1. Bontsuk elemi törtfüggvények összegére a $\dfrac{x^3 - x + 2}{x^3(x^2 + x + 1)}$ függvényt, és számítsuk ki az integrálját!

2. Az egyenletrendszer ekvivalens átalakításaival határozzuk meg a következő egyenletrendszer összes megoldását! Hány változó értékét választhatjuk meg szabadon?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & 5z & + & u & = & 3 \\ x & - & y & + & z & + & 2u & = & 1 \\ x & + & 2y & - & 6z & - & u & = & 2 \end{array}$$

3. Döntsük el az egyenletrendszerek kibővített mátrixának lépcsős alakjáról, hogy az egyenletrendszernek hány megoldása van, és ha végtelen sok megoldás van, akkor mondjuk meg a szabad változók számát is.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & 9 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

4. Hozzuk lépcsős alakra a következő mátrixokat!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

5. Határozzuk meg az egyenletekkel megadott három sík metszetét!

a) $\begin{array}{lrcrcrcl} S_1: & x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ S_2: & 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ S_3: & x & + & 2y & - & 2z & = & 5 \end{array}$ b) $\begin{array}{lrcrcrcl} S_1: & x & + & y & - & 3z & = & 1 \\ S_2: & 2x & - & y & - & z & = & 0 \\ S_3: & & & 3y & - & 7z & = & 2 \end{array}$

6. Melyek vannak redukált lépcsős alakban a következő mátrixok közül? Adjuk is meg a megoldását az ezekhez tartozó egyenletrendszereknek!

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$

7. Lineárisan összefüggők-e a $\mathbf{a} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$ vektorok? Ha igen, adjuk meg egy olyan nem triviális lineáris kombinációjukat, amely $\mathbf{0}$.

8. Állítsuk elő a $\mathbf{v} = (1, 3, -1, 0)$ vektort az $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, -1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, -3, 4, 1)$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha ez lehetséges.

9. Az a és b paraméterek értékétől függően hány megoldása van a következő bővített mátrixszal megadott egyenletrendszernek?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3 \\ -1 & 1 & 1 & | & b \\ 0 & 2 & a & | & 1 \end{bmatrix}$$

További ajánlott feladatok: Példatár 20./17., 18., 19., 25., 62.
(http://www.math.bme.hu/algebra/a2/2009)

Megoldások:

1. A függvényt $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$ alakban írhatjuk, ahol közös nevezőre hozás és a számláló rendezése után az együtthatókra a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} A+D&=0\\ A+B+E&=6\\ A+B+C&=0\\ B+C&=-1\\ C&=1. \end{aligned}$$

Így az integrál $\int \frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{-x+7}{x^2+x+1}\,dx=\int \frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\,dx=\int \frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}+10\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx=$ $\ln|x|+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+5\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c.$

2. Ha a második egyenlet kétszeresét kivonjuk az elsőből, és az egyszeresét a harmadikból, csak két különböző egyenlet marad:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 3y & - & 7z & - & 3u & = & 1\\ x & - & y & + & z & + & 2u & = & 1 \end{array}$$

Itt z és u értékét szabadon választva, $y=\frac{1}{3}+\frac{7}{3}z+u$ és $x=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}z-u$.

3. Az a)-nak végtelen sok megoldása van két szabad változóval, b)-nek nincs megoldása, c)-nek egyetlen megoldása van.

4. Egy-egy lehetséges lépcsős alak:

a) $\begin{bmatrix}1&1&2&0\\0&-1&-5&1\\0&0&-2&0\end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

Az a)-nál $S_2\to S_2-2S_1$, $S_3\to S_3-S_1$ a sorműveletek, b)-nél $S_1\leftrightarrow S_2$, $S_3\to S_3-S_1$, $S_3\to S_3+2S_2$.

5. a) A $(2,\frac{11}{4},\frac{5}{4})$ pont.
   b) Az $S_2\to S_2-2S_1$, $S_3\to S_3+S_2$, $S_2\to -\frac{1}{3}S_2$, $S_1\to S_1-S_2$ sorműveletekkel a

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&-\frac{7}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk, amelyből $z=t$ szabadon választott érték mellett $y=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}t$ és $x=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t$, tehát a metszet egy egyenes, amelynek egyenlete $(x,y,z)=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},0)+t(\frac{2}{3},\frac{7}{3},1)$.

6. c) és d) redukált lépcsős alakú, a megoldások:

c) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ s \\ 2-3t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

7. Akkor összefüggők, ha a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

bővített mátrixú egyenletrendszernek van az $(x, y, z) = \mathbf{0}$-tól különböző megoldása. A megoldás $(x, y, z) = (t, -3t, t)$, tehát például $t = 1$-re $\mathbf{a} - 3\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, azaz a vektorok összefüggők.

8. A következő bővített mátrixszal leírható egyenletrendszert kell megoldani:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ennek egyetlen megoldása van: $(2, -1, -1)$, tehát $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

9. A mátrix elemi sorműveletekkel a következő alakra hozható:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1-a & b+2 \\ 0 & 0 & 3a-2 & -2b-3 \end{array}\right].$$

Ez mindenképpen lépcsős, de az alakja függ attól, hogy a $3a - 2$ és $-2b - 3$ elemek közül melyek 0-k. Így ha $a \neq \frac{2}{3}$, akkor egy megoldás van, ha $a = \frac{2}{3}$ és $b \neq -\frac{3}{2}$, akkor nincs megoldás, végül, ha $a = \frac{2}{3}$ és $b = -\frac{3}{2}$, akkor végtelen sok megoldás van.