**1. MAT A2 vizsga. 2011-05-24** Neptun: _ _ _ _ _ _ Név: ____________________

**1.** Egészítsük ki az alábbi állításokat, hogy igazak legyenek! *(18 pont)*

*a)* A differenciálható $f(x,y,z)$ függvény $P_0$ pontbeli, $\mathbf{grad}\, f(P_0)$ irányú iránymenti deriváltjának értéke egyenlő...

*b)* Minden négyzetes ...
mátrix sajátértékei valós számok és sajátvektoraira igaz, hogy...

*c)* A kétváltozós $f$ függvény másodrendű parciális deriváltjaira vonatkozó $f_{xy}(P_0) = f_{yx}(P_0)$ egyenlőség fennállásának elégséges feltétele, hogy ...

*d)* Permutációs mátrix inverze:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

*e)* Az $n \times n$-es valós mátrix determinánsán definíció szerint olyan függvényt értünk, mely:

*f)* A homogén lineáris $\mathbf{A}_{n\times n}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek pontosan akkor van nemtriviális megoldása, ha $\det(\mathbf{A}) \ldots\ 0$, ami azzal ekvivalens, hogy $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) \ldots\ n$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közt a lineárisan függetlenek száma ...

*g)* A gömbi $(\rho, \phi, \theta)$ koordinátákra való áttérés Jacobi mátrixa:

*h)* Ha egy $A\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ lineáris leképezés képtere 2-dimenziós, akkor magtere ... -dimenziós.

*i)* Tegyük fel, hogy az $(x_0, y_0)$ pont olyan, hogy tetszőleges $\delta > 0$ esetén van olyan $(x,y)$ pont, ami az $f$ kétváltozós függvény értelmezési tartományához tartozik, és $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$. Azt mondjuk, hogy az $f$ függvénynek az $(x_0, y_0)$ pontban van határértéke és az $L$, ha .................. van olyan ............, hogy $f$ értelmezési tartományának minden olyan $(x,y)$ pontjára, amire
...
fennáll, hogy
...

*j)* Tekintsük az $x = y = z$ egyenletrendszerű egyenes körüli $\pi$ szöggel való forgatás geometriai transzformációját. E lineáris leképezés képterének dimenziója ... , magterének dimenziója .... . E leképezés sajátértékei: ...
A leképezés sajátaltereit megadó egyenlet(rendszer)ek:

**2.** Cseréljük meg az integrálás sorrendjét az alábbi integrálban! *(3 pont)*

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

**3.** Számítsuk ki az alábbi integrált polárkoordinátákra áttérve: *(6 pont)*

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**4.** Adjuk meg az alábbi két pont henger és gömbi koordinátáit ($\theta$ azonos szöget jelöl mindkét koordinátarendszerben)! *(4 pont)*

| Derékszögű koordináták: | $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ | $(-1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ |
|---|---|---|
| henger $(r, \theta, z)$: | | |
| gömbi $(\rho, \phi, \theta)$: | | |

**5.** Az alábbi $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ vektorrendszer az $\mathbf{R}^4$ két alterének bázisa. Döntsük el, hogy melyik igaz az alábbi három lehetőség közül: $\mathbf{R}^4 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, $\mathbf{R}^4 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathbf{0}\}$. *(6 pont)*

*a)* $\mathcal{A} = \{(0,0,1,1), ((1,1,0,0)\}$,
$\mathcal{B} = \{(0,0,0,1), (0,0,1,0), (1,2,0,0)\}$,
*b)* $\mathcal{A} = \{(1,1,1,1), ((1,-1,0,0)\}$,
$\mathcal{B} = \{(0,0,1,-1), (1,1,-1,-1)\}$

| | *a)* | *b)* |
|---|---|---|
| $\mathbf{R}^4 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ | | |
| $\mathbf{R}^4 = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ | | |
| $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathbf{0}\}$ | | |

**6.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ nem invertálható, akkor a 0 sajátértéke. Igaz-e az állítás megfordítása? *(3 pont)*

**7.** Tekintsük az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

*a)* Mennyi az $\mathbf{A}$ oszlopterének dimenziója?
*b)* Mi a $\mathbf{b}$ vektornak az oszloptérre eső merőleges vetülete?
*c)* Ennek alapján az $\mathbf{x} = (1,-1,0)$ vektor optimális megoldás-e? *(6 pont)*

**8.** Mondjuk ki és igazoljuk a mátrix inverzének egyértelműségére vonatkozó tételt! *(4 pont)*

**9.** Írjuk fel az alábbi $\mathbf{f}$ és $\mathbf{g}$ függvények deriváltleképezéseinek mátrixát, majd írjuk föl az $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ deriváltjának mátrixát az $(x, y) = (1, 1)$ pontban a láncszabályt alkalmazva. *(4 pont)*

$$\mathbf{f}(u, v) = (uv^2, u - v), \quad \mathbf{g}(x, y) = (x - 1, x + y)$$

**10.** Adjunk meg olyan bázist, amelyben az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & 8 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix diagonális, és adjuk meg a diagonális alakot! Ezt fölhasználva számítsuk ki az $\mathbf{A}^{2011}$ hatványt! *(6 pont)*