Feladatok az 5. gyakorlathoz

1. Legyen $\mathbf{A}$ $k \times k$-as mátrix, melynek determinánsa 2.
   $\det(\mathbf{A}^{-1}) = ?$, $\det(\mathbf{2A}^T) = ?$, $\det((\mathbf{2A})^{-1}) = ?$

2. Legyen $\det(\mathbf{A}) = -3$ és $\det(\mathbf{B} = 2$.
   $\det(\mathbf{AB}^{-1}) = ?$, $\det((\mathbf{AB})^{-1}) = ?$, $\det(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA}) = ?$

3. Lineáris transzformációk-e az alábbi leképezések?

   (a) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (b) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x - 3y \end{bmatrix}$

   (c) $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y + 1 \\ x - 3y - 1 \end{bmatrix}$

4. Adja meg a lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban ($\mathbf{R}^2$-ben $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{R}^3$-ben $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$)!

   (a) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (b) $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$.

   (c) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. Adja meg az adott lineáris transzformáció mátrixát a standard bázisban!

   (a) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ az $y = x$ egyenesre való tükrözés.

   (b) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ az $y = \sqrt{3}x$ egyenesre való merőleges vetítés.

   (c) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ az $y = z$ síkra való tükrözés.

   (d) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ az $y = 0$ síkra való merőleges vetítés.

   (e) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ az $y = 0$ síkra való merőleges vetítés eredményeként kapott vektor első és harmadik koordinátájából álló vektor.

   (f) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ a z-tengely körüli $\pi/6$-tal való forgatás.

   (g) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ az y-tengely körüli $\pi/6$-tal való forgatás.

   (h) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{ab}^T)\mathbf{x} = \mathbf{a}(\mathbf{bx})$, ahol $\mathbf{a} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

   (i) $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$, ahol $\mathbf{a} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

   (j) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ az origó körüli α szöggel való forgatás (előadáson volt).

   (k*) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre való tükrözés.

   (l*) $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ az x-tengellyel α szöget bezáró egyenesre való merőleges vetítés.
   Az utóbbi három feladat eredménye:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}.$$