MAT A2 – 1. pótZH. – 2009. május 6. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Végezzük el az alábbi számításokat! (21212112 = *12 pont)*

a) Tegyük fel, hogy a 3×3-as $\mathbf{B}$ mátrixra $\det(\mathbf{B}) = 4$. Ekkor $\det(\mathbf{B}^{-1}) = \dots$ $\quad \det(3\mathbf{B}) = \dots$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

c) A következő mátrix LU-felbontása:
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} =$

d) Ha az $\mathbf{A}$ egy $n \times k$-as mátrix, és sorterének dimenziója d, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók száma =

e) A tér y-tengely körüli 180 fokos elforgatásának sajátértékei, sajátalterei és az őket kifeszítő vektorok:

f) A sík origó körüli $\pi/6$ radiánnal való elforgatásának mátrixa =

g) A Cramer-szabály segítségével írjuk fel az alábbi egyenletrendszer megoldását csak az y ismeretlenre (kiszámítani nem kell, csak felírni):

$$ax + by + cz = d$$
$$bx + cy + az = e$$
$$cx + ay + bz = f$$

h) Írjuk fel a Gauss–Seidel-iterációban alkalmazandó képleteket, és számítsuk ki az iteráció első lépését, azaz az (x_1, y_1) számpárt a következő egyenletrendszer esetén, ha az induló érték $(x_0, y_0) = (1, 1)$:

$$4x + 2y = 8$$
$$2x + 3y = 8$$

2. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két $n \times n$-es mátrix. Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül (I vagy H)? (Jó válasz 1, rossz -1 pont!) *(6 pont)*

a) $\det \mathbf{A} \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha $\operatorname{rang} \mathbf{A} < n$. ☐

b) Ha $\det \mathbf{A} = 0$, akkor 0 biztosan sajátértéke az $\mathbf{A}$ mátrixnak. ☐

c) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) = 0$. ☐

d) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásainak halmaza altér $\mathbf{R}^n$-ben. ☐

e) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$. ☐

f) Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. ☐

3. Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét! *(3 pont)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Az alábbi LU-felbontást felhasználva oldjuk meg a megadott egyenletrendszert! *(3 pont)*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 7 \\ 2x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

5. Válasszunk ki az $\mathbf{v}_1 = (1,1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,2,4,6)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-1,0,1)$, $\mathbf{v}_4 = (3,-3,-2,-1)$ és $\mathbf{v}_5 = (0,3,4,5)$ vektorok közül maximális számú lineárisan függetlent és és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. *(4 pont)*

6. Milyen a és b értékekre lesz 0, 1 vagy végtelen sok megoldása az alábbi kibővített mátrixú egyenletrendszernek? Adjuk is meg a megoldást abban az esetben, ha végtelen sok megoldás van!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & b & 3 \\ 1 & 1 & 1 & a-b+1 \end{array}\right]$$

(6 pont)

7. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Adjuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait. Számítsuk az $\mathbf{A}^5$ mátrixot (ehhez használjuk $\mathbf{A}$ diagonalizációját)! *(5 pont)*