3. MAT A2 vizsga. 2009-06-10 Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ________________ Előadó:_____

1. Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(19 pont)*

a) Az $n \times n$-es $\mathbf{M}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy ... mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan ... $\mathbf{B}$ és egy ... $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

b) Tekintsük az $x + y + z = 0$ egyenletű síkot, és a rá való merőleges tükrözés geometriai transzformációját. E leképezés sajátértékei: ...
mátrixának karakterisztikus polinomja:...

c) Ha az n-ismeretlenes m egyenletből álló $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, akkor m, n, $\mathrm{rang}(\mathbf{A})$ és a kibővített mátrix rangja ($\mathrm{rang}(\mathbf{A}')$) között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) \ldots m, \quad \mathrm{rang}(\mathbf{A}) \ldots n, \quad \mathrm{rang}(\mathbf{A}) \ldots \mathrm{rang}(\mathbf{A}')$$

d) Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok által kifeszített valós altéren az ...

értjük. Ennek az altérnek a dimenziója megegyezik az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vektorok...

e) Ha $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, akkor $\mathbf{P}^{-1} = \ldots$

f) Ha $\mathbf{A}$ egy $3 \times n$-es mátrix, akkor az $\mathbf{A}$ második sora kétszeresének az első sorhoz adásával kapott $\mathbf{B}$ mátrix megkapható egyetlen mátrixművelettel, nevezetesen...

g) Adjunk meg egy feltételesen konvergens számsort és egy olyan hatványsort, mely az egész számegyenesen abszolút konvergens!

h) Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ hatványsor konvergenciatartománya $(a, b]$, és összegfüggvénye e tartományon $f(x)$, akkor az $x \in \ldots$ értékekre igaz a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} = \ldots\ f\ \ldots$$

formula. Az a, b és c közt fennáll a következő összefüggés:

i) Írjuk fel $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ LU-felbontását!

2. Húzzuk alá a helyes választ az alábbi mondatokban (Mindig pontosan egy változat helyes, jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont) *(4 pont)*

(a) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer (változóinak)/(kötött változóinak)/(szabad változóinak) száma megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix rangjával.

(b) Az $\mathbf{A}_{n\times n}$ mátrix diagonalizálhatóságának (szükséges)/(elégséges)/(szükséges és elégséges) feltétele, hogy $\mathbf{A}$ sajátvektorai közül kiválasztható n (lineárisan független)/(lineárisan összefüggő) vektor.

(c) (Feltételesen konvergens) / (Abszolút konvergens) / (Divergens) sor átrendezhető úgy, hogy összege 1 és úgy is, hogy összege 2 legyen.

3. Az alábbiak közül melyik állítás igaz? (I/H, pontozás jó válasz = +1, rossz válasz = −1 pont) *(5 pont)*

Ha az $f(x, y)$ függvény első parciális deriváltjai léteznek az (x_0, y_0) pontban, akkor f folytonos e pontban. ☐

Ha a kétváltozós f függvény első parciális deriváltjai folytonosak egy nyílt tartományon, akkor f folytonos e tartomány minden pontjában. ☐

Ha a kétváltozós f függvény folytonos egy nyílt tartományon, melynek (x_0, y_0) egy belső pontja, akkor f differenciálható az (x_0, y_0) pontban. ☐

Minden determináns megegyezik a belőle kiválasztható kígyók determinánsainak összegével. ☐

Egy determináns értéke pontosan akkor 0, ha van zérussora, vagy van két azonos sorvektora. ☐

4. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ olyan négyzetes mátrixok, melyekre $\mathbf{AB} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. *(2 pont)*

5. Írjuk fel az $(1 + x)^{\frac{1}{3}}$ függvény 0 körüli Taylor-sorát és annak harmadik részletösszegét (az együtthatókat kiszámolva)! *(3 pont)*

6. Legyen f egy kétváltozós függvény. Helyettesítsük az $x = x_0 + ut$, $y = y_0 + vt$ paraméteres egyenletrendszerű egyenes pontjait az f függvénybe, és fejezzük ki a $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ deriváltat f gradiensének és az (u, v) vektornak a segítségével. Használjuk a láncszabályt! *(4 pont)*

7. Írjuk fel az $f(x, y) = \sin x \cos y$ függvény $(0, 0)$ ponthoz tartozó elsőfokú Taylor-polinomját a maradéktaggal, valamint az e ponthoz tartozó teljes differenciálját! *(4 pont)*

8. Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban, majd végezzük el az integrálást! *(5 pont)*

$$\int_1^e \int_{\ln y}^1 \frac{1}{y(x^2 - 4)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

9. Az első és második parciális deriváltak kiszámolásával mutassuk meg, hogy az

$$f : (x, y, z) \mapsto x^2 + xy + y^2 + z^2$$

függvénynek a $(0, 0, 0)$ pont szélsőértékhelye. Határozzuk meg azt is, hogy minimum vagy maximum! *(3 pont)*

10. Tekintsük a $z \geq 0$ és az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ egyenlőtlenségekkel meghatározott félgömböt. Legyen az $f(x, y, z)$ függvény értelmezve e test minden pontjában. Írjuk fel e függvénynek a félgömbön vett integrálját henger és gömbi koordinátákat használva, azaz adjuk meg az integrálok határait és integrandusát! *(5 pont)*

11. Határozzuk meg a 2π szerint periodikus f függvény Fourier-együtthatóit, és írjuk fel a Fourier-sornak azt a részletösszegét, melyben a $\cos nx$, $\sin nx$ függvények közül csak az $n \leq 5$ feltételnek eleget tevők szerepelnek! *(6 pont)*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ -1, & \text{ha } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0] \\ 0, & \text{ha } x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases}$$