Vizsgakérdések – Matematika A2b (1.0 változat) **I. év, II. félév, 2010/11**

A hivatkozások a segédlet la.0.56.pdf változatára, és a Thomas 3. kötetére vonatkoznak. ▶ = kötelező bizonyítás.

1. Egyenletrendszerek: • (Ismétlés: síkbeli egyenes, térbeli egyenes és térbeli sík egyenletei/egyenletrendszerei, hipersík (2.1–2.20)), • egyenletrendszer két modellje (sormodell: hipersíkok, oszlopmodell: lineáris kombinációk) • *lineáris egyenletrendszer* általános alakja, egyenletrendszer elemi átalakításai (2.28-29) ▶ az elemi átalakítások ekvivalens átalakítások (2.29) • *elemi sorműveletek* • *(redukált) lépcsős alak* ▶ mátrix (redukált) lépcsős alakra hozhatósága, *Gauss-módszer* (2.42), *Gauss–Jordan-módszer* ▶ redukált lépcsős alak egyértelmű (2.50) • szimultán egyenletrendszer megoldása

2. Megoldhatóság, a megoldások tere: • a főelemek oszlopai • *mátrix rangja* (3.4) • kötött és szabad változók száma ▶ az egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele (3.6, 3.7) • *altér*, *kifeszített altér* ▶ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak (3.9, 3.13) • inhomogén és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásainak kapcsolata (3.18) és az inhomogén megoldhatóságának oszlopteres feltétele (3.20) • lineáris függetlenség eldöntése (3.22) • elemi sorműveletek hatása a sor- és oszloptérre (3.24, 3.25) • bázis és ekvivalens definíciói (3.26, 3.29) • bázistétel • *dimenzió* ▶ dimenzió = rang ▶ dimenziótétel (3.37) ▶ sortér és nulltér merőlegessége (3.41) • kiegészítő altér • kiegészítő alterek tulajdonságai • a merőleges kiegészítő altér és tulajdonságai • a lineáris algebra alaptétele • a négy alapvető altér ▶ a lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése (3.46) • a sortérbe eső megoldás meghatározása

3. Mátrixműveletek: • *mátrixműveletek* • mátrixszorzatos alakok (vektorok skaláris és diadikus szorzata, lineáris egyenletrendszer, szimultán egyenletrendszer, lineáris helyettesítés) • mátrixszorzás és lineáris kombináció, szorzás standard egységvektorral • áttérés mátrixa • koordináták változása báziscserénél • egységmátrix, elemi mátrixok, elemi sorműveletek előállítása mátrixszorzással • blokkmátrixok, vektorokra particionált mátrixok, a mátrixszorzat kifejezése sor- és oszlopvektorokkal • műveleti azonosságok (5.1-5.8) ▶ a mátrixszorzás asszociativitásának bizonyítása ▶ inverz egyértelműsége (5.14) • inverz létezéséhez elég az egyik feltétel, inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel, inverz tulajdonságai ▶ szorzat inverze (5.18 *c)*) • az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága • invertálhatóság, bázis, báziscsere (5.24, 5.25) • diagonális és permutációs mátrixok, permutációs mátrix inverze, kígyók, háromszögmátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok, az ezek közti műveletek, mátrix fölbontása szimmetrikus és ferdén szimmetrikus összegére, $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ szimmetrikus • LU-felbontás, egyenletrendszer megoldása, mátrix invertálása LU-felbontással, LU- és PLU-felbontás előállítása

4. Determináns: • vektorok által kifeszített parallelogramma előjeles területe, ill. paralelepipedon előjeles térfogata • *determináns* ▶ sorműveletek hatása determinánson • elemi mátrixok, permutációs és háromszögmátrixok determinánsa • determináns értékének kiszámítása • műveletek determinánsokon, determinánsok szorzásszabálya • 0 értékű determináns (6.12) • egyenletrendszer megoldhatósága és a determináns • determináns, mint kígyók determinánsainak összege (Sarrus-szabály) • permutációs mátrix determinánsa • előjeles aldetermináns, determináns rendjének csökkentése, kifejtési tétel • Cramer szabály és mátrix inverzének elemei (inverz előállítása előjeles aldeterminánsokkal) ▶ *Vandermonde-determináns* értékének kiszámítása

5. Lineáris leképezések: • a vektori szorzással definiált mátrixleképezés mátrixa • mátrixleképezések és tulajdonságaik (7.2-7.4) • lineáris leképezés, példák (differenciál-operátor, határozott integrál), • lineáris leképezés alaptulajdonságai, mátrixa különböző bázisokban • *hasonlóság* • tartomány mértékének változása lineáris transzformációban • $\mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^m$ függvények differenciálhatósága, Jacobi-mátrixa, és annak kiszámítása • láncszabály • forgatás, tükrözés, vetítés mátrixának felírása (7.25, 7.26, 7.27, 7.30, 7.31, 7.32, 7.34, 7.37, 7.38, 7.39) ▶ legjobb közelítés tétele (7.41) • egyenletrendszer optimális megoldása (7.42) • lineáris regresszió

6. Sajátérték, sajátvektor: • *sajátérték, sajátvektor, sajátaltér* ▶ sajátvektorok alterei (8.4, 8.5) • *karakterisztikus egyenlet/polinom* és annak gyökei, algebrai és geometriai multiplicitása • speciális mátrixok sajátértékei (8.16 *a), b)*) • háromszögmátrix sajátértékei, $\det(\mathbf{A})$ kiszámítása sajátértékekkel ▶ mátrix invertálhatósága és a 0 sajátérték • mátrix hatványainak sajátértékei, mátrix hatványainak hatása sajátvektorok lineáris kombinációján • lineáris leképezés sajátértékei, sajátvektorai ▶ sajátértékhez kapcsolódó invariánsok • hasonlóság, diagonalizálhatóság ▶ diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele • különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lin. függetlensége • diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás • valós spektráltétel

7. Parciális deriváltak (Thomas 14.): • *többváltozós* függvények • tartomány belső és határpontja, nyílt, zárt, korlátos tartomány • szintvonal, szintfelület • kétváltozós függvény határértéke és folytonossága (14.2) • két-út vizsgálat határérték nemlétezésének igazolására • összetett függvény folytonossága • *parciális derivált* (14.3) • a parciális derivált létezéséből nem következik a függvény folytonossága (8P) • magasabbrendű parciális deriváltak • vegyes parciális deriváltak egyezése (2T) • kétváltozós függvény deriváltja (281.o) • függvény diffhatóságának elégséges feltétele (3T és következménye) ▶ a diffhatóságból következik a folytonosság (281.o) • láncszabály (5T, 6T, 7T), implicit differenciálás (8T) • *iránymenti derivált* ▶ iránymenti derivált kiszámítása (9T) ▶ az iránymenti derivált tulajdonságai (max, min, nulla változás irányai) • *érintősík*, normálegyenes, érintősík egyenlete • *linearizáció* (303.o) • *teljes differenciál*

8. Szélsőérték (Thomas 14.7): • helyi max/min • parciális deriváltak viselkedése szélsőértékhelyen • kritikus pont, nyeregpont • szélsőérték keresése második deriváltakkal (11T) • absz. szélsőérték korlátos zárt tartományon

9. Taylor-formula: • Taylor-polinom (120.o), Taylor-formula (123.o 22T) • kétváltozós Taylor-formula (336–337.o)

10. Többes integrál: • *kettősintegrál* téglalaptartomány (351-352.o) és nem téglalaptartomány felett (347-348.o) • kettősintegrál kiszámítása kétszeres integrállal téglalaptartományon (Fubini-tétel: 1T) és nem téglalaptartományon (Fubini-tétel erősebb alak: 2T) • kettősintegrál határainak felírása • kettősintegrál polárkoordinátákkal ▶ körcikk területe és az r szereplése az $\iint f(r,\theta) r \, dr \, d\theta$ képletben (371.o) • hármasintegrál (15.4) • hármasintegrál henger és gömbi koordinátarendszerben (15.6) • helyettesítés többes integráloknál, Jacobi-determináns (403.o)