1. Határozzuk meg a

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

lineáris transzformációra $\operatorname{Im} T$ és $\operatorname{Ker} T$ egy bázisát és a dimenzióját.

2. Legyen $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{x})$, ahol $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg $\operatorname{Im} T$ és $\operatorname{Ker} T$ egy bázisát és a dimenzióját.

3. Adjuk meg az alábbi lineáris terek egy bázisát és dimenzióját.

a) $U = \{(a, b, c, d) \mid a = 0,\ b + c = 0,\ d \in \mathbb{R}\}$
b) $V = \{(a, b, c) \mid a = 2b,\ b = 3c\}$
c) $W = \{(a, b, c) \mid a + 2b + c = 0\}$

4. Adjuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Legyen $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Adjuk meg a értékét úgy, hogy $\lambda_1 = 1$ sajátértéke legyen az A mátrixnak. Határozzuk meg A többi sajátértékét és a legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektorait.

6. Igazoljuk, hogy ha az A mátrixnak sajátértéke λ, és egy λ-hoz tartozó sajátvektora $\mathbf{u}$, akkor az A^2 mátrixnak sajátértéke λ^2, és $\mathbf{u}$ egy ehhez tartozó sajátvektora.

7. Igazoljuk, hogy ha A invertálható mátrix, akkor A^{-1} sajátértékei az A sajátértékeinek reciprokai, és a sajátvektorai megegyeznek A sajátvektoraival.

8. Határozzuk meg az 5. feladatsorban szereplő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait.