1. MAT A2 vizsga. 2009-05-26 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ______________________ Előadó: ______

1. Az alábbiak közül melyik adja meg az **A** mátrix rangját? *(5 pont)*

A oszlopvektorainak száma ☐

Független sorvektorainak száma ☐

Lépcsős alakjában a nemnulla sorok száma ☐

Az ilyen együtthatómátrixú egyenletrendszer szabad változóinak száma ☐

Az ilyen együtthatómátrixú egyenletrendszer kötött változóinak száma ☐

Az e mátrixszal való szorzás képterének dimenziója ☐

2. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(16 pont)*

a) A differenciálható $f(x, y, z)$ függvény P_0 pontbeli, $\mathbf{grad}\, f(P_0)$ irányú iránymenti deriváltjának értéke egyenlő...

b) *Főtengelytétel.* Minden $k \times k$ típusú ... mátrix sajátértékei ... és sajátvektoraira igaz, hogy...

c) A kétváltozós f függvény másodrendű parciális deriváltjaira vonatkozó $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$ egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy ...

d) Annak a lineáris leképezésnek, amelyik a sík minden helyvektorát tükrözi az $x - \sqrt{3}y = 0$ egyenletű egyenesre két valós sajátértéke van: $\lambda_1 = \dots$ és $\lambda_2 = \dots$. A hozzájuk tartozó sajátvektorok:

e) A homogén lineáris $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \dots 0$, ami azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \dots n$, ami azt jelenti, hogy **A** oszlopvektorai közt a lineárisan függetlenek száma ...

f) Azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens, ha...

g) Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ hatványsor konvergens az $[a-R, a+R]$ intervallumon, és összege $f(x)$, akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$ hatványsor biztosan konvergens az ...

intervallumon és összegfüggvénye...

h) A kétváltozós $f(x, y) = \dots$ polinomfüggvénynek a $(0, 0)$ pontban nyeregpontja van. (Konstruáljunk egy ilyet!)

i) A gömbi (ρ, θ, ϕ) koordinátákra való áttérés Jacobi mátrixa:

3. Mit jelent az, hogy egy egyenletrendszer rosszul kondicionált? *(2 pont)*

4. Írjuk fel az $y = \sqrt{3}x$ egyenletű egyenesre való tükrözés mátrixát! *(3 pont)*

5. Ismerjük az azonos méretű és négyzetes **A**, **B** és **C** mátrixokat és inverzeiket. Hogyan számítanánk ki $\mathbf{AB}^{-1}\mathbf{C}$ inverzét! Állításunkat igazoljuk is! *(3 pont)*

6. Az **A** mátrixnak PLU-felbontását adja-e az alábbi három mátrix? *(3 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7. Igazoljuk, hogy ha **u** és **v** a homogén $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer két megoldása, akkor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ is megoldása az egyenletrendszernek. *(3 pont)*

8. A Vandermonde-determinánsra vonatkozó ismereteinket is felhasználva határozzuk meg az alábbi determináns értékét! *(4 pont)*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 2 & a+b & a^2+b^2 \\ 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \end{vmatrix}$$

9. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban! *(4 pont)*

$$\int_0^2 \int_{1+y^2}^5 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

10. Határozzuk meg az alábbi hatványsor konvergenciatartományát! *(6 pont)*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$$

11. Határozzuk meg a 2π szerint periodikus f függvény Fourier-sorát! *(6 pont)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & \text{ha } x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

12. Mennyi a térfogata annak a tölcséres fagylalt alakú tartománynak, melyet a $\rho \leq 1$ gömb vág ki a $\phi = \pi/6$ egyenletű kúpból? *(5 pont)*