekkel is!

3.77. PÉLDA: MÁTRIX INVERTÁLÁSA LU-FELBONTÁSSAL. Invertáljuk a 3.74. példában megadott $\mathbf{A}$ mátrixot!

MEGOLDÁS. Megadtuk az adott mátrix LU-felbontását a (3.8) egyenletben. Ezt használva először megoldjuk az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L}$ első sorával való szorzásból: $[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] = [1\ 0\ 0]$. A második sorral való szorzásból $\frac{1}{2}[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] + [y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [0\ 1\ 0]$. Behelyettesítés után $[y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [-\frac{1}{2}\ 1\ 0]$. Végül a harmadik sorral való szorzásból:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

amiből behelyettesítés után kifejezve $\mathbf{Y}$ harmadik sorát kapjuk, hogy $[y_{31}\ y_{32}\ y_{33}] = [0\ -\frac{1}{2}\ 1]$. Azaz

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezután ugyanígy, egyszerű helyettesítésekkel megoldható az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, azaz a

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlet is, melynek megoldása

$$\mathbf{X} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az LU-felbontás kiszámítása. A 3.74. példában követett eljárás egyszerűen általánosítható tetszőleges méretű négyzetes mátrixra.

3.78. ALGORITMUS: EGY LU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA. Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix kizárólag csak a hozzáadás elemi sorműveletével felső háromszög alakra hozható, azaz a kiküszöbölés során a főátlóba sosem kerül 0. Ekkor a következő lépésekkel állítsunk elő egy $\mathbf{U}$ és egy $\mathbf{L}$ mátrixot.

1. A Gauss-kiküszöbölést az első oszloppal kezdjük, és az első sor konstansszorosainak kivonásával, azaz az $S_2 - l_{21}S_1$, $S_3 - l_{31}S_1$,... $S_n - l_{n1}S_1$ sorműveletekkel elimináljuk az első oszlop elemeit (természetesen $l_{k1} = a_{k1}/a_{11}$).
2. Folytassuk az eliminációt a második oszloppal, azaz hajtsuk végre az $S_3 - l_{32}S_2$,... $S_n - l_{n2}S_2$ sorműveleteket, majd elimináljuk sorban a többi oszlop főátló alatti elemeit is.
3. Az eredményül kapott lépcsős alak lesz $\mathbf{U}$.
4. A kiküszöbölés konstans l_{ij} elemeit írjuk egy mátrix index szerinti helyébe, melynek főátlójába 1-eket, fölé 0-kat írunk. Ez lesz az $\mathbf{L}$ mátrix, azaz

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Ismét végigszámoljuk a 3.74. példabeli mátrix felbontását. Először írjunk le egy egységmátrixot, de a főátló alatti helyeket üresen hagyva, ebből lesz $\mathbf{L}$. Írjuk mellé az $\mathbf{A}$ mátrixot, és amikor elvégzünk egy $S_i - l_{ji}S_j$ sorműveletet rajta, akkor az l_{ji} értéket bejegyezzük az $\mathbf{L}$ mátrix j-edik sorának i-edik oszlopába. Az alábbi számítások bal hasábjában látjuk a fentiek szerinti lépéseket.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\2&4&1\\1&2&4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\2.00&4.00&1.00\\1.00&2.00&4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{1/2}&1&0\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\0&7/2&0\\1&2&4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\0.50&3.50&0.00\\1.00&2.00&4.00\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{1/2}&1&0\\\mathbf{1/4}&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\0&7/2&0\\0&7/4&7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\0.50&3.50&0.00\\0.25&1.75&3.50\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{1/2}&1&0\\\mathbf{1/4}&\mathbf{1/2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&1&2\\0&7/2&0\\0&0&7/2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4.00&1.00&2.00\\0.50&3.50&0.00\\0.25&0.50&3.50\end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixon folytatott elemi átalakítások eredménye és az $\mathbf{L}$ már kiszámolt elemei egyetlen mátrixban is „elférnek”, ugyanis $\mathbf{L}$-ben épp akkor és oda kerül egy elem, amikor és ahova $\mathbf{A}$-ban 0. Ezt a számítógépprogramok kihasználják, ha igen nagy méretű $\mathbf{A}$ mátrixot kell felbontani, és az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixot is az $\mathbf{A}$ helyében konstruálják meg. A fenti számítások jobb hasábjában ezt a számítógépes technikát alkalmazzuk. Színes háttérrel jelöljük az $\mathbf{L}$-beli elemeket. A számítógépes jelleg erősítésére tizedestört alakot használunk.

Igazolnunk kell még, hogy a fenti algoritmus valóban LU-felbontást ad.

3.79. TÉTEL: AZ LU-FELBONTÁS LÉTEZÉSE ÉS EGYÉRTELMŰSÉGE. Legyen $\mathbf{A}$ invertálható $n \times n$-es mátrix.

1. Ha létezik $\mathbf{A}$-nak LU-felbontása, akkor ezek egyike megkapható a 3.78. algoritmussal.
2. Az $\mathbf{A}$-nak olyan LU-felbontása, melyben $\mathbf{L}$ főátlójában csak 1-esek vannak egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. *(a)* Először belátjuk, hogy a 3.78. algoritmusban megkonstruált $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixok LU-felbontást adnak. Ehhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Az algoritmus szerint $S_i - l_{ij}S_j$ $(i > j)$ alakú elemi műveletekkel transzformáljuk $\mathbf{A}$-t $\mathbf{U}$-ba. E transzformációk inverze $S_i + l_{ij}S_j$, melynek mátrixát jelölje $\mathbf{L}_{ij}$. Ez felírható $\mathbf{I} + l_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$ alakban, azaz

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{bmatrix}1&\dots&0&\dots&0&\dots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots&&\vdots\\0&\dots&1&\dots&0&\dots&0\\\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\0&\dots&l_{ij}&\dots&1&\dots&0\\\vdots&&\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\dots&0&\dots&0&\dots&1\end{bmatrix} = \mathbf{I} + l_{ij}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}[0\dots1\dots0\dots0].$$

Mivel $\mathbf{A} = \mathbf{L}_{21}\mathbf{L}_{31}\dots\mathbf{L}_{n1}\mathbf{L}_{32}\dots\mathbf{L}_{n2}\dots\mathbf{L}_{n-1,n}$, ezért az $\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{I} + l_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T$ helyettesítések után csak azt kell belátni, hogy a (3.9)-beli $\mathbf{L}$ mátrixra

$$\mathbf{L} = (\mathbf{I} + l_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^T)(\mathbf{I} + l_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T)\dots(\mathbf{I} + l_{n1}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_1^T)\dots(\mathbf{I} + l_{n-1,n}\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_n^T).$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} + l_{21}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1^T + l_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T + \dots + l_{n1}\mathbf{e}_n\mathbf{e}_1^T + \dots + l_{n-1,n}\mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_n^T,$$

vagyis elég belátni, hogy a fenti szorzatban a zárójelek felbontása után keletkező

$$(l_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T)(l_{st}\mathbf{e}_s\mathbf{e}_t^T) = l_{ij}l_{st}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_s\mathbf{e}_t^T$$

alakú szorzatok mindegyike nullmátrix. Egyrészt $j < i$, $t < s$, másrészt mivel az elimináció oszloponként balról jobbra, oszlopon belül fentről lefelé haladt, ezért vagy $j < t$ vagy $j = t$ és akkor $i < s$. E feltételek esetén viszont $j \neq s$, tehát $\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_s = 0$, vagyis $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^T\mathbf{e}_s\mathbf{e}_t^T = \mathbf{O}$, amit bizonyítani akartunk.

(b) Tegyük fel, hogy létezik $\mathbf{A}$-nak két LU-felbontása is, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2$. Mivel $\mathbf{A}$ invertálható, ezért a **??**. tétel szerint $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_2$ is. Balról $\mathbf{L}_1$, jobbról $\mathbf{U}_2$ inverzével szorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2.$$

A bal oldalon két felső háromszögmátrix szorzataként egy felső háromszögmátrix van, míg a jobb oldalon két alsó háromszögmátrix szorzata, ami alsó háromszögmátrix (**??**. feladat). Ráadásul a jobb oldal egység főátlójú (**??**. feladat). Ez csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = \mathbf{I}$, azaz ha $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$. ∎

PLU-felbontás. Világos, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs LU-felbontása, hisz bármely LU-felbontás bal felső elemére $(\mathbf{LU})_{11} = l_{11}u_{11} \neq 0$, ugyanakkor $a_{11} = 0$. Az első és második sorok cseréje után kapott

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak hasonló okok miatt ugyancsak nincs LU-felbontása: ez kicsit hosszabb számolással levezethető az $a_{22} = 0$ összefüggésből (ld. 3.6.16. feladat). A második és harmadik sorok felcserélése után viszont már van LU-felbontás. Jelölje $\mathbf{P}$ a fenti sorcseréket megvalósító permutációs mátrixot. Ekkor

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ami egy LU-felbontás. Így a $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ alakra jutottunk, amiből a $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ mátrixszal való szorzás után az $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ felbontást kapjuk.

Az LU-felbontást csak négyzetes mátrixokra definiáltuk, az egyenletrendszer megoldásában és a mátrix invertálásában való fontos szerepére és egy unicitástétel kimondhatóságára gondolva. Most több szempontból is általánosabb definíciót adunk, olyat, mely tetszőleges mátrixokra egy egzisztenciatétel kimondását is lehetővé teszi.

3.80. DEFINÍCIÓ: PLU-FELBONTÁS. Egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak egy permutációs, egy négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$-es felső háromszögmátrixra való bontását *PLU-felbontásnak* nevezzük.

A 3.78. algoritmus kis változtatással alkalmassá tehető e felbontás elvégzésére is. A módosított algoritmus ráadásul a négyzetes *szinguláris mátrixokra is* használható lesz.

1. Az elemi sorműveletek közben sorcserékre is szükség lehet, ha a főátlóban 0, de alatta valahol nem 0 áll. Az a sorcsere, ami ilyenkor elvégzendő, elvégezhető a kiküszöbölési eljárás előtt is (ezt az állítást nem igazoljuk). E sorcserékhez tartozó elemi mátrixok szorzata egy $\mathbf{P}$ permutációs mátrix. Így az algoritmust nem az $\mathbf{A}$-n, hanem $\mathbf{PA}$-n hajtjuk végre. Eredményül egy
$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$$
felbontást kapunk, mely a $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után a kívánalmaknak megfelelő $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$ felbontást adja.
2. Ha sorcserékkel sem lehet elérni, hogy a főátlóban ne legyen zérus, akkor az algoritmusban tovább lépünk a következő oszlopra.
3. Nem kell lépcsős alakra hozni $\mathbf{A}$-t, a felső háromszögmátrixszá való alakítás kevesebbet kér. Ez azt is jelenti, hogy itt a főelemet mindig a főátlóról választjuk, akkor is, ha a lépcsős alakra hozásnál tudnánk fölötte is főelemet választani.
4. A gyakorlatban – a hatékony számítógépprogramok – részleges főelemkiválasztással dolgoznak, így olyankor is alkalmaznak sorcseréket, ha a főátlóban nem zérus van.

3.81. PÉLDA: PLU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA. Keressük meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
mátrix egy PLU-felbontását! Az $\mathbf{A}$ felső háromszög-alakra hozása közben alkalmazzunk részleges főelemkiválasztást! Ügyeljünk arra, hogy főelemet itt csak a főátlóról válasszunk!

MEGOLDÁS. Az egyszerűség kedvéért kis többletmunkát vállalva először csak azért hajtjuk végre a felső háromszög-alakra hozás lépéseit, hogy megállapítsuk, melyik lépésben melyik sorban lesz a pivotelem. Ezután előállítjuk e sorpermutációnak megfelelő $\mathbf{P}$ permutációs mátrixot, és végrehajtjuk az LU-felbontást a $\mathbf{PA}$ mátrixon.
$$\mathbf{A} \overset{\substack{S_1 \leftrightarrow S_2 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{\substack{S_3 \leftrightarrow S_4 \\ S_4 - 1/2 S_3}}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
A két sorcsere alapján a permutációs mátrix:
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
Ezután elvégezve a sorműveleteket a megpermutált sorú $\mathbf{PA}$ mátrixon és a 3.78. algoritmus szerint megkreálva az $\mathbf{L}$ mátrixot kapjuk, hogy
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
$\mathbf{P}$ transzponáltja önmaga, így a fenti jelölésekkel $\mathbf{A} = \mathbf{PLU}$ egy PLU-felbontás. ■

3.82. PÉLDA: PLU-FELBONTÁS, AMIKOR AZ LU-FELBONTÁS IS LEHETSÉGES.

Az LU-felbontás a gyakorlatban. Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöböléssével, azaz nagyságrendileg $2n^3/3$ (utóbbiban a kiküszöbölést a jobb oldallal is meg kell csinálni, az LU-felbontásnál viszont az alsó háromszögmátrixhoz tartozó egyenletrendszert is meg kell oldani: mindkettő $n(n-1)/2$ összeadás/kivonás és ugyanennyi szorzás/osztás). Az LU-felbontásnak viszont több olyan előnyös tulajdonsága van, ami miatt használata meghatározó az egyenletrendszerek megoldásában és amellett több más feladatban is. Néhány a legfontosabbak közül:

1. Mivel az egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontáshoz nincs szükség a jobb oldalra, ezért használható olyan esetekben, amikor a jobb oldal még nem ismeretes, vagy több különböző jobb oldallal is dolgozni kell.
2. Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető, mint egyébként, pl. a mátrix inverzének, vagy a később tanulandó determinánsának meghatározása.
3. Korábban említettük, hogy az LU-felbontás igen memóriatakarékos, ráadásul vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. a szalagmátrixok), melyekre létezik a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy LU-felbontását!

1• $\begin{bmatrix}4&4&4\\2&5&5\\1&2&4\end{bmatrix}$

$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\1/4&1/3&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}4&4&4\\0&3&3\\0&0&2\end{bmatrix}$.

2• $\begin{bmatrix}4&8&4\\2&7&8\\1&3&4\end{bmatrix}$

$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1/2&1&0\\1/4&1/3&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}4&8&4\\0&3&6\\0&0&1\end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix}5&-4&-2\\4&-5&-5\\-3&1&-4\end{bmatrix}$

$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0\\4/5&1&0\\-3/5&7/9&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}5&-4&-2\\0&-9/5&-17/5\\0&0&-23/9\end{bmatrix}$.

4 $\begin{bmatrix}-3&1&-3&0\\-2&4&3&-4\\1&3&3&0\\-3&0&-3&-1\end{bmatrix}$

$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\frac{2}{3}&1&0&0\\-\frac{1}{3}&1&1&0\\1&-\frac{3}{10}&-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}-3&1&-3&0\\0&\frac{10}{3}&5&-4\\0&0&-3&4\\0&0&0&-\frac{2}{10}\end{bmatrix}$

5 $\begin{bmatrix}-1&-0&2&-2\\-0&2&-2&-1\\-2&-2&-0&3\\1&-0&2&1\end{bmatrix}$

$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}-2&-2&0&3\\0&2&-2&-1\\0&0&3&-3\\0&0&0&3\end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix}2.0&2.0&-2.0\\-0.5&0.0&-1.0\\1.0&1.5&1.0\end{bmatrix}$

$\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1.00&0.00&0.00\\0.25&1.00&0.00\\0.50&1.00&1.00\end{bmatrix}$, $\mathbf{U}=\begin{bmatrix}2.00&2.00&-2.00\\0.00&0.50&-1.50\\0.00&0.00&3.50\end{bmatrix}$.

Az előző feladatokban megkonstruált LU-felbontásokat használva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, azaz oldjuk meg előbb az $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}$, majd az $\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$ egyenletrendszereket!

7• $\begin{bmatrix}4&4&4\\2&5&5\\1&2&4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\3\\5\end{bmatrix}$

$\mathbf{y}=(0,3,4)$, $\mathbf{x}=(-1,-1,2)$.

8• $\begin{bmatrix}4&8&4\\2&7&8\\1&3&4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}$

$\mathbf{y}=(0,3,1)$, $\mathbf{x}=(1,-1,1)$.

9 $\begin{bmatrix}5&-4&-2\\4&-5&-5\\-3&1&-4\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}3\\-1\\-7\end{bmatrix}$

$\mathbf{y}=(3,-17/5,-23/9)$, $\mathbf{x}=(1,0,1)$.

10 $\begin{bmatrix}2.0&2.0&-2.0\\-0.5&0.0&-1.0\\1.0&1.5&1.0\end{bmatrix}\mathbf{x}=\begin{bmatrix}5.6\\-1.0\\4.6\end{bmatrix}$

$\mathbf{y}=(5.6,0.4,1.4)$, $\mathbf{x}=(1.2,2.0,0.4)$.

Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét az LU-felbontásuk ismeretében, azaz oldjuk meg az $\mathbf{LY}=\mathbf{I}$ és az $\mathbf{UX}=\mathbf{Y}$ mátrixegyenleteket!

11• $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&4&4\\2&5&5\\1&2&4\end{bmatrix}$

Az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ egyenletből

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

míg az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ egyenlet megoldása, egyúttal $\mathbf{A}$ inverze

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & -1/2 \\ -1/24 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

12• $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$.

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy PLU-felbontását! Alkalmazzunk részleges főelemkiválasztást!

13• $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

15 $\begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 1.5 \\ 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

16 Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs LU-felbontása.

Tárgymutató