MAT A2 – 1. ZH. – 2007. március 30. Név: ______________________ Gyakvez.: ______

1. Határozzuk meg az alábbi értékeket! *(14 pont)*

a) Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ egy 9×9-es mátrix, előjeles aldeterminánsait jelölje A_{ij}. Ekkor
$a_{41}A_{91} + a_{42}A_{92} + \cdots + a_{49}A_{99} =$

b) $a_{41}A_{41} + a_{42}A_{42} + \cdots + a_{49}A_{49} =$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^4 =$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} =$

f) Ha $\mathbf{A}_{n\times n}$ sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor
$\det(\mathbf{A}) =$

g) Ha sz $\mathbf{A}$ egy $n \times m$-es mátrix, és oszlopterének dimenziója d, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszerben a szabad változók száma =

h) Az $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei:

i) Az $x + y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés sajátvektorai:

j) A sík origó körüli $\pi/6$ radiánnal való elforgatásának mátrixa =

k) A Cramer-szabály szerint a

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ -4x + 3y &= -7 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása:

2. Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két $n \times n$-es mátrix. Melyik igaz és melyik hamis a következő állítások közül? Amelyik hamis, oda írjunk egy olyan feltételt, mely igazzá teszi! *(5 pont)*

a) Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, akkor megoldható bármely más n-dimenziós $\mathbf{b}$ vektor esetén is. ☐

b) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásainak halmaza altér $\mathbf{R}^n$-ben. ☐

c) Ha $\mathbf{CA} = \mathbf{CB}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. ☐

d) Ha $\det \mathbf{A} = 0$, akkor $\operatorname{rang} \mathbf{A} < n$. ☐

e) Ha $\det \mathbf{A} \neq 0$, akkor 0 nem lehet az $\mathbf{A}$ sajátértéke. ☐

3. Tömören igazolja az alábbi állításokat: *(2+2 pont)*

a) Egy lineárisan független vektorrendszer bármely nemüres részhalmaza lineárisan független.

b) ha az A mátrixnak sajátértéke λ, és egy λ-hoz tartozó sajátvektora $\mathbf{x}$, akkor az A^2 mátrixnak sajátértéke λ^2, és $\mathbf{x}$ egy ehhez tartozó sajátvektora.

4. Írjuk fel a 4-dimenziós tér $x - y + 2z + 3w = 0$ egyenlettel megadott alterének egy bázisát! *(4 pont)*

5. Adja meg a $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ lineáris transzformáció mátrixát, ahol $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. *(4 pont)*

6. Válasszunk ki a 4-dimenziós $(1,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(0,1,1,0)$, $(1,0,1,1)$ vektorok közül maximális számú lineárisan függetlent, és állítsuk elő a többit ezek lineáris kombinációjaként. *(5 pont)*

7. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerben nem ismerjük a $\mathbf{b}$ vektort, de tudjuk, hogy az egyenletrendszer egyik megoldása $\mathbf{x} = (1,1,1,1)$. Határozzuk meg az összes megoldását! *(5 pont)*

8. Az alábbi egyenletrendszernek az a és b valós paraméterek mely értékei mellett (a) nincs megoldása; (b) van egyértelmű megoldása; (c) van végtelen sok megoldása? *(4 pont)*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + ax_3 &= b \end{aligned}$$

9. Az x milyen (valós vagy komplex) értékei mellett lesz az alábbi mátrix invertálható? Ha $x = 0$, akkor számítsuk is ki az inverzét! *(5 pont)*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & -1 \\ x^3 & 1 & x & x^2 \\ -3 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$