5. fejezet

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

5.1. Alapfogalmak

Egy mátrix jellemzésének különösen hatékony eszköze azoknak az $\boldsymbol{x}$ vektoroknak a meghatározása, amelyeket a mátrixszal való szorzás egy önmagával párhuzamos vektorba visz, azaz amelyekre $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$.

A sajátérték és a sajátvektor fogalma. Az előző paragrafus példái azt mutatják, hogy sok kérdés vezet $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ alakú egyenletre.

5.1. definíció: Sajátérték, sajátvektor. Azt mondjuk, hogy a λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátértéke*, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó *sajátvektorainak* nevezzük.

5.2. példa: Sajátérték, sajátvektor. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak a -1 egy sajátértéke, és $(2,1)$ az egyik hozzátartozó sajátvektora, ugyanis

$$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}.$$

E mátrix egy másik sajátértéke 2, ugyanis

$$\begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix}-2 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} = (2)\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektor, akkor minden nemnulla konstansszorosa is, ugyanis

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{Ax} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$. Ennél több is igaz:

5.3. állítás: A sajátvektorok alterei. Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.

Bizonyítás. A nem nullvektor $\mathbf{x}$ pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ eleme $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének. ■

5.4. definíció: Sajátaltér. A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor alkotta alteret a λ sajátértékhez tartozó *sajátaltérnek* nevezzük.

5.5. példa: Sajátaltér bázisának meghatározása. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz tartozó sajátalterének bázisát!

Megoldás. Először ellenőrizzük, hogy a 2 sajátérték-e! Ehhez meg kell mutatni, hogy az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Hozzuk az együtthatómátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $\operatorname{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}) = 1$, ezért az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer szabad változóinak száma 2, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a sajátaltér egy bázisa a $(-6, 1, 0)$ és $(-1, 0, 1)$ vektorokból áll. ■

Karakterisztikus polinom. Láttuk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletnek pontosan akkor van a zérusvektortól különböző megoldása, ha a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ez a 4.51. tétel szerint pontosan akkor igaz, ha

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{5.1}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha kielégíti az (5.1) egyenletet. Ezt az egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix, akkor az egyenlet bal oldala a determináns kifejtése után egy n-edfokú polinom, melyet *karakterisztikus polinomnak* nevezünk.

5.6. példa: Karakterisztikus polinom felírása. Határozzuk meg az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & e^3 & \pi \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

Megoldás. A 2×2-es mátrixok karakterisztikus polinomját a mátrix nyomával és determinánsával is ki tudjuk fejezni:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A}. \end{aligned}$$

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomjának felírásából az is leolvasható, hogy a háromszögmátrixok karakterisztikus polinomjának alakját nem befolyásolják a főátlón kívüli elemek:

$$\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & e^3 & \pi \\ 0 & 1-\lambda & x \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

A $\mathbf{C}$ mátrix karakterisztikus polinomja azt sejteti, hogy minden karakterisztikus egyenlethez könnyen konstruálható mátrix, melynek az a karakterisztikus egyenlete:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 1\\ c & b & a-\lambda\end{bmatrix}\\ &= -\lambda\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ b & a-\lambda\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}0 & 1\\ c & a-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c.\end{aligned}$$

Az előző feladat egyik tanulságát külön állításban is megfogalmazzuk:

5.7. Állítás: Háromszögmátrixok sajátértékei. Háromszögmátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, akkor $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ is, és háromszögmátrix determinánsa megegyezik főátlóbeli elemeinek szorzatával. Eszerint az $\mathbf{A}=[a_{ij}]$ mátrix karakterisztikus egyenlete

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\dots(a_{nn}-\lambda)=0$$

aminek a gyökei a_{ii} $(i=1,\dots,n)$. Így ezek az $\mathbf{A}$ sajátértékei. ∎

Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása. Az előző paragrafusokban leírtak alapján egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása két lépésben elvégezhető:

1. megoldjuk a $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0$ karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek,
2. minden λ sajátértékhez meghatározzuk az $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ nullterének egy bázisát, az általa kifeszített altér nemzérus vektorai a λ-hoz tartozó sajátvektorok.

5.8. Példa: Az összes sajátérték és sajátvektor meghatározása. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás. Az első lépés a karakterisztikus egyenletet felírása és megoldása. A kiszámítandó determináns háromszögalakú, így értéke a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) &= \begin{vmatrix}0-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\ &= -\lambda(2-\lambda)^2\end{aligned}$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei, és így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3=2$.

Tekintsük először a $\lambda_1=0$ esetet. $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ nullterének meghatározásához redukált lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ mátrixot:

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix}x_2=0\\ x_3=0\end{matrix}$$

Ennek megoldása $x_1=t$, azaz az összes megoldás

$$\begin{bmatrix}t\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(1, 0, 0)$ vektor által kifeszített altér.

Tekintsük ezután a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ esetet. Meghatározzuk az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ mátrix nullterét.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Ennek az (egy egyenletből álló) egyenletrendszernek a megoldása: $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_1 = (s + t)/2$, azaz

$$\begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ és az $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér. ■

Az $n \times n$-es mátrixok karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Egy ilyen egyenlet megoldására $n \leq 4$ esetén van megoldóképlet, ezért ezeket az egyenleteket – például egy komputer algebra program segítségével – meg tudjuk oldani. Egyébként vagy szerencsénk van, és az egyenlet olyan alakú, amilyenhez vannak gyors megoldási lehetőségek, vagy csak közelítő megoldás megtalálására van esély.

5.9. példa: Magasabbfokú karakterisztikus egyenlet. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 24 - 12(1-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6) \end{aligned}$$

E harmadfokú egyenlet megoldására használhatunk számítógépet, vagy például a függelékben megtalálható Rolle-féle gyöktételt. Eszerint a karakterisztikus egyenlet $-(\lambda + 1)^2(\lambda - 6) = 0$, így gyökei $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ esetben

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ennek megoldása

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-1, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítik ki.

A $\lambda_3 = 6$ esetben

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} x_1 \quad\; - \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek megoldása a törtek alkalmazását elkerülő $x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_3 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(2, 2, 3)$ vektor feszíti ki. ■

5.10. TÉTEL: KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEKHEZ TARTOZÓ SAJÁTVEKTOROK. Ha λ_1, λ_2,... λ_k különböző sajátértékei az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,... $\mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

BIZONYÍTÁS. ??? ■

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei. Ha valóselemű mátrixot vizsgálunk, megeshet, hogy a karakterisztikus egyenletnek vannak komplex gyökei. Mivel a valós számok egyúttal komplexek is, a valós elemű mátrixot tekinthetjük komplex eleműnek is, ekkor viszont a karakterisztikus egyenlet komplex gyökeit is sajátértéknek tekinthetjük. Ebben az esetben a komplex sajátértékhez komplex elemű sajátvektor fog tartozni.

5.11. PÉLDA: KOMPLEX SAJÁTÉRTÉKEK ÉS KOMPLEX ELEMŰ SAJÁTVEKTOROK. Határozzuk meg a komplex elemű

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

A $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ egyenlet gyökei $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Először vizsgáljuk a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértéket:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x - iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisa az $(i, 1)$ vektorból áll.

A $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátérték esetén

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x + iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Tehát a $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-i, 1)$ sajátvektor feszíti ki. ■

Lineáris transzformációk sajátértékei. Mivel minden $\mathbf{A} \in \mathbb{T}^{n \times n}$ mátrixnak megfelel egy $A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ lineáris transzformáció, ezért a sajátérték, sajátvektor és sajátaltér fogalma lineáris transzformációkra is átvihető. Később látni fogjuk, hogy az így definiált sajátérték-sajátvektor-fogalom általánosabb körülmények között is használható.

5.12. definíció: Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora. Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció *sajátértéke*, ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó *sajátvektorainak* nevezzük.

Ha a lineáris transzformáció $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, mely valamilyen egyszerű geometriai transzformációt valósít meg, akkor néha a transzformáció mátrixának ismerete nélkül is könnyen meghatározhatjuk a sajátértékeket és sajátvektorokat.

5.13. példa: Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora. Adjuk meg – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – az alábbi lineáris leképezések sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket.

(a) a sík (vektorainak) tükrözése egy (origón átmenő) egyenesre;
(b) a sík (vektorainak) merőleges vetítése egy (origón átmenő) egyenesre;
(c) a tér elforgatása egy origón átmenő egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;
(d) a tér merőleges vetítése egy síkra.

Megoldás. Az előző fejezetben, így a 4.34. példában bizonyítottakhoz hasonlóan látható, hogy mindegyik feladatbeli transzformáció lineáris.

(a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere a tengellyel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.

(b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre – hasonlóan az előző esethez – helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a $\mathbf{0}$-vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.

(c) A tér π egész számú többszörösétől különböző szöggel való elforgatása egy egyenes körül a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és semelyik másikat sem viszi a saját skalárszorosába, így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyes párhuzamos vektorokból áll.

(d) A tér merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a $\mathbf{0}$ vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. ■

Sajátértékek és a mátrix hatványai.

5.14. tétel: Mátrix hatványainak sajátértékei és sajátvektorai. Ha λ az $\mathbf{A}$ mátrix egy sajátértéke, akkor bármely egész n esetén λ^n sajátértéke az $\mathbf{A}^n$ mátrixnak. (Természetesen ha n negatív, akkor az $\mathbf{A}$-nak invertálhatónak kell lennie.)

5.15. tétel: Mátrix invertálhatósága és a 0 sajátérték. Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de ez ekvivalens azzal, hogy $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$, azaz 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. ■

5.16. TÉTEL: MÁTRIX HATVÁNYAINAK HATÁSA. Tegyük fel, hogy λ_1, $\lambda_2, \dots \lambda_k$ sajátértékei az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak, és hogy $\mathbf{x}_1, \dots \mathbf{x}_k$ a hozzájuk tartozó sajátvektorok. Ha egy n-dimenziós $\mathbf{v}$ vektor előáll a sajátvektorok lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m\mathbf{v} = c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_m^m\mathbf{x}_k.$$

5.2. Diagonalizálhatóság

Mind bizonyos problémák megértésében, mind a gyakorlati alkalmazásokban fontos lehet, hogy egy lineáris leképezés mátrixát milyen bázisban írjuk fel. Nagyon egyszerű például azoknak a lineáris leképezéseknek a kezelése, amelyeknek mátrixa valamely bázisban diagonális.

Hasonlóság.

5.17. DEFINÍCIÓ: HASONLÓSÁG. Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok *hasonlóak*, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}.$$

Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Például $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right] \sim \left[\begin{smallmatrix}-6&4\\-9&6\end{smallmatrix}\right]$, ugyanis

$$\begin{bmatrix}-6&4\\-9&6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2&-1\\-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\3&-2\end{bmatrix}, \qquad \left(\mathbf{C} = \begin{bmatrix}-2&1\\3&-2\end{bmatrix}\right).$$

Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ összefüggés ekvivalens az $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$ összefüggéssel, amit még egyszerűbb lehet ellenőrizni. Példánk esetében

$$\begin{bmatrix}-2&1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6&4\\-9&6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\\3&-2\end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix}3&-2\\0&0\end{bmatrix}\right).$$

5.18. TÉTEL: HASONLÓSÁG TULAJDONSÁGAI. Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor
(a) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,
(b) $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = \operatorname{rang}(\mathbf{B})$,
(c) megegyezik $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja, így sajátértékei is.

Diagonalizálhatóság.

5.19. DEFINÍCIÓ: DIAGONALIZÁLHATÓSÁG. Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix *diagonalizálható*, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik olyan diagonális $\mathbf{D}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

5.20. TÉTEL: DIAGONALIZÁLHATÓSÁG SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE. Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz létezik egy olyan $\mathbf{C}$ invertálható mátrix, amelyre $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, akkor $\mathbf{C}$-vel balról szorozva az $\mathbf{CD} = \mathbf{AC}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]$ a sajátvektorokból álló mátrix, és $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n],$$

ugyanis a bal oldali mátrix i-edik oszlopa $\lambda_i \mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{Ax}_i$, amik megegyeznek, hisz λ_i épp az $\mathbf{x}_i$ sajátvektorhoz tartozó sajátérték.■

5.21. példa: Mátrix diagonalizálása. Diagonalizálható-e az 5.8. példabeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix?

Megoldás. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait meghatároztuk az 5.8. példában. Mivel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(1/2, 1, 0)$ és $(1/2, 0, 1)$, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ezért $\mathbf{A}$ hasonló a $\mathbf{D}$ diagonális mátrixhoz, ahol

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez könnyen igazolható a $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ egyenlőség ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

vagy a $\mathbf{CD} = \mathbf{AC}$ összefüggés ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tárgymutató

általános megoldás, 53

additív inverz, 111
adjungált, 170
affin altér, 66
alakzat egyenletrendszere, 32
alapvektor, 22
alsó háromszögmátrix, 124
altér, 64
    affin, 66
alulcsordulás, 72
atommátrix, 82

bázis, 22
    altéré, 141
    standard, 141
bázisfelbontás, 143
bázisoszlop, 51
bővített mátrix, 45
balrendszer, 19
BCD-kód, 27
bitvektor, 27
blokkmátrix, 99

csoport, 13

determináns, 157
    rendje, 157
diád, 95
diadikus szorzat, 95
dimenzió, 146

együtthatómátrix, 45
egyenletrendszer
    numerikusan instabil, 70
egységmátrix, 97
Einstein-konvenció, 107
ekvivalens
    átalakítások, 45
    lineáris egyenletrendszerek, 44
előjeles aldetermináns, 166
előjeles terület, 155
elemi mátrix, 98
elemi sorműveletek, 51
ellenőrző összeg, 31
euklideszi norma, 11
explicit, 33

főátló, 45
főelem, 51
főoszlop, 51

fejléc, 85
felső háromszögmátrix, 124
ferdén szimmetrikus, 93
flop, 69
formulamátrix, 82

Gauss-módszer, 52
Gauss – Seidel-iteráció, 78
Gauss – Jordan-módszer, 56
gyűrű, 137

háromszögmódszer, 12
Hamming-kód, 59
hipermátrix, 99
hipersík, 41

implicit, 32
invertálható, 112
irányított szög, 19
irányított szakasz, 10
irányvektor, 33
ISO 31-11, 11

jól kondicionált, 70
Jacobi-iteráció, 77
jobbrendszer, 19
Jordan-mérték, 156

kötött változó, 52
kötött vektorok, 10
kígyó, 123
kód
    hossza, 27
kódszó, 27
kódvektor, 27
kerekítés, 72
kibővített mátrix, 45
kifeszített altér, 65
kollineáris vektor, 11
komplanáris, 13
kompozíció
    lineáris helyettesítéseké, 87
konstans tag, 42
koordináták, 22
koordináta, 22
koordinátatengely, 22

lépcsős alak, 51
Lebesgue-mérték, 156
lineáris
    egyenlet, 42

egyenletrendszer, 44
kombináció, 14
lineáris egyenletrendszer
homogén, 44
inhomogén, 44
megoldása, 44
lineáris helyettesítés, 87
lineáris leképezés, 152
lineáris transzformáció, 96
lineárisan összefüggő, 16
lineárisan független, 16, 138
LU-felbontás, 128

mátrix, 45, 89
diagonális, 90
elemi, 98
ellentettje, 91
ferdén szimmetrikus, 93
négyzetes, 90
rangja, 61
soronként domináns főátlójú, 79
szimmetrikus, 93
szinguláris, 112
sztöchiometriai, 82
mátrixok tere, 90
mátrixszorzat
diádok összegére bontása, 101
mátrixtranszformáció, 96
maradékosztály, 28
megoldás
általános, 53
partikuláris, 53
megoldásvektor, 44
megoldható, 44
merőleges
alterek, 147
multiplikatív inverz, 112

nilpotens, 113
norma
euklideszi, 11
nullosztó, 106
nulltér, 64
nullvektor, 11
numerikusan instabil, 70
numerikusan stabil, 70

origó, 11, 22
ortogonális, 25
ortonormált bázis, 25
oszlopvektor, 23, 46
osztási maradék, 28

párhuzamos vektor, 11
parallelogramma
előjeles területe, 155
paritásbit, 30
partikuláris megoldás, 53
permutációs mátrix, 123
pivotelem, 51
PLU-felbontás, 132
precedencia-elv, 108

rang, 61, 146
reakció egyenlet, 81
redukált lépcsős alak, 55
ritka mátrix, 45
rosszul kondicionált, 70

Sarrus-szabály, 165
skalár, 10
skaláris szorzat, 17
sorlépcsős alak, 51
soronként domináns főátló, 79
sorvektor, 46
standard bázis, 141
sudoku, 104
szabad változó, 52
szabad vektor, 11
szimmetrikus mátrix, 93
szimultán egyenletrendszer, 58
szinguláris, 112
sztöchiometriai mátrix, 82

túlcsordulás, 72
test, 137
test (algebrai), 29
torzor, 13

vektor, 10
összeg, 12
abszolút értéke, 11
azonos irányú, 11
egyirányú, 11
ellenkező irányú, 11
hossza, 11
kollineáris, 11
koordinátás alakja, 22
párhuzamos, 11
vektoregyenlet, 32
vektori szorzat, 19

zérusvektor, 11