Differenciálszámítás alkalmazása.

1. Legyen az $f(x,y)=\dfrac{x^4+xy^3}{x^2+y^2}$, ha (x,y)≠(0,0) és f(0,0)=0. Igazolja: $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$.

2. Határozza meg azt a ponthalmazt, amelynek minden pontjában igaz az adott függvényre vonatkozó egyenlőség.

a) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}$, $f_{xx}+f_{yy}=4(x^2+y^2+1)f$

b) $f(x,y)=arth\dfrac{y}{x}$, $f_{yy}-f_{xy}=\dfrac{1}{(x-y)^2}$

3. Legyen $f(x,y)=\ln(xy)$, $x=tgt$, $y=\sqrt{t}$. $\dfrac{df}{dt}=?$

4. Legyen $f(x,y)=3xy$, $x=\sin(u+v)$, $y=\cos(u+v)$. $f_u=?\, f_v=?$

5. Legyen $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, ha (x,y)≠(0,0) és f(0,0)=0. Határozza meg az f iránymenti deriváltját a (0,0) pontban az (1,0), (0,1) és az (1,1) irányokban.

6. Határozza meg az $f(x,y)=2x^2+y^2$ iránymenti deriváltját a (-1,1) pontban a (4,3) irányban.

7. Milyen irányú és mekkora a maximális iránymenti deriváltja az $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ függvénynek az (1,1) pontban?

8. Milyen irányokban 0 az $f(x,y,z)=3e^x\cos(yz)$ függvény iránymenti deriváltja a (0,0,0) pontban?

9. Határozza meg az adott felület adott pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

a) $z=\ln(x^2+y^2)$, P(1,0,0)

b) $x^2+y^2+z^2=3$, P(1,1,1)

c) $x^2+y^2-2xy-x+3y-z=3$, P(1,2,3)

10. Határozza meg az $x^2+3y^2+2z^2=9$ felület azon pontjait, amelyekben az érintősík párhuzamos a 2x+3y+4z=0 síkkal.

11. Adja meg az adott függvény adott ponthoz tartozó lineáris közelítését.

a) $f(x,y)=e^x\cos y$, P(0,0)

b) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, P(1,2,2)

12. Határozza meg az adott függvény lokális szélsőértékeit.

a) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

b) $f(x,y)=e^{2x}\cos y$

c) $f(x,y)=xy+2x-\ln(x^2y)$

d) $f(x,y)=x^3y^2$

13. Határozza meg az adott függvény minimumát és maximumát az adott tartományon.

a) $f(x,y)=2y^2+x^2+y$, $T=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

b) $f(x,y)=x^2y^2$, $T=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

c) $f(x,y)=xy^2+2x-4y$, T a (0,0), (1,0), (1,1) , (0,1) pontok által meghatározott négyzet

d) $f(x,y)=8xy^2-2y+4$, T a (0,0), (1,0), (0,1) pontok által meghatározott háromszög.

14. Határozza meg az $x^2+xy+y^2-7=0$ egyenlettel adott y függvény deriváltját az (1,2) pontban.

Integrálszámítás

1. Számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1}(x+y-1)dxdy$ b) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\sin x} ydydx$ c) $\int_{1}^{2}\int_{y}^{y^2} dxdy$

2. Számítsa ki az alábbi függvények integrálját a megadott tartományon:

a) $f(x,y)=1/(xy)$, $T=\{(x,y):1\le x\le 2, 1\le y\le 2\}$

b) $f(x,y)=x^2+y^2$, T a (0,0), (1,0), (0,1) csúcspontú háromszög

c) $f(x,y)=x^2+2x$, T az x=0, x=1, $y=-1+x^2$, $y=x^2$ görbék által határolt tartomány

d) $f(x,y)=x^2$, $T=\{(x,y):|x|+|y|\le 1, -1\le x\le 0\}$

3. Az integrálás sorrendjének felcserélésével számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1} ye^{-x^2}dxdy$ b) $\int_{0}^{1}\int_{x}^{1}\frac{x\sin y}{y}dydx$ c) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1} y\sqrt{1+x^2}dxdy$

4. Polárkoordinátákra áttérve számítsa ki az alábbi integrálokat:

a) $\iint_T (x^2+y^2)dxdy$, $T=\{(x,y):x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$

b) $\iint_K \ln(1+x^2+y^2)dxdy$, $K=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$

c) $\iint_K xdxdy$, $K=\{(x,y):x^2+y^2\le 4, x\ge 0, -x\le y\le x\}$

d) $\iint_K x^2ydxdy$, $K=\{(x,y):x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$

5. Határozza meg az alábbi görbék által határolt tartomány területét:

a) xy = 1, xy = 4, y = x, y = 2x (x és y pozitív)

b) xy = 1, xy = 4, $y=x^2$, $y=x^2/2$

6. Számítsa ki az alábbi hármas integrálokat:

a) $\iiint_V \frac{1}{xyz}dxdydz$, $V=\{(x,y,z):1\le x\le e, 1\le y\le e, 1\le z\le e\}$

b) $\iiint_V dxdydz$, $V=\{(x,y,z):0\le z\le 2-x-y, 0\le y\le 2-x, 0\le x\le 1\}$

c) $\iiint_V xyzdxdydz$, $V=\{(x,y,z):x\ge 0, y\ge 0, 0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$

d) $\iiint_V z\sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, $V=\{(x,y,z):(x-1)^2+y^2\le 1, 0\le z\le 5\}$

e) $\iiint_V zdxdydz$, $V=\{(x,y,z):\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{2-x^2-y^2}\}$

7. Határozza meg az adott felületekkel határolt test térfogatát:

a) $z=y^2$, z = 0, x = 0, x = 1, y = 1, y = -1

b) $x^2+y^2=4$, z = 0, x + z = 3

c) $z=8-x^2-y^2$, $z=x^2+y^2$

d) $z=2-2\sqrt{x^2+y^2}$, z = 0, $(x-1/2)^2+y^2=1/4$

e) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=6-x^2-y^2$