

1. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mi az értéke a következő mátrixkifejezések közül azoknak, amelyek értelmezve vannak:

$$A + C, \quad AB, \quad A + B^T, \quad CD - 2D, \quad C^2, \quad AD - B, \quad D^T D?$$

2. Keressünk olyan 2×2 -es A mátrixot, amelyre

- a) $A^2 = 0$, de $A \neq 0$;
- b) $A^2 = I$, de $A \neq \pm I$.

3. Melyik mátrixok invertálhatók az alábbiak közül? Számítsuk ki ezek inverzét!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Legyen $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, és $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Oldjuk meg az $AX = B$ és a $BY = A$ mátrixegyenleteket (ha lehet)!

5. Hogyan változik az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ mátrix, ha balról megszorozzuk az

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve az} \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixszal? És ha jobbról szorzunk?

6. Egy mátrixot elemi mátrixnak nevezünk, ha az egységmátrixból egy elemi sorművelettel kapható meg. Mutassuk meg, hogy ha E egy elemi mátrix, akkor EA megkapható az A -ból azzal a sorművelettel, amellyel E származott I -ből (I az egységmátrix).
7. Mutassuk meg, hogy minden elemi mátrix invertálható, és az inverze is elemi mátrix.
8. Mutassuk meg, hogy A pontosan akkor invertálható, ha elemi mátrixok szorzatára bontható.