1. Tekintsük a

$$2x + 3y = 0$$

egyenletet. Ez egyrészt egy origón átmenő egyenes egyenlete. Másrészt egy egyenlet két ismeretlenre. (Itt még kicsit erőltetett arra hivatkozni, hogy a bal oldal kettő darab egydimenziós vektor lineáris kombinációja. Egy db nem nulla egydimenzós vektorral minden egydimenziós előállítható. A két egydimenziós vektor nem lineárisan független, így a jobb oldalon álló egydimenziós vektor előállítása nem egyértelmű.) Tudjuk, hogy végtelen sok megoldása van: $y = -\frac{2}{3}x$, ahol x tetszőleges valós szám lehet.
Ha a megoldásokat mint (x, y) kétdimenziós vektorokat írjuk fel, akkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{2}{3}t \end{bmatrix} = \frac{t}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ahol t tetszőleges valós szám lehet. Minden megoldás tehát egy adott vektor számszorosaiból áll, ami egy egydimenziós vektortér (ami nem más, mint az origón átmenő egyenes).
Ha a skaláris szorzást is tekintjük, megállapíthatjuk, hogy a megoldásvektorok azok, amelyek merőlegesek a (2,3) vektorra.

2. Tekintsük a

$$2x + 3y = 8$$

egyenletet. Ez egyrészt az előző egyenes párhuzamos eltoltjának egyenlete. (Mivel az egyenest önmagával párhuzamosan eltolva az origót az új egyenes végtelen sok különböző pontjába tolhatjuk, az új egyenest végtelen sok különböző eltolással megkaphatjuk.) Másrészt ez egy egyenlet két ismeretlenre. Tudjuk, hogy végtelen sok megoldása van: $y = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}x$, ahol x tetszőleges valós szám lehet.
Ha a megoldásokat mint (x, y) kétdimenziós vektorokat írjuk fel, akkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ \frac{8}{3} - \frac{2}{3}t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} + \frac{t}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

ahol t tetszőleges valós szám lehet. Láthatjuk, hogy minden megoldás úgy áll elő, mint egy konstans vektor, plusz az a megoldás, ami a 0 jobboldalhoz tartozott. Az is látható, hogy ez nem más, mint az eredeti eltoltja, ahol most az origót a $(0, \frac{8}{3})$ pontba toltuk.
Ha a skaláris szorzást is tekintjük, megállapíthatjuk, hogy a megoldásvektorok azok, amelyeknek merőleges vetülete a (2,3) vektorra állandó.

3. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez két egyenlet két ismeretlenre. Másrészt két egyenes egyenlete. Tudjuk, hogy ha nem párhuzamosak, akkor egy pontban metszik egymást. Ezek nem párhuzamosak. A metszéspontjuk $(0, 0)$.
Az egyenletrendszert írhatjuk a következő alakba is:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A bal oldal oszlopvektorai nem párhuzamosak, ez két dimenzióban azt jelenti, hogy lineárisan függetlenek, így a kétdimenziós sík minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként. Ez a lineáris kombináció most az $x = 0$, $y = 0$, és más nem is létezik.
Ha a megoldásokat mint (x, y) kétdimenziós vektorokat írjuk fel, akkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez két egyenlet két ismeretlenre. Másrészt két egyenes egyenlete. Tudjuk, hogy ha nem párhuzamosak, akkor egy pontban metszik egymást. Ezek nem párhuzamosak. A metszéspontjuk $(1, 2)$.
Az egyenletrendszert írhatjuk a következő alakba is:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A bal oldal oszlopvektorai nem párhuzamosak, ez két dimenzióban azt jelenti, hogy lineárisan függetlenek, így a kétdimenziós sík minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként. Ha a megoldásokat mint (x, y) kétdimenziós vektorokat írjuk fel, akkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

azaz, a megoldást megint tekinthetjük úgy, mint egy konstans vektor, az egyenletrendszert kielégítő koordinátákkal, plusz a nulla jobb oldalt előállító megoldás.

5. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + 6y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez egyrészt két egyenlet két ismeretlenre. Másrészt két párhuzamos egyenes, amelyeknek nincs metszéspontja.
Az egyenletrendszert írhatjuk a következő alakba is:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A bal oldal oszlopvektorai párhuzamosak, ez két dimenzióban azt jelenti, hogy lineárisan nem függetlenek, így a kétdimenziós síknak csak azok a vektorai állíthatók elő velük, amelyek velük szintén párhuzamosak. A jobb oldalon álló vektor nem ilyen, ezért nincs megoldás. Ha viszont párhuzamos lenne velük, akkor a nem független vektorokkal végtelen sokféleképpen lenne előállítható.

6. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ x - y &= -1 \\ 3x - 2y &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez három egyenlet két ismeretlenre. Másrészt három egyenes egyenlete. Láttuk, az első kettő egy pontban metszi egymást, így ennek az egyenletrendszernek akkor lesz csak megoldása, ha a harmadik átmegy ugyanazon a ponton. Behelyettesítve azt kapjuk, hogy átmegy, a metszéspontjuk $(1, 2)$. (Az első egyenlethez a második 13-szorosát adva épp a harmadik ötszöröse jön ki, ez tehát következménye az első kettőnek.)
Az egyenletrendszert írhatjuk a következő alakba is:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

A bal oldal oszlopvektorai nem párhuzamos háromdimenziós vektorok, de csak olyan vektort tudunk előállítani ezek lineáris kombinációjaként, amelyik velük egy síkban van. A jobb oldalon álló vektor egy síkban van velük (amit pl. a vegyesszorzat 0 voltával is ellenőrizhetünk). Ekkor viszont a két lineárisan független bal oldali vektorral a jobb oldali egyértelműen állítható elő, és ezek a konstansok $x = 1$, $y = 2$.
A

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ x - y &= -1 \\ 3x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek nincs megoldása, mert a

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektorok nincsenek egy síkban.

7. Tekintsük a

$$2x - 2y + z = 0$$

egyenletet. Ez egyrészt egy origón átmenő sík egyenlete a háromdimenziós térben, a sík minden pontjának koordinátái kielégítik az egyenletet. Másrészt egy egyenlet három ismeretlenre. Kettőt szabadon választhatunk, legyenek ezek most x és y. Ekkor $z = -2x + 2y$, ahol x és y tetszőleges valós számok.

Ha a megoldásokat mint háromdimenziós vektorokat tekintjük, akkor $x = t$, $y = s$ választással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -2t + 2s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ahol t, s tetszőleges valós számok. A jobb oldalon szereplő két vektor az origón átmenő síkban van, tehát megoldások. Lineárisan függetlenek (nem párhuzamosak), tehát a sík minden vektora, azaz minden megoldás előállítható ezek lineáris kombinációjaként. Épp ezt mutatja a felírás.
Ha a skaláris szorzást is tekintjük, megállapíthatjuk, hogy a megoldásvektorok azok, amelyek merőlegesek a $(2, -2, 1)$ vektorra.

8. Tekintsük a

$$2x - 2y + z = 1$$

egyenletet. Ez az előbbi sík eltoltja, és mivel a sík minden pontjának koordinátái kielégítik az egyenletet, végtelen sok megoldás van. Másrészt ez egy egyenlet három ismeretlenre. Kettőt szabadon választhatunk, legyenek ezek most x és y. Ekkor $z = 1 - 2x + 2y$, ahol x és y tetszőleges valós számok.
Ha a megoldásokat mint háromdimenziós vektorokat tekintjük, akkor $x = t$, $y = s$ választással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ 1 - 2t + 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ahol t, s tetszőleges valós számok. Most is azt kaptuk, hogy a megoldás egy konstans vektor, plusz a 0 jobboldalú egyenlet megoldása. A konstans vektor maga kielégíti az egyenletet az 1 jobb oldallal. Ebben az esetben az origót a $(0, 0, 1)$ pontba toltuk.
Választhatunk $x = t + 1$-et, $y = s - 2$-t is. Ekkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ 1 - 2t + 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Az $(1, -2, -5)$ vektor kielégíti az egyenletet a jobb oldallal. Ebben az esetben az origót a $(1, -2, -5)$ pontba toltuk.
Ha a skaláris szorzást is tekintjük, megállapíthatjuk, hogy a megoldásvektorok azok, amelyek merőleges vetülete a $(2, -2, 1)$ vektorra állandó.

9. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 0 \\ -2x + y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez két egyenlet három ismeretlenre. Másrészt ez két sík, és ha nem párhuzamosak, akkor egy egyenesben metszik egymást. Ekkor az

egyenes pontjainak koordinátái kielégítik mindkét sík egyenletét, így végtelen sok megoldás van. $y = 2x$, $z = 2x$, ahol x tetszőleges valós szám.
Az egyenletrendszert írhatjuk a következő alakba is:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A bal oldalon három darab kétdimenziós vektor van. Ezek biztosan nem lehetnek függetlenek. Ha van közöttük kettő, amelyik nem párhuzamos, akkor viszont ezekkel minden kétdimenziós vektor előállítható. Most semelyik kettő nem párhuzamos, de mivel hárman vannak, a nulla vektort végtelen sokféleképpen elő tudjuk állítani.
Ha a megoldásokat mint háromdimenziós vektorokat tekintjük, akkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ahol t tetszőleges valós szám. Ez pedig egy origón átmenő egyenes vektoregyenlete.

10. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ -2x + y \qquad &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert, ahol az előbbi feladat egyik síkját eltoltuk. Ez két egyenlet három ismeretlenre. Másrészt ez két sík, és ha nem párhuzamosak, akkor egy egyenesben metszik egymást. Ekkor az egyenes pontjainak koordinátái kielégítik mindkét sík egyenletét, így végtelen sok megoldás van. $y = 2x$, $z = 1 + 2x$, ahol x tetszőleges valós szám.
Az egyenletrendszert írhatjuk a következő alakba is:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A bal oldalon három darab kétdimenziós vektor van. Ezek biztosan nem lehetnek függetlenek. Ha van közöttük kettő, amelyik nem párhuzamos, akkor viszont ezekkel minden kétdimenziós vektor előállítható. Most semelyik kettő nem párhuzamos, de mivel hárman vannak, a jobb oldali vektort végtelen sokféleképpen elő tudjuk állítani.
Ha a megoldásokat mint háromdimenziós vektorokat tekintjük, akkor

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 1 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ahol t tetszőleges valós szám. Ez pedig egy egyenes vektoregyenlete. Most is azt kaptuk, hogy a megoldás egy konstans vektor, plusz a csupa 0 jobboldalú egyenletrendszer megoldása. A konstans vektor maga kielégíti az egyenletrendszert a nem csupa nulla jobb oldalakkal.

11. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 0 \\ -2x + y \phantom{{}+z} &= 0 \\ 2y - z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez egyrészt három sík, és ha nem speciális helyzetűek, akkor egyetlen pontban metszik egymást. Másrészt három egyenlet három ismeretlenre. Vektorosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha a bal oldal oszlopvektorai nincsenek egy síkban, akkor a háromdimenziós tér minden vektora egyértelműen kifejezhető velük. Ez a három vektor nincs egy síkban. (Pl. vegyesszorzatuk nem nulla, ill. egyik sem fejezhető ki a másik kettő lineáris kombinációjaként.) Így a nullvektor felírása egyértelmű, és $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

12. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ -2x + y \phantom{{}+z} &= 0 \\ 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. (Az előző feladat síkjait toltuk el párhuzamosan.) Ez egyrészt három sík, és ha nem speciális helyzetűek, akkor egyetlen pontban metszik egymást. Másrészt három egyenlet három ismeretlenre. Vektorosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ha a bal oldal oszlopvektorai nincsenek egy síkban, akkor a háromdimenziós tér minden vektora egyértelműen kifejezhető velük. Ez a három vektor nincs egy síkban. (Pl. vegyesszorzatuk nem nulla, ill. egyik sem fejezhető ki a másik kettő lineáris kombinációjaként.) Így a jobb oldali vektor egyértelműen állítható elő: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, azaz

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ami már megint olyan, hogy egy konstans vektor, plusz a csupa nulla jobb oldalú egyenlet megoldása.

13. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ -2x + y \phantom{{}+z} &= -2 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez három sík egyenlete. Három egyenlet három ismeretlenre. Vektorosan felírva

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A bal oldal három oszlopvektora egy síkban van, így a jobb oldal csak akkor állítható elő lineáris kombinációjukként, ha velük egy síkban van. Ha előállítható, akkor az előállítás biztosan nem egyértelmű, mert a bal oldal egy síkba eső három vektora nem lehet lineárisan független.
Az első két egyenletből $y = -2 + 2x$, $z = -3 + 2x$, és ez kielégíti a harmadik egyenletet is. (A harmadik egyenlet az első kettő összegének -1-szerese, így azok következménye.)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -2 + 2t \\ -3 + 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ahol t tetszőleges valós szám. Ez a három sík közös egyenese.

14. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ 4x - 4y + 2z &= 2 \\ -6x + 6y - 3z &= -3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez három sík egyenlete. Három egyenlet három ismeretlenre. Vektorosan felírva

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

A bal oldal oszlopvektorai ugyanannak a vektornak számszorosai, tehát csak egyetlen egy lineárisan független választható ki közülük. Ha a jobb oldal nem ugyanannak a vektornak számszorosa, akkor nincs megoldás, és ha van megoldás, akkor végtelen sok. Mivel a második és harmadik egyenlet az első számszorosai, ez a kettő ugyanannak a síknak az egyenlete, mint az első, így a megoldás ugyanaz, mint a 8. feladatban:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ 1 - 2t + 2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

15. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ -2x + y \phantom{{}+z} &= -2 \\ y - z &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez három sík egyenlete. Három egyenlet három ismeretlenre. Vektorosan felírva

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A bal oldal három oszlopvektora egy síkban van, de a jobb oldal nincs ebben a síkban. (Pl. a $(2, -2, 0)$, $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 5)$ vektorok vegyesszorzata nem 0.) Ebben az esetben nincs megoldás. Ha felírnánk a nem párhuzamos síkok metszésvonalait, három párhuzamos egyenest kapnánk.

16. Tekintsük a

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 1 \\ 4x - 4y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ez két sík. Két egyenlet három ismeretlenre.
Az egyenletrendszert írhatjuk a következő alakba is:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A bal oldalon minden vektor ugyanannak a vektornak számszorosa, így csak akkor van megoldás, ha a jobb oldal is ilyen. De nem ilyen, így nincs megoldás. Az egyenletekből ez úgy látszik, hogy ez a két sík párhuzamos, de nem esik egybe. Így nincs közös pontjuk. Az első egyenlet -2-szeresét adva a másodikhoz, a bal oldalon minden ismeretlen nullaszorosát kapjuk, ami mindenképpen 0, a jobb oldalra viszont nem ez jön ki.

Tekinthetnénk még olyan eseteket is, amikor 4 vagy több egyenletünk van kettő vagy három ismeretlenre, de azok vizsgálatánál a 4 vagy több dimenziós tereket is kellene tekinteni, ami egyelőre nem célunk.