

1. Az  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  mátrixnak sajátvektorai  $(3, 1)$  és  $(1, -1)$ . Adjunk meg olyan  $T$  mátrixot, amellyel  $T^{-1}AT = D$  diagonális. Mi ekkor  $D$ ? (5 pont)
2. Adjuk meg az  $f : (x, y) \mapsto (x, 2x - y)$  transzformáció mátrixát az  $\{(1, -1), (1, 0)\}$  bázisban. (8 pont)
3. Egy szobában a hőmérséklet Celsius fokban kifejezve jó közelítéssel  $20 + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{9x}$ . Az  $(1, 1, 1)$  pontban milyen irányban csökken a hőmérséklet a leggyorsabban, és mennyi ebben az irányban a csökkenés sebessége? (6 pont)
4. Tegyük fel, hogy az  $w = f(x, y, z)$  függvény értelmezve van és differenciálható az  $(1, 0, 0)$  pontot belsejében tartalmazó valamely tartományon, és  $\nabla f(1, 0, 0) = (3, 1, 5)$ . Tekintsük az  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$  egyenletekkel megadott görbét. Határozzuk meg a  $\frac{\partial w}{\partial t}$  deriváltat a  $t = 0$  helyen! (5 pont)
5. Egy  $f$  függvény első és második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak egy tartományon, melynek egy belső pontjában értékei  $f_x = f_y = f_z = 0$ ,  $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = -1$ ,  $f_{xy} = f_{yz} = a$ ,  $f_{xz} = 0$ . Az  $a$  paraméter milyen értékei mellett lesz e függvénynek az adott helyen biztosan maximuma? (5 pont)
6. Mutassuk meg, hogy a  $(0, 0)$  pontban nincs limesze a  $\frac{\sin^2 x}{x^2 + y^2}$  függvénynek. (5 pont)
7. Határozzuk meg az integrálás határait, ha főlcseréljük az integrálás sorrendjét az  $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx dy$  integrálban. (8 pont)
8. Számítsuk ki az  $f(x, y, z) = 1 + y$  függvény integrálját azon a háromszög alapú hasáb tartományon, melynek alapja az  $xy$ -síkon a  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  csúcú háromszög, alkotói párhuzamosak a  $z$  tengellyel, és amelyet alulról a  $z = 0$ , felülről a  $z = 1$  egyenletű sík határol. (Először  $z$  szerint integráljunk, majd válasszuk meg az  $x$  és  $y$  szerinti integrálás sorrendjét!) (8 pont)