Bevezetés az algebrai kombinatorikába

Küronya Alex Hegedüs Gábor

2003. szeptember 26.

Ez a jegyzet az első szerzőnek a 2002/03-as tanév során a BMGE TTK Matematikai Intézetében a doktori iskola számára tartott előadásainak anyagát tartalmazza.

1. fejezet

A Young-tabló és kombinatorikája

1.1. Young-tablók és alapvető műveleteik

1.1. Definíció. *Egy n* dobozt tartalmazó D Young-diagram *az n szám egy*

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m) \ ,$$

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = n$$

partíciója.

A D Young-diagramot úgy is leírhatjuk, mint cellák egy balra igazított sorokba rendezett halmazát, oly módon, hogy a cellák száma sorról-sorra fogy.

1.2. Megjegyzés. *Számsorozatok növekvő-csökkenő voltának leírása során az alábbi konvencióhoz fogjuk tartani magunkat: egy*

$$a_1, \ldots, a_m, \ldots$$

sorozat növekvő*, ha*

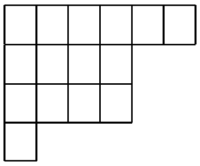
$$a_1 \leq \cdots \leq a_m \leq \ldots \ ,$$

szigorúan növekvő*, ha*

$$a_1 < \cdots < a_m < \ldots \ .$$

Ezzel konzisztens módon kezeljük a csökkenő sorozatokat is.

1.3. Példa. *Az alábbi egy* 15 *dobozt tartalmazó Young-diagram.*



1. Jelölés. $\lambda \mapsto n$ *vagy* $|\lambda| = n$: λ *az* n *szám partíciója.*

1.4. Definíció. *Legyenek* μ,λ *partíciók. Azt mondjuk, hogy* μ része λ-nak *(jelben:* $\mu \subseteq \lambda$*), ha* $\mu = (\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k)$ *és* $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_l)$ *esetén minden* $1 \leq i \leq k$*-ra*

$$\mu_i \leq \lambda_i \ .$$

A Young-diagramok dobozaiba természetes számokat fogunk írni. A természetes számok tulajdonságaiból keveset fogunk ténylegesen felhasználni, tetszőleges megszámlálható jólrendezett halmaz megfelelne céljainknak, sőt, az esetek döntő többségében egy elég nagy véges halmaz is megteszi.

A számokat úgy helyezzük el a diagramban, hogy minden dobozban pontosan egy legyen, különböző dobozokban lehetnek azonos számok. Egy ilyen elhelyezést a Young-diagram egy *kitöltés*ének hívunk. Amennyiben mégis megköveteljük, hogy különböző dobozokban különböző számok legyenek, a kitöltést *számozás*nak nevezzük.

1.5. Definíció. *Legyen* D *egy Young-diagram.* D *egy* T *kitöltését* Young-tabló*nak vagy röviden tablónak nevezzük, ha minden sor elemei balról jobbra növekvőek és minden oszlop elemei fentről lefelé szigorúan növekvőek. A* D *diagramnak megfelelő* λ *partíciót a* T *tabló* alakjának *hívjuk.*

1.6. Példa.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 5 & 6 \\ \cline{1-4} 3 & 5 & 6 \\ \cline{1-3} 7 & 7 & 7 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

Egy n-dobozú T tablót *standard*nek nevezünk, ha celláit az $1, \ldots, n$ elemekkel számozzuk meg, mindegyiket pontosan egyszer felhasználva.

A tablók segítségével egy partícióhoz minden m természetes számra hozzá fogunk rendelni egy m-változós polinomot, az $s_\lambda(x_1, \ldots, x_m)$ ún. *Schur-polinom*ot.

1.7. Definíció. *Legyen λ az n szám egy partíciója, D a neki megfelelő Young-diagram. A D tetszőleges T Young-tabló kitöltéséhez hozzárendeljük a*

$$x^T \stackrel{def}{=} \prod_{i=1}^{m} x_i^{\text{az } i \text{ elem előfordulásainak a száma } T\text{-ben}}$$

monomot. Az s_λ Schur-polinom ezek összege, azaz

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \stackrel{def}{=} \sum_{T \text{ tabló } D\text{-n}} x^T \ .$$

1.8. Megjegyzés. *A definícióból nem látszik azonnal, de a szimmetrikus függvényekről szóló részben bebizonyítjuk, hogy a Schur-polinomok szimmetrikusak, azaz a változók tetszőleges permutációja változatlanul hagyja őket.*

1.9. Példa. *Tekintsük először a $\lambda = (3)$ partíciót, a neki megfelelő*

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \; & \; & \; \\ \hline\end{array}$$

diagrammal. A kétváltozós $s_{(3)}(x_1, x_2)$ Schur-polinomot fogjuk kiszámolni. A lehetséges tablószerű kitöltések:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 2 \\ \hline\end{array}$$

Ezért a keresett Schur-polinom:

$$s_{(3)}(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \ .$$

1.10. Példa. *Legyen $\lambda = (1, 1, 1)$. Először határozzuk meg az $s_\lambda(x_1, x_2, x_3)$ háromváltozós Schur-polinomot. A*

$$\begin{array}{|c|}\hline \; \\ \hline \; \\ \hline \; \\ \hline\end{array} \tag{1.5}$$

diagramot egyféleképpen lehet az $1, 2, 3$ elemekkel Young-tablóként kitölteni:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \; .$$

Ezért a megfelelő Schur-polinom egyetlen monomból áll

$$s_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \; .$$

Számítsuk most ki az ugyanehhez a partícióhoz tartozó négyváltozós Schur-polinomot. A 1.5 diagram lehetséges kitöltései az $1, 2, 3, 4$ elemekkel:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \; .$$

Így

$$\begin{aligned} s_{(1,1,1)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 \\ &+ x_2 x_3 x_4 \; . \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $s_{(1,1,1)}(x_1, x_2) = 0$. Általában is igaz, hogy ha λ sorainak száma nagyobb, mint m, akkor

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) = 0 \; .$$

1.11. Példa. *A fenti példák általánosításaként látható, hogy ha $\lambda = (p)$, $p \geq 1$ egész, akkor*

$$s_{(p)}(x_1, \ldots, x_m) = h_p(x_1, \ldots, x_m)$$

ahol h_p a p-edfokú teljes szimmetrikus polinom. Hasonlóképpen amennyiben

$$\lambda = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{p\text{-szer}}) \; ,$$

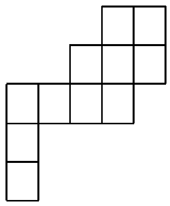
akkor

$$s_{(1,\ldots,1)} = \begin{cases} e_p(x_1, \ldots, x_m) & \text{ha } p \leq m \\ 0 & \text{ha } p > m, \end{cases}$$

ahol e_p a p-edfokú elemi szimmetrikus polinom.

1.12. Definíció. *Legyenek $\mu \subseteq \lambda$ partíciók. A λ/μ-alakú F* ferde diagram *λ azon kockáiból áll, amelyek nincsenek benne μ-ben. Ferde diagramok kitöltését, illetve számozását a tabóknál látott módon definiáljuk, az így kitöltött diagramot* ferde tabló*nak hívjuk.*

1.13. Példa. *Legyen $\lambda = (5, 5, 4, 1, 1), \mu = (3, 2)$. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mu \subseteq \lambda$, a λ/μ alakú diagram pedig a következőképpen néz ki:*



A diagram egy tablószerű kitöltésére egy példa az alábbi ferde tabló.

			1	*2*
		3	*4*	*5*
1	*2*	*4*	*5*	
2				
3				

A tablókon műveleteket fogunk értelmezni. Elsőként a Schenstedtől származó ún. sorbaillesztéssel ismerkedünk meg.

1.14. Definíció. *Legyen T λ alakú tabló, x természetes szám. Ezekből egy új $T \leftarrow x$ tablót fogunk előállítani, amelyben eggyel több doboz van, mint T-ben (speciálisan $T \subseteq T \leftarrow x$) és az új tabló elemei T elemei x-szel kiegészítve. Az algoritmus a következő:*

1. *Ha x nagyobb vagy egyenlő, mint az első sor összes eleme, akkor egy új dobozt rakunk az első sor végére, beleírjuk az x elemet és készen vagyunk.*

2. *Ha van x-nél nagyobb elem az első sorban, akkor megkeressük ezek között a legbaloldalibbat, kicseréljük x-re (ezt a műveletet kiütésnek nevezzük) , majd a kieső elemet beillesztjük a tabló ba második sortöl kezdve.*

Természetesen be kell látnunk, hogy az eredményül kapott objektum szintén tabló. Előbb azonban lássunk egy példát.

1.15. Példa. *Legyen* $\lambda = (4,4,3,2)$, $x = 2$ *és*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3\\ \hline 2&3&5&5\\ \hline 4&4&6\\ \cline{1-3} 5&6\\ \cline{1-2}\end{array}$$

A végrehajtandó művelet tehát

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3\\ \hline 2&3&5&5\\ \hline 4&4&6\\ \cline{1-3} 5&6\\ \cline{1-2}\end{array} \leftarrow 2$$

Az első sorban van a beillesztendő 2*-nél nagyobb elem, ezért az algoritmus szerint közülük a legbaloldalibbat, a* 3*-ast kicseréljük a* 2*-esre:*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&\mathbf{2}\\ \hline 2&3&5&5\\ \hline 4&4&6\\ \cline{1-3} 5&6\\ \cline{1-2}\end{array}$$

majd a kezünkben maradó 3*-ast beillesztjük a második sortól kezdve. Innentől a lépések az alábbi módon alakulnak:*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&2\\ \hline 2&3&\mathbf{3}&5\\ \hline 4&4&6\\ \cline{1-3} 5&6\\ \cline{1-2}\end{array} \leftarrow 5$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&2\\ \hline 2&3&3&5\\ \hline 4&4&\mathbf{5}\\ \cline{1-3} 5&6\\ \cline{1-2}\end{array} \leftarrow 6$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&2\\ \hline 2&3&3&5\\ \hline 4&4&5\\ \cline{1-3} 5&6&\mathbf{6}\\ \cline{1-3}\end{array}$$

Az új doboz az utolsó sor végére került.

1.16. Állítás. *Az algoritmus eredményeként kapott $T \leftarrow x$ szintén tabló.*

Bizonyítás: Először is, az algoritmus alapján minden sor növekvő. Másodszor, amikor egy y elem kiüt egy z elemet valamelyik sorból, akkor a z alatt lévő x elemre (amennyiben van ilyen) $x > z$. Ezért z vagy ugyanabba az oszlopba kerül, mint ahol volt, vagy attól balra, így a felette lévő u elemre $u \leq y < z$. Látható, hogy az oszlopok továbbra is szigorúan növekvőek maradnak. Ebből az is következik, hogy a sorok hosszai fogyóak lesznek. □

A sorbaillesztés bizonyos értelemben megfordítható: ha adott az új cella helye, akkor vissza tudjuk állítani az eredeti tablót és meg tudjuk határozni az újonnan beillesztett elemet.

1.17. Állítás. *Legyen $T' = T \leftarrow x$, ahol T, x a priori nem ismert, csak B, az új doboz. Ekkor T, x meghatározható.*

Bizonyítás: Ha B az első sor végén van, akkor nem történt kiütés, x a B-ben lévő elem és T a T'-ből a B-t tartalmazó doboz eltávolításával nyert tabló.

Amennyiben B nem az első sor végén van, keressük meg a B-t tartalmazó sort meg előző sorban a legjobboldali, a B-beli elemnél kisebb z elemet. Tegyük B tartalmát z helyére majd ismételjük meg ezt az eljárást mindaddig, amíg az első sorba nem érünk. Az onnan kieső elem lesz x az eredményül kapott tabló pedig T. □

Vizsgáljuk meg, mi történik, ha két sorbaillesztést hajtunk végre egymás után. Későbbiekben hasznos lesz tudnunk az új dobozok egymáshoz viszonyított helyzetét. Ennek leírásához szükségünk lesz az alábbi fogalmakra. Legyen T tetszőleges tabló, x egy elem, amit beszúrunk T-be.

Kiütési útvonal Azon dobozok halmaza, amelyekből kiütöttünk elemet és az új doboz. A kiütési útvonalakat tipikusan R, R'-vel fogjuk jelölni.

Az R kiütési útvonal (szigorúan) balra van R'-től Minden olyan sorban, ahol R'-nek van doboza, R-nek is van és az R' azonos sorbeli dobozával vagy megegyezik, vagy attól balra van. A szigorú esetben nem egyezhetnek meg.

1.18. Példa. *Az ábrán két lehetséges kiütési útvonalat mutatunk. Az R_i útvonal szigorúan balra van az R_i' kiütési útvonaltól.*

				R_1	R_1'
			R_2		R_2'
			R_3		R_3'
		R_4			
	R_5				
R_6					

1.19. Megjegyzés. *Egy kiütési útvonal az első sorban kezdődik és egymás utásni sorokban van egy-egy cellája. Utolsó (legalsó) doboza egy külső sarok, az új doboz.*

1.20. Lemma (Sorbaillesztési lemma). *Legyen T tabló, x, x' természetes számok, amelyeket a*

$$(T \leftarrow x) \leftarrow x'$$

sorrendben illesztünk be T-be. Jelöljük a megfelelő kiütési útvonalakat és új dobozokat R, B-vel, illetve R', B'-vel. Ekkor

ha $x \leq x'$, *akkor R szigorúna balra van R'-től, B szigorúan balra és (nem feltétlenül szigorúan) lefelé van B'-től;*

ha $x > x'$, *akkor R' balra van R-től, B' balra és szigorúan lefelé B-től.*

Bizonyítás: Kövessük nyomon, hogy mi történik sorról sorra. $\square$

1.21. Következmény. *Legyen T λ alakú tabló,*

$$U = (\dots(T \leftarrow x_1) \leftarrow \dots \leftarrow x_{p-1}) \leftarrow x_p \ ,$$

U alakja μ.

Ha $x_1 \leq \dots \leq x_p$ *akkor μ/λ semelyik két doboza nincs egy oszlopban;*

ha $x_1 > \dots > x_p$ *akkor μ/λ semelyik két doboza nincs egy sorban.*

Megfordítva, ha U egy μ alakú tabló, $\mu \supseteq \lambda$, akkor

ha μ/λ p dobozból áll, mind különböző oszlopban *akkor létezik olyan λ alakú T tabló és $x_1 \leq \cdots \leq x_p$, amelyekre*

$$U = (\ldots (T \leftarrow x_1) \leftarrow \cdots \leftarrow x_{p-1}) \leftarrow x_p \ ;$$

ha μ/λ p dobozból áll, mind különböző sorban *akkor létezik olyan λ alakú T tabló és $x_1 > \cdots > x_p$, amelyekre*

$$U = (\ldots (T \leftarrow x_1) \leftarrow \cdots \leftarrow x_{p-1}) \leftarrow x_p \ .$$

Bizonyítás: Az első két állítás a sorbaillesztési lemma ismételt alkalmazásából adódik. A megfordításaikat a következőképpen láthatjuk be: ha μ/λ bármely két doboza különböző oszlopban van, vegyük a legjobboldalibb dobozt. Végezzünk el erre a dobozra egy inverz sorbaillesztést, a végén kieső elem legyen x_p. Ezután a maradék $p-1$ doboz közül vegyük a legjobboldalibbat, ismételjük meg az imént iműveletet és így tovább. A p-edik lépés utáni eredmény lesz a T tabló és a sorbaillesztési lemma miatt $x_1 \leq \cdots \leq x_p$. A sorokra vonatkozó állítás teljesen analóg módon igazolható. $\square$

1.22. Definíció (Tablók szorzata). *Legyenek T, U tablók, $x_1, \ldots, x_s$ az U tabló elemei soronként balról jobbra felsorolva, az utolsó sorral kezdve, majd lentről felfelé haladva. Ekkor a két tabló szorzata*

$$T \cdot U \stackrel{def}{=} (\ldots (T \leftarrow x_1) \leftarrow \cdots \leftarrow x_{s-1}) \leftarrow x_s \ .$$

A tablók szorzata alapvető fontosságú lesz a következőkben. Amint azt hamarosan látni fogjuk, a tablószorzás *nem kommutatív.*

1.23. Példa. *Legyen*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & \\ \cline{1-2} \end{array}$$

$$U = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Most lépésről lépésre összeszorozzuk a két tablót:

$$
\begin{aligned}
\begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{ytableau} \cdot \begin{ytableau} 1 & 3 \\ \mathbf{2} \end{ytableau}
&= \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{ytableau} \cdot \begin{ytableau} 1 & \mathbf{3} \end{ytableau} \\
&= \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau} \cdot \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \\
&= \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}
\end{aligned}
$$

1.24. Példa. *Legyen*

$$U = \begin{ytableau} 1 & 2 \end{ytableau}$$

és

$$T = \begin{ytableau} 3 \\ 4 \end{ytableau}.$$

Ekkor

$$U \cdot T = \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 \end{ytableau},$$

azonban

$$T \cdot U = \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau},$$

vagyis $U \cdot T \neq T \cdot U$.

1.25. Tétel. *A fenti szorzással a tablók halmaza egy monoid lesz az üres (nulla dobozú) tablóval mint egységelemmel.*

Bizonyítás: Láttuk, hogy a tablók halmaza zárt a szorzásra nézve, az is könnyen igazolható, hogy az üres tabló a szorzásra nézve egységként viselkedik. Az egyetlen kérdés a szorzás asszociativitása. Ennek bizonyításához további eszközökre lesz szükségünk, ezért későbbre halasztjuk. □

Most megismerkedünk egy ferde tablókon értelmezett művelettel, a Schützenbergertől származó ún. csúsztatással. Ezt is fel lehet használni tablók szorzatának definiálására.

Legyenek $\lambda \subseteq \mu$ partíciók, μ nem üres. Egy λ/μ alakú S ferde tablónak van egy vagy több *belső sarka*, azaz olyan doboza, amely μ-ben van, de az alatta és tőle jobbra lévő kockák már nincsenek μ-ben. Vegyük észre, hogy az S ferde tabló egy belső sarka nincs benne S-ben.

Csúsztatás Legyen S mint fent egy ferde tabló, B egy belső sarka. Tekintsük B jobb oldali, illetve alsó szomszédját. Tegyük át B-be a két elem közül a kisebbet, egyenlőség esetén az alsót. Az újonnan üresen maradt mezőre ismételjük meg a fenti eljárást egészen addig, amíg egy külső sarokhoz nem érünk. Ekkor az üres dobozt eltávolítjuk.

1.26. Példa. *Tekintsük a*

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$$

ferde tablót és annak egyetlen belső sarkát (a külső λ diagram bal felső sarkát). Ezt fogjuk csúsztatással eltávolítani.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 2 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 3 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 3 & & 6 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \cline{1-3} 5 & \\ \cline{1-2}\end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 5 & 6 \\ \cline{1-3} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

1.27. Állítás. *Egy csúsztatás eredménye szintén ferde tabló.*

Bizonyítás: Mivel az S ferde tablóhoz egy külső sarkot távolítottunk el és egy belső sarkot adtunk hozzá, a kapott objektum alakja továbbra is ferde diagram. Azt, hogy a kitöltés tablószerű marad, lépésenként fogjuk ellenőrizni. Tekintsünk egy elemi csúsztatási lépést, ahol az S tablónak az üres mezőt körülvevő része az alábbi:

$$\begin{array}{ccc}\cline{2-3} & \multicolumn{1}{|c|}{b} & \multicolumn{1}{c|}{v} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{a} & & \multicolumn{1}{c|}{y} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{u} & \multicolumn{1}{c|}{x} & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

Két eset van, aszerint, hogy lefelé, vagy jobbra csúsztatjuk el az üres mezőt. Ha $x \leq y$, azaz az üres mező lefelé mozog, akkor az eredmény

	b	v
a	x	y
u		

(1.20)

Ellenőrizendő, hogy $a \leq x \leq y$. A 1.20 ferde tablórészlet tablótulajdonsága miatt $a < u \leq x$, így $a \leq x$ és $x \leq y$.

Amennyiben $x > y$, akkor az üres kockát jobbra csúsztatjuk.

	b	v
a	y	
u	x	

A tablótulajdonság meglétéhez annyit kell belátnunk, hogy $b < y < x$. Ebből $y < x$ már adott, 1.20 tabló voltából pedig $b \leq v < y$ következik. □

1.28. Megjegyzés. *A Schützenberger-féle csúsztatás is megfordítható, azaz ha ismerjük az eltávolított cella helyét, vissza tudjuk állítani a kiindulási állapotot és a kezdetben választott belső sarkot.*

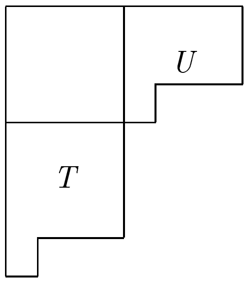
A csúsztatást megismételve újabb és újabb belső sarkokra, végeredményül egy tablót kapunk. Ezt röviden úgy láthatjuk be, hogy észrevesszük, hogy a belső tabló celláinak a száma minden egyes lépésben eggyel csökken. Ezért véges sok lépés után a belső sarkok elfogynak. Egy olyan ferde tabló, amelynek nincsen belső sarka, sima tabló. Az iménti módszert az S ferde tabló *kiegyenesítésének* nevezzük, jelölése $Rect(S)$. Ez elvben természetesen függ a belső sarkok választásától, azonban be fogjuk látni, hogy ez nem így van.

1.29. Tétel. *Egy adott S ferde tablóból kiindulva bármely belső sarok választásokkal ugyanazt a tablót kapjuk, azaz $Rect(S)$ egyértelmű.*

Bizonyítás: Később. □

A csúsztató eljárást egy újabb szorzatkonstrukcióra fogjuk felhasználni.

1.30. Definíció. *Legyenek T, U tetszőleges Young-tablók, S az alábbi ferde tabló.*



Ekkor

$$T \star U \stackrel{def}{=} Rect(S)\ .$$

1.31. Tétel. *A két szorzat megegyezik.*

Bizonyítás: Később. $\square$

Az utolsó két tétel már kiadja a sorbaillesztéssel definiált $T \cdot U$ tablószorzás asszociativitását, hiszen a $T \star U$ szorzat a 1.29 tétel miatt láthatóan asszociatív.

1.2. A tablógyűrű

1.32. Definíció. *Legyen $R_{[m]}$ az $[m]$-beli elemekkel rendelkező tablók által generált félcsoportgyűrű, azaz egy szabad $\mathbb{Z}$-modulus a tablókkal mint bázissal, amelyben a báziselemek közti tablószorzást lineárisan kiterjesztjük az egész modulusra.*

1.33. Megjegyzés. *Látható, hogy az imént megadott szorzás jóldefiniált, továbbá, hogy a fenti mŰveletekkel $R_{[m]}$ egy nemkommutatív gyűrű. Ez utóbbi annak megfogalmazása, hogy a tablószorzás nem kommutatív.*

Az $R_{[m]}$ tablógyűrűből van egy kanonikus (gyűrű)homomorfizmus az egészek feletti m-változós polinomok gyűrűjébe.

$$\begin{array}{ccc} R_{[m]} & \stackrel{\Phi}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m] \\ T & \mapsto & x^T\ , \end{array}$$

ahol — mint azt korábban már láttuk —

$$\begin{aligned} x^T &\stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{m} x_i^{a_i} \\ a_i &= i \text{ előfordulásainak száma } T\text{-ben.} \end{aligned}$$

A tablógyűrűben most egy sereg fontos elemet definiálunk. Ha λ egy partíció, akkor legyen

$$S_\lambda[m] = \text{ az összes } \lambda\text{-alakú tabló összege } R_{[m]}\text{-ben.}$$

1.34. Példa. *Az $S_\lambda[m]$ elemek egy egyszerű példája a $\lambda = (2), m = 2$ választással*

$$S_{(2)}[2] = \boxed{\mathit{1}\,|\,\mathit{1}} + \boxed{\mathit{1}\,|\,\mathit{2}} + \boxed{\mathit{2}\,|\,\mathit{2}}\ .$$

Észrevehetjük az alábbi fontos összefüggést:

$$\Phi(S_\lambda[m]) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) \ , \qquad (1.23)$$

ahol s_λ az előző fejezetben definiált m-változós Schur-polinom. Ez a Schur-polinomok, illetve az $S_\lambda[m]$ tablógyűrűbeli elemek definícióinak közvetlen következménye.

1.35. Állítás (Pieri-formulák). *Legyen $m \geq 1$ rögzített, $p \geq 1$. Ekkor*

$$S_\lambda \cdot S_{(p)} = \sum_\mu S_\mu \ ,$$

ahol μ azokon a tablókon fut végig, amelyeket úgy kapunk, hogy egy λ-alakú tablóhoz hozzáadunk p dobozt, mind különböző oszlopban.

$$S_\lambda \cdot S_{(1^p)} = \sum_{\mu'} S_{\mu'} \ ,$$

ahol μ' végigfut mindazon tablókon, amelyek λ-ból p doboz hozzáadásával keletkeztek, mind különböző sorban.

Bizonyítás: Csak az első egyenlőséget fogjuk belátni, a második igazolása teljesen analóg módon történik. Az

$$S_\lambda \cdot S_{(p)} = \sum_\mu S_\mu \ , \qquad (1.26)$$

formula mindkét oldalán olyan tablók összege szerepel, amelyeknek $|\lambda| + p$ doboza van. Azt kell belátni, hogy mindkét oldalon ugyanazok a tablók szerepelnek és ugyanannyiszor fordulnak elő (azaz mindegyik egyszer).

Vegyünk először egy tablót a baloldalról. Ez $T \cdot U$ alakú, ahol U egy egysoros tabló. A sorbaillesztési lemma miatt az új kockák mind különböző oszlopba kerülnek, tehát a $T \cdot U$ tabló szerepel a jobboldali összegben is.

Tekintsünk egy V tablót a jobboldalról. Belátjuk, hogy pontosan egyféleképpen áll elő $V = T \cdot U$ alakban (T, U mint fent). Először is, ha V alakja μ, akkor $\mu - \lambda$ egyértelműen megadja a p darab új doboz helyét. Ebből viszont a sorbaillesztési lemma megfordítása miatt T és U egyértelműen visszaállítható.

□

1.36. Következmény (Pieri-formulák szimmetrikus polinomokra). *Legyenek m, p pozitív egészek. Ekkor*

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) h_p(x_1, \ldots, x_m) = \sum_\mu s_\mu(x_1, \ldots, x_m) \ , \tag{1.27}$$

ahol μ azokon a tablókon fut végig, amelyeket úgy kapunk, hogy egy λ-alakú tablóhoz hozzáadunk p dobozt, mind különböző oszlopba.

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) e_p(x_1 \ldots, x_m) = \sum_{\mu'} s_{\mu'}(x_1, \ldots, x_m) \ , \tag{1.28}$$

ahol μ' végigfut mindazon tablókon, amelyek λ-ból p doboz hozzáadásával keletkeztek és amelyek mind különböző sorban vannak.

Bizonyítás: Alkalmazzuk a Φ leképezést a tablógyűrűbeli Pieri-formulákra és vegyük észre, hogy

$$s_{(p)}(x_1, \ldots, x_m) = h_p(x_1, \ldots, x_m) \tag{1.29}$$

és

$$s_{(1^p)}(x_1, \ldots, x_m) = e_p(x_1, \ldots, x_m) \ . \tag{1.30}$$

□

1.37. Definíció. *A T tabló tartalma a $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_l)$ természetes számokból álló sorozat, ha T elemei között pontosan μ_1 darab 1-es, μ_2 darab 2-es, ... és μ_l darab l-es van. Tetszőleges λ partícióra és μ sorozatra*

$$K_{\lambda\mu} \stackrel{def}{=} \text{ a } \lambda\text{-alakú és } \mu \text{ tartalmú tablók száma .}$$

Amennyiben μ is partíció, a $K_{\lambda\mu}$ számokat *Kostka-számok*nak hívjuk.

1.38. Példa. *Legyen*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Ekkor T tartalma $(2, 2, 2, 1, 2)$.

1.39. Állítás. *$K_{\lambda\mu}$ megegyezik azon $\lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \cdots \subseteq \lambda^{(l)} = \lambda$ partíciósorozatok számával, amelyekre a*

$$\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$$

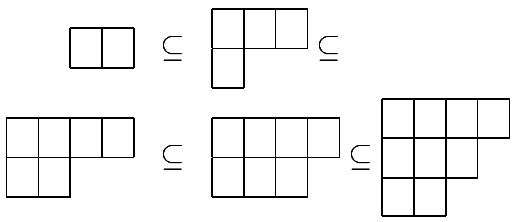
ferde diagramoknak μ_i dobozuk van, mind különböző oszlopban.

Bizonyítás: Legyen T λ-alakú μ-tartalmú tabló. T-hez hozzárendeljük az alábbi partíciósorozatot: λ_1 legyen azon kockák halmaza, amelyekben T-ben 1-esek állnak, λ_2 legyen azon kockák halmaza, amelyeknek megfelelő dobozokban T-ben 1 vagy 2 áll és így tovább. Az iménti hozzárendelés egy bijektív megfeleltetést létesít a fent szereplő halmazok között.
□

1.40. Példa. *Tekintsük az iménti*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

tablót. A neki megfelelő partíciósorozat



1.41. Lemma. *Az eddigi jelölésekkel*

$$h_{\mu_1} h_{\mu_2} \dots h_{\mu_l} = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda$$

ahol λ végigfut az összes partíción.

Bizonyítás: Azt fogjuk belátni, hogy

$$S_{(\mu_1)} \cdot S_{(\mu_2)} \cdot \dots \cdot S_{(\mu_l)} = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} S_\lambda \tag{1.34}$$

ahol λ ismét végigfut az összes partíción. Az imént láttuk, hogy $K_{\lambda\mu}$ azon

$$\lambda^{(1)} \subseteq \lambda^{(2)} \subseteq \dots \subseteq \lambda^{(l)} = \lambda$$

partíciósorozatok száma, amelyekre a $\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}$ ferde tablóknak μ_i dobozuk van. Ez alapján T $K_{\lambda\mu}$-féleképpen írható

$$T = U_1 \cdot \dots \cdot U_l \tag{1.35}$$

alakba, ahol U_i egy (μ_i)-alakú tabló.
□

1.42. Példa. *Legyen $\mu = (2,1)$, $m = 3$. A fentiek szerint ekkor az $R_{[3]}$ gyűrűben*

$$S_{(2)} \cdot S_{(1)} = \sum_\lambda K_{\lambda,(2,1)} S_\lambda \ ,$$

ahol

$$S_{(2)} = \boxed{\mathit{1}\mid\mathit{1}} + \boxed{\mathit{1}\mid\mathit{2}} + \dots + \boxed{\mathit{3}\mid\mathit{3}}$$

és

$$S_{(1)} = \boxed{\mathit{1}} + \boxed{\mathit{2}} + \boxed{\mathit{3}} \ .$$

Másrészt $K_{\lambda,(2,1)}$ azon λ alakú tablók száma, amelyekben két darab 1-es van és 1 darab 2-es. Ilyen tabló összesen kettő van:

$$\boxed{\mathit{1}\mid\mathit{1}\mid\mathit{2}} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline \mathit{1} & \mathit{1} \\ \hline \mathit{2} & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Eszerint

$$K_{\lambda,(2,1)} = \begin{cases} 1 & \textit{ha } \lambda = (3) \textit{ vagy } \lambda = (2,1), \\ 0 & \textit{egyébként.} \end{cases}$$

Így — amint azt közvetlen beszorzással is láthatjuk —

$$S_{(2)} \cdot S_{(1)} = S_{(3)} + S_{(2,1)} ,$$

illetve a szimmetrikus polinomokra felírva

$$h_2(x_1, x_2, x_3)h_1(x_1, x_2, x_3) = h_3(x_1, x_2, x_3) + s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) .$$

A partíciókon többfajta részbenrendezés is ismert, ezek közül hárommal fogunk itt foglalkozni.

lexikografikus rendezés $\mu \leq \lambda$, ha az első olyan i indexre amelyre $\mu_i \neq \lambda_i$, $\mu_i < \lambda_i$.

dominancia $\mu \lhd \lambda$, ha minden $i \geq 1$ esetén

$$\mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i .$$

tartalmazás $\mu \subseteq \lambda$, ha minden $i \geq 1$ esetén $\mu_i \leq \lambda_i$.

A három részbenrendezés közül csak a lexikografikus rendezés teljes rendezés.

1.43. Példa (A dominancia és a tartalmazás nem rendezés). *Legyen* $\mu = (2, 2, 2)$ *és* $\lambda = (3, 1, 1)$. *Ekkor*

$$\mu_1 < \lambda_1$$

és

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 > \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_3 ,$$

tehát $\lambda \not\lhd \mu$ *és* $\mu \not\lhd \lambda$.

Az is látható, hogy $\mu \not\subseteq \lambda$ *és* $\lambda \not\subseteq \mu$.

1.44. Megjegyzés. *A három részbenrendezés nem teljesen független egymástól. Ha*

$$\mu \subseteq \lambda ,$$

akkor

$$\mu \lhd \lambda \text{ és } \mu \leq \lambda ,$$

fordítva azonban általában egyik állítás sem igaz. Ugyanakkor a lexikografikus rendezés és a dominancia közül egyik sem vonja maga után a másikat.

Ami számunkra fontos a Kostka-számok és a részbenrendezések viszonyából, azok a következők.

1.45. Állítás (Lexikografikus rendezés és Kostka-számok). *Legyenek λ és μ az n szám partíciói. Ekkor $K_{\lambda\mu} = 0$, kivéve, ha $\mu \leq \lambda$, továbbá $K_{\lambda\lambda} = 1$.*

1.46. Állítás (Dominancia és Kostka-számok). *$K_{\lambda\mu} \neq 0$ pontosan akkor, ha $\mu \lhd \lambda$.*

1.3. Tablók szavai

Ebben a fejezetben a tablók egy fontos invariánsát, az ún. szavukat definiáljuk, majd megvizsgáljuk, hogyan viselkedik ez az invariáns a tablókon értelmezett szorzásokra nézve.

1.47. Definíció. *Egy T (ferde) tabló $w(T)$ szavát úgy kapjuk, hogy felsoroljuk a tabló elemeit, kezdve az utolsó sorral, balről jobbra, majd az utolsó előtti sor jön (szintén balról jobbra) és így tovább.*

1.48. Példa. *Tekintsük a*

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} 7 & 7 & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array}$$

tablót. Ekkor $w(T) = 77|246|1355$ (a függőleges vonalak csak a sorok elválasztására szolgálnak.

1.49. Példa (Ferde tabló szava). *Legyen most*

$$S = \begin{array}{ccccc} \cline{4-5} & & & \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ \cline{3-5} & & \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{5} \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{4} & \multicolumn{1}{c|}{5} & \\ \cline{1-4} \multicolumn{1}{|c|}{2} & & & & \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3} & & & & \\ \cline{1-1} \end{array} \; .$$

Az S tabló szava

$$w(S) = 3|2|5421|543|21 \; .$$

1.50. Megjegyzés. *Egy tablót egyértelműen vissza tudunk állítani a szavából. Ti. felosztjuk növekvő részekre, az első darab lesz az utolsó sor, a második az utolsó előtti. stb.*

1.51. Megjegyzés. *Nem minden szó származik tablóból, pl.* $w = 77712$.

1.52. Megjegyzés. *Minden szó előáll mint egy ferde tabló szava. Egy módszer: vágjuk a szót növekvő darabokra, majd rendezzük el őket egy ferde tabló ban úgy, hogy minden darab a megelőzőekhez képest jobbra fel legyen (az előző darab utolsó kockájától a jelenlegi darab első kockája legyen jobbra fel).*

1.53. Megjegyzés. *Sok ferde tabló adja ugyanazt a szót.*

Először is megvizsgáljuk a sorbaillesztés és a tablók szavainak viszonyát. Ez egy alapvető fontosságú kérdés, aminek igen sok alkalmazása van. Legyen

$$w = \alpha \cdot x' \cdot \beta \ ,$$

ahol $\alpha \leq x' \leq \beta$ és kövessük nyomon az $\alpha \leq x < x' \leq \beta$ elem beillesztését. Ezt a folyamatot lebonthatjuk kisebb egységekre, az egyes sorokba való kiütés/beillesztés párokra. Vizsgáljunk meg egy ilyet.

$$\begin{aligned} \alpha x' b_1 \dots b_{q-1} b_q x &\mapsto \alpha x' b_1 \dots b_{q-1} x b_q && \text{ha } x < b_{q-1} \leq b_q \\ &\vdots \\ &\mapsto \alpha x' b_1 x b_2 \dots b_q && \text{ha } x < b_1 \leq b_2 \\ &\mapsto \alpha x' x b_1 \dots b_q && \text{ha } x < x' \leq b_1 \end{aligned} \tag{1.36}$$

Az alábbi szabályt figyelhettük meg: ha $x < y \leq z$ akkor

$$yzx \mapsto yxz \ . \qquad \text{(K1)} \tag{1.37}$$

Folytatva a műveletet tovább, x kiüti x'-t és x' elindul balra.

$$\begin{aligned} a_1 \dots a_{p-1} a_p x' x \beta &\mapsto a_1 \dots a_{p-1} x' a_p x \beta && \text{ha } a_p \leq x < x' \\ &\vdots \\ &\mapsto a_1 x' a_2 \dots a_p x \beta && \text{ha } a_2 \leq a_3 < x' \\ &\mapsto x' a_1 \dots a_p x \beta && \text{ha } a_1 \leq a_2 < x' \end{aligned} \tag{1.38}$$

A fenti átalakítások mind az alábbi szabály követik: ha $x \leq y < z$ akkor

$$xzy \mapsto zxy \ . \qquad \text{(K2)} \tag{1.39}$$

A (K1), (K2) transzformációs szabályokat és inverzeiket együttesen *elemi Knuth-transzformációk*nak nevezzük. Jól megjegyezhetők az alábbi módon:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline y & z \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline \end{array} \;=\; \begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{y} & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad yzx \mapsto yxz \quad (x < y \leq z)$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline x & z \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline y \\ \hline \end{array} \;=\; \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{z} & \\ \cline{1-1} \end{array} \quad xzy \mapsto zxy \quad (x \leq y < z) \ .$$

1.54. Definíció. *A w_1, w_2 szavakat* Knuth-ekvivalensek*nek mondjuk, jelben $w_1 \equiv w_2$, ha egyik a másikból elemi Knuth-transzformációk egy véges sorozatával megkapható.*

Összefoglalva,

1.55. Állítás. *Minden T tabló és x elem esetén*

$$w(T \leftarrow x) \equiv w(T) \cdot x \ .$$

1.56. Következmény. *Tetszőleges T, U tablókra*

$$w(T \cdot U) \equiv w(T) \cdot w(U) \ .$$

Jóval több munkával az alábbi is belátható.

1.57. Tétel. *A Schützenberger-féle csúsztatás megőrzi a Knuth-ekvivalenciát.*

Ezt a tételt nem bizonyítjuk be.

A következő eredmény alapvető jelentőségű a Young-tablók elméletében.

1.58. Tétel. *Minden szó pontosan egy tabló szavával Knuth-ekvivalens.*

A bizonyítás nehezebbik részéhez az egyértelműséghez további eszközökre lesz szükségünk. Most ezért csak azt bizonyítjuk be, hogy minden w szóhoz létezik olyan T tabló, amelyre $w \equiv w(T)$.

Bizonyí tás: Az alábbi a w szóhoz rendelt ún. kanonikus tabló konstrukciója. Ha $w = x_1 \dots x_r$ akkor legyen

$$T = \Big(\dots\Big(\boxed{x_1} \leftarrow x_2\Big)\dots\Big) \leftarrow x_r \ . \tag{1.40}$$

Az előző állítás miatt — azaz lényegében mert a sorbaillesztés kompatibilis a Knuth-ekvivalenciával — $w(T) \equiv w$, ahogy azt szerettük volna.

$\square$

1.4. Növekvő részsorozatok

1.59. Definíció. *Ha $w = x_1 \dots x_r$ egy $[m]$-beli szó, akkor legyen $L(w,1)$ w leghosszabb növekvő részsorozatának hossza. Hasonlóképpen, jelölje $L(w,k)$ azt a legnagyobb természetes számot, amely előállítható k darab diszjunkt w-beli növekvő részsorozat hosszának összegeként.*

1.60. Példa. *Legyen $w = 154234123331$. Ekkor egyszerűen látszik, hogy $L(w,1) = 6$, mivel a* **1**54**2**341**2333**1 *egy hatelemű növekvő részsorozat és hosszabb növekvő részsorozat viszont nincs w-ben.*

Némileg munkaigényes, de még mindig belátható elemi úton, hogy $L(w,2) = 9$ és $L(w,3) = 12$, $L(w,2)$ például az alábbi módon realizálható:

154**234**123331

és

154234**12333**1 .

(Ez persze egyből adja az egyik irányú egyenlőtlenséget.)

1.61. Megjegyzés. *Sok sorozatkészlet összege elérheti a maximumot, ezek között lehetnek különböző hosszúságösszetételűek. Egy $L(w,k)$-t megvalósító készlet nem mindig bővíthető $L(w,k+1)$ egy realizációjává.*

1.62. Példa. *Legyen $w' = 344233112223$. Megfigyelhető, hogy $L(w',1) = 6 = L(w,1)$, $L(w',2) = 9 = L(w,2)$ és így tovább, $L(w',k) = L(w,k)$ minden k-ra. Felmerül a kérdés, hogy ez vajon véletlen-e. Látni fogjuk, hogy nem. Észrevehető, hogy w' és w Knuth-ekvivalensek, ez az oka a fenti jelenségnek.*

1.63. Állítás. *Ha $w \equiv w'$ akkor $L(w,k) = L(w',k)$ minden $k \geq 1$ esetén.*

Bizonyítás: Annyit kell ellenőrizni, hogy mi történik elemi Knuth-transzformációk során.

$$\underbrace{\alpha \cdot yxz \cdot \beta}_{w} \equiv \underbrace{\alpha \cdot yzx \cdot \beta}_{w'} \text{ ha } x < y \leq z \tag{1.41}$$

$$\underbrace{\alpha \cdot xzy \cdot \beta}_{w} \equiv \underbrace{\alpha \cdot zxy \cdot \beta}_{w'} \text{ ha } x <\leq y < z \tag{1.42}$$

A $w' \mapsto w$ átmenet esetén a növekvő részsorozatokból növekvő részsorozatok lesznek, ezért $L(w,k) \geq L(w',k)$. A Knuth-transzformáció során ti. annyi történik, hogy az xy pár megszűnik inverzióban lenni.

A másik irányú egyenlőtlenségért jobban meg kell dolgozni. Tegyük fel, hogy adott k darab diszjunkt növekvő részsorozat w-ből. Elég lesz ez esetben k darab diszjunkt w'-beli növekvő részsorozatot produkĺni, amelyek összhossza legalább akkora, mint a kiindulásul vett w-beli készleté. Ha nincs olyan részsorozat az induló halmazban, amelyben mind x, mind z szerepel, ráadásul egymás után, akkor készen vagyunk, mert az eredeti készlet változtatás nélkül megfelel a célnak. Ellenkező esetben viszont előfordulhat, hogy a részsorozatunk Knuth-transzformáltja w'-ben már nem lesz növekvő x és z felcserélése miatt.

Tételezzük fel tehát, hogy

$$\alpha_1 xy\beta_1 \tag{1.43}$$

egy ilyen "rossz" sorozat, ahol $\alpha_1 \subseteq \alpha, \beta_1 \subseteq \beta$. Ha y semelyik más, a w-beli induló készletben szereplő részsorozatban nem szerepel, akkor a

$$\alpha_1 xy\beta_1 \tag{1.44}$$

részsorozatot kicseréljük a

$$\alpha_1 yz\beta_1 \tag{1.45}$$

részsorozatra (vagy $\alpha_1 xy\beta_1$-re) és ismét csak készen vagyunk. A kritikus eset az, ha a w-beli részsorozataink között szerepel egy

$$\alpha_2 y\beta_2 \tag{1.46}$$

alakú (azaz egy olyan, amely y-t tartalmazza). Ekkor a megoldás a következő:

1. $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 xz\beta_1 \\ \alpha_2 y\beta_2 \end{matrix} \right\} \mapsto \left\{ \begin{matrix} \alpha_1 xy\beta_2 \\ \alpha_2 z\beta_1 \end{matrix} \right\}$ illetve

2. $\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 xz\beta_1 \\ \alpha_2 y\beta_2 \end{matrix} \right\} \mapsto \left\{ \begin{matrix} \alpha_2 yz\beta_1 \\ \alpha_1 x\beta_2 \end{matrix} \right\}$.

Az ily módon kapott új w'-beli részsorozatok mindkét esetben növekvőek és diszjunktat egymástól és a többi részsorozattól is. Ezzel sikerült egy, az eredeti w-beli készlettel azonos össz hosszú w-beli részsorozathalmazt készíteni.

□

A **??** példabeli w' sorozatnál megfigyelhettük, hogy az $L(w,k)$ invariánsokat egy tabló szaváról könnyű leolvasni. Ennek oka az, hogy egy növekvő részsorozat (a tablóban nézve) soha nem halad lefelé. Emiatt a részsorozat elemei mind különböző oszlopokból kerülnek ki. Azaz ha $w = w(T)$, akkor

$$L(w,1) = \text{ } T \text{ első sorának hossza.} \tag{1.47}$$

Az iménti megfigyelést általánosítja az alábbi lemma.

1.64. Lemma. *Legyen w a λ alakú T tabló szava, $\lambda = (\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k)$ (és $\lambda_l = 0$ ha $l > k$). Ekkor minden $k \geq 1$ esetén*

$$L(w,k) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \ .$$

Bizonyítás: Tetszőleges k darab diszjunkt növekvő sorozat esetén minden oszlopból összesen legfeljebb k kockát tartalmazhat a részsorozatok uniója. Eszerint

$$L(w,k) \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \ . \tag{1.49}$$

Az egyenlőség az első k sor mint növekvő részsorozoatok választásával adódik.

$\square$

1.65. Következmény. *Adott w esetén ha $w = w(T)$ valamely T tablóra, akkor e tabló alakja egyértelműen meghatározott.*

Tehát nem fordulha t elő az az eset, amikor w két különböző alakú tablónak is a szava. Célunk ennél ambíciózusabb, adott szó esetén magát a T tablót is rekonstruálni akarjuk, amelynek szavával w Knuth-ekvivalens.

Ötlet: Próbáljuk meg kitalálni, hová kerül a legnagyobb elem! (Mint mindig, azonos számok közül a szóban jobbra lévőt tekintjük nagyobbnak.)

1.66. Példa. *Legyen*

$$T \ = \ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

Egy pillanatra vegyük ki a jobb alsó sarokban szereplő 4-est és vizsgáljuk meg az így kapott tabló alakját.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \cline{1-3} 3 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

A fennmaradó doboz lesz a kivett 4-es helye, majd ezt az eljárást folytatjuk.

Azt kéne már csak tudni, hogy Knuth-ekvivalens szavakból kivéve a legnagyobb elemeiket, ismét Knuth-ekvivalens szavakhoz jutunk. Ennél több is igaz.

1.67. Lemma. *Legyenek $w \equiv w'$ Knuth-ekvivalens szavak. Vegyük ki mindkettőből a p legkisebb és q legnagyobb elemet, jelölje az eredményeket w_0, w'_0. Ekkor*

$$w_0 \equiv w'_0 \ .$$

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy elég a fenti állítást a legnagyobb elem kivételére (azaz a $p = 0, q = 1$ esetre) igazolni, hiszen a legkisebb elem kivételére (amint azt látni fogjuk) szóról szóra átvihető az érvelés, ebből a két esetből pedig már teljes indukcióval következik az általános eset.

Amint már többször is láttuk, egy Knuth-ekvivalenciára vonatkozó állítást elegendő az elemi Knuth-transzformációk esetére bebizonyítani. Bármelyik transzformáció két oldala esetén, ha a szavakban előforduló legnagyobb elem x, y, z-től különbözik, akkor a kivételével kapott szavak is ugyanazon transzformáció szerint (elemien) Knuth-ekvivalensek lesznek.

Amennyiben a legnagyobb elem $\in \{ x, y, z \}$, akkor az z kell, hogy legyen, és a kivétele után kapott szavak Knuth-ekvivalensek maradnak. Ezzel a bizonyítást befejeztük.
□

Az iménti lemma következményeként be tudjuk látni, hogy minden szó legfeljebb egy T tabló szavával ekvivalens.

1.68. Állítás. *Ha $w \equiv w(T) \equiv w(T')$, akkor $T = T'$.*

Bizonítás: w hosszára vonatkozó indukciót fogunk hanszálni. Az alapeset, $|w| = 1$ láthatóan igaz. Legyen $|w| = d > 1$. A **??** következmény szerint T alakja egyértelműen meghatározott, mivel

$$\lambda_k = L(w, k) - L(w, k-1) \ . \tag{1.51}$$

Ha x a legnagyobb betű w-ben, akkor legyen w_0 az a szó, amit úgy kapunk, hogy töröljük w-ből x legjobboldalibb előfordulását. Legyen továbbá T_0 az a tabló, amelyet x legjobboldalibb T-beli előfordulásának törlésével kapunk. T_0 valóban tabló lesz, mert a törölt kocka külső sarok kell, hogy legyen.

A tabló szavának definíciója alapján

$$w(T_0) = w(T)_0 \ . \tag{1.52}$$

A 1.67 lemma miatt

$$w_0 \equiv w(T_0). \tag{1.53}$$

Az indukciós feltevés szerint T_0 az egyetlen tabló, amelyre

$$w(T_0) \equiv w_0\ . \tag{1.54}$$

Mivel a T, T_0 tablók alakjait ismerjük , az egyetlen lehetőség T-re, hogy a T_0 tablóhoz az imént törölt dobozban hozzáadjuk az x elemet.
□

1.5. A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetés

1.69. Definíció. *Egy w szóra jelölje $P(w)$ azt az egyetlen tablót, amelyre*

$$w \equiv w(P(w))\ .$$

1.70. Megjegyzés. *Ha $w = x_1 \dots x_r$ akkor*

$$P(w) = \left(\dots\left(\boxed{x_1} \leftarrow x_2\right) \leftarrow \dots \leftarrow\right) \leftarrow x_r\ . \tag{1.55}$$

A sorbaillesztési lemma kapcsán láttuk, hogy a sorbaillesztés megfordítható, ha ismerjük a hozzáadott doboz(ok) helyét. Eszerint w-t magát (és nem csak a Knuth-ekvivalenciaosztályát) visszaállíthatjuk $P(w)$-ből, ha tudjuk a dobozok beillesztési sorrendjét. Ezt precízebben az alábbi módon írhatjuk le: miközben $P(w)$-t felépítjük, párhuzamosan építünk egy $Q(w)$ tablót, w beillesztési tablóját. A $Q(w)$ tablót úgy készítjük, hogy a $P(w)$ tabló építése során k-adikként hozzáadott dobozba egy k elemet írunk.

Másszóval, ha $P_k = (\dots) \leftarrow x_k$, akkor a $P_k - P_{k-1}$ halmazban szereplő egyetlen kockába egy k elemet teszünk. Mivel egy új kocka mindig külső sarok, az új elem nagyobb lesz, mint felső illetve baloldali szomszédai. Emiatt $Q(w)$ valóban tabló lesz.

1.71. Példa. *Legyen w = 427351. Ekkor a P_k, Q_k tablópárok sorozata az* *alábbi módon alakul.*

$$\begin{array}{ccc} 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 7 \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 \\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 6 \end{array}$$

Látni fogjuk, hogy $(P(w), Q(w))$ *ismeretében vissza tudjuk állítani* w*-t inverz sorbaillesztéssel.*

1.72. Tétel (Robinson–Schensted-megfeleltetés). *Az* $[m]$*-beli elemekből álló* n *hosszú szavak, illetve a* (P, Q) *azonos alakú* n *dobozt tartalmazó* $[m]$*-beli elemeket tartalmazó tablópárok, amennyiben azonos alakúak és* Q *standard, egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető.*

Bizonyítás: Az imént láttuk, hogy egy adott w szó esetén hogyan tudjuk felépíteni a $(P(w), Q(w))$ tablópárt, ami ily módon természetesen egyértelműen meghatározott w ismeretében. Most megkonstruáljuk ennek a leképezésnek az inverzét.

Adott (P, Q) esetén a következő a teendő: Vegyük a legnagyobb sorszámú dobozt Q-ban, és alkalmazzunk inverz sorbaillesztést a neki megfelelő P-beli kockára. A sorbaillesztés végén a tablóból kikerülő elem lesz a $W(P, Q)$ szó első betűje. Végül töröljük Q-ból a legnagyobb elemet tartalmazó dobozt. Ezt az eljárást iterálva felépítjük a (P, Q) tablópárhoz tartozó szót. Könnyen látható, hogy a két leképezés egymás inverze.
□

1.73. Megjegyzés. *Egy standard tabló ekvivalens a dobozok egy olyan számozásával, hogy a* k *legnagyobb elemet törölve ismét tablót kapunk (ahol* $1 \leq k \leq n$*,* n *a tabló dobozainak a száma).*

Knuth általánosította a a Robinson–Schensted megfeleltetést arra az esetre, ha Q nem standard, azaz tetszőleges azonos alakú (P, Q) rendezett tablópárra. Észrevette ugyanis, hogy az iménti bizonyítás változatlan formában átvihető erre az általánosabb esetre azzal az egyszerű konvencióval, hogy azonos elemek közül a jobbra lévőt tekintjük nagyobbnak.

1.74. Tétel (Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetés). *Az $[m]$-beli elemekből álló n-dobozú azonos alakú rendezett (P, Q) tablópárok illetve az $[m]$-beli elemeket tartalmazó n-hosszú szavak között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető.*

1.75. Példa. *Válasszuk most a $w = 437341$ szót. A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetésben kapott tablópárok:*

$$\begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 7 \\ 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 4 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 3 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & \\ 4 & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & \\ 6 & & \end{array}$$

Folytassuk tovább a fenti vizsgálódást. Legyen a (P, Q) rendezett tablópárból az algoritmus során a k-adik lépésben kapott tablópár (P_k, Q_k), továbbá legyen a (P_k, Q_k) párból kiütött elempár (v_k, u_k). Ily módon egy $2 \times r$-es tömböt kapunk:

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \\ v_1 & \dots & v_k \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogyha Q standard, akkor a felső sor $1, 2, \dots, r$.

1.76. Definíció. *Egy $2 \times r$-es tömb*

szó *ha első sora* $1, 2, \ldots, r$ *(ebben a sorrendben),*

permutáció *ha szó és a második sora* $1, 2, \ldots, r$ *valamilyen sorrendben.*

Felmerül a kérdés, hogy milyen tömbök állnak elő a (P, Q) tablópárokból. Először is, mivel minden lépésben Q_k legnagyobb elemét vesszük ki,

$$u_1 \leq u_2 \leq \cdots \leq u_r \ . \tag{1.56}$$

Másodszor, ha $u_{k-1} = u_k$, akkor a P_k-ból kivett B' doboz az sorbaillesztési lemma alapján szigorúan jobbra van a P_{k-1}-ből kiveendő B doboztól, ezért $v_{k-1} \leq v_k$. Összefoglalva:

1.77. Állítás. *A* (P, Q) *tablópárokból kapott* $2 \times r$*-es tömbök oszlopai olyan lexikografikus sorrendben vannak, amelyben az első sornak van precedenciája.*

Ez az állítás megfordítható, erről szól a Robinson–Schensted–Knuth megfeleltetés alábbi változata.

1.78. Tétel. *A* $2 \times r$*-es lexokigrafikusan rendezettt tömbök és az* r *kockából álló azonos alakú tablópárok között egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető.*

1.79. Megjegyzés. *A megfeleltetés során* A *pontosan akkor szó, ha* Q *standard és pontosan akkor lesz permutáció, ha* P *és* Q *mindegyike standard.*

Bizonyítás: Már láttuk hogyan lehet egy megfelelő tablópárhoz egy A tömböt rendelni. Azt kell még megmutatni, hogy az A tömbből a (P, Q) egyértelműen visszaállítható. Erre az ismert sorbaillesztéses módszert alkalmazzuk.

$$(P_1, Q_1) := (\boxed{v_1}, \boxed{u_1}) \ , \tag{1.57}$$

majd (P_{k-1}, Q_{k-1})-ből úgy kapjuk (P_k, Q_k)-t, hogy v_k-t beillesztjük P_{k-1}-be és az újonnan keletkező dobozt u_k tartalommal hozzáírjuk Q_{k-1}-hez. A sorbaillesztéssel készített P_k tabló lesz, Q_k esetén ez nem látszik azonnal.

A konstrukcióból adódóan Q_k sorai növekvőek lesznek. Vizsgáljuk meg most az oszlopokat. Tegyük fel, hogy u_k alá került u_i (értelemszerűen $i < k$). Ha a tablótulajdosnággal ellentétben $u_i \geq u_k$ (ekkor persze igazából csak $u_i = u_k$ lehet). Ez esetben A lexikografikus rendezettsége miatt

$$v_i \leq v_{i+1} \leq \cdots \leq v_k \ . \tag{1.58}$$

Azonban ekkor a sorbaillesztési lemma miatt a P_i-től P_k-ig lévő új dobozok mind különböző oszlopokba kerlülnének, ezért u_k nem lehetne u_i alatt.
$\square$

1.80. Példa. *Tekintsük a*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tömböt. A neki megfelelő tablópár:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Egy fontos és némileg meglepő tény a Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetéssel kapcsolatban a következő.

1.81. Tétel (Szimmetria-tétel). *Ha a*

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_r \\ v_1 & \dots & v_r \end{pmatrix}$$

tömb a (P, Q) tablópárnak felel meg az RSK-megfeleltetésben, akkor a

$$\begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_r \\ u_1 & \dots & u_r \end{pmatrix}$$

tömb a (Q, P) párnak.

A $2 \times r$-es tömbök sorai tehát csak látszólag töltenek be különböző szerepet.

1.82. Következmény. *Ha A permutáció, akkor $P(A^{-1}) = Q(A)$ és $Q(A^{-1}) = P(A)$.*

Az RSK-megfeleltetésnek van egy alternatív mátrix-alakja. Tekintsük a kétsoros A tömböt. Ebből könnyen kaphatunk egy α mátrixot az alábbi recept szerint. Ha az első sor elemei $[m]$-beliek, a második sor elemei $[n]$-beliek, akkor

$$\alpha(A) \in M_{m \times n}(\mathbb{Z}) \ ,$$

ahol

$$\alpha_{ij} := \text{ az } \binom{i}{j} \text{ oszlop előfordulásainak száma.}$$

1.83. Példa. *Tekintsük az*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tömböt. A neki megfelelő 2×3*-as nemnegatív egész elemű mátrix*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Rögtön látható, hogy az α tömbből A egyértelműen visszaállítható (felírjuk az α által meghatározott párokat és lexikografikus sorrendbe rendezzük őket).

1.84. Tétel (RSK mátrix-alakja). *A* $P \in [n], Q \in [m]$ *azonos alakú tablók rendezett párjai, illetve az* $\alpha \in M_{m\times n}(\mathbb{Z})$ *mátrixok között egy-egyértelmű megfeleltetés van.*

1.85. Megjegyzés. *Mátrixokkal leírva az* A *tömb két sorának cseréje az* α *tömb transzponálásának felel meg. Ezen a nyelven a szimmetria-tétel úgy hangzik, hogy ha* (P, Q) *az* α *tömbnek felel meg, akkor* (Q, P) *az* α^T *tömbnek.*

1.86. Megjegyzés. *Az* α *mátrix* i*-edik sorösszege megadja* i *előfordulásainak számát* Q*-ban. Hasonlóan, a* j*-edik oszlopösszege a* j *elem előfordulásainak száma* P*-ben.*

Az alábbiakban az RSK-megfeleltetés pár alkalmazásával ismerkedünk meg. Elsőként tekintsük az alábbi, már Cauchy által is ismert azonosságot.

1.87. Állítás (Cauchy–Littlewood).

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x_1,\ldots,x_n)s_\lambda(y_1,\ldots,y_m)$$

ahol λ *végigfut az összes partíción.*

Bizonyítás: Idézzük fel az $\frac{1}{1-x_iy_j}$ racionális törtfüggvény formális hatványsorfejtését:

$$\frac{1}{1-x_iy_j} = 1 + x_iy_j + (x_iy_j)^2 + \cdots + (x_iy_j)^k + \ldots \quad (1.61)$$

Eszerint a képlet baloldala

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{1-x_iy_j} &= \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\Big(1+x_iy_j+(x_iy_j)^2+\dots+(x_iy_j)^k+\dots\Big) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\alpha\in M_{m\times n}}\prod_{1\le i\le m, 1\le j\le n}(x_iy_j)^{\alpha_{ij}} \qquad (1.62) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(P,Q)}x^Py^Q
\end{aligned}$$

ahol a legbelső összegzés az összes olyan páron fut végig, amelyekre (P,Q) azonos alakú tablók, P $[n]$-beli, Q $[m]$-beli elemekkel. Ha α a (P,Q) tablópárnak felel meg, akkor

$$\prod_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}(x_iy_j)^{\alpha_{ij}} = x^Py^Q \ .$$

Másrészt

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(P,Q)}x^Py^Q &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\lambda\vdash n}s_\lambda(x)s_\lambda(y) \qquad (1.63) \\
&= \sum_{\lambda}s_\lambda(x_1,\dots,x_n)s_\lambda(y_1,\dots,y_m) \ . \qquad (1.64)
\end{aligned}$$

□

1.88. Definíció.

$$\begin{aligned}
f^\lambda &\overset{def}{=} \textit{a } \lambda \textit{ alakú standard tablók száma.} \\
d_\lambda(m) &\overset{def}{=} \textit{az } [m]\textit{-beli elemekből álló } \lambda\textit{-alakú tablók száma.}
\end{aligned}$$

1.89. Állítás. *A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetés alapján*

$$n! = \sum_{\lambda\vdash n}\left(f^\lambda\right)^2$$

$$m^n = \sum_{\lambda\vdash n}d_\lambda(m)f^\lambda \ .$$

A szimmetria-tételből következik, hogy a (P, P) párok, ahol P standard n dobozzal, az $\mathfrak{S}_n$-beli involúcióknak felelnek meg.

1.90. Következmény.

$$\sum_{|\lambda|=n} f^\lambda = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} . \tag{1.65}$$

1.91. Állítás. *Legyen λ rögzített partíció, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Ekkor a λ alakú, $(m_1, \ldots, m_n)$ tartalmú tablók száma megegyezik a λ alakú, $(m_{\sigma(1)}, \ldots, m_{\sigma(n)})$ tartalmú tablók számával.*

1.6. Littlewood–Richardson-együtthatók

Legyenek λ, μ, ν partíciók, n, m, r a bennük lévő dobozok számai. Azt vizsgáljuk, hogy egy rögzített ν-alakú V tabló hányféleképpen áll elő

$$V = T \cdot U \tag{1.66}$$

alakban, ahol T alakja λ, U alakja μ. Látni fogjuk, hogy meglepő módon ez a szám nem függ V-től csak az alakjától.

1.92. Definíció (Littlewood–Richardson-szám). *Azt a számot, ami megadja, hogy egy adott ν-alakú tabló hányféleképpen írható*

$$V = T \cdot U \tag{1.67}$$

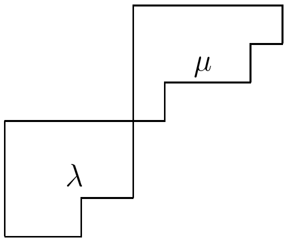
alakba, ahol T λ-alakú, U μ-alakú tabló, a partícióhármashoz tartozó Littlewood–Richardson-számnak nevezzük, jelölése

$$c^\nu_{\lambda\mu} .$$

1.93. Megjegyzés. $c^\nu_{\lambda\mu} = 0$ *hacsak $r = m + n$ és $\lambda \subseteq \nu$ (persze még ekkor is lehet nulla).*

1.94. Megjegyzés. *Ahhoz, hogy az iménti definíció értelmes legyen, be kell látni, hogy $c^\nu_{\lambda\mu}$ független a V tabló választásától.*

1.95. Állítás. *A fenti jelöléssel $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ azon S ferde tablók száma, amelyek alakja*



és amelyekre $V = Rect(S)$.

A Littlewood–Richardson együtthatóknak még sok további alternatív definíciója van, példaként most megemlítjük az alábbit: ha U rögzített μ-alakú tabló, akkor

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = \text{ azon } \nu/\lambda \text{ alakú } S \text{ ferde tablók száma, amelyekre } Rect(S) = U. \tag{1.68}$$

Hamarosan látni fogjuk azt a tényt, hogy $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ értéke nem függ a választott tablóktól, hanem kizárólag a λ, μ, ν partícióktól (amint azt a jelölés is sugallja). Nézzünk meg egy pár egyszerű példát.

1.96. Példa. *Legyen $\lambda = (2,1), \mu = (1), \nu = (3,1)$, azaz határozzuk meg a*

$$c^{(3,1)}_{(2,1),(1)}$$

Littlewood-Richardson-együtthatót. Az első definíciónk szerint ehhez azt kell kiszámítani, hogy egy ν alakú hányféleképpen áll elő mint egy λ alakú és egy μ alakú tabló szorzata. Válasszuk V-nek az

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline d \\ \hline\end{array},$$

ahol az a, b, c, d elemek az $1, 2, 3, 4$ számok megfelelő permutációi. Mivel a d elem beillesztésénél nem történt kiütés (ez esetben az új kocka nem az első sor, hanem a második sor végére került volna), az új kocka a 3-ast tartalmazó, más változás pedig a tablóban nem történt. Ezek szerint a V tabló fenti típusú szorzatelőállítása egyértelmű, az egyetlen lehetséges mód

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline\end{array}.$$

Ezért

$$c^{(3,1)}_{(2,1),(1)} = 1 \ .$$

1.97. Példa. *Változtassunk egy kicsit az előző példán, legyen most* $\lambda = (3), \mu = (1), \nu = (3,1)$*. Referenciatablónak ismét válasszuk a*

$$V = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

tablót. A kérdés ismét az, hogy hánféleképpen áll elő V

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline d \\ \hline \end{array} \tag{1.72}$$

alakban. Mivel a d *elem beillesztésénél az új kocka a második sor végére kerül,* d *kisebb a* (3) *alakú tabló minden eleménél. Ezért* $d = 1$ *és más változás a* (3) *alakú tablóban nincs. Mivel* $a < b < c$ *a tablótulajdonság és az elemek különbözősége miatt, így az egyetlen lehetséges eset*

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array} . \tag{1.73}$$

1.98. Példa. *A legkisebb olyan* ν *partíció, amelyre van* $c^{\nu}_{\lambda\mu} \neq 0$, $\nu = (3,2,1)$*. Egész pontosan*

$$c^{(3,2,1)}_{(2,1),(2,1)} = 2 \ ,$$

mivel az

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 6 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{1.74}$$

tabló kétféleképpen is előáll

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} 6 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|}\hline d & e \\ \hline f & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \tag{1.75}$$

alakban. Erről gyorsan meggyőződhetünk elemi úton, de később be fogjuk látni más eszközökkel.

1.99. Definíció. *Legyen* U_0 μ *alakú tabló.*

$$\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0) \stackrel{def}{=} \{\ S\ \nu/\lambda \text{ alakú ferde tabló, } Rect(S) = U_0\}$$

$$\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0) \stackrel{def}{=} \{\ T\ \lambda \text{ alakú tabló, } U\ \mu \text{ alakú, } T \cdot U = V_0\}\ .$$

1.100. Tétel. *Tetszőleges μ alakú U_o és ν alakú V_0 tablók esetén a $\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$ és $\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$ halmazok között bijektív megfeleltetés létesíthető.*

A bizonyítás lelke az alábbi technikai jellegű lemma, amit majd a tétel bebizonyítása után látunk be.

1.101. Lemma. *Legyen u, v lexikografikusan rendezett tömb, (P, Q) az RSK megfeleltetésben hozzárendelt tablópár, T tetszőleges tabló. Hajtsuk végre az alábbi sorbaillesztéseket:*

$$(\dots(T \leftarrow v_1) \leftarrow \dots \leftarrow v_{m-1}) \leftarrow v_m \ ,$$

majd helyezzük az

$$u_1, u_2, \dots, u_m$$

elemeket megfelelő alakú üres diagramban a

$$v_1, \dots, v_m$$

elemek dobozaiba. Ekkor az $u_1, \dots, u_m$ elemek dobozai egy olyan S ferde tabló alkotnak, amelyre

$$Rect(S) = Q \ .$$

Mielőtt belekezdenénk a tétel bizonyításába, nézzük meg, egy példán a fenti lemma tartalmát.

1.102. Példa. *Legyen*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

és

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array} \ .$$

Ekkor $P = ..., Q = ...$ és a T beillesztése utáni eredmény

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} 3 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array} \ . \tag{1.76}$$

Ennek megfelelően

$$S = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \mathit{1} \\ \hline & \mathit{1} \\ \cline{1-2} \mathit{2} & \mathit{2} \\ \cline{1-2}\end{array} \tag{1.77}$$

és

$$Rect(S) = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathit{1} & \mathit{1} \\ \hline \mathit{2} & \mathit{2} \\ \hline\end{array} = Q\ .$$

Bizonyítás: Legyen $[T;U] \in \mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)$ valamely rögzített ν alakú V_0 tablóra. Tekintsük az (U, U_0) párnak megfelelő

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix}$$

lexikografikus tömböt. Illesszük be $v_1, \dots, v_m$-et T-be és legyen S az a ferde tabló, amelyet $u_1, \dots, u_m$-nek a megfelelő új dobozokba írásával kapunk.

Mivel $V_0 = T \cdot U = (\dots(T \leftarrow v_1) \leftarrow \dots) \leftarrow v_m$, V alakja ν és a lemma szerint $S \in \mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$. Ezzel az egyik irányt beláttuk.

Megfordítva, legyen $S \in \mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)$, válasszunk egy tetszőleges λ alakú T_0 tablót, amelyre igaz, hogy T_0 minden eleme kisebb S minden eleménél. Jelölje $(T_0)_S$ azt a tablót, amelyet úgy kapunk, hogy S üres dobozaiba beírjuk T_0-t. Az RSK-megfeleltetés szerint a $(V_0, (T_0)_S)$ ν alakú tablópár a

$$\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n & u_1 & \dots & u_m \\ x_1 & \dots & x_n & v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix} \tag{1.78}$$

lexikografikus tömbnek felel meg valamely $x_1, \dots, x_n$ elemekre. Figyeljük meg, hogy T_0 azon tulajdonsága, miszerint minden eleme kisebb S minden eleménél, biztosítja, hogy a fenti tömb valóban lexikografikusan rendezett legyen. Ekkor

$$\begin{pmatrix} t_1 & \dots & t_n \\ x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow (T, T_0) \tag{1.79}$$

és

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_m \\ v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix} \longleftrightarrow (U, U_0) \tag{1.80}$$

valamely T, U tablókra, ismét csak az RSK-megfeleltetésben szerint. A tablpárok konstrukciója alapján $T \cdot U = V_0$, továbbá a $(T,)$ pár második tagja tényleg T_0. Az, hogy az $(U,)$ pár második tagja valóban U_0, a lemma következménye. A fentiek alapján

$$[T;U] \in \mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0) \ . \tag{1.81}$$

Az iméntiekből az is következik, hogy a két konstrukció inverze egymásnak. $\square$

Bizonyítás: [lemmáé] Válasszunk egy tetszőleges T° tablót, amely azonos alakú T-vel és minden eleme kisebb T minden eleménél (szükség esetén használhatunk például negatív számokat). Az RSK-megfeleltetésben

$$(T, T^\circ) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix} \ . \tag{1.82}$$

Az

$$\begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_m & u_1 & \dots & u_m \\ t_1 & \dots & t_m & v_1 & \dots & v_m \end{pmatrix} \tag{1.83}$$

tömb pedig egy $(T \cdot P, V)$ azonos alakú tablópárnak, ahol V egy, az

$$s_1, \dots, s_m, u_1, \dots, u_m$$

elemeket tartalmazó tabló. Állítsuk feljre a tömböt és tegyük az oszlopait lexikografikus sorrendbe. A szimmetria-tétel miatt az eredmény a $(V, T \cdot P)$ párnak felel meg, és ha a $\begin{pmatrix} t_i \\ s_i \end{pmatrix}$ oszlopokat kivesszük, a maradék a (Q, P) párhoz tartozik az RSK-megfeleltetésben.Ezért az alsó sor Knuth-ekvivalens az $w(V)$ szóval, az alsó sor maradéka az S_i elemek eltávolítása után pedig $w(Q)$-val. Látható azonban, hogy $w(V)$-ből törölve az m legkisebb elemet, $w(S)$-t kapjuk. Mivel az m legkisebb elem kivétele megőrzi a Knuth-ekvivalenciát,

$$w(S) \equiv w(Q)$$

ami egyenértékű azzal, hogy $Rect(S) = Q$. $\square$

1.103. Következmény. *$|\mathcal{S}(\nu/\lambda, U_0)| = |\mathcal{T}(\lambda, \mu, V_0)|$ és a közös elemszám nem függ az U_0, V_0 tablók választásától. Ebből következik, hogy a $c^{\nu}_{\lambda\mu}$ Littlewood–Richardson-szám jóldefiniált.*

1.104. Következmény. $c^{\nu}_{\lambda\mu} = c^{\overline{\nu}}_{\overline{\lambda\mu}} = c^{\nu}_{\mu\lambda}$.

1.105. Példa. $c^{(3,3,3)}_{(2,2),(3,2)} = 0$. *Ezt például az alábbi módon láthatjuk be. Vegyünk egy olyan* $(3,3,3)$*-alakú* V *tablót, amelynek bal felső sarka*

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & \\ \hline 2 & 2 & \\ \hline & & \\ \hline\end{array} \; .$$

A Littlewood–Richardson-számok viselkedéséről nem sokat tudunk, mindmáig aktív kutatás tárgya. Az alábbi tétel az erre vonatkozó egyik legfontosabb eredmény.

1.106. Tétel (Szaturáció-tétel; Knutson–Tao–Woodward). *Tetszőleges* λ, μ, ν *partíciók és* $N \geq 1$ *egész szám esetén*

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = 1 \Leftrightarrow c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} = 1 \; .$$

Reprezentációelméleti megfontolásokból fakad a következő gondolat.

1.107. Sejtés (Okounkov log-konkavitási sejtése). *A fenti jelölésekkel legyen*

$$f(N) \stackrel{def}{=} c^{N\nu}_{N\lambda,N\mu} \; .$$

Ekkor

$$f(N)^2 \geq f(N-1)f(N+1) \; .$$

Az alábbiakban a Littlewood–Richardson-számok egy alternatív jellemzését dolgozzuk ki, amely megkönnyíti kiszámításukat.

1.108. Definíció. *A* $w = x_1 \ldots x_r$ *szó* fordított rácsszó, *ha minden* $1 \leq s \leq r$ *esetén* $x_1 \ldots x_s$*-ben legalább annyi* 1 *van, mint* 2*, legalább annyi* 2 *van, mint* 3 *és így tovább.*

1.109. Példa. *A* 2132121 *szó fordított rácsszó, az* 1232121 *szó ellenben nem. Fontos észrevétel, hogy a fenti két szó Knuth-ekvivalens, tehát a fordított rácsszó tulajdonság nem invariáns a Knuth-ekvivalenciára nézve.*

1.110. Definíció. *Egy* F *ferde tabló* Littlewood–Richardson*-féle ferde tabló — röviden LR-ferde tabló —, ha* $w(F)$ *fordított rácsszó.*

1.111. Példa. *Tekintsük az* $(5,4,3,2)/(3,3,1)$ *ferde diagramot. Az alábbi egy Littlewood–Richardson-féle ferde tabló kitöltés:*

$$\begin{array}{ccccc} & & & \boxed{1} & \boxed{1} \\ & & & \boxed{2} & \\ & \boxed{2} & \boxed{3} & & \\ \boxed{3} & \boxed{4} & & & \end{array}$$

A következő azonos alakú ferde tabló ellenben nem rendelkezik a Littlewood–Richardson tulajdonsággal:

$$\begin{array}{ccccc} & & & \boxed{1} & \boxed{2} \\ & & & \boxed{2} & \\ & \boxed{2} & \boxed{3} & & \\ \boxed{3} & \boxed{4} & & & \end{array}$$

mivel hátulró olvasva az első három betű 122*, azaz ebben a szeletben több* 2*-es van, mint* 1*-es.*

1.112. Tétel. *Legyenek* λ, μ, ν *tetszőleges partíciók. Ekkor*

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = |\{\ \nu/\lambda \text{ alakú } \mu \text{ tartalmú LR-féle ferde tablók }\}|\ .$$

1.113. Példa. *Legyen* $\lambda = (3,2,1), \mu = (3,2,2), \nu = (5,4,3,1)$*. A* ν/λ *diagramnak négy* μ *tartalmú ferde tabló kitöltése van, ezek közül háromra teljesül a Littlewood–Richardson-tulajdonság. Így*

$$c^{(5,4,3,1)}_{(3,2,1),(3,2,2)} = 3\ .$$

1.114. Példa. *A legkisebb eset, amikor* $c^{\nu}_{\lambda\mu} > 1$*:* $\lambda = \mu = (2,1)$*,* $\nu = (3,2,1)$*. Amint arról könnyen meggyőződhetünk, egy* $(3,2,1)/(2,1)$ *alakú diagramnak kétféle* $(2,1)$ *tartalmú LR-kitöltése van:*

$$\begin{array}{ccc} & & \boxed{1} \\ & \boxed{1} & \\ \boxed{2} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \boxed{1} \\ & \boxed{2} & \\ \boxed{1} & & \end{array}$$

Tehát

$$c^{(3,2,1)}_{(2,1),(2,1)} = 2\ .$$

1.115. Megjegyzés. *Ha w, w' Knuth-ekvivalens szavak, akkor w és w' vagy mindketten fordított rácsszavak, vagy egyik sem (ennek igazolására ismét elég az elemi Knuth-transzformációkat ellenőrizni).*

1.116. Megjegyzés. *Vegyük észre, hogy ha egy LR-ferde tablót kiegyenesítünk, akkor egy olyan tablót kapunk, amelynek az i-edik sorában csupa i elem áll. Jelölje ezt a tablót $U(\mu)$.*

Ezek után belátjuk az iménti tételt.
Bizonyítás: Elég igazolni, hogy $Rect(S) = U(\mu)$ pontosan akkor, ha S LR-ferde tabló μ tartalommal.

Tekintsük először azt az esetet, amikor S már tabló. Megmutatjuk, hogy ekkor $S = U(\mu)$, azaz $U(\mu)$ az egyetlen adott alakú μ tartalmú LR tabló. Ez gyorsan, látszik, hiszen a fordított rácsszó tulajdonság miatt az első sor utolsó betűje 1-es, ezért az első sor összes eleme 1 kell, hogy legyen a tabló tulajdonság miatt. Szintén a tabló tulajdonság miatt 1-es máshol, mint az első sorban nem lehet, ezért a tablónk második sorának utolsó eleme 2 lesz. Azonban emiatt az egész második sor csupa 2-esből fog állni, és így tovább.

A ferde tablók kiegyenesítése megőrzi a Knuth-ekvivalenciát. Mivel a Knuth-ekvivalencia viszont megőrzi a fordított rácsszó tulajdonságot, az S ferde tabló pontosan akkor LR, ha $Rect(S)$ LR, azaz ha $Rect(S) = U(\mu)$. □

A Littlewood–Richardson-számok fő jelentősége abban áll, hogy segítségükkel le tudjuk írni a tablógyűrűbeli S_λ elemek szorzását. Ennek aztán számtalan további alkalmazása van.

1.117. Állítás (Littlewood–Richardson-szabály). *Az $R_{[m]}$ tablógyűrűben*

$$S_\lambda \cdot S_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} S_\nu \ .$$

Bizonyítás: Minden ν alakú V tabló pontosan $c^\nu_{\lambda\mu}$ módon áll elő mint egy λ alakú és egy μ alakú tabló szorzata. □

1.118. Megjegyzés. *Korábban láttuk, hogy $c^\nu_{\lambda\mu} = c^\nu_{\mu\lambda}$. Emiatt az S_λ elemek által $R_{[m]}$-ben generált részgyűrű kommutatív, noha maga az $R_{[m]}$ gyűrű nem.*

A tablógyűrűbeli Littlewood–Richardson-szabályra alkalmazva a

$$\Phi : R_{[m]} \to \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$$

kanonikus homomorfizmust, egy általános formulát kapunk a Schur-polinomok szorzására.

1.119. Következmény (Littlewood–Richardson-szabály II.).

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_m) s_\mu(x_1, \ldots, x_m) = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu(x_1, \ldots, x_m) \ .$$

2. fejezet

Szimmetrikus polinomok és függvények

2.1. Szimmetrikus polinomok és generátorfüggvényeik

Egy $f \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ polinomot *szimmetrikus*nak hívunk, ha az $x_1, \ldots, x_m$ változók tetszőleges permutációja esetén változatlan marad. Azaz, minden $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ választásra

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = f(x_1, \ldots, x_m) \tag{2.1}$$

$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$-ben.

2.1. Megjegyzés. *Az iménti definíciót az alábbi módon is megfogalmazhatjuk: a szimmetrikus polinomok nem mások, mint az $\mathfrak{S}_m$ csoportnak a $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ gyűrűbeli invariánsai.*

Az m-változós n-edfokú szimmetrikus polinomok $\mathbb{Z}$-modulusára a $\Lambda_n[m]$ jelölést használjuk, $\Lambda[m]$ pedig az m-változós szimmetrikus polinomok fokszámozott gyűrűjét jelöli.

Az alábbiakban nevezetes szimmetrikus polinomokat definiálunk, amelyek bizonyos halmazai az adott fokú szimmetrikus polinomok $\mathbb{Z}$-bázisait fogják alkotni. A továbbiakban n rögzített pozitív egész, a kérdéses szimmetrikus polinom foka, λ pedig az n szám egy partíciója.

2.2. Definíció (Elemi szimmetrikus polinomok). *Az n-edik m-változós elemi szimmetrikus polinom*

$$E_n(x_1,\ldots,x_m) := \sum_{1\le i_1<\cdots<i_n\le m} x_{i_1}\cdots x_{i_n}\ .$$

2.3. Definíció (Teljes szimmetrikus polinomok). *Az n-edik m-változós teljes szimmetrikus polinom*

$$H_n(x_1,\ldots,x_m) := \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_n\le m} x_{i_1}\cdots x_{i_n}\ .$$

2.4. Definíció (Monomiális szimmetrikus polinomok). *Tetszőleges $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ partíció esetén a λ-hoz tartozó monomiális szimmetrikus polinom:*

$$M_\lambda(x_1,\ldots,x_m) := \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_m} x_{\pi(1)}^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_{\pi(m)}^{\lambda_m}.$$

A szimmetrikus polinomok között igen fontos szerepet játszanak a már megismert Schur-polinomok. A teljesség kedvéért itt megismételjük a definíciójukat.

2.5. Definíció (Schur-polinomok). *Legyen T egy tetszőleges λ alakú Young-tabló kitöltve az $1,2,\ldots,m$ számokkal. Jelölje*

$$x_T := \prod_{(i,j)\in T} x_{T(i,j)}.$$

Ekkor a $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ partícióhoz tartozó Schur-polinom

$$S_\lambda(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{T \text{ alakja } \lambda} x_T,$$

ahol az összegzés végigfut az összes λ alakú Young-tablón, melyet az $1,2,\ldots,m$ számokkal töltöttünk ki.

Korábban láttuk, hogy a teljes, illetve elemi szimmetrikus polinomok a Schur-polinomok speciális esetei a

$$\lambda = (n)\ ,$$

illetve

$$\lambda = \underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n}$$

választással. A fentiek alapján definiálhatjuk az ún. általánosított teljes és elemi szimmetrikus polinomokat:

2.6. Definíció. *Legyen $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k)$ az n szám egy partíciója. Ekkor*

$$\begin{aligned} E_\lambda(x) &\stackrel{def}{=} E_{\lambda_1}(x) \cdot \ldots \cdot E_{\lambda_k}(x) \\ H_\lambda(x) &\stackrel{def}{=} H_{\lambda_1}(x) \cdot \ldots \cdot H_{\lambda_k}(x) \ . \end{aligned}$$

2.7. Példa. *Legyen $m = 2$, $\lambda = (2,1)$, tehát kétváltozós szimmetrikus polinomokat nézünk. Ekkor*

$$\begin{aligned} S_\lambda(x_1, x_2) &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \ , \\ H_\lambda(x_1, x_2) &= H_{\lambda_1}(x) H_{\lambda_2}(x) = (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)(x_1 + x_2) \\ &= x_1^3 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + x_2^3 \ , \\ E_\lambda(x_1, x_2) &= E_{\lambda_1}(x) E_{\lambda_2}(x) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \ , \\ M_\lambda(x_1, x_2) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} x_{\sigma(2)}^{\lambda_2} \\ &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \ . \end{aligned}$$

2.8. Állítás. *Tetszőleges λ partíció és $m \geq 1$ természetes szám esetén az $S_\lambda(x)$ Schur-polinomok szimmetrikusak.*

Bizonyítás: Elég belátni, hogy

$$(i, i+1) S_\lambda(x) = S_\lambda(x)$$

minden $(i, i+1)$ alakú transzpozícióra, mert a

$$\{(i, i+1) : \ 1 \leq i \leq m-1\}$$

halmaz generálja az $\mathfrak{S}_m$ szimmetrikus csoportot. Leírjuk a λ alakú T Young-tablók egy olyan $T \to T'$ involúcióját, ami az i-k és az i+1-k számát felcseréli, amikor T-ről T'-re térünk át, miközben a többi szám multiplicitása a tablóban megmarad.

Legyen adott a T Young-tabló. Ekkor minden oszlop vagy pontosan egy $i, i+1$ párt tartalmaz, vagy egyet sem. Hívjuk az $i, i+1$ párokat rögzített elemeknek, míg a többi i-t és $i+1$-t szabadnak. Ha egy sor tartalmaz k szabad i-t, amit l szabad $i+1$ követ, akkor helyettesítsük ezeket l szabad i-vel, majd azt követő k szabad $i+1$-gyel. Ezzel egy sorban felcseréltük a szabad i-k és $i+1$-k számát. Ily módon kapjuk az új T' Young-tablót. Látható, hogy T' valóban Young-tabló lesz a szabad párok definiciója miatt. Mivel a rögzített párok ugyanannyi i-t és $i+1$-t tartalmaznak, ezért ez a leképezés valóban felcseréli az i-k és az $i+1$-k számát, és nyilvánvalóan involúció. □

A tablókra vonatkozó Littlewood-Richardson szabályból adódik a Schur-polinomokra vonatkozó megfelelője:

2.9. Tétel (Littlewood–Richardson-szabály III.). *Tetszőleges λ, μ partíciók esetén a hozzájuk tartozó Schur-polinomokra*

$$S_\lambda \cdot S_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} S_\nu.$$

A különböző nevezetes szimmetrikus polinomok viselkedésének a leírásában fontos szerepet töltenek be a generátorfüggvényeik. Hasznos lesz, hogy ezeket a formális hatványsorként adott függvényeket gyakran zárt alakban is fel tudjuk írni. Ennek komoly szerepe lesz abban, hogy a külünböző nevezetes polinomrendszereket kit tudjuk egymásból fejezni.

2.10. Definíció. *Az m-változós elemi szimmetrikus polinomok generátorfüggvénye*

$$E(t, x_1, \ldots, x_m) = E(t, x) := \sum_{r=0}^{\infty} E_r(x) t^r.$$

2.11. Állítás.

$$E(t, x) = \prod_{i=1}^{m} (1 + x_i t).$$

Bizonyítás: Nyilván $E_r(x) = 0$, ha $r > m$. Ha kifejtjük a jobboldali szorzatot és t hatványai szerint csoportosítjuk a tagokat, éppen $E(t, x)$-t kapjuk. □

2.12. Definíció. *Az m-változós teljes szimmetrikus polinomok generátorfüggvénye:*

$$H(t, x_1, \ldots, x_m) = H(t, x) := \sum_{r=0}^{\infty} H_r(x) t^r.$$

2.13. Állítás.

$$H(t,x) = \prod_{i=1}^{m}(1-x_i t)^{-1}.$$

Bizonyítás: Tekintsük $(1-x_i t)^{-1}$ hatványsorba fejtését:

$$(1-x_i \cdot t)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x_i^k t^k. \tag{2.9}$$

Ezért

$$\prod_{i=1}^{m}(1-x_i t)^{-1} = \prod_{i=1}^{m}(\sum_{k=0}^{\infty} x_i^k t^k) = \sum_{r=0}^{\infty} H_r(x) t^r, \tag{2.10}$$

ami könnyen látszik, ha a szorzatot kifejtjük és csoportosítjuk a tagokat t hatványai szerint. $\square$

Az imént megismert generátorfüggvények segítségével fontos összefüggésekhez jutunk a nekik megfelelő szimmetrikus polinomok között.

2.14. Állítás. *Minden $n \geq 1$ esetén*

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r E_r(x) H_{n-r}(x) = 0.$$

Bizonyítás: Az (2.6) és (2.8) képletekből könnyen adódik, hogy

$$H(t,x) \cdot E(-t,x) = \prod_{i=1}^{m}(1-x_i t)\prod_{i=1}^{m}(1-x_i t)^{-1} = 1, \tag{2.12}$$

másrészt definició szerint

$$H(t,x) \cdot E(-t,x) = (\sum_{r=0}^{\infty} H_r(x) t^r) \cdot (\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r E_r(x) t^r). \tag{2.13}$$

A két hatványsort összeszorozva t^n együtthatójára kapjuk, hogy

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r E_r(x) H_{n-r}(x) = 0, \tag{2.14}$$

minden $n \geq 1$-re. $\square$

Ha egész együtthatók helyett racionálisakat is megengedünk, akkor az eddigieken túl szimmetrikus polinomok egy újabb fontos fajtája is előkerül, a Newton-féle ún. általánosított hatványösszegek.

2.15. Definíció. *Legyen $r \geq 1$ természetes szám, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tetszőleges partíció. A nekik megfelelő m-változós Newton-féle hatványösszegpolinomok*

$$P_r(x) = x_1^r + \ldots + x_m^r \ ,$$

illetve általánosított hatvánösszegpolinomok

$$P_\lambda(x) = P_{\lambda_1}(x) \ldots P_{\lambda_k}(x) \ .$$

2.16. Definíció. *A Newton-féle m-változós hatványösszeg-polinomok generátorfüggvénye*

$$P(t, x) := \sum_{r=1}^{n} P_r(x) t^{r-1} \ .$$

2.17. Állítás. *Minden $n \geq 1$ esetén*

$$nH_n = \sum_{r=1}^{n} P_r \cdot H_{n-r} \ .$$

Bizonyítás: A generátorfüggvény definíciójából adódóan

$$P(t, x) = \sum_{r=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{m} x_i^r) t^{r-1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{\infty} x_i^r t^{r-1}. \tag{2.16}$$

Fejtsük hatványsorba $x_i/(1 - x_i t)$-t:

$$\frac{x_i}{1 - x_i t} = \sum_{r=1}^{\infty} x_i^r t^{r-1}. \tag{2.17}$$

Ezt beírva (2.16)-be azt kapjuk, hogy

$$P(t, x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{1 - x_i t} = \sum_{i=1}^{m} (\log \frac{1}{1 - x_i t})', \tag{2.18}$$

ahol a jobboldalon a vessző t szerinti differenciálást takar. A (2.8) képletet alkalmazva arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} P(t, x) &= (\log \prod_{i=1}^{m} (1 - x_i t)^{-1})' \\ &= (\log H(t, x))' \\ &= \frac{H'(t, x)}{H(t, x)}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Tehát

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} rH_r(x)t^{r-1} &= H'(t,x) = P(t,x)\cdot H(t,x) \\ &= (\sum_{r=1}^{\infty} P_r(x)t^{r-1})\cdot(\sum_{r=0}^{\infty} H_r(x)t^r). \qquad (2.20)\end{aligned}$$

Azonban t^n együtthatója ugyanaz a jobb és a bal oldalon, így

$$nH_n = \sum_{r=1}^{n} P_r H_{n-r} \qquad (2.21)$$

minden $n \geq 1$-re. $\square$

Következőként kifejezzük H_n-t a P_λ-k lineáris kombinációjaként.

2.18. Definíció. *Ha λ egy tetszőleges partíciója n-nek, legyen*

$$z(\lambda) = \prod_{i\geq 1} i^{m_i}\cdot m_i!\ ,$$

ahol $m_i = m_i(\lambda)$ a λ partíció i-vel megegyező részeinek a száma.

2.19. Állítás.

$$H_n(x) = \sum_{\lambda:|\lambda|=n} \frac{P_\lambda(x)}{z(\lambda)} \qquad (2.22)$$

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy

$$H(t,x) = \sum_{\lambda} \frac{P_\lambda(x)t^{|\lambda|}}{z(\lambda)}. \qquad (2.23)$$

Ugyanis $P(t,x) = (\log H(t,x))'$ miatt

$$\log H(t,x) = \sum_{r=1}^{\infty} P_r(x)t^r/r\ ,$$

s így

$$\begin{aligned}H(t,x) &= \exp(\sum_{r=1}^{\infty} P_r(x)t^r/r) \qquad (2.24)\\ &= \prod_{r=1}^{\infty} \exp(P_r(x)t^r/r).\end{aligned}$$

Az $\exp(P_r(x)t^r/r)$ kifejezést hatványsorba fejtve kapjuk, hogy

$$\exp(P_r(x)t^r/r) = \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(P_r(x)t^r)^{m_r}}{r^{m_r} \cdot m_r!}. \tag{2.25}$$

Az eredményt (2.24)-be behelyettesítve az adódik, hogy

$$\begin{aligned} H(t,x) &= \prod_{r=1}^{\infty} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(P_r(x)t^r)^{m_r}}{r^{m_r} \cdot m_r!} \\ &= \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{(P_1 t)^{m_1}}{1^{m_1} \cdot m_1!} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(P_r t^r)^{m_r}}{r^{m_r} \cdot m_r!} \right) \end{aligned}$$

Ezt a kifejezést kifejtve és figyelembe véve, hogy t^n együtthatója egy véges összegből jön, kapjuk a (2.23) egyenlőséget. Mivel t^n együtthatója megegyezik (2.23) jobb- és baloldalán, a kívánt állítást bebizonyítottuk. □

A következő tételt felhasználjuk majd, amikor belátjuk, hogy a p_λ-k ortogonális bázist alkotnak a szimmetrikus függvények terében.

2.20. Tétel. *(Cauchy-Littlewood) Legyen λ tetszőleges partíció, $l, m, n \geq 1$ természetes számok. Ekkor*

(i) $\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_\lambda S_\lambda(x_1, \ldots, x_n) S_\lambda(y_1, \ldots, y_m)$

(ii) $\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_\lambda H_\lambda(x_1, \ldots, x_m) M_\lambda(y_1, \ldots, y_l)$

(iii) $\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_\lambda \frac{1}{z(\lambda)} P_\lambda(x_1, \ldots, x_m) P_\lambda(y_1, \ldots, y_l)$.

Bizonyítás: (i) A Robinson–Schensted–Knuth-megfeleltetés alkalmazásaként ennek az azonosságnak már láttuk a bizonyítását.
(ii) Látható, hogy

$$\begin{aligned} A &\overset{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{l} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\ &= \prod_{j=1}^{l} \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - x_i y_j} \\ &= \prod_{j=1}^{l} (\sum_{p=0}^{\infty} h_p(x) y_j^p) \ , \end{aligned} \tag{2.26}$$

hiszen $\prod_{i=1}^m \frac{1}{1-x_iy_j}$-t minden fix j-re hatványsorba fejthetjük, majd y_j hatványai szerint csoportosíthatjuk a tagokat. Kifejtve ezt a szorzatot azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A &= \sum_{p_1=0}^{\infty}\sum_{p_2=0}^{\infty}\dots\sum_{p_l=0}^{\infty} h_{p_1}(x)\dots h_{p_l}(x) y_1^{p_1}\dots y_l^{p_l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\sum_i p_i=k} h_{p_1}(x)\dots h_{p_l}(x) y_1^{p_1}\dots y_l^{p_l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\sum p_i=k:\ p_1\geq\dots\geq p_l} h_{p_1}(x)\dots h_{p_l}(x)\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_l} y_{\sigma(1)}^{p_1}\cdot\dots\cdot y_{\sigma(l)}^{p_l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\lambda|=l} h_\lambda(x)m_\lambda(y) = \sum_\lambda h_\lambda(x)\cdot m_\lambda(y). \end{aligned}$$

(iii) Az állítás következik (2.22)-ból és (2.23)-ből, az

$$\{x_iy_j:\ 1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq l\}$$

változókra alkalmazzuk ezeket a formulákat.
□

2.2. Szimmetrikus függvények

Szimmetrikus polinomok esetén sok szempontból lényegtelen, hogy pontosan hány változósak, mert a nevezetes szimmetrikus polinomok megfelelően specializálódnak, azaz ha $l < m$, akkor

$$p(x_1,\dots,x_l,0,\dots,0) = p(x_1,\dots,x_l)\ . \tag{2.27}$$

Emellett időnként fontos, hogy a változók száma kellően nagy legyen, például Schur-polinomok esetén ahol $S_\lambda = 0$ ha a változók száma kisebb λ sorainak a számánál.

E problémák megoldását orvosolja a szimmetrikus függvények fogalmának bevezetése.

2.21. Definíció. *Egy f* n-edfokú szimmetrikus függvény *n-edfokú szimmetrikus polinomok $\{f_m \mid m\geq 1\}$ egy halmaza, ahol $f_m\in\Lambda_n[m]$, továbbá tetszőleges $l < m$ esetén*

$$f_m(x_1,\dots,x_l,0,\dots,0) = f_l(x_1,\dots,x_l)\ . \tag{2.28}$$

Az n-edfokú szimmetrikus függvények $\mathbb{Z}$-modulusának jelölése Λ_n. Ezek segítségével definiálhatjuk a szimmetrikus függvények fokszámozott gyűrűjét:

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \oplus_{n\geq 0}\Lambda_n \ . \tag{2.29}$$

Meggondolható, hogy a szimmetrikus függvények gyűrűjében lévő műveletek a szimmetrikus polinomok közti műveletekkel kompatibilisek. A nevezetes szimmetrikus polinomoknak megfelelő szimmetrikus függvényeket az adott polinom kisbetűs verziójával jelöljük, azaz a teljes szimmetrikus függvényeket h_λ-val, az elemi szimmetrikus függvényeket e_λ-val, stb.

2.22. Megjegyzés. *Bármely $m_1 > m_2$ pár esetén az utolsó $m_1 - m_2$ változó kinullázása egy*

$$\Lambda[m_1] \to \Lambda[m_2] \tag{2.30}$$

fokszámozott gyűrűk közötti szürjektív homomorfimus. Ezen leképezések egy $\mathbb{N}$ elemeivel indexelt inverz rendszert alkotnak, a szimmetrikus függvények gyűrűje ennek a rendszernek az inverz limesze, azaz

$$\Lambda = \lim_{\substack{m\\ \leftarrow}} \Lambda[m] \ . \tag{2.31}$$

2.23. Állítás. *A fenti jelölésekkel*

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu$$

Bizonyítás: Először polinomokra bizonyítjuk be az állítást. A Schur-polinomok és a Kostka-számok definiciója szerint

$$S_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} x^\mu, \tag{2.32}$$

ahol az összegzés végigfut az n összes μ kompozícióján. Felhasználva a tényt, hogy a Schur-polinomok szimmetrikusak, azt kapjuk, hogy

$$S_\lambda = \sum_{\mu} K_{\lambda\mu} M_\mu, \tag{2.33}$$

ahol az összegzés végigfut az összes partíción. Láttuk, hogy

$$K_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = \mu \\ 0 & \text{ha } \lambda \not\trianglerighteq \mu, \end{cases} \tag{2.34}$$

ezzel az állítást polinomokra beláttuk. A bizonyított azonosság kompatibilis a változók kinullázásával, ezért a megfelelő szimmetrikus függvényekre is igaz marad. □

2.24. Állítás. *Az iménti jelölésekkel*

$$h_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda,\mu} s_\mu \ .$$

Bizonyítás: Az előző bizonyítás során használt érveléssel anaóg módon most is elég lesz megmutatni, hogy a szóbanforgó azonosság igaz a megfelelő szimmetrikus polinomokra.

Először írjuk fel $H_\lambda(x)$-t

$$H_\lambda(x) = H_{\lambda_1}(x) \cdot \ldots \cdot H_{\lambda_m}(x) = \sum_A \prod_{j=1}^n x_j^{a_{1j}+\ldots+a_{nj}}$$

alakban, ahol az összegzés végigfut az összes olyan $A = (a_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{N})$ mátrixon, melyre $\sum_{k=1}^n a_{lk} = \lambda_l$. A Robinson-Schensted-Knuth megfeleltetést használva ebből adódik, hogy

$$H_\lambda(x) = \sum_S x^\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda} S_\mu,$$

ahol az első összegben az összegzés végigfut az összes μ alakú és λ tartalmú tablón. Felhasználva, hogy

$$K_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = \mu \\ 0 & \text{ha } \lambda \ntrianglelefteq \mu, \end{cases} \tag{2.35}$$

a második összegben az összegzés valóban csak a $\mu \trianglelefteq \lambda$ partíciókon fut végig. Ezzel a kívánt állítást beláttuk. □

A következő eredmény a fejezet központi mondanivalója, amely bizonyos formában már jól ismert.

2.25. Tétel. *(Szimmetrikus függvények alaptétele) Az alábbi halmazok mind bázisát alkotják az n-edfokú szimmetrikus függvények Λ_n $\mathbb{Z}$-modulusának*

(i) $\{m_\lambda : \ |\lambda| = n\}$

(ii) $\{e_\lambda : |\lambda| = n\}$

(iii) $\{h_\lambda : |\lambda| = n\}$

(iv) $\{s_\lambda : |\lambda| = n\}$.

Amennyiben racionális együtthatókat is megengedünk, a

$$\{p_\lambda : |\lambda| = n\}$$

halmaz az n-edfokú szimmetrikus függvények $\mathbb{Q}$-vektorterének bázisa lesz.

Bizonyítás: Amint azt látni fogjuk, a munka jelentős részét már valamilyen formában elvégeztük.
(i) Az m_λ-k nyilván függetlenek $\mathbb{Z}$ felett és definició szerint generálják Λ_n-t.
(ii) Legyen $C = (c_{\lambda,\mu})$ az az együtthatómátrix, ahol $c_{\lambda,\mu}$-t az e_λ-t az $\{m_\nu : |\nu| = n\}$ bázisban kifejtve kapjuk, mint az m_μ együtthatóját. Ha belátjuk, hogy C a λ partíciók egy megfelelő rendezésében olyan háromszög alakú mátrix, melynek a diagonalisában 1 vagy -1 értékek állnak, akkor C^{-1} létezik és így $\{e_\lambda : |\lambda| = n\}$ szintén $\mathbb{Z}$-bázisa lesz Λ_n-nek. Elég lesz a bizonyításhoz az is, ha $e_{\overline{\lambda}}$-t fejezzük ki az $\{m_\nu : |\nu| = n\}$ bázisban, ahol $\overline{\lambda}$ a λ konjugáltja.

2.26. Állítás. *$e_{\overline{\lambda}} = m_\lambda + \sum_\nu c_{\lambda,\nu} m_\nu$, ahol $c_{\lambda,\nu} \in \mathbb{N}$ és az összegzés végigfut azokon a ν partíciókon, melyek kisebbek a fordított lexikografikus rendezésben.*

Bizonyítás: Legyen $\overline{\lambda} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$. Tudjuk, hogy $e_{\overline{\lambda}} = e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot e_k^{m_k}$, ahol $m_i = m_i(\overline{\lambda}) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$. Ha kifejtjük ezt a szorzatot, monomok összegét kapjuk, s ha e monomokat a fordított lexikografikus rendezésben vizsgáljuk, a kifejezés főtagja éppen

$$x_1^{m_1}(x_1x_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x_1 \ldots x_k)^{m_k} = x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\lambda_k} = x^\lambda.$$

lesz.

Mivel $e_{\overline{\lambda}}$ szimmetrikus polinom, ezért ebből már következik, hogy az m_λ 1 együtthatóval szerepel az $\{m_\nu : |\nu| = n\}$ bázisban való kifejtésben, míg a többi ν, amire m_ν még szerepelhet, kisebbek λ–nál a fordított lexikografikus rendezésben.
(iii) Mivel $|\{h_\lambda : |\lambda| = n\}| = |\{e_\nu : |\nu| = n\}|$, ezért elég azt belátni, hogy a h_λ-k generátumában benne vannak az e_μ-k, s fordítva. Elég azt megmutatni, hogy minden e_n felírható a h_k-k egy polinomjaként és fordítva. De ez könnyen adódik n szerinti indukcióval a $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r h_{n-r} = 0$ képletből.

(iv) Mivel
$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda,\mu} m_\mu,$$
ezért minden s_λ benne van az m_μ-k generátumában, s így egyúttal a h_μ-k generátumában is. Másrészt beláttuk, hogy
$$h_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda,\mu} s_\mu,$$
ezért a h_λ-k is benne vannak az s_μ-k generátumában. Tehát a két generátum megegyezik, amiből már adódik, hogy $\{s_\lambda : |\lambda| = n\}$ $\mathbb{Z}$-bázis.

Végül belátjuk a hatványösszegpolinomokra vonatkozó állítást. Ehhez a p_λ-k és a h_λ-k generátumának egyezését használjuk. Ez könnyen adódik n szerinti indukcióval abból, hogy $nh_n = \sum_{r=1}^n p_r h_{n-r}$ minden $n \geq 1$-re. $\square$

2.27. Megjegyzés. *Gyakran csak (2)-t szokták a szimmetrikus függvények alaptételének nevezni.*

A szimmetrikus függvények alaptételének következménye, hogy bármely bázis elemei kifejezhetők bármely másik bázis elemeinek egész együtthatós lineáris kombinációjaként. A fentiekben már konkrétan kiszámítottuk a bázistranszformációkat.

A szimmetrikus függvények alaptétele szerint
$$\Lambda \simeq \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots] \tag{2.36}$$
$$\simeq \mathbb{Z}[e_1, e_2, \dots] \tag{2.37}$$
mint gyűrűk, de a fokszámozás más. Fontos észrevétel, hogy az összes eddigi — szimmetrikus polinomokra bizonyított — azonosság érvényben marad, hiszen kompatibilisek a változók kinullázásával.

Ugyanígy megvan a Littlewood–Richardson-szabály megfelelője szimmetrikus függvényekre:
$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} s_\nu \ . \tag{2.38}$$

A következőkben megvizsgáljuk az n-edfokú szimmetrikus polinomok által alkotott Λ_n-nek $\mathbb{Z}$-modulusnak a bázistranszformációit.

Legyen M egy nemszinguláris mátrix. Ekkor M' jelöli a továbbiakban a transzponáltját, és M^* jelöli az M transzponált inverzét. A továbbiakban olyan mátrixokkal foglalkozunk, amelyek sorait és oszlopait egy n pozitív egész partíciuóival indexeljük meg. An n partícióit fordított lexikografikus rendezésben adjuk meg.

J-vel jelöljük a transzpozíciós mátrixot, azaz

$$J_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \overline{\lambda} = \mu \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2.39}$$

Legyenek (u_λ) és (v_λ) két olyan $\mathbb{Z}$-bázisa Λ^n-nek, melyeket n partícióival indexelünk. Jelölje $M(u,v)$ azt az $(M_{\lambda,\mu})$ együtthatómátrixot, melyet az

$$u_\lambda = \sum_\mu M_{\lambda,\mu} v_\mu$$

bázistranszformációs egyenlet definiál. Ekkor $M(u,v)$-t az (u_λ) bázisról a (v_λ) bázisra való áttérési mátrixnak is nevezzük. Mivel bázistranszformációból származik, ezért egész értékű, nemszinguláris mátrixnak adódik.

Tekintsük most Λ_n négy nevezetes bázisát: (e_λ)-t, (h_λ)-t, (m_λ)-t és (s_λ)-t. Egyszerű számolással igazolható, hogy ezen bázispárokhoz tartozó áttérési mátrixokat ki lehet fejezni a $K := M(s,m)$ és a J transzpozíciós mátrix segítségével. A következő táblázat u. sorában és v. oszlopában az $M(u,v)$ áttérési mátrix áll:

	e	h	m	s
e	1	$K'JK^*$	$K'JK$	$K'J$
h	$K'JK^*$	1	$K'K$	K'
m	$K^{-1}JK^*$	$K^{-1}K^*$	1	K^{-1}
s	JK^*	K^*	K	1

Mivel a Schur-polinomok a szimmetrikus függvények egy $\mathbb{Z}$-bázisát alkotják, az a kikötés, hogy ortonormált bázist alkossanak, egy jóldefiniált skalárszorzatot ad Λ-n:

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = \mu \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{2.40}$$

2.28. Állítás. *Az eddigi jelölésekkel:*
(1) $\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$,
(2) $\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z(\lambda) \cdot \delta_{\lambda\mu}$.

Bizonyítás: (1) Írjuk fel $h_\lambda(x)$-t és $m_\mu(y)$-t a

$$h_\lambda(x) = \sum_\nu a_{\lambda\nu} s_\nu(x) \tag{2.41}$$

$$m_\mu(y) = \sum_\kappa b_{\mu\kappa} s_\kappa(y) \tag{2.42}$$

alakban. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y) &= \sum_\lambda \left(\sum_\nu a_{\lambda\nu} s_\nu(x) \right) \left(\sum_\kappa b_{\lambda\kappa} s_\kappa(y) \right) \\ &= \sum_{\lambda,\kappa,\nu} a_{\lambda\nu} b_{\lambda\kappa} s_\nu(x) s_\kappa(y) \\ &= \sum_{\kappa,\nu} \left(\sum_\lambda a_{\nu\lambda} b_{\lambda\kappa} \right) s_\nu(x) s_\kappa(y) \ . \end{aligned} \tag{2.43}$$

Másrészt viszont

$$\sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y) = \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) \tag{2.44}$$

és felhasználva, hogy az $s_\mu(y)$-k a $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ felett is lineárisan függetlenek, így kapjuk, hogy

$$\sum_\lambda a_{\nu\lambda} b_{\lambda\kappa} = \delta_{\nu\kappa} \tag{2.45}$$

ezért

$$\langle \sum_\nu a_{\lambda\nu} s_\nu(x), \sum_\kappa b_{\lambda,\kappa} s_\kappa(y) \rangle = \sum_{\nu\kappa} a_{\lambda\nu} b_{\lambda\kappa} \langle s_\nu(x), s_\kappa(y) \rangle = \delta_{\nu\kappa}.$$

(2): Hasonlóan lehet bizonyítani, mint (1)-t, csak $p_\lambda/z(\lambda)$-t és p_μ-t kell felírni az s_λ-k által alkotott bázisban.
□

Legyenek (u_λ) és (v_λ) két olyan $\mathbb{Z}$-bázisa Λ^n-nek, melyeket n partícióival indexelünk. Jelölje $T(u,v)$ azt az $(T_{\lambda,\mu})$ mátrixot, melyet a

$$T_{\lambda,\mu} := \langle u_\lambda, v_\mu \rangle$$

skalárszorzatok definiálnak. A következő táblázat u. sorában és v. oszlopában a $T(u,v)$ skalárszorzatmátrixot írtuk fel:

	e	h	m	s
e	$JKK'J$	$J'KK'$	J	$K'J$
h	$KK'J$	KK'	1	K'
m	J	1	K^*K	K^{-1}
s	$K'J$	K'	K^{-1}	1

2.29. Definíció. *Legyenek λ és μ ugyanannak az n egésznek a partíciói. Definiáljuk a χ^λ_μ, ξ^λ_μ egészeket az alábbi formulák szerint:*

$$\begin{aligned} p_\mu &= \sum_\lambda \chi^\lambda_\mu s_\lambda \\ &= \sum_\lambda \xi^\lambda_\mu m_\lambda \ , \end{aligned}$$

azaz legyenek p_μ koordinátái a megfelelő bázisokban.

Tekintsük az $\omega : \Lambda \to \Lambda$
$$s_\lambda \mapsto s_{\overline{\lambda}}$$
lineáris transzformációt.

2.30. Állítás. *Az eddigi jelölésekkel*

(i) ω *izometrikus gyűrűhomomorfizmus a* $\langle\ ,\ \rangle$ *skalárszorzatra nézve.*

(ii) $\omega(h_\lambda) = e_\lambda$

(iii) $\omega(p_\mu) = (-1)^{\sum \mu_i - 1} p_\mu$.

Bizonyítás: (i): Először is, ω olyan lineáris endomorfizmusa Λ-nak, amely az s_λ-k által alkotott ortonormált bázist egy másik ortonormált bázisba viszi, így megőrzi az adott skaláris szorzatot.

Másrészt
$$\omega(s_\lambda \cdot s_\mu) = \omega(\sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} s_\nu) = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} \omega(s_\nu) \tag{2.46}$$
hiszen ω lineáris transzformáció. Ezért
$$\omega(s_\lambda \cdot s_\mu) = \sum_\nu c^{\overline{\nu}}_{\lambda,\mu} s_{\overline{\nu}} = \sum_\nu c^\nu_{\overline{\lambda},\overline{\mu}} s_\nu, \tag{2.47}$$
hiszen $c^\nu_{\overline{\lambda},\overline{\mu}} = c^{\overline{\nu}}_{\lambda,\mu}$ a Littlewood–Richardson-együtthatók definiciója alapján. Tehát
$$\omega(s_\lambda \cdot s_\mu) = s_{\overline{\lambda}} \cdot s_{\overline{\nu}} = \omega(s_\lambda)\omega(s_\nu).$$
(ii): Közvetlen számolás mutatja, hogy
$$\omega(h_p) = \omega(s_{(p)}) = s_{(1,1,\ldots,1)} = e_p\ . \tag{2.48}$$
(iii): A szorzattartás miatt elég belátni, hogy
$$\omega : p_r \mapsto (-1)^{r-1} p_r\ . \tag{2.49}$$
Ez viszont teljes indukcióval következik a
$$ne_n(x) - p_1(x)e_{n-1}(x) + \cdots + (-1)^n p_n(x) = 0 \tag{2.50}$$
$$nh_n(x) - \cdots - p_n(x) = 0 \tag{2.51}$$
azonosságokból.

□

Egy érdekes következménye a fentieknek:

2.31. Következmény.

$$\prod_{i=1}^{l}\prod_{j=1}^{k}(1+x_iy_j)=\sum_{\lambda} m_\lambda(x)e_\lambda(y)=\sum_{\lambda} s_\lambda(x)s_{\overline{\lambda}}(y)$$

Bizonyítás: Alkalmazzuk az ω involúciót az x-ben szimmetrikus függvényekre a Cauchy–Littlewood-formulákban szereplő (i) és (ii) képletekben. $\square$

3. fejezet

A szimmetrikus csoportok reprezentációelmélete

3.1. Reprezentációk konstrukciója

Ebben a fejezetben azzal az alapvető feladattol fogunk foglalkozni, hogy egy adott G (véges) csoport meglévő reprezentációiból hogyan tudunk újakat készíteni. Itt két gyakran használt módszerrel ismerkedünk meg, egyrészt a multilineáris algebra eszközeinek használatával (reprezentációk direkt összege, duálisa, tenzorszorzata, stb.), másrészt egy $H \leq G$ részcsoport reprezentációiból készített ún. indukált reprezentációkkal.

A használt terminológia rögzítése érdekében idézzük fel az alapvető definíciókat. A G csoport egy *reprezentáció*ja egy

$$\rho : G \to GL(V)$$

csoporthomomorfizmus, ahol V egy vektortér, $GL(V)$ pedig V lineáris automorfimusainak a csoportja. Ezt ekvivalens módon úgy is mondhatjuk, hogy a V vektortéren egy G-modulus struktúrát értelmezünk. A csoporthatás jelölésére a $\rho(g)(v)$ avagy — ha nem kívánjuk a reprezentációt megnevezni — $g.v$ vagy $g(v)$ jelöléseket használjuk.

3.1.1. Lineáris algebrai konstrukciók

Az alfejezet során G nem feltétlenül kell, hogy véges legyen, kivéve, ha ezt kifejezetten említjük. Legyen tehát G egy csoport, V, W G reprezentációi.

A reprezentációk *direkt összeg*ét az alábbi módon definiáljuk: mint vektortér legyen $V \oplus W$ az azonos nevű vektortér, a G-hatás pedig legyen

$$g.(v \oplus w) = (g.v) \oplus (g.w) \ .$$

Hasonlóképpen definiálhatjuk a V,W reprezentációk *tenzorszorzat*át, azaz a G-modulus struktúrát a $V \otimes W$ vektortéren:

$$g.(v \otimes w) = (g.v) \otimes (g.w) \ . \tag{3.1}$$

A $v \otimes w$ tenzorok lineárisan generálják a $V \otimes W$ vektorteret és a az iménti G-hatás egyértelműen kiterjed rá. Ezt röviden a következőképpen láthatju be: vesszük V-nek, illetve W-nek egy $\{e_i\}$ illetve $\{f_j\}$ bázisát, az ezek elemeiből képzett $\{e_i \otimes f_j\}$ tenzorok $V \otimes W$ egy bázisát adják. Eme bázis elemein a most definiált hatás egyértelmű és egyértelműen terjed ki lineárisan az egész $V \otimes W$ vektortérre. Ellenőrizhető, hogy az eredmény megegyezik a 3.1 alatt megadottal.

Egy fontos speciális esetet szolgáltatnak egy rögzített V reprezentáció $V^{\otimes n}$ tenzorhatványai. Amint azt láttuk, egy $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ tenzoron a G csoport hatása

$$g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (g.v_1) \otimes \cdots \otimes (g.v_n) \ .$$

A tenzorhatványok altereiként természetes G-modulus struktúrájuk van a $\mathrm{Sym}^n V$ szimmetrikus és $\Lambda^n V$ alternáló hatványoknak: $v_1, \ldots, v_n \in V$ esetén

$$g.(v_1 \cdot \ldots \cdot v_n) = (g.v_1) \cdot \ldots \cdot (g.v_n)$$

illetve

$$g.(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = (g.v_1) \wedge \cdots \wedge (g.v_n) \ .$$

3.1. Megjegyzés. *A multilineáris algebrában megismert azonosságok reprezentációkra is igazak maradnak:*

$$V \otimes (W_1 \oplus W_2) = (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$$

$$Sym^n(V \oplus W) = \oplus_{i+j=n} Sym^i V \otimes Sym^j V$$

$$\Lambda^n(V \oplus W) = \oplus_{i+j=n} \Lambda^i V \otimes \Lambda^j V \ .$$

Kevésbé magától értetődő a *duális reprezentáció* definíciója. A duális reprezentáció alaptere V duális vektortere, azaz $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$. Azt szeretnénk, hogyha a V-n és V^*-on értelmezett G-modulus struktúrák kompatibilisek lennének az alábbi értelemben: legyen $\langle\ ,\ \rangle$ a $V^* \otimes V$-n lévő természetes párosítás, azaz bármely $e \in V$ és $f^* \in V^*$ esetén

$$\langle f^*, e\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} f^*(e) \ .$$

Azt követeljük meg, hogy minden $v \in V$, $v^* \in V^*$, $g \in G$ esetén

$$\langle g.v^*, g.v\rangle = \langle v^*, v\rangle$$

teljesüljön. Látható, hogy ez pontosan a

$$g.v^* = \left(g^{-1}\right)^T .v$$

választással teljesül.

Az előző eset általánosítása a $\mathrm{Hom}(V, W)$ reprezentáció, ahol is a $V \to W$ lineáris leképezéseket látjuk el G-hatással:

$$(g.\phi)(v) = g.(\phi(g^{-1}.v) \ .$$

Ellenőrizhető, hogy az iménti definíció kompatibilis a

$$V^* \otimes W = \mathrm{Hom}(V, W)$$

kanonikus vektortérizomorfizmuson keresztül a baloldalon lévő G-hatással.

3.2. Megjegyzés. *Amint azt már korábban említettük, a lineáris algebrai azonosságok továbbra is érvényben maradnak G-modulusokra. Például*

$$Sym^n(V^*) = (Sym^n V)^* \ , \ \Lambda^n(V^*) = (\Lambda^n V)^* \ .$$

Csoportreprezentációk igen jellemző invariánsa a karakterük. Fontos tehát, hogy ki tudjuk számítani az iménti konstrukciók karaktereit a V, W reprezentációk karaktereinek ismeretében.

3.3. Állítás. *Az eddigi jelölésekkel*

$$\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W \ , \ \chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W \ , \ \chi_{V^*} = \overline{\chi}_V \ .$$

Továbbá tetszőleges $g \in G$ esetén

$$\chi_{\mathrm{Sym}^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 + \chi_V(g^2)\right) \ , \ \chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right) \ .$$

3.4. Megjegyzés. *A magasabb szimmetrikus és alternáló hatványok karaktereit is meg tudjuk pontosan határozni: a tétel jelöléseivel*

$$\chi_{\mathrm{Sym}^k V}(g) = \sum_{\mathbf{i}} \frac{1}{z(\mathbf{i})} \prod_{j=1}^{k_{\mathbf{i}}} \chi_V(g^i)^{i_j}$$

és

$$\chi_{\Lambda^k V}(g) = \sum_{\mathbf{i}} \frac{(-1)^{\sum_j i_j - 1}}{z(\mathbf{i})} \prod_{j=1}^{k_{\mathbf{i}}} \chi_V(g^i)^{i_j} \ ,$$

ahol az összegzés minden olyan $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d)$ *sorozatra terjed ki, ahol* $\sum_j j i_j = d$. *Ezen összefüggések gyorsan beláthatók a szimmetrikus függvényekről látottak ismeretében, ti. a fenti formulák nem mások, mint a teljes, illetve elemi szimmetrikus polinomok kifejezései a Newton-féle általánosított hatványösszegek segítségével.*

Bizonyítás: Azt a jól ismert tényt fogjuk felhasználni, hogy egy endomorfizmus nyoma a sajátértékeinek (multiplicitással vett) összege. Legyen $g \in G$ tetszőleges rögzített elem. Tegyük fel továbbá, hogy $g \in \mathrm{End}(V)$ sajátértékei (multiplicitással) $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $(1 \leq i \leq \dim V)$, $g \in \mathrm{End}(W)$ sajátértékei pedig $\mu_j \in \mathbb{C}$ $(1 \leq j \leq \dim W)$.

Ismert, hogy ekkor g sajátértékei $V \oplus W$-n illetve $V \otimes W$-n $\{\lambda_i\} \cup \{\mu_j\}$, illetve $\{\lambda_i \mu_j\}$. Ebből azonnal adódik a direkt összeg és a tenzorszorzat karakterére vonatkozó eredmény.

Hasonlóképpen a V^* reprezentációban g sajátértékei λ_i^{-1}, ami mivel $\lambda^{|G|} = 1$, 1 abszolútértékű komplex szám, ezért $\lambda_i^{-1} = \bar{\lambda}_i$.

Az alternáló négyzetre vonatkozó képlet a következőképpen adódik: a g elem sajátértékei a $\Lambda^2 V$ vektortéren

$$\{\lambda_i \lambda_j \mid 1 \leq i < j \leq \dim V\} \ .$$

Vegyük észre, hogy g^2 sajátértékei V-n

$$\left\{\lambda_i^2 \mid 1 \leq i \leq \dim V\right\} \ ,$$

így az alternáló négyzet karakterére vonatkozó eredmény rögtön következik a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq \dim W} \lambda_i \lambda_j = \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{frm[o]-- \leq i \leq \dim V} \lambda_i \right)^2 - \sum_{1 \leq i \leq \dim V} \lambda_i^2 \right)$$

azonosságból. A szimmetrikus négyzet karakterére vonatkozó állítást ezzel teljesen analóg módon igazolható.
□

3.5. Állítás. *Legyen V véges-dimenziós vektortér. Ekkor a $w^k \in \mathrm{Sym}^k V$ elemek kifeszítik a $\mathrm{Sym}^k V \subseteq V^{\otimes k}$ alteret.*

3.1.2. Indukált reprezentációk és karaktereik

Legyen G véges csoport, $H \leq G$. Most azzal a kérdéssel fogunk foglalkozni, hogy hogyan tudunk egyik csoport egy reprezentációjából a másik egy reprezentációját előállítani. Az egyik irány egyszerű: ha adott G egy $\rho : G \to GL(V)$ reprezentációja, annak H-ra történő $\rho|_H : H \to GL(V)$ megszorítása automatikusan H egy reprezentációja lesz, jelölje ezt $\mathrm{Res}_H^G V$.

Ha H egy $\rho : H \to GL(W)$ reprezentációja adott, már nem látszik azonnal, hogyan terjeszthető ki G egy reprezentációjává, tipikusan a W vektortér lineáris automorfizmusai körében ez nem is tehető meg.

Vegyük észre azonban a következőt: ha V a G csoport egy reprezentációja, $W \subseteq V$ H-invariáns altér, akkor mivel $g \in G, h \in H$ esetén

$$gh \cdot W = g \cdot W \ ,$$

a $g \cdot W$ altér csak a gH mellékosztálytól függ. Esély van tehát arra, hogy W-ből elkészítsük G egy reprezentációját a

$$V = \oplus_{gH \in G/H} g \cdot W \tag{3.2}$$

vektortéren. Amint a következő tételben látni fogjuk, ez teljes általánosságban megtehető.

3.6. Tétel. *Tetszőleges $H \leq G$ csoportokra és H bármely $\rho : H \to \mathrm{End}(W)$ reprezentációjára izomorfizmus erejéig egyértelműen létezik G-nek egy olyan $\hat{\rho} : H \to \mathrm{End}(V)$ reprezentációja, amelyre $W \leq V$ és V egyértelműen írható*

$$V = \oplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W$$

alakba.

2. Jelölés. *V-t a W-ből indukált reprezentációnak hívjuk, jele $IndW = Ind_H^G W$.*

Bizonyítás: Válasszunk G minden H szerinti $\sigma = gH$ baloldali mellékosztályából egy g_σ reprezentánst, legyen H reprezentánsa az egységelem. Legyen továbbá

$$V = \oplus_{\sigma \in G/H} g_\sigma \cdot W$$

mint komplez vektortér. Először is vegyük észre, hogy minden $v \in V$ egyértelműen írható

$$v = \sum_{gH \in G/H} g w_g$$

alakba, hiszen V a $g \cdot W$ vektorterek direkt összege.

Legyen most $g \in G$ tetszőleges, $\sigma, \tau \in G/H$. Ekkor

$$g g_\sigma = g_\tau h$$

valamely $h \in H$ esetén, továbbá

$$g(g_\sigma w_\sigma) = (g g_\sigma) w_\sigma = (g_\tau h) w_\sigma = g_\tau (h w_\sigma) \ .$$

Definiáljuk G hatását a V vektortéren az alábbi módon: bármely $g \in G$, $\sigma \in G/H$, $w_\sigma \in W$ esetén legyen

$$g(g_\sigma w_\sigma) = g_\tau (h w_\sigma)$$

ahol $g g_\sigma = g_\tau h$. Ezzel megadtunk egy G-ből $\operatorname{End} V$-be menő függvényt, amelyről azt kell még belátni, hogy csoportok közti homomorfizmus. Mivel az egységelem az identitás lineáris transzformációra képződik, elég lesz megmutatni, hogy a függvény szorzattartó. Rögzítsünk tetszőleges $g_1, g_2 \in G$ elemeket. Az igazolandó összefüggés

$$g_1(g_2(g_\sigma w_\sigma)) = (g_1 g_2)(g_\sigma w_\sigma) \ .$$

Az eddig elmondottak szerint

$$g_1 g_\sigma = h_1 g_\tau$$

és

$$g_2 g_\tau = h_2 g_\rho$$

valamely (egyértelműen meghatározott) $h_1, h_2 \in H$ elemekre. Azonban mivel G csoport,

$$\begin{aligned}(g_2 g_1)(g_\sigma) &= g_2(g_1 g_\sigma) \\ &= g_2(g_\tau h_1) \\ &= (g_2 g_\tau) h_1 \\ &= (g_\rho h_2) h_1 \\ &= g_\rho(h_2 h_1) \ .\end{aligned}$$

Ily módon

$$\begin{aligned}g_2(g_1(g_\sigma w_\sigma)) &= g_2(g_\tau(h_1 w_\sigma)) \\ &= g_\rho((h_2 h_1) w_\sigma) \\ &= (g_2 g_1)(g_\sigma w_\sigma) \ .\end{aligned}$$

□

3.7. Megjegyzés. *Az indukált reprezentáció dimenziója*

$$\dim \operatorname{Ind}_H^G W = |G : H| \cdot \dim W \ .$$

Az alábbiakban ismertetjük az indukált reprezentációk számunkra fontos tulajdonságait bizonyítás nélkül.

3.8. Állítás. *Az indukált reprezentáció képzése a reprezentációban additív, azaz ha $H \le G$ véges csoportok, $W = \oplus_{i \in I} W_i$ reprezentációk véges direkt összege, akkor*

$$\operatorname{Ind}_H^G W = \bigoplus_{i \in I} \operatorname{Ind}_H^G W_i \ .$$

3.9. Tétel (Indukált reprezentációk karakterei). *A fenti jelölések megtartása mellett legyen C A G csoport egy konjugáltosztálya, amelyre $C \cap H$ H-beli konjugáltosztályokra történő felbontása*

$$C \cap H = C_1 \cup \cdots \cup C_t \ .$$

Ekkor

$$\chi_{\operatorname{Ind}_H^G W}(C) = |G : H| \sum_{i=1}^{t} \frac{|C_i|}{|C|} \chi_W(\mathcal{C}_i) \ .$$

3.10. Tétel (Frobenius reciprocitás). *Legyenek $H \leq G$ véges csoportok, W H-nak, V' pedig G-nek egy reprezentációja. Ekkor*

$$(\chi_{\mathrm{Ind}\,W}, \chi_{V'})_G = (\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}\,V'})_H$$

az osztályfüggvények terén értelmezett

$$(\phi, \xi)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(\bar{g}) \xi(g)$$

skalárszorzattal.

3.2. A szimmetrikus csoportok irreducibilis reprezentációi

Az S_n irreducibilis reprezentációi nem mások, mint a $\mathbb{C}S_n$ csoportalgebra minimális balideáljai. Ezeket fogjuk most explicit módon leírni.

Legyen λ tetszőleges partíció, tekintsük az S_n szimmetrikus csoport alábbi λ-hoz rendelt részcsoportjait.

$$P = P_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\ \sigma \in S_n \mid \ \sigma \text{ megőrzi } \lambda \text{ minden sorát }\} \tag{3.3}$$

a λ partíció *sorcsoportja*,

$$Q = Q_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{\ \sigma \in S_n \mid \ \sigma \text{ megőrzi } \lambda \text{ minden oszlopát }\} \tag{3.4}$$

pedig a λ-hoz tartozó *oszlopcsoport.* Ezekhez a részcsoportokhoz hozzárendeljük a $\mathbb{C}S_n$ csoportalgebrabeli összegüket:

$$a_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in P_\lambda} e_\sigma, \tag{3.5}$$

$$b_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in Q_\lambda} \mathrm{sgn}(\sigma) e_\sigma \tag{3.6}$$

ahol $\mathrm{sgn}(\sigma)$ a σ permutáció előjele,

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} -1 & \text{ha } \sigma \text{ páratlan permutáció} \\ 1 & \text{ha } \sigma \text{ páros permutáció.} \end{cases}$$

Legyen most V tetszőleges véges dimenziós vektortér, amelynek n-edik $V^{\otimes n}$ tenzorhatványán S_n a tényezők permutálásával hat. Vizsgáljuk meg, mi a hatása az a_λ, b_λ elemeknek a $V^{\otimes n}$ tenzorhatványon. Láthatóan az a_λ-nak mint $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$-beli endomorfizmusnak a képe

$$\mathrm{Im}\ a_\lambda = \mathrm{Sym}^{\lambda_1} \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{\lambda_k} \subseteq V^{\otimes n} \ . \tag{3.7}$$

Hasonlóképpen, ha $\mu = \lambda'$ a λ partíció konjugáltja, akkor

$$\mathrm{Im}\ b_\lambda = \Lambda^{\mu_1} V \otimes \Lambda^{\mu_2} V \otimes \cdots \otimes \Lambda^{\mu_k} V \subseteq V^{\otimes n} \ . \tag{3.8}$$

3.11. Definíció. *A fenti jelölésekkel legyen*

$$c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda \in \mathbb{C}S_n$$

a λ partícióhoz tartozó Young-szimmetrizátor*, a $c_\lambda \in End_{\mathbb{C}}(V^{\otimes n})$ endomorfizmus képét pedig jelölje V_λ.*

3.12. Megjegyzés. *A V_λ altér $V^{\otimes n}$ egy rész-$\mathbb{C}S_n$-modulusa, azaz S_n egy reprezentációja.*

3.13. Példa. *Nézzük meg a két legegyszerűbb esetet: legyen először $\lambda = (n)$, az egy sorból álló partíció. Ekkor*

$$P_\lambda = S_n \ , \ Q_\lambda = 1 \ ,$$

ennek megfelelően

$$a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \ , \ b_\lambda = e_1 \ , \ c_\lambda = a_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \ .$$

A $c_\lambda \in End(V^{\otimes n})$ endomorfizmus képe pedig

$$V_\lambda = Sym^n V \ .$$

3.14. Példa. *Válasszuk most a másik szélső esetet: legyen $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$, azaz a λ partíció egy oszlopból áll. Ekkor*

$$P_\lambda = 1 \ , \ Q_\lambda = S_n \ ,$$

és

$$a_\lambda = e_1 \ , \ b_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, e_\sigma \ , \ c = \lambda = b_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, e_\sigma \ .$$

Itt

$$V_\lambda = \Lambda^n V \ .$$

A c_λ elemek kitüntetett szerepet játszanak mind a szimmetrikus, mind az általános lineáris csoportok reprezentációelméletében. Itt csak a szimmetrikus csoportokkal foglalkozunk, az általános lináris csoportok irreducibilis reprezentációival a Schur-funktorokról szóló fejezetben fogunk megismerkedni.

3.15. Tétel. *Tetszőleges $|\lambda| = n$ partíció esetén $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ valamely n_λ pozitív egészre, V_λ pedig az S_n csoport egy irreducibilis reprezentációja. S_n minden irreducibilis reprezentációja előáll V_λ alakban pontosan egy λ-ra.*

3.16. Példa. *Vegyük ismét a $\lambda = (n)$ esetet. Ekkor*

$$V_\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma = \mathbb{C} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \ .$$

Mivel minden $\sigma \in S_n$ esetén

$$e_\tau \cdot \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \ ,$$

$V_{(n)}$ a triviális reprezentáció.

3.17. Példa. *Másik gyakran idézett példánk $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ partíció. Ebben az esetben*

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) e_\sigma,$$

így

$$V_\lambda = \mathbb{C}S_n \cdot c_\lambda = \mathbb{C} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) e_\sigma \ .$$

Mivel tetszőleges $\tau \in S_n$ esetén

$$e_\tau \cdot \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) e_\sigma = sgn(\tau) \cdot \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) e_\sigma \ ,$$

$V_{(1,1,\ldots,1)}$ az alternáló reprezentáció.

3.18. Példa. *Legyen $\lambda = (2, 1)$. A $(2, 1)$ partícióhoz tartozó sor- és oszlopcsoportok:*

$$P_\lambda = \{1, (12)\} \ , \ Q_\lambda = \{1, (13)\} \ ,$$

ezért

$$c_\lambda = (e_1 + e_{(12)})(e_1 + e_{(13)}) = e_1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)} \in \mathbb{C}S_n \ .$$

Ellenőrizhető, hogy $V_{(2,1)}$ egy bázisa $c_{(2,1)}, (13) \cdot c_{(2,1)}$ és $V_{(2,1)}$ az S_3 szimmetrikus csoport standard reprezentációja.

Bizonyítás: Rögzítsük a λ partíciót egyszer s mindekorra, így elhagyhatjuk az indexekből. Jelölje továbbá A a $\mathbb{C}S_n$ csoportalgebrát.

Először is, vegyük észre, hogy ha egy permutáció λ sorait és oszlopait is fixen hagyja, akkor az egyik elemet sem mozdítja meg, így ez a permutáció az identitás kell, hogy legyen. Azaz

$$P \cap Q = 1 \ .$$

Emiatt $|PQ| = |P| \cdot |Q|$ és minden $\sigma \in S_n$ legfeljebb egyféleképpen írható $\sigma = pq$, $p \in P, q \in Q$ alakba. Eszerint

$$c = \sum_{\sigma = pq} \pm e_\sigma \ ,$$

speciálisan e_1 együtthatója $+1$ (mivel az egységelem a két részcsoport egységelemeinek szorzataként áll elő).

A bizonyítás lelke az $a, b, c \in \mathbb{C}S_n$ elemek viselkedésének ismererete a csoportalgebrában. Az alábbi lemmák foglalják össze a szükséges ismereteket az a, b, c elemekről.

3.19. Lemma. *Minden $p \in P$ és $q \in Q$ esetén*

1. $p \cdot a = a \cdot p = a$,
2. $sgn(q) \cdot q \cdot b = b \cdot sgn(q) \cdot q = b$,
3. $p \cdot c \cdot sgn(q) \cdot q = c$ *és skalárral vaó szorzás erejéig* c *az egyetlen ilyen elem* A*-ben.*

3.20. Lemma. *Tetszőleges $x \in A$ esetén*

$$c_\lambda \cdot x \cdot c_\lambda = n_\lambda c_\lambda \ ,$$

továbbá ha lexikografikusan $\mu < \lambda$, akkor

$$a_\lambda \cdot x \cdot b_\mu = 0 \ .$$

Mielőtt a lemmákat belátnánk, nézzük meg, hogy miképpen tudjuk segítségükkel az 3.15 tételt belátni.

Először lássuk be, hogy V_λ irreducibilis reprezentáció.A **??** Lemma miatt

$$c_\lambda V_\lambda = c_\lambda A c_\lambda \subseteq \mathbb{C} c_\lambda \ ,$$

ahol ez utóbbi vektortér egydimenziós. Ha $W \subseteq V_\lambda$ részreprezentáció, akkor

$$c_\lambda W \subseteq c_\lambda V_\lambda \subseteq \mathbb{C}c_\lambda$$

így $c_\lambda W = 0$ vagy $c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$.

Az első esetben

$$W \cdot W \subseteq (Ac_\lambda) \cdot W = A \cdot (c_\lambda W) = 0 \ .$$

Minden $\phi : A \to W$ lineáris projekciót egy A-beli idempotens d_ϕ elemmel való jobbszorzás ír le, ebben az esetben

$$d_\phi = d_\phi^2 = 0 \ ,$$

így $W = 0$.

Ha $c_\lambda W = \mathbb{C}c_\lambda$, akkor

$$\begin{aligned} V_\lambda &= Ac_\lambda = Ac_\lambda c_\lambda = (Ac_\lambda)(Ac_\lambda) \\ &= (Ac_\lambda)c_\lambda W = Ac_\lambda W \subseteq W \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Eszerint $V_\lambda = W$. Megállapíthatjuk tehát, hogy a V_λ reprezentációk irreducibilisek.

Következőként igazoljuk, hogy különböző partíciókhoz tartozó irreducibilis reprezentációk nem izomorfak. Legyen $\lambda > \mu$ a lexikografikus rendezésben. Ekkor

$$c_\lambda V_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda \neq 0 \ ,$$

azonban

$$c_\lambda V_\mu = c_\lambda \cdot A \cdot c_\lambda = 0$$

tehát valóban $V_\lambda \not\simeq V_\mu$.

Hátra van még annak bizonyítása, hogy $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ ahol n_λ pozitív egész szám . Ennél egy kicsit többet fogunk megmutatni, nevezetesen azt, hogy

$$n_\lambda = \frac{n!}{\dim_{\mathbb{C}} V_\lambda} \ .$$

Legyen ugyanis $\phi \in \mathrm{End}(A)$ a c_λ-val való jobbszorzás mint lineáris endomorfizmus. Ekkor

$$\phi|_{V_\lambda} = n_\lambda I$$

és

$$\phi|_{\mathrm{Ker}(c_\lambda)} = 0 \ ,$$

tehát

$$\mathrm{Tr}(\phi) = n_\lambda \cdot \dim V_\lambda \ .$$

Azonban $\mathrm{Tr}(\phi) = n!$, mivel e_g együtthatója $e_g c_\lambda$-ban 1. Ezért

$$n_\lambda = \frac{\mathrm{Tr}(\phi)}{\dim V_\lambda} = \frac{n!}{\dim V_\lambda}$$

amint azt állítottuk. $\square$

Bizonyítás: (3.19 Lemma) Az első két állítás és a harmadik állıtás első fele azonnal következik a megfelelő elemek definíciójából.

A skalárszorzó erejéig való egyértelműséget az alábbi módon láthatjuk be. Tegyük fel, hogy a

$$\sum_g n_g e_g$$

elemre teljesül a (3)-beli feltétel. Ekkor minden $g \in G, p \in P, q \in Q$ esetén

$$n_{pgq} = \mathrm{sgn}(q) n_g \ ,$$

speciálisan $n_{pq} = \mathrm{sgn}(q) n_1$. Elég tehát belátni, hogy $n_g = 0$ minden $g \notin PQ$ esetén.

Egy ilyen g-re — azaz amelyre $g \notin PQ$ — elég egy olyan $t \in S_n$ transzpozíciót találni, amelyre

$$p = t \in P \ , \ q = g^{-1} t g \in Q \ ,$$

hiszen ekkor

$$g = pgq \text{ és így } n_g = -n_g \ ,$$

azaz $n_g = 0$. Ehhez felhasználjuk az alábbi állítást:

3.21. Lemma. *Ha $T' = gT$ az a tabló, amelyet úgy kapunk, hogy az i elem előfordulását T-ben $g(i)$-vel felcseréljük, akkor van két (különböző) egész, amelyek T-nek ugyanabban a sorában és T'-nek ugyanabban az oszlopában vannak.*

Bizonyítás: Amennyiben nincs ilyen számpár, akkor legyen

$$p_1 \in P \text{ és } q_1' \in Q' = gQg^{-1}$$

úgy hogy p_1T és q'_1T' első sorai megegyeznek. Ezt a műveletet megismételve a tablók maradék részére végeredményül kapunk egy

$$p \in P \ , \ q' \in Q'$$

elempárt, amelyekre $pT = q'T'$. Ekkor viszont

$$pT = q'gT \ ,$$

így $p = q'g$ és ezért $g = pq$, ahol $q = g^{-1} (q')^{-1} g \in Q$. □

Legyen t a lemmabeli két számot felcserélő transzpozíció. Azonnal látszik, hogy megfelel a vele szemben támasztott követelményeknek. □

Bizonyítás: (3.20 lemma) Az első állítás igazolására legyen először $x = g \in S_n$. Idézzük fel, hogy ha b_μ a T' tablóbó gyártott elem, akkor $gb_\mu g^{-1}$ a gT' tabló oszlopcsoporjának az elemeinak az összege. Elég tehát belátni, hogy $a_\lambda \cdot b_\mu = 0$.

Ha $\lambda > \mu$, akkor van két szám, ami T-nek ugyanabban a sorában, T'-nek pedig ugyanabban az oszlopában van. Ha t az ezen két szám cseréjét végrehajtó transzpozíció, akkor

$$a_\lambda t = a_\lambda \ , \ tb_\mu = -b_\mu \ ,$$

tehát

$$a_\lambda b_\mu = a_\lambda t t b_\mu = -a_\lambda b_\mu$$

azaz $a_\lambda b_\mu = 0$. A második állítás az 3.19 lemma következménye. □

3.3. Szimmetrikus polinomok együtthatói

Ennek a fejezetnek a témája szimmetrikus polinomok együtthatóinak a vizsgálata. Az itt szereplő eredményeknek fontos szerepe lesz a szimmetrikus csoport karatkereire vonatkozó Frobenius-féle formula bizonyításában. Tekintsük az m-változós egészegyütthatós polinomok $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m]$ gyűrűjét. Egy tetszőleges legfeljebb m sorból álló λ partíció esetén jelölje x^λ az

$$x_1^{\lambda_1} \ldots x_m^{\lambda_m}$$

monomot.

3.22. Definíció. *Ha f m-változós szimmetrikus polinom, λ egy legfeljebb m sorból álló partíció, akkor legyen*

$$[f]_\lambda$$

az x^λ monom együtthatója f-ben.

3.23. Megjegyzés. *Mivel f szimmetrikus, $[f]_\lambda$ az összes*

$$x_{\sigma(1)}^{\lambda_1} \dots x_{\sigma(m)}^{\sigma_m}$$

alakú monom f-beli együtthatója is egyben ($\sigma \in S_n$).

3.24. Definíció. *Legyen λ egy legfeljebb m sorból álló partíció. Ekkor*

$$\tilde{\lambda} \stackrel{def}{=} (\lambda_1 + m - 1, \lambda_2 + m - 2, \dots, \lambda_m) \ .$$

3.25. Megjegyzés. *Mivel λ partíció volt, $\tilde{\lambda}$ is az, továbbá ennek is legfeljebb m sora van.*

A fejezet fő célja az alábbi tétel igazolása.

3.26. Tétel. *Legyen f egy tetszőleges n-edfokú m-változós szimmetrikus polinom. Ekkor*

$$[f]_\lambda = \sum_\mu K_{\mu\lambda}[\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} \ ,$$

ahol Δ az m-változós Vandermonde-féle determináns.

A tétel bizonyításához szükségünk lesz az alábbi lemmára.

3.27. Lemma. *Ha f tetszőleges szimmetrikus polinom, akkor*

$$f = \sum_\lambda [\Delta \cdot f]_{\tilde{\lambda}} \ .$$

Bizonyítás: Mivel $x^{\tilde{\lambda}}$ együtthatója $\Delta \cdot s_\lambda$-ban 1 és az s_λ polinomok a szimmetrikus polinomok egy $\mathbb{Z}$-modulusbázisát alkotják,

$$s_\lambda = \sum_\mu [\Delta \cdot s_\lambda]_{\tilde{\mu}} s_\mu \ .$$

Legyen f kifejtése az s_λ bázisban

$$f = \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda \ .$$

Ekkor

$$\begin{aligned} f &= \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda \\ &= \sum_{\lambda,\mu} \alpha_\lambda [\Delta \cdot s_\lambda]_{\tilde{\mu}} s_\mu \\ &= \sum_\mu \left(\sum_\lambda \alpha_\lambda [\Delta \cdot s_\lambda]_{\tilde{\mu}} \right) s_\mu \ . \end{aligned}$$

Azonban a $[\Delta \cdot f]_{l^\mu}$ kifejezés lineáris f-ben, így

$$f = \sum_\mu [\Delta \cdot \sum_\lambda \alpha_\lambda s_\lambda]_{\tilde{\mu}} s_\mu \ .$$

Ismét, mivel a Schur-polinomok a szimmetrikus polinomok egy egyészek feletti bázisát alkotják, a lemma állítását beláttuk.
□
Bizonyítás: (3.26 tétel) Először is, vegyük észre, hogy definíció szerint

$$f = \sum_\mu [f]_\lambda m_\lambda \ .$$

Hasonlókppen az előző lemma szerint

$$f = \sum_\mu [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} s_\mu \ .$$

Ez alapján

$$\begin{aligned} f &= \sum_\mu [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} \\ &= \sum_\mu [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} \left(\sum_\lambda K_{\mu\lambda} m_\lambda \right) \\ &= \sum_\lambda \left(\sum_\mu K_{\mu\lambda} [\Delta \cdot f]_{\tilde{\mu}} \right) m_\lambda \ , \end{aligned}$$

amiből adódik a tétel állítása, hiszen az m_λ polinomok lineárisan függetlenek. $\square$

3.28. Megjegyzés. *A szimmetrikus függvényeknél megismert skalárszorzat segítségével*

$$[\Delta \cdot f]_{l^\lambda} = \langle s_\lambda, f \rangle \ .$$

3.29. Következmény. *Legyen p^α egy Newton-féle általánosított hatványösszegpolinom, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\sum_{i=1}^n i\alpha_i = n$, λ, μ az n szám két tetszőleges rögzített partíciója. Ekkor*

$$\sum_\alpha \frac{1}{z(\alpha)} [\Delta \cdot p^\alpha]_{\tilde{\lambda}} [\Delta \cdot p^\alpha]_{\tilde{\mu}} = \delta_{\lambda\mu} \ .$$

3.4. A Frobenius-féle karakterformula

Miután meghatároztuk a szimmetrikus csoport irreducibilis reprezentációit, a következő fontos lépés ezen irreducibilis reprezentációk karaktereinek kiszámítása. Most ezt fogjuk megtenni, bebizonyítunk egy Frobeniustól származó képletet, ami megadja egy irreducibilis reprezentáció karakterének értékét S_n egy adott konjugáltosztályán. A bizonyításban nagy szerepe lesz a szimmetrikus függvényekről szerzett ismereteinknek.

Ismert, hogy S_n konjugáltosztályait a ciklusszerkezetük egyértelműen meghatározza, pontosabban, egy konjugáltosztály az összes, adott ciklusszerkezetű permutációból áll. Legyen α egy ciklusszerkezet, azaz egy $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ természetes számokból álló szám n-es, ahol

$$\sum_{i=1}^n i\alpha_i = n \ .$$

Az α sorozat azt a ciklusszerkezetet írja le, amelyben α_1 darab 1-ciklus, α_2 darab 2-ciklus van és így tovább. Az S_n csoport konjugáltosztályait ilyen α sorozatokkal fogjuk indexelni, az α ciklusszerkezetű permutációkból álló osztály jele C_α.

Rögzítsünk egy $|\lambda| = n$ partíciót, legyen továbbá k olyan természetes szám, amely nagyobb, mint λ sorainak a száma (pédául $k = n + 1$ mindig jó választás). Tekinstsük az

$$R = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_k]] \supseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$$

formális hatványsor gyűrűt. Jelölje

$$p_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}(x) \ , \tag{3.10}$$

illetve

$$\Delta(x) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j) \ , \tag{3.11}$$

ahol $x = (x_1, \ldots, x_k)$.

3.30. Definíció. *Tetszőleges $f(x) \in R$, $l = (l_1, \ldots, l_k) \in \mathbb{N}^k$ esetén*

$$[f(x)]_l \overset{def}{=} x^l \text{ együtthatója } f\text{-ben} \ .$$

Adott $|\lambda| = n$ partícióra legyen

$$(\tilde{\lambda}) = (\lambda_1 + k - 1, \lambda_2 + k - 2, \ldots, \lambda_k) \ .$$

Vegyük észre, hogy $(\tilde{\lambda})$ elemei továbbra is csökkenők.

3.31. Tétel (Frobenius-féle karakterformula). *A fenti jelölésekkel*

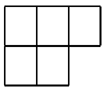
$$\chi_\lambda(C_\alpha) = \left[\Delta(x) \prod_{j=1}^{n} p_j(x)^{\alpha_j} \right]_{\tilde{\lambda}} \ .$$

Mielőtt igazoljuk a tételt, nézzük meg pár példán a működését.

3.32. Példa. $\lambda = (n)$

3.33. Példa. $\lambda = (1, \ldots, 1)$

3.34. Példa. *Legyen $n = 5$, $\lambda = (3, 2)$, $\alpha = (0, 1, 1, 0, 0)$, $k = 2$. Azaz, a*



partícióhoz tartozó irreducibilis reprezentáció karakterének értékét fogjuk kiszámolni az egy transzpozícióból és egy hármas ciklusból álló permutációk konjugáltosztályán. A tétel szerint

$$\begin{aligned} \chi_{(3,2)}(C_\alpha) &= \left[\Delta(x) \prod_{j=1}^{n} p_j(x)^{\alpha_j} \right]_{(4,2)} \\ &= [\Delta(x) p_2(x) p_3(x)]_{(4,2)} \\ &= \left[(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3)\right]_{(4,2)} \\ &= 1 \ . \end{aligned}$$

3.35. Következmény.

$$\chi_{(n-1,1)}(C_\alpha) = \alpha_1 - 1 \ .$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}
\chi_{(n-1,1)}(C_\alpha) &= \left[\Delta(x)\prod_{j=1}^{n} p_j(x)^{\alpha_j}\right]_{(n,1)} \\
&= \left[(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\dots(x_1^n + x_2^n)^{\alpha_n}\right]_{(n,1)} \ .
\end{aligned}$$

Mivel $\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i = n$, $x_1^n x_2$ monomot csak úgy kaphatunk, hogy az első zárójelből x_2-t választunk, a többiből mind x_1-et, illetve ha az első zŕójelből x_1-et választunk, ekkor azonban a második zárójelből az x_2-ben lineáris tagot kell választani, mindenhol máshol pedig az x_1 megfelelő hatványát.

Az első esetben az $x_1^n x_2$ monom együtthatója -1, a második esetben pedig α_1 lesz. Ezzel a következményt beláttuk. $\square$

3.36. Megjegyzés. *Az iméntivel teljesen analóg érveléssel belátható, hogy*

$$\chi_{(n-2,1,1)}(C_\alpha) = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) - \alpha_2 \ .$$

3.37. Megjegyzés. *A Frobenius-féle karakterformulát megfogalmazhatjuk Schur-polinomok segítségével is:*

$$\prod_{j=1}^{n} p_j(x_1, \dots, x_k)^{\alpha_j} = \sum_{|\lambda|=n \ , \ \lambda\text{-nak legfeljebb } k \text{ sora van}} \chi_\lambda(C_\alpha) s_\lambda \ .$$

Mielőtt a karakterformulát igazoljuk, kiszámoljuk segítségével a V_λ irreducibilis reprezentációk dimenzióit.

3.38. Állítás. *A fenti jelölésekkel*

$$\dim V_\lambda = \frac{d!}{l_1! \dots l_k!} \prod_{1 \le i < j \le k} (l_i - l_j) \ .$$

Bizonyítás: Mint általában,

$$\dim V_\lambda = \chi_\lambda(C_{(n)}) \ ,$$

azaz a reprezentáció karaktere kiértékelve az identitás (egyelemű) konjugáltosztályán. A Frobenius-képlet szerint

$$\dim V_\lambda = \left[\Delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^d\right]_{(\tilde{\lambda})} \ .$$

A jobboldalon szereplő tényezőket kifejtve:

$$\Delta(x) = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) x_k^{\sigma(1)-1} \dots x_1^{\sigma(k)-1} \ ,$$

és

$$(x_1 + \cdots + x_k)^d = \sum_{r_1,\dots,r_k, \sum_{i=1}^k r_i = d} \frac{d!}{r_1! \dots r_k!} x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k} \ .$$

Ezek alapján $\Delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^d$ -ben az $x^{(\tilde{\lambda})}$ monom együtthatója

$$\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \frac{d!}{(l_1 - \sigma(k) + 1)! \dots (l_k - \sigma(1) + 1)!} \ ,$$

ahol $l_{k-i+1} - \sigma(i) + 1 \geq 0$ minden $1 \leq i \leq k$ esetén. Ezen állítás helyességét az alábbi módon láthatjuk be: azt kell megvizsgálni, hogy

$$x_k^{\sigma(1)-1} \dots x_1^{\sigma(k)-1} \cdot x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k}$$

mikor lesz egyenlő $x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}$-val. Ez pontosan akkor következik be, ha

$$\begin{aligned} r_1 &= l_1 - \sigma(k) + 1 \\ &\vdots \\ r_k &= l_k - \sigma(1) + 1 \end{aligned}$$

és ezek mind nemnegatívak.

Továbbmenve, $\Delta(x)(x_1 + \cdots + x_k)^d$ -ben az $x^{(\tilde{\lambda})}$ monom együtthatója

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \frac{d!}{(l_1-\sigma(k)+1)!\dots(l_k-\sigma(1)+1)!} \\
&= \frac{d!}{l_1!\dots l_k!} \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{k} l_j(l_j-1)\dots(l_j-\sigma(k-j+1)+2) \\
&= \frac{d!}{l_1!\dots l_k!} \begin{vmatrix} 1 & l_k & l_k(l_k-1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & l_1 & l_1(l_1-1) & \dots \end{vmatrix} \\
&= \frac{d!}{l_1!\dots l_k!} \prod_{1\le i<j\le k} (l_i-l_j)
\end{aligned}
$$

Az utolsó egyenlőséget oszlopredukció segítségével kaptuk.
□

A karakterformula bizonításához még egy eszközre lesz szükségünk. Legyen U_λ az S_λ Young-részcsoport triviális reprezentációjáról indukált reprezentációja S_n-nek. Az előző fejezet alapján látható, hogy

$$U_\lambda = Aa_\lambda \ ,$$

továbbá

$$V_\lambda \subseteq U_\lambda$$

hiszen $V_\lambda = Aa_\lambda b_\lambda \simeq Ab_\lambda a_\lambda \subseteq Aa_\lambda = U_\lambda$. Jelölje η_λ az U_λ reprezentáció karakterét.

3.39. Lemma. *Az eddigi jelölésekkel*

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = \frac{1}{|C_\alpha|} \sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p1}} r_{p1}! \dots n^{r_{pn}} r_{pn}!} \ ,$$

ahol az összegzés minden olyan

$$\{r_{pq} \mid 1 \le p \le k \ , \ 1 \le q \le n\}$$

számhalmazra kiterjed, amelyre

$$r_{1q} + \dots + r_{kq} = \alpha_q$$

és

$$r_{p1}+2r_{p2}+\cdots+nr_{pn}=\lambda_p$$

minden $1\le q\le n$ *és* $1\le p\le k$ *esetén.*

Bizonyítás: Az indukált reprezentációk karakterére vonatkozó képlet alapján

$$\eta_\lambda(C\alpha)=\frac{1}{|C_\alpha|}\,|S_k:S_\lambda|\cdot|C_\alpha\cap S_\lambda|\ .$$

Itt

$$|S_k:S_\lambda|=\frac{n!}{\lambda_1!\ldots\lambda_k!}\ ,$$

$|C_\alpha\cap S_\lambda|$ kiszámítása kicsit több erőfeszítést igényel.

Írjuk fel $C_\alpha\cap S_\lambda$ p-edik komponenseinek az elemeit, mint r_{p1} darab 1-ciklus, r_{p2} darab 2-ciklus, stb. Ily módon

$$\begin{aligned}
|C_\alpha\cap S_\lambda| &= \sum_{\sum_p r_{pq}=\alpha_q\ ,\ \sum_q qr_{pq}=\lambda_p}\Big|\big\{\sigma\in S_\lambda|S_{\lambda_p}\text{-ben } r_{pq} \text{ darab } q\text{-ciklus van}\big\}\Big|\\
&= \sum_{\sum_p r_{pq}=\alpha_q\ ,\ \sum_q qr_{pq}=\lambda_p}\frac{\lambda_1!}{1^{r_{11}}r_{11}!\ldots n^{r_{1n}}r_{1n}!}\cdots\frac{\lambda_k!}{1^{r_{k1}}r_{k1}!\ldots n^{r_{kn}}r_{kn}!}\\
&= \frac{1}{|C_\alpha|}\sum\prod_{p=1}^{k}\frac{\lambda_p!}{1^{r_{p_1}}r_{p_1}!\ldots n^{r_{p_n}}r_{p_n}!}\ ,
\end{aligned}$$

ahol az összegzés azokon a

$$\{r_{pq}\mid 1\le p\le k\ ,\ 1\le q\le n\}$$

számhalmazokon fut végig, amelyekre

$$r_{1q}+\cdots+r_{kq}=\alpha_q$$

és

$$r_{p1}+2r_{p2}+\cdots+nr_{pn}=\lambda_p$$

minden $1\le q\le n$ és $1\le p\le k$ esetén.

□

3.40. Állítás.

$$\eta_\lambda(C_\alpha)=[P^{(\alpha)}]_\lambda\ ,$$

azaz x^λ *együtthatója* $P^{(\alpha)}$*-ban.*

Bizonyítás: Az előző lemma szerint

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = \frac{1}{|C_\alpha|} \sum \prod_{p=1}^{k} \frac{\lambda_p!}{1^{r_{p_1}} r_{p_1}! \dots n^{r_{p_n}} r_{p_n}!},$$

az ott említett indexhalmazra öszegezve. Ebből kis egyszerűsítéssel azt kapjuk, hogy

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = \sum \prod_{q=1}^{n} \frac{\alpha_q!}{r_{1q}! \dots r_{kq}!},$$

ahol az összegzés a korábbi indexhalmazra történik. Tekintsük most a

$$P^{(\alpha)} = (x_1 + \dots + x_k)^{\alpha_1} \dots (x_1^n + \dots + x_k^n)^{\alpha_n}$$

általánosított Newton-féle hatványösszegpolinomot. Ebben x^α együtthatója pontosan

$$\sum \prod_{q=1}^{n} \frac{\alpha_q!}{r_{1q}! \dots r_{kq}!} \ .$$

Ezzel az állítást beláttuk.
□
Bizonyítás: (Frobenius-féle karakterformula) Továbbra is a szimmetrikus polinomok együtthatóiról szóló fejezet jelölésével, azt szeretnénk belátni, hogy

$$\chi_\lambda(C_\alpha) = [\Delta \cdot P^{(\alpha)}]_{\tilde{\lambda}} \ .$$

Mivel

$$K_{\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \text{ha } \lambda = \mu \\ 0 & \text{ha } \lambda < \mu \ , \end{cases}$$

ezért

$$\eta_\lambda(C_\alpha) = [\Delta \cdot P^{(\alpha)}]_{\tilde{\lambda}} + \sum_{\mu > \lambda} K_{\mu\lambda} [\Delta \cdot P^{(\alpha)}]_{\tilde{\mu}} \ . \tag{3.12}$$

Továbbá mivel

$$\frac{1}{n} \sum_{\alpha} |C_\alpha| [\Delta \cdot P^{(\alpha)}]_{\tilde{\lambda}} [\Delta \cdot P^{(\alpha)}]_{\tilde{\mu}} = \delta_{\lambda\mu} \ ,$$

azt kapjuk, hogy a $[\Delta \cdot P^{(\alpha)}]_{\tilde{\lambda}}$ függvények mint osztályfüggvények kielégítik ugyanazokat a merőlegességi relációkat, mint az irreducibilis reprezentációk karakterei.

Láttuk, hogy $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ mint direkt összeadandó (mivel minden véges csoport teljesen reducibilis). Ezért

$$\eta_\lambda = \sum_\mu n_{\lambda\mu} \chi_{mu} \ , \tag{3.13}$$

ahol $n_{\lambda\mu} \geq 0$ és $n_{\lambda\lambda} \geq 1$. Az 3.12 egyenlőséggel összevetve azt kapjuk, hogy η_λ virtuális karakter, azaz $n_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}$. Az iménti ortogonalitási reláció szerint

$$\langle \eta_\lambda, \eta_\lambda \rangle = 1,$$

másrészt

$$\langle \eta_\lambda, \eta_\lambda \rangle = \sum_\mu n_{\lambda\mu}^2 \ ,$$

tehát $\eta_\lambda = \pm\chi$ valamely irrdeucibilis χ karakterre. Az irreducibilis reprezentációk karaktereinek lineáris függetlensége miatt ebből a λ partícióra vonatkozó lexikografikus indukcióval $\eta_\lambda = \chi_\lambda$ következik.
□

3.5. Schur-funktorok

A szimmetrikus csoportok reprezentációiról szerzett ismereteinket most vektorterek $GL(V)$ általános lineáris csoportjainak a reprezentációelméletének vizsgálatára fogjuk felhasználni. Mint általában, a fő feladat egy adott csoport irreduciblis reprezentációinak leírása, majd ezek multiplicitásainak meghatározása tetszőleges reprezentációban. Fontos tudni, hogy nem minden csoport teljesen reducibilis, azaz sokuknak van olyan reprezentációja, amely nem áll elő irreducibilis reprezentációk direkt összegekeént.

3.41. Példa. *Nem teljesen reducibilis csoport ($\mathbb{Z}$ és egy lineáris példa).*

Legyen V egy d-dimenziós komplex vektortér. A $GL(V)$ csoportnak konstrukciójából adódóan van egy természetes hatása V-n: tetszőleges $g \in GL(V)$ és $v \in V$ esetén

$$g.v \stackrel{\text{def}}{=} gv \ .$$

Ez a csoporthatás természetes módon kiterjed V összes tenzorhatványára. Ha $g \in GL(V)$, $v_1, \ldots, v_n \in V$, akkor a

$$\begin{aligned} g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\stackrel{\text{def}}{=} (g.v_1) \otimes \cdots \otimes (g.v_n) \qquad (3.14) \\ \text{leképezés egy} & \\ \rho_n : GL(V) &\to GL(V^{\otimes n}) \end{aligned}$$

reprezentációt definiál.

Az S_n szimmetrikus csoport ugyancsak természetes módon hat a $V^{\otimes n}$ vektortéren az indexek permutációjával. Ez a hatás a $GL(V)$-hatással ellentétben *jobboldali* hatás lesz: ha $\sigma \in S_n$ és $v_1, \ldots, v_n$, akkor

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \ .$$

Ez a permutációreprezentáció felcserélhető az előbb ismertetett baloldali $GL(V)$-hatással.

3.42. Lemma. *Tetszőleges $g \in GL(V)$, $\sigma \in S_n$ és $v_1, \ldots, v_n \in V$ esetén*

$$g.((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).\sigma) = (g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)).\sigma \ .$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} g.((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n).\sigma) &= g.(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}) \\ &= (gv_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes (gv_{\sigma(n)}) \\ &= ((gv_1) \otimes \cdots \otimes (gv_n)).\sigma \\ &= (g.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)).\sigma \ . \end{aligned}$$

□

Legyen λ az n szám egy partíciója, $c_\lambda \in \mathbb{C}S_n$ a hozzá tartozó Young-szimmetrizátor. A c_λ elemek természetes módon $V^{\otimes n}$ egy endomorfizmusa (nem feltétlenül lesz invertálható lineáris transzformáció), ezek segítségével meg fogjuk adni $GL(V)$ sok irreducibilis reprezentációját.

3.43. Definíció. *Az n szám λ partíciójához tartozó* Schur-funktor

$$\mathbb{S}_\lambda \stackrel{def}{=} \operatorname{Im} c_\lambda|_{V^{\otimes n}} \ .$$

a $GL(V)$ csoport egy reprezentációja.

3.44. Példa. *Első példaként vegyük a $\lambda = (n)$ partíciót. Amint azt korábban láttuk,*

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} e_\sigma \ ,$$

így

$$\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Sym}^n V \ .$$

3.45. Példa. *Legyen $\lambda = (1, \ldots, 1)$ az n darab 1-esből álló partíció. Ekkor*

$$c_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma e_\sigma$$

és

$$\mathbb{S}_\lambda V = \Lambda^n V \ .$$

3.46. Példa. *Legyen most $\lambda = (2, 1)$. Ebben az esetben*

$$c_\lambda = 1 + e_{(12)} - e_{(13)} - e_{(132)} \ ,$$

ezért

$$\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Im}\, c_\lambda|_{V^{\otimes 3}}$$

$V^{\otimes 3}$ azon altere, amelyet a

$$v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 + v_2 \otimes v_1 \otimes v_3 - v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 - v_3 \otimes v_1 \otimes v_2$$

alakú vektorok feszítenek ki.

3.47. Megjegyzés. *Egyszerű számolással igazolható, hogy*

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3 V \oplus \Lambda^3 V \oplus \mathbb{S}_{(2,1)} \ .$$

3.48. Megjegyzés. *Természetesen $\mathbb{S}_\lambda V$ függ V-től. Például $\mathbb{S}_\lambda V = 0$, ha λ sorainak száma nagyobb, mint $\dim V$.*

3.49. Megjegyzés. *A fenti eljárás minden $G \leq GL(V)$ lineáris csoportra alkalmazható. A $G = GL(V)$ esetben a kapott reprezentációk irreducibilisek lesznek.*

3.50. Megjegyzés. *Az alfejezet elején ismertetett módon minden $\phi \in \mathrm{End}(V)$ egyértelműen kiterjed $\mathbb{S}_\lambda V$ egy endomorfizmusává. Legyen*

$$\chi_\lambda(g) \stackrel{def}{=} \chi_{\mathbb{S}_\lambda V}(g)$$

ennek az endomorfimusnak a nyoma.

Tekintsük ismét a $\lambda = (n)$, $\mathbb{S}_\lambda V = \mathrm{Sym}^n V$ esetet. Legyenek $g \in GL(V)$ sajátértékei $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ (mivel az alaptest algebrailag zárt, minden endomorfizmusnak (multiplicitással számolva) pontosan d sajátértéke van).

3.51. Állítás. *A fenti jelölésekkel*

$$\chi_{(d)}(g) = h_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) ,$$

ahol h_n a megfelelő teljes szimmetrikus polinom.

Bizonyítás: Első lépésben tegyük fel, hogy $g \in GL(V)$ diagonalizálható és $v_1, \ldots, v_d$ V-nek az a bázisa, amelyben $g = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ diagonális mátrix a sajátértékekkel mint főátlóbeli elemekkel.

Ekkor a

$$v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_n} = \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_n)}$$

elemek, ahol $1 \leq i_1, \ldots i_n \leq d$, $\mathrm{Sym}^n V$ egy bázisát alkotják. Vizsgáljuk meg g hatását ennek a bázisnak az elemein.

$$\begin{aligned} g.(v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_n}) &= \sum_{\sigma \in S_n} (g v_{\sigma(i_1)}) \otimes \cdots \otimes (g v_{\sigma(i_n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma(i_1)} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(i_n)} v_{\sigma(i_n)} \\ &= \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(i_n)} . \end{aligned}$$

Láthatóan a $v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_n}$ bázisban $g|_{\mathbb{S}_\lambda V}$ diagonális,

$$g|_{\mathbb{S}_\lambda V} = \mathrm{diag}(\ldots, \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_n}, \ldots) .$$

Ebből következik, hogy

$$\mathrm{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\lambda V}) = \sum_{1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_n} = h_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) .$$

Mivel a diagonalizálható endomorfizmusok egy sűrű halmazt alkotnak az endomorfizmusok között, az állítást beláttuk. □

3.52. Megjegyzés. *A bizonyítást g Jordan-féle normálformájának segítségével is befejezhetjük.*

3.53. Példa. *Legyen $\lambda = (1, \ldots, 1)$, $\mathbb{S}_\lambda V = \Lambda^n V$. A szimmetrikus hatványokra vonatkozó állítással teljesen analóg módon belátható, hogy ha $g \in GL(V)$ sajátértékei $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, akkor*

$$\chi_{(1,\ldots,1)}(g) = e_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \ ,$$

ahol e_n az n-edik elemi szimmetrikus polinom.

Az iménti két példa messzemenő általánosítása az alábbi eredmény, ami a fejezet központi mondanivalója.

3.54. Tétel. *A fenti jelölésekkel $\mathbb{S}_\lambda V$ a $GL(V)$ csoport egy irreducibilis reprezentációja, amelynek karaktere*

$$\chi_\lambda(g) = s_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \ ,$$

ahol s_λ a λ partícióhoz tartozó Schur-polinom, $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ pedig a $g \in GL(V)$ endomorfizmus sajátértékei.

A $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d)$ partícióhoz tartozó $\mathbb{S}_\lambda V$ reprezentáció dimenziója

$$\dim \mathbb{S}_\lambda V = s_\lambda(1, \ldots, 1) = \prod_{1 \leq i < j \leq d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \ .$$

3.55. Tétel. *Jelölje m_λ a $V_\lambda = (\mathbb{C}S_n)c_\lambda$ komplex vektortér dimenzióját. Ekkor $V^{\otimes n}$ irreducibilis reprezentációkra történő direkt összeg felbontása*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{|\lambda| = n} (\mathbb{S}_\lambda V)^{\otimes m_\lambda} \ .$$

3.56. Következmény. *Ha $\lambda \neq \mu$ két partíció legfeljebb $\dim V$ sorral (azaz a hozzájuk rendelt reprezentaćiók nem triviálisak), akkor*

$$\mathbb{S}_\lambda V \not\simeq \mathbb{S}_\mu V \ .$$

Bizonyítás: A két reprezentáció karaktereire $s_\lambda \neq s_\mu$, így a reprezentációk sem lehetnek izomorfak.
□

3.57. Megjegyzés. *Az $\{\mathbb{S}_\lambda V\}$ halmaz nem tartalmazhatja $GL(V)$ összes irreducibilis reprezentációját, hiszen például ezek duális karakterei nincsenek benne a fenti halmazban. Belátható, hogy a*

$$\{\mathbb{S}_\lambda V\} \cup \{(\mathbb{S}_\lambda V)^*\}$$

halmaz már tartalmazza $GL(V)$ össze irreducibilis reprezentációját.

3.58. Következmény. *Legyen $c \in \mathbb{C}S_n$, $(\mathbb{C}S_n)c = \bigoplus_\lambda (V_\lambda)^{\oplus r_\lambda}$ mint $\mathbb{C}S_n$-modulusok. Ekkor*

$$V^{\otimes n} \cdot c = \bigoplus_\lambda (\mathbb{S}_\lambda V)^{\oplus r_\lambda}$$

mint $GL(V)$-modulusok, továbbá

$$\mathrm{Tr}\,(g|_{V^{\otimes n}\cdot c}) = \sum_\lambda r_\lambda s_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)\ .$$

Az egyik alapfeladat csoportreprezentációk leírásánál reprezentációk tenzorszorzatainak felbontása irreducibilis reprezentációk direkt összegére (ennek egy fontos speciális esete a 3.55 Tétel). Ezért nagy jelentősége van az alábbi eredménynek.

3.59. Tétel (Littlewood–Richardson-szabály). *A fenti jelölésekkel*

$$\mathbb{S}_\lambda V \otimes \mathbb{S}_\mu V \simeq \bigoplus_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \mathbb{S}_\nu V\ ,$$

ahol ν végigfut az összes $|\lambda| + |\mu|$-elemű partíción.

Az 3.54 és 3.55 tételek bizonyításához szükségünk lesz az alábbi technikai jellegű lemmákra. Ebben a formában fogjuk a féligegyszerű algebrákra vonatkozó Wedderburn–Artin-féle elméletet felhasználni.

3.60. Lemma. *Legyen G véges csoport, $A = \mathbb{C}G$, U véges-dimenziós jobb A-modulus,*

$$B \overset{def}{=} \mathrm{Hom}_G(U, U) = \{\phi : U \to U \mid \forall g \in G, v \in U\ \phi(v.g) = \phi(v).g\}\ .$$

Ekkor minden $c \in A$ esetén

$$U \otimes_A Ac \overset{\cdot}{\longrightarrow} Uc$$

egy bal-B-modulus izomorfizmus.

Ha $W = Ac$ irreducibilis bal-A-modulus, akkor $U \otimes_A W = Uc$ irreducibilis bal-B-modulus.

Ha $W_i = AC_i$ különböző irreducibilis bal-A-modulusok, $m_i = \dim W_i$, akkor

$$U \simeq \oplus_i (U \otimes_A W_i)^{\oplus m_i} \simeq \oplus_i (Uc_i)^{\oplus m_i}$$

U egy irreducibilis bal-B-modulusokra történő felbontása.

A lemma bizonyítását későbbre halasztjuk. A tételek bizonyítása során az iménti lemmát az $A = \mathbb{C}S_n$, $U = V^{\otimes n}$ szereposztással fogjuk alkalmazni. Ily módon meg tudjuk határozni, hogy $V^{\otimes n}$ mint B-modulus hogyan bomlik fel irreducibilis részmodulusok direkt összegére. $V^{\otimes n}$ azon endomorfizmusai, amelyek V endomorfizmusaiból indukálódnak, mind B-ben vanak. Tipikusan B jóval nagyobb, mint $\mathrm{End}(V)$ képe, azonban $\mathrm{End}(V)$ elemei bizonyos értelemben sűrűn helyezkednek el B-ben.

3.61. Lemma. *B-nek mint $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ lineáris alterének $\mathrm{End}(V)$ egy generátorrendszere.*

A $T \leq V^{\otimes n}$ altér pontosan akkor bal-B-modulus, ha T invariáns $GL(V)$-re nézve.

Bizonyítás: Ha W egy véges dimenziós vektortér, akkor

$$\mathrm{Sym}^n W =< w \otimes \cdots \otimes w \mid w \in W > \subseteq W^{\otimes n} .$$

Alkalmazzuk ezt a tényt a $W = \mathrm{End}(V) = V^* \otimes V$ felállásra. A lemma első állításának belátásához ekkor elég azt megmutatni, hogy

$$B = \mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) =< g^{\otimes n} \mid g \in End(V) >_{\mathrm{End}(V)} .$$

Multilineáris algebrából ismert, hogy

$$\begin{aligned} \mathrm{End}(V)^{\otimes n} &= (V^* \otimes V)^{\otimes n} \\ &= (V^*)^{\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \\ &= \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \end{aligned}$$

mint *$\mathbb{C}S_n$-modulusok* (azaz az S_n hatások végig kompatibilisek), ezért

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{S_n}(V^{\otimes n}, V^{\otimes n}) &= \mathrm{End}(V^{\otimes n})^{S_n} \\ &= \left(\mathrm{End}\, V^{\otimes n}\right)^{S_n} \\ &= \mathrm{Sym}^n \mathrm{End}(V) . \end{aligned}$$

Ezzel az első állítást bebizonyítottuk.

A második állítás következik az elsőből annak ismeretében, hogy $GL(V)$ sűrű (az euklideszi topológiára nézve) $\mathrm{End}(V)$-ben. □

Bizonyítás: (az 3.54 és 3.55 tételeké) Amint azt említettük, a bizonyítás a 3.60 lemmán alapul, az $A = \mathbb{C}S_n$ és $U = V^{\otimes n}$ választással. Definíció szerint

$$\mathbb{S}_\lambda V = V^{\otimes n} c_\lambda = U c_\lambda,$$

így a 3.60 lemma miatt $\mathbb{S}_\lambda V$ irreducibilis, továbbá rögtön adódik a 3.55 tétel állítása. Szintén a 3.60 lemma alapján

$$\mathbb{S}_\lambda V = \left(V^{\otimes n}\right) c_\lambda \simeq V^{\otimes n} \otimes_A V_\lambda = V^{\otimes n} \otimes_A A c_\lambda$$

és az $U_\lambda \stackrel{\mathrm{def}}{=} A a_\lambda$ választással

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}\, \lambda_d V \simeq V^{\otimes n} \otimes_A U_\lambda \ .$$

Azonban $U_\lambda \simeq \oplus_\mu K_{\lambda\mu} V_\mu$ mint A-modulusok, így $V^{\otimes n}$-nel tenzorszorozva azt kapjuk, hogy

$$\mathrm{Sym}^{\lambda_1} V \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}\, \lambda_d V \simeq \oplus_\mu K_{\lambda\mu} \mathbb{S}_\lambda V$$

mint $GL(V)$-modulusok. A $g \in GL(V)$ elem nyoma a baloldalon $h_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ (az α_i számok g sajátértékei). Ily módon

$$h_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) = \sum_\mu K_{\lambda\mu} \, \mathrm{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\mu V}) \ .$$

A szimmetrikus függvényekről szóló fejezetben láttuk, hogy az iménti egyenlőségekből

$$\chi_\lambda(g) = \mathrm{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\lambda V}) = s_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \ .$$

Ezzel a karakterekre vonatkozó állítást beláttuk.

Hátra van még a $\mathbb{S}_\lambda V$ reprezentációk fokainak meghatározása. Azonban az $\mathbb{S}_\lambda V$ karakterére vonatkozó eredményből

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{S}_\lambda V &= s_\lambda(1, \ldots, 1) \\ &= \prod_{1 \le i < j \le d} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \ . \end{aligned}$$

□

3.62. Megjegyzés. *Ha a λ partíciónak $d = \dim(V)$-nél több sora lenne, akkor*

$$\chi_\lambda(g) = \mathrm{Tr}(g|_{\mathbb{S}_\lambda V}) = s_\lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_d, 0, \ldots, 0) \ .$$

A $g = \mathrm{Id}$ válsztással $\mathbb{S}_\lambda V = 0$ adódik.

Az alfejezet hátralévő részében a 3.60 lemmát fogjuk bebizonyítani.

Bizonyítás: G véges csoport lévén teljesen reducibilis, azaz minden reprezentációja egyértelműen felbomlik irreducibilis részreprezentációk direkt összegére. Ebből következik, hogy Ac A-nak mint bal-A-modulusnak direkt összeadandója.

Tekintsük először a lemma első állítását. Belátjuk, hogy minden $c \in A$ esetén

$$U \otimes_A Ac \overset{\cdot}{\to} Uc$$

egy bal-B-modulus izomorfizmus. Vegyük az alábbi kommutatív diagramot:

$$\begin{tikzcd}
U \otimes_A A \arrow[r] \arrow[d] & U \otimes_A Ac \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & U \otimes_A A \arrow[d] \\
U \arrow[r] & Uc \arrow[r] & U
\end{tikzcd}$$

Az ábrán ϕ-vel jelölt leképezésről kell megmutatni, hogy bal-B-modulus izomorfizmus. Rögtön látható, hogy ϕ egy bal-B-modulus-homomorfizmus.

Mivel i beágyazás, ha $\phi(x) = 0$ valamely $x \in U \otimes_A Ac$ esetén, akkor a diagram jobboldali négyzetének kommutativitása miatt $i(a) = 0$, így $a = 0$, tehát ϕ injektív. Ezzel analóg módon, a bal négyzet kommutativitásának felhasználásával adódik, hogy ϕ szürjektív is egyben.

Másodikként bebizonyítjuk, hogy ha $W = Ac$ irreducibilis bal-A-modulus, akkor $U \otimes_A W = Uc$ irreducibilis bal-B-modulus lesz. Elősző tekintsük azt a speciális esetet, amikor U irreducibilis A-modulus, így $B = \mathbb{C}$. Ez esetben elég belátni, hogy

$$\dim_{\mathbb{C}} U \otimes_A W \leq 1 \ .$$

Azonban a Wedderburn–Artin-tétel miatt

$$A = \mathbb{C}G \simeq \oplus_{i \in I} \mathrm{End}(T_i) = \oplus_{i=1}^{r} M_{m_i}(\mathbb{C})$$

teljes mátrixalgebrák direkt összege, ezért W az A féligegyszerű algebra egy minimális balideáljának felel meg. Hasonlóképpen, U az A algebra egy minimális jobbideáljának felel meg.

Ily módon

$$U \otimes_A W = \begin{cases} 0 & \\ (0, \ldots, \mathbb{C}E_{ij}) & \text{ha mindkét tényezőben ugyanaz a nemnulla faktor.} \end{cases}$$

Az általános esetben $U = \oplus_i U_i^{\oplus n_i}$, ahol minden U_i irreducibilis jobb-A-modulus. Ekkor

$$U \otimes_A W = \oplus_i (U_i \otimes_A W)^{\oplus n_i} = \mathbb{C}^{n_k}$$

valamely k-ra; ekkor $U \otimes_A W$ irreducibilis $B = \oplus_i M_{n_i}(\mathbb{C})$ felett.

Utolsóként igazoljuk, hogy ha $W_i = Ac_i$ különböző irreducibilis bal-B-modulusok, $m_i = \dim W_i$, akkor

$$U = \oplus_i (U \otimes_A W_i)^{\oplus m_i} \simeq \bigoplus_i (Uc_i)^{\oplus m_i}$$

az U bal-B-modulus egy irreducibilis bal-B-modulusokra történő felbontása.

Tudniillik

$$U \simeq U \otimes_A A \simeq U \otimes_A \left(\oplus_i W_i^{\oplus m_i} \right) \simeq \oplus_i (U \otimes_A W_i)^{\oplus m_i} \ .$$

□

4. fejezet

Schubert-kalkulus

4.1. Algebrai geometriai bevezető

Ennek az alfejezetnek az a célja, hogy tömören összefoglalja a felhasznált algebrai geometriai fogalmak egy részét. Természetesen kísérletet sem teszünk egy önmagában is használható leírás elkészítésére, mivel ez messzemenően meghaladná a jelen jegyzet kereteit.

Az elkövetkezőkben a komplex számok teste felett fogunk dolgozni. A tárgyalásra kerülő eredmények jelentős rész (több-kevesebb változtatással) tetszőleges test felett igaz, de ilyen irányú kérdésekkel nem foglalkozunk.

4.1. Definíció. *Az* $\mathbb{A}^n$ n-dimenziós affin tér *az*

$$(a_1, \ldots, a_n)$$

szám n-esek halmaza, ahol $a_i \in \mathbb{C}$.

Az n-dimenziós affin téren egy topológiát (az ún. Zariski-topológiát) definiálunk az alábbi módon: egy $V \subseteq \mathbb{A}^n$ ponthalmaz zárt, ha létezik olyan $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ideál, amelyre

$$V = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ minden } f \in I \text{ esetén}\} .$$

4.2. Definíció. *Legyen* $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. *Ekkor az* I *által definiált ponthalmaz*

$$V(I) \stackrel{def}{=} \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \textit{ minden } f \in I \textit{ esetén}\} .$$

Tetszőleges $V \subseteq \mathbb{A}^n$ ponthalmazra az általa definiált ideál

$$I(V) \overset{def}{=} \{f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ minden } (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \text{ esetén}\} \ .$$

4.3. Megjegyzés. *Ha I polinomok egy halmaza, akkor*

$$V(I) = V((I)) \ ,$$

ahol (I) az I halmaz által generált ideál.

4.4. Megjegyzés. *Legyen $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $Y_1, Y_2 \subseteq \mathbb{A}^n$. Ekkor*

1. *Ha $I_1 \subseteq I_2$, akkor $V(I_1) \supseteq V(I_2)$.*
2. *Ha $Y_1 \subseteq Y_2$, akkor $I(Y_1) \supseteq I(Y_2)$.*
3. *$I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$.*
4. *$I(V(I_1)) = Rad\ (I_1)$.*
5. *$V(I(Y_1)) = \bar{Y_1}$, Y_1 lezártja a Zariski-topológiában.*

4.5. Definíció. *Tetszőleges X topologikus tér esetén egy $Y \subseteq X$ részhalmaz* irreducibilis, *ha nem írható*

$$Y = Y_1 \cup Y_2$$

alakba, ahol $Y_1, Y_2 \subseteq Y$ valódi zárt részhalmazai Y-nak.

4.6. Állítás. *A $V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ halmaz pontosan akkor irreducibilis, ha I prímideál.*

4.7. Megjegyzés. *A Hilbert-féle Nullstellensatz miatt $\mathbb{A}^n$ pontjai egy-egyértelmű megfeleltetésben vannak $\mathbb{C}[x_, \ldots, x_n]$ maximális ideáljaival:*

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \{f \in \mathbb{C}[x_, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0\} \ ,$$

egy maximális ideálhoz pedig elemeinek egyetlen közös nullhelyét rendeljük.

4.8. Példa. *Az n-dimenziós affin tér irreducibilis, hiszen a nulla ideálnak felel meg, ami prím $\mathbb{C}[x_, \ldots, x_n]$-ben.*

4.9. Példa. *Legyen* $f \in \mathbb{C}[x_, \ldots, x_n]$ *irreducibilis polinom. Ekkor* $(f) \subseteq \mathbb{C}[x_, \ldots, x_n]$ *prím, mivel* $\mathbb{C}[x_, \ldots, x_n]$ *UFD. Eszerint a* $V(f)$ *ún. hiperfelület irreducibilis. Az* $n = 2$ *esetben egy hiperfelület nem más, mint egy síkgörbe.*

Az n-dimenziós affin térben a topológia egy bázisát alkotják a

$$D(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) \neq 0\}$$

alakú nyílt halmazok, ahol $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$.

4.10. Definíció. *Az* $X \subseteq \mathbb{A}^n$ *halmaz* affin varietás, *ha*

$$X = V(\mathfrak{p}) \ ,$$

ahol $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C}[x_1, \ldots x_n]$ *prímideál.*

Ez esetben a $\mathfrak{p}$ ideál szerinti faktorgyűrűt az X varietás *koordinátagyűrűjének hívjuk, jelben*

$$\mathbb{C}[X] \stackrel{def}{=} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p} \ .$$

Egy affin varietás koordinátagyűrűje integritási tartomány, a $\mathbb{C}[X]$ *gyűrű* $\mathbb{C}(X)$ *hányadostestjét* X függvénytestjének *nevezzük.*

4.11. Definíció. *Legyenek* $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ *két affin varietás. Egy* $\phi : X \to Y$ *függvény* morfizmus, *ha léteznek olyan* $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ *polinomok, amelyekre*

$$phi(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

minden $x \in \mathbb{A}^n$ *esetén.*

4.12. Megjegyzés. *Minden morfizmus folytonos a Zariski-topológiára nézve. Adott*

$$\phi : X \to Y$$

morfizmus egy

$$\phi^* := \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$$

$\mathbb{C}$*-algebrahomomorfimust indukál (és viszont). Egy kétoldali inverzzel rendelkező morfimust* izomorfimus*nak hívunk.*

*4.13. **Állítás.** Az X,Y affin varietások pontosan akkor izomorfak, ha*

$$\mathbb{C}[X] \simeq \mathbb{C}[Y]$$

mint $\mathbb{C}$-algebrák.

*4.14. **Definíció.** Az X affin varietás dimenziója a $\mathbb{C}(X)$ test $\mathbb{C}$ feletti transzcendenciafoka.*

*4.15. **Megjegyzés.** Az előző állítás következményeként egy varietás dimenziója izomorfimusokra nézve invariáns.*

*4.16. **Definíció.** Egy $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ polinom d-*edfokú homogén*, ha minden $\alpha \in \mathbb{C}$ esetén*

$$f(\alpha x_0, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^d f(x_0, \ldots, x_n)\ .$$

Egy $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ ideált homogénnek hívunk, ha van homogén polinomokból álló generátorrendszere.

*4.17. **Definíció.** Egy $X \subseteq \mathbb{P}^n$ halmaz* projektív varietás*, ha egyenlő egy $I \subseteq \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ homogén ideál $\mathbb{P}^n$-beli nullhelyeivel.*

4.2. Grassmann-varietások

A magunk elé tűzött egyik feladat projektív terek adott tulajdonságú altereinek (egyeneseinek, síkjainak, stb.) "számának" meghatározása. Ahhoz, hogy ezt szisztematikusan kivitelezni lehessen, szükséges, hogy az iménti kérdést precízen meg tudjuk fogalmazni.

Ötlet: Paraméterezzük az adott dimenziós $L \subseteq \mathbb{P}^n$ alterek halmazát egy megfelelő algebrai sokaság pontjaival, majd az így kapott sokaságon értelmezzük geometriailag a kívánt feltételeket.

A $\mathbb{P}^n$ projektív tér d-dimenziós altereiből — vagy, ami ellenőrizhetően ekvivalens meghatározás: az $\mathbb{A}^{n+1}$ affin tér origón átmenő $d+1$-dimenziós lineáris altereiből — álló halmazt természetes módon fel tudjuk ruházni egy projektív algebrai varietást struktúrájával. Ez lesz a $G(n, md)$ ún. *Grassmann-varietás* sima komplex sokaság is egyben.

Először tekintsük $G(n,d)$-t mint halmazt. Megadjuk $G(n,d)$ egy beágyazását egy sokdimenziós projektív térbe. Legyen $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, V egy $(n+1)$-dimenziós vektortér, $L \subseteq V$ $(d+1)$-dimenziós altér, $v_0, \dots, v_d$ az L altér egy bázisa. Tekintsük az alábbi leképezést:

$$\Phi : G(n,d) \to \mathbb{P}^{\binom{n+1}{d+1}-1}$$

$$L \mapsto [v_0 \wedge \cdots \wedge v_d] \in \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}V) \ . \tag{4.2}$$

Lineáris algebrából ismert, hogy $\operatorname{Im}\Phi$ injektív. Az $\operatorname{Im}\Phi \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^{k+1}V) = \mathbb{P}^N$ ponthalmaz egy projektív varietás, amit $\mathbb{P}^N$-en értelmezett homogén polinomok közös nullhelyeként adhatunk meg, ahol

$$N = \binom{n+1}{d+1} - 1 \ .$$

Az iménti konstrukcióból meg tudunk határozni egy homogén polinomokból álló egyenletrendszert, amelynek megoldásai pontosan a Grassmann-varietás (pontosabban $\operatorname{Im}\Phi$) pontjai.

Válasszunk $y(0), \dots, y(n)$ homogén koordinátákat $\mathbb{P}^n$-ben. Legyen $L \subseteq \mathbb{P}^N$ egy lineáris altér, amelyet egy $B_L \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n-d)}$ mátrixszal adhatunk meg. Az L altér pontjai a

$$\sum_{j=0}^{n} b_{\alpha j}(j) = 0 \qquad 1 \le \alpha \le n-d \tag{4.3}$$

egyenletrendszer megoldásai. Mivel $\dim L = d$, a B_L mátrix rangja maximális, azaz $\operatorname{rk} B_L = n-d$. Ekkor van $d+1$ darab L-beli pont, amelyek kifeszítik L-t. Legyen $p_0, \dots, p_d$ egy ilyen ponthalmaz. A p_i pontok koordinátái egy $(d+1) \times (n+1)$-es mátrixok alkotnak, ennek bizonyos maximális négyzetes minorait fogjuk felhasználni. Jelölje $p(j_0, \dots, j_d)$ annak a $d \times d$ méretű minornak a determinánsát, ami a j_0-adik, …, j_d-edik oszlopokból áll. Azaz

$$p(j_0, \dots, j_d) \overset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} p_0(j_0) & \dots & p_0(j_d) \\ \vdots & & \vdots \\ p_d(j_0) & \dots & p_d(j_d) \end{vmatrix} \tag{4.4}$$

ahol $p_i(j)$ a p_i pont j-edik koordinátája. Mivel a $(j_o, \dots, j_d)$ sorozatban két szomszédos elemet felcserélve a megfelelő p szám ellentettjére vált, azaz

$$p(j_0, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_d) = -p(j_0, \dots, j_{k+1}, j_k, \dots, j_d) \ ,$$

elég a szigorúan növekvő $j_0 < \cdots < j_d$ sorozatokat tekinteni. A $p(j_0, \ldots, j_d)$ determinánsok száma $N+1$ és legalább egy közülük nem nulla, mivel a p_i pontok lineárisan függetlenek. Ezeket lexikografikusan elrendezve egy

$$L \mapsto (\ldots, p(j_0, \ldots, j_d), \ldots) \in \mathbb{P}^N \tag{4.5}$$

leképezést kapunk.

Természetesen felmerülő kérdés, hogy az L altér képe milyen mértékben függ a $d+1$ darab pont választásától. Vizsgáljuk meg, mi történik, ha egy másik, $q_0, \ldots, q_d$ L-beli független pont d-est választunk referenciaként. Lineáris algebrából ismert, hogy ekkor létezik olyan nemszinguláris $C \in GL(\Lambda^{d+1}V)$ lineáris transzformáció, amelyre $Cq_i = p_i$ minden $0 \leq i \leq d$ esetén (természetesen C távolról sem egyértelmű). Rögtön látható, hogy

$$q(j_0, \ldots, j_d) = \det C \cdot p(j_0, \ldots, j_d) \ , \tag{4.6}$$

s így

$$(\ldots, q(j_0, \ldots, j_d), \ldots) = (\ldots, p(j_0, \ldots, j_d), \ldots) \in \mathbb{P}^N \ . \tag{4.7}$$

A fenti konstrukció — amely azonos az előző, ékszorzat segítségével megadott beágyazással — jóldefiniált. A $G(n, d)$ Grassmann-varietásnak az ily módon megadott projektív beágyazását *Plücker-beágyazás*nak, a $p(j_0, \ldots, j_d)$ koordinátákat pedig *Plücker-koordinátá*knak nevezzük.

4.18. Példa. *Legyen $d = 0$. Ekkor*

$$\Phi : G(n, 0) \to \mathbb{P}^{\binom{n+1}{1}-1} = \mathbb{P}^n \ .$$

Másrészt a Φ leképezés szürjektív, hiszen az $\mathbb{A}^{n+1}$-beli egydimenziós lineáris alterek halmaza definíció szerint nem más, mint $\mathbb{P}^n$. Ezért

$$G(n, 0) = \mathbb{P}^n \ .$$

4.19. Példa. *Hasonlóképpen látható be, hogy*

$$G(n, n-1) = (\mathbb{P}^n)^* \simeq \mathbb{P}^n \ .$$

Az utolsó izomorfizmus mint projektív algebrai varietások közti izomorfizmus értendő.

4.20. Példa. *A legkisebb példa Grassmann-varietásra, amely nem projektív tér, $G(3,1)$, a háromdimenziós projektív térbeli egyenesek halmaza. Az imént elmondottak alapján egy L egyenest egy*

$$B_L = \begin{pmatrix} p_0(0) & p_0(1) & p_0(2) & p_0(3) \\ p_1(0) & p_1(1) & p_1(2) & p_1(3) \end{pmatrix}$$

mátrix határoz meg. A hat Plücker-koordináta:

$$p(01) = \begin{vmatrix} p_0(0) & p_0(1) \\ p_1(0) & p_1(1) \end{vmatrix} = p_0(0)p_1(1) - p_0(1)p_1(0)$$

$$p(02) = \begin{vmatrix} p_0(0) & p_0(2) \\ p_1(0) & p_1(2) \end{vmatrix} = p_0(0)p_1(2) - p_0(2)p_1(0)$$

$$\vdots$$

$$p(23) = \begin{vmatrix} p_0(2) & p_0(3) \\ p_1(2) & p_1(3) \end{vmatrix} = p_0(2)p_1(3) - p_0(3)p_1(2) ,$$

ezek $G(3,1)$-et $\mathbb{P}^5$-be ágyazzák be.

Természetesen felmerülő kérdés, hogy vajon $\Phi : G(n,d) \to \mathbb{P}^N$ szürjektív-e, illetve ha nem, akkor hogyan jellemezhetők $\mathbb{P}^N$ azon pontjai, amelyek az adott Grassmann-varietáshoz tartoznak. Erre ad választ a következő tétel.

4.21. Tétel. *Legyen $x = (\dots, p(j_0, \dots, j_d), \dots) \in \mathbb{P}^N$ tetszőleges pont. Ekkor $x \in G(n,d)$ pontosan akkor ha minden $j_0 < \dots < j_{d-1}$ és $k_0 < \dots < k_{d+1}$ indexsorozatra*

$$\sum_{l=0}^{d+1} (-1)^l p(j_0, \dots, j_{d-1}, k_l) p(k_0, \dots, \hat{k}_l, \dots, k_{d+1}) = 0 .$$

4.22. Megjegyzés. *A tételben szereplő egyenleteket* Plücker-reláció*knak hívjuk.*

4.23. Példa. *Vegyük elő ismét a projektív térbeli egyenesek példáját és számítsuk ki a $G(3,1)$-et megadó egyenleteket. Mivel $d-1=0$, ezért $j_0 = 0,1,2,3$ az összes számbajöhető j-sorozat. Válasszuk először a $j_0 = 0$ esetet, legyen a k indexsorozat $1 < 2 < 3$. Ekkor*

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{2} (-1)^l p(j_0, k_l) p(k_0, \dots, \hat{k}_l, \dots, k_2) &= p(01)p(23) \\ &- p(02)p(13) + p(03)p(12) . \end{aligned}$$

Vegyük most az $1 < 2 < 3$ sorozat helyett a $0 < 1 < 2$ sorozatot. Ez esetben

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{2}(-1)^l p(j_0,k_l)p(k_0,\dots,\hat{k}_l,\dots,k_2) = \\ p(00)p(12)-p(01)p(02)+p(02)p(01) \\ = \ 0\ ,\end{aligned}$$

tehát nem kaptunk új egyenletet. Végigmenve az összes további lehetőségen, arra az eredményre jutunk, hogy diszjunkt j (a j-sorozatok egyelem˝ek) és $k_0 < k_1 < k_2$ sorozatok esetén a

$$p(01)p(23)-p(02)p(13)+p(03)p(12)=0$$

egyenletet kapjuk, nem diszjunkt j,k sorozatok esetén meg a $0 = 0$ egyenletet. Megállapíthatjuk tehát, hogy

$$G(3,1)=V(p(01)p(23)-p(02)p(13)+p(03)p(12))\subseteq\mathbb{P}^N$$

egy kvadratikus hiperfelület az ötdimenziós projektív térben.

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy a $G(n,d)$ Grassmann-varietás pontjai kielégítik a Plücker-relációkat. Legyen tehát $p_0,\dots,p_d \in L$ olyan ponthalmaz, ami kifeszíti L-t. Ekkor a

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l p(j_0,\dots,j_{d-1},k_l)p(k_0,\dots,\hat{k}_l,\dots,k_{d+1}) \tag{4.8}$$

Plücker-reláció másként

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \\ p_i(j_0) & \dots & p_i(j_{d-1}) & p_i(k_l) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dots & \hat{p}_0(k_l) & \dots \\ & \vdots & \\ \dots & \hat{p}_d(k_l) & \dots \end{vmatrix}. \tag{4.9}$$

Fejtsük ki az első determinánsokat az utolsó, k_l indexű oszlopuk szerint,

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l\left(\sum_{i=0}^{d}(-1)^{(d+i)}\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \hat{p}_i(j_0) & \cdots & \hat{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} p_i(k_l)\right)\times$$

$$\times\begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix},$$

majd cseréljük meg a két szummát:

$$\sum_{i=0}^{d}(-1)d+i\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \hat{p}_i(j_0) & \cdots & \hat{p}_i(j_{d-1}) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix}\cdot\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l p_i(k_l)\begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy a belső szumma minden esetben nulla, mivel

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l p_i(k_l)\begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & p_i(k_l) & \cdots \\ \cdots & p_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & p_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

és ez utóbbi determináns első és $i+2$-edik sora megegyezik. Ezért

$$\sum_{l=0}^{d+1}(-1)^l\begin{vmatrix} \vdots & & \vdots & \vdots \\ p_i(j_0) & \ldots & p_i(j_{d-1}) & p_i(k_l) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \cdots & \hat{p}_0(k_l) & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \hat{p}_d(k_l) & \cdots \end{vmatrix} = 0\ , \tag{4.12}$$

azaz a Grassmann-varietás pontjaira valóban teljesülnek a Plücker-relációk.

Tekintsük most a másik irányú tartalmazást, azaz lássuk be, hogy ha egy $x \in \mathbb{P}^N$ pont minden Plücker-relációt kielégít, akkor $x \in G(n,d)$. Ehhez bizonyos értelemben "megoldjuk" a Plücker-egyenleteket. Legyen $x(k_0,\ldots,k_d) \neq 0$ (mivel az összes ilyen típusú kifejezés x homogén koordinátáit alkotják, legalább egy ilyen biztos lesz). Be fogjuk látni az alábbit

4.24. Lemma. *Az*

$$x(k_0,\ldots,\hat{k}_l\ldots,k_d,j)$$

alakú koordinátát meghatározzák az összes többit.

Egyenlőre fogadjuk el a lemma állítását és bizonyítsuk be segítségével a tétel hátralévő részét.

Először is, észrevehetjük, hogy a $(d+1)(n-d)+1$ darab

$$x(k_0,\ldots,\hat{k}_l\ldots,k_d,j)$$

alakú koordináta már egyértelműen meghatároz egy $L \subseteq \mathbb{P}^N$ d-síkot. Hiszen ha $0 \leq i \leq d, 0 \leq j \leq n$, akkor — feltéve, hogy $x(k_0,\ldots,k_d) = 1$ — a

$$p_i(j) \overset{\text{def}}{=} x(k_0,\ldots,k_{i-1},j,k_{i+1},\ldots,k_d) \tag{4.13}$$

választással kapott
$$(p_i(0), \ldots, p_i(n)) \tag{4.14}$$
pontok értelmesek (nem minden koordinátájuk nulla) és lineárisan függetlenek (mivel $p_i(k_l) = \delta_{il}$), ezért a $p_0, \ldots, p_d$ pontok kifeszítenek egy L d-síkot.

Látható, hogy L Plücker koordinátái a megfelelő kiindulási $x(j_0, \ldots, j_d)$ értékek, hiszen a $(j_0, \ldots, j_d)$-hez tartozó egyenlő $\det_{0\leq i\leq d, 0\leq\beta\leq d} p_i(j_\beta)$-val. Mármost ha a $\{j_0, \ldots j_d\}$ és $\{k_0, \ldots, k_d\}$ pontosan egy λ helyen térnek el, akkor
$$(p_i(j_\beta)) = \mathrm{Id} \tag{4.15}$$
a λ-adik oszlop kivételével, így L $(j_0, \ldots, j_d)$-hez tartozó Plücker-koordinátája $p_\lambda(j_\lambda) = x(j_0, \ldots, j_d)$. A lemma szerint a fenti típusú koordináták már meghatározzák az összes többit.

Ha $L' \subseteq \mathbb{P}^N$ egy másik d-sík ugyanazokkal a Plücker-koordinátákkal, akkor elérhető, hogy
$$\det p'_i(k_\gamma) \neq 0 \tag{4.16}$$
legyen, ily módon azt is biztosíthatjuk, hogy
$$(p'_i(k_\gamma)) = \mathrm{Id} = (p_i(k_\gamma)) \ , \tag{4.17}$$
azaz $L' = L$. □

Bizonyítás: (4.24 Lemma) Teljes indukciót fogunk használni az
$$m = d + 1 - |\{j_0, \ldots, j_d\} \cap \{k_0, \ldots, k_d\}|$$
mennyiségre, azaz arra a számra, amely megadja, hogy a két indexhalmaz hány helyen különbözik egymástól. Az $m = 1$ eset magától értetődő. Tegyük fel, hogy az $1, \ldots, m-1$ számokra már tudjuk a lemma állítását.

Tekintsük a $(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots j_d)$, $(k_0, \ldots, k_d, j_\beta)$ sorozatpárnak megfelelő
$$\sum_{l=0}^{d+1} (-1)^l p(j_0, \ldots, j_{d-1}, k_l) p(k_0, \ldots, \hat{k}_l, \ldots, k_{d+1}) = 0 \tag{4.18}$$
Plücker-relációt. Átrendezve azt kapjuk, hogy
$$p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, j_\beta) p(k_0, \ldots, k_d) = \tag{4.19}$$
$$\sum \sum_{l=0}^{d} (-1)^l p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, k_l) p(k_0, \ldots, \hat{k}_l, \ldots, k_d, j_\beta) \ .$$

Ha $k_l \in \{j_0, \ldots, j_d\}$, akkor $p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, k_l) = 0$. Amennyiben

$$k_l \notin \{j_0, \ldots, j_d\}$$

akkor $j_0, \ldots \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, k_l$ közül pontosan $m-1$ *nincs* benne $\{k_0, \ldots, k_d\}$-ben. Ebből következik, hogy ki tudjuk fejezni $p(j_0, \ldots, \hat{j}_\beta, \ldots, j_d, j_\beta)p(k_0, \ldots, k_d)$-t olyan $p(i_0, \ldots, i_d)$ koordinátákkal, ahol $\{i_0, \ldots, i_d\}$ és $\{k_0, \ldots, k_d\}$ legfeljebb $m-1$ helyen különbözik egymástól. Az indukciós feltevés szerint

$$p(j_0, \ldots, j_d)p(k_0, \ldots, k_d)^{m-1}$$

kifejezhető olyan koordinátákkal, amelyek legfeljebb egy indexben térnek el $(k_0, \ldots, k_d)$-től. Mivel $p(k_0, \ldots, k_d) \neq 0$, ez igaz lesz $p(j_0, \ldots, j_d)$-re is. Ezzel a lemmát igazoltuk. $\square$

A fenti tétel algebrai geometriai szempontból pontos verziója az alábbi.

4.25. Tétel. *A $G(n,d) \subseteq \mathbb{P}^N$ Grassmann-varietáson eltűnő homogén polinomok ideálját a Plücker-relációk generálják.*

4.26. Megjegyzés. *Legyen $U(n)$ az $n \times n$-es komplex unitér mátrixok csoportja. A $G(n,d)$ varietás egy alternatív jellemzése:*

$$G(n,d) \simeq U(n+d)/U(n) \times U(d) \ .$$

Ebből az is következik, hogy $G(n,d)$ összefüggő és irreducibilis.

Tekintsünk most úgy $G(n,d)$-re, mint egy $n+1$-dimenziós vektortér V $d+1$-dimenziós altereinek a halmazára. Rögzítsünk egy $e_1, \ldots, e_{n+1}$ bázist V-ben (azaz egy $V \simeq \mathbb{C}^{n+1}$ izomorfizmust). Ekkor adott $W \in G(n,d)$ alteret megadhatunk $d+1$ darab $\mathbb{C}^{n+1}$-beli $w_1, \ldots, w_{d+1}$ vektorral, amelyek kifeszítik W-t. Ezek egy

$$M_W = \begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{d+1,1} & \ldots & v_{d+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$(d+1) \times (n+1)$-es $d+1$-rangú mátrixot adnak meg. Tetszőleges ilyen mátrix leírja $G(n,d)$ egy elemét és M, M' pontosan akkor reprezentálják ugyanazt az alteret, ha létezik $C \in GL(W) = GL(\mathbb{C}, d+1)$, amelyre $M = CM'$.

Válasszunk egy $I = \{i_1, \ldots, i_{d+1}\} \subseteq [n+1]$ k-elemű indexhalmazt. Legyen

$$U_{\hat{I}} \stackrel{\text{def}}{=} \{e_i \mid i \in I\} \text{ által kifeszített altér}$$

és

$$\mathcal{U}_I \stackrel{\text{def}}{=} \{W \in G(n,d) \mid W \cap U_{\hat{I}} \neq\} \ .$$

Másképpen $\mathcal{U}_I$ azon W alterek halmaza, amelyekre az I-edik főminor valamely mátrixreprezentációban nemszinguláris. Tetszőleges $W \in \mathcal{U}_I$ altérnek van pontosan egy olyan mátrix leírása, amelyeben az I-edik főminor az identitásmátrix.

4.27. Megjegyzés. *Egy fenti típusú mátrix sorvektorai nem mások, mint a $W \cap (U_{\hat{I}} + e_j)$ metszetek elemei (ahol $j \in I$).*

Megfordítva, bármely olyan $(d+1) \times (n+1)$-es M mátrix, amelynek I-edik főminora az identitás, egy $W \in \mathcal{U}_I$ alteret ad meg. A fentiekből következik, hogy M-nek az I-t kiegészítő $(n-d) \times (n+1)$-es méretű minora W-t egyértelműen meghatározza
és egy

$$\phi_I : \mathcal{U}_I \to \mathbb{C}^{(d+1)(n-d)}$$

bijektív leképezést valósít meg. Az $(\mathcal{U}_I, \phi_I)$ párok a Grassmann-varietás egy algebrai — vagy komplex analitikus — atlaszát adják meg. Könnyen ellenőrizhető, hogy az átmenetfüggvények lineáris függvények.

Ez a lokális jellemzés megkönnyíti a Grassmann-varietások érintőtereinek leírását.

4.28. Állítás. *Minden $W \in G(n,d)$-re $T_W G(n,d) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, V/W)$.*

Bizonyítás: Legyen $W \in \mathcal{U}_I \subseteq G(n,d)$ rögzített. Ekkor tetszőleges $W' \in \mathcal{U}_I$ egy

$$\alpha : W \to U_{\hat{I}}$$

lineáris leképezés gráfja, tehát

$$\mathcal{U}_I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U_{\hat{I}})$$

amiből

$$T_W G(n,d) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U_{\hat{I}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, v/W)$$

következik. □

Korábban láttuk, hogy $G(n,d) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^{d+1}V)$ azon elemek halmaza, amelyek előállnak $\alpha = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{d+1}$ alakban. $\Lambda^{d+1}V$ ilyen elemeit *teljesen felbomló*nak hívjuk. Ezek jellemzésének a segítségével $G(n,d)$ egy újabb leírását kapjuk.

4.29. Állítás. *$\alpha \in \Lambda^{d+1}V$ pontosan akkor teljesen felbomló, ha a*

$$\begin{aligned} \phi \ : \ & V \to \Lambda^{d+1}V \\ & v \mapsto \alpha \wedge v \end{aligned}$$

lineáris leképezés rangja $n-d$.

Bizonyítás: Először is figyeljük meg, hogy adott $\alpha \in \Lambda^{d+1}V$ pontosan akkor osztható a $v \in V$ vektorral, ha $\alpha \wedge v = 0$. Emiatt α pontosan akkor lesz teljesen felbomló, ha az őt osztó vektorok terének dimenziója $k+1$. Ez ekvivalens a bizonyítandó állítással. □

4.3. Komplex sokaságok axiomatikus kohomológiaelmélete

A fejezet során legyen X egy n-dimenziós sima irreducibilis komplex projektív algebrai varietás (vagy összefüggő kompakt komplex analitikus sokaság). Ekkor értelmezhetünk X-en két sorozat funktort, az ún. homológia, illetve kohomológiafunktorokat, amelyek abel-csoportokat rendelnek X-hez. Ezek jelölése $H_k(X)$, illetve $H^k(X)$, a csoportok neve X k-adik homológia- illetve kohomológiacsoportja. Az alábbiakban ismertetjük ezen csoportok számunkra legfontosabb tulajdonságait. Az additívan írt csoportstruktúra mellett a kohomológiacsoportok között van egy asszociatív és esetünkben kommutatív szorzás, az ún. sapka-szorzás, ami a kohomológiacsoportok direkt összegét fokszámozott kommutatív gyűrűvé teszi.

Az alábbiakban tömören, bizonyítások nélkül összefoglaljuk a kohomológiaelmélet azon tulajdonságait, amelyekre az elkövetkezőkben szükségünk lesz. Természetéből adódóan a jelen leírás hiányos, továbbá feltételez némi jártasságot az algebrai topológiában.

1. Tulajdonság Ha k páratlan, akkor $H_k(X), H^k(X) = 0$;

$$H^*(X) = \oplus_{0\leq c\leq n} H^{2c}(X)$$

egy fokszámozott kommutatív gyűrű.

4.30. Megjegyzés. *Ha $X = \mathbb{P}^n$, akkor*

$$H^{2c}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{C}$$

és

$$H^*(X) \simeq \mathbb{C}[t]/(t^{n+1}) \ .$$

2. Tulajdonság Tetszőleges $Y \subseteq X$ irreducibilis (nem feltétlenül sima) c kodimenziós részsokasághoz van egy $[Y] \in H^{2c}(X)$ *fundamentális osztály.*

3. Tulajdonság Homotopikusan ekvivalens részvarietások egyanazt a fundamentális osztályt adják.

4.31. Megjegyzés. *Ha egy G összefüggő topologikus csoport hat X-en, akkor $[g(Y)] = [Y]$ minden $g \in G$-re.*

4. Tulajdonság Ha X-nek van olyan zárt algebrai halmazokból álló

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \cdots \supseteq X_0 = \emptyset$$

filtrációja, amelyre minden $X_i - X_{i-1}$ különbséghalmaz

$$X_i - X_{i-1} = \bigcup_j U_{ij} \ ,$$

$U_{ij} \simeq \mathbb{C}^{u_{ij}}$ típusú varietások diszjunkt uniója, akkor az $\overline{U}_{ij}$ osztályok $H^*(X)$ egy $\mathbb{Z}$-bázisát adják:

$$H^*(X) = \oplus_{i,j}\mathbb{Z}[U_{ij}] \ .$$

4.32. Megjegyzés. *Az n-dimenziós projektív tér esetén egy tetszőleges*

$$\mathbb{P}^n \supseteq \mathbb{P}^{n-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{P}^0 \supseteq \emptyset$$

teljes zászló egy megfelelő filtráció. Ekkor

$$\mathbb{P}^i - \mathbb{P}^{i-1} = U_i \simeq \mathbb{A}^i$$

és $H^i(X) = \mathbb{C}[U_i]$.

5. Tulajdonság Legyenek $Y, Z \subseteq X$ részvarietások, amelyekre

$$Y \cap X = W_1 \cup \cdots \cup W_t$$

részvarietások diszjunkt uniója, amelyre

$$\mathrm{codim}(W_i) = \mathrm{codim}(Y) + \mathrm{codim}(Z)$$

és minden i-re W_i érintőtere Y és Z érintőtereinek metszete. Ekkor

$$[Y][Z] = [W_1] + \cdots + [W_t] \ .$$

4.4. Schubert-osztályok

Az úgynevezett Schubert-varietások a Grassmann-varietások bizonyos részhalmazai, amelyek fontos szerepet játszanak a kombinatorikai és geometriai alkalmazásokban. Jelentőségük többek között abból adódik, hogy a Grassmann-varietások kohomológiagyűrűinek egy, az előző fejezetben (4. Tulajdonság) leírt bázisát alkotják.

Legyen
$$F. = (F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n) = \mathbb{P}^n$$
egy *zászló*, azaz lineáris alterek olyan egymásba ágyazott sorozata, amelyekre $\dim F_i = i$. Válasszunk továbbá egy

$$\lambda : \ n - d \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{d+1} \geq 0$$

Young-diagramot legfeljebb $(d+1)(n-d)$ dobozzal.

4.33. Definíció. *Az $(F., \lambda)$ párhoz tartozó Schubert-varietás*

$$\Omega_\lambda(F.) \stackrel{def}{=} \{ \ L \in G(n,d) \mid \forall 0 \leq i \leq d \ \ \dim L \cap F_{n-d+i-\lambda_i} \geq i \ \} \ .$$

4.34. Megjegyzés. *Az $\Omega_\lambda(F.) \subseteq G(n,d)$ Schubert-varietás irreducibilis, továbbá*
$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_\lambda(F.) = (d+1)(n-d) - |\lambda| \ .$$

4.35. Példa ($G(3,1)$).

4.36. Állítás. *Ha $F., G. \subseteq \mathbb{P}^n$ két zászló, akkor létezik olyan $C \in PGL(N+1, \mathbb{C})$ invertálható lineáris transzformáció, amelyre*

$$CG(n,d) = G(n,d)$$

és

$$CF. = G. \quad .$$

Az előző állítás szerint bármely két $F., G.$ zászló egymásba vihető egy alkalmasan választott lineáris transzformáció segítségével amely $G(n,d)$-t invariánsan hagyja, így $\Omega_\lambda(F.)$ és $\Omega_\lambda(G.)$ homotóp ekvivalensek. Az axiomatikus kohomológiaelmélet 3. tulajdonsága alapján ekkor

$$[\Omega_\lambda(F.)] = [\Omega_\lambda(G.)] \in H^{2|\lambda|}(G(n,d)) \ .$$

Értelmes tehát az alábbi

4.37. Definíció. $\sigma_\lambda \stackrel{def}{=} [\Omega_\lambda(F.)] \in H^{2|\lambda|}(G(n,d))$ *a λ partícióhoz tartozó Schubert-osztály.*

4.38. Tétel. *A $\{\sigma_\lambda\}$ osztályok $H^*(G(n,d))$ egy $\mathbb{Z}$-bázisát alkotják, továbbá érvényes a*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu, |\nu| = |\lambda| + |\mu|} c^\nu_{\lambda\mu} \sigma_\nu$$

Littlewood–Richardson-szabály.

A tétel egy jól ismert speciális esetét érdemes külön kiemelni.

4.39. Állítás (Pieri-formula). *Legyen $1 \le h \le n-d$, λ tetszőleges partíció. Ekkor*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_{(h)} = \sum_\nu \sigma_\nu \ ,$$

ahol az összegzés olyan ν partíciókon fut végig, amelyeket úgy kapunk, hogy λ-hoz hozzáadunk h dobozt, mind különböző oszlopba.

A fenti Pieri-formula közeli kapcsolatban áll a tablógyűrűbeli Pieri-formulával.

4.40. Példa. *Kidolgozzuk a $G(3,1)$ Grassmann-sokaság esetét. Ez esetben $d+1=n-d=2$, tehát a legnagyobb lehetséges partíció*

$$\ydiagram{2,2}$$

A lehetséges eseteket az alábbi táblázat tartalmazza:

λ *partíció*	*geometriai leírás*	$\dim_{\mathbb{C}} \sigma_\lambda$
$\emptyset$	*nincs feltétel,* $\sigma_\lambda = G(3,1)$	*4*
$\ydiagram{1}$	*metsz egy adott egyenest*	*3*
$\ydiagram{2}$	*átmegy egy rögzített ponton*	*2*
$\ydiagram{1,1}$	*benne van egy rögzített síkban*	*2*
$\ydiagram{2,1}$	*átmegy egy rögzített síkban lévő rögzített ponton*	*1*
$\ydiagram{2,2}$	*egy rögzített egyenes* $\in G(3,1)$	*0*

A tételből következően a σ_λ elemek közti szorzási szabályok az alábbiak:

$$\ydiagram{2} \cdot \ydiagram{1,1} = 0 \ ,$$

$$\ydiagram{1} \cdot \ydiagram{1} = \ydiagram{2} + \ydiagram{1,1} = 0 \ ,$$

$$\ydiagram{2} \cdot \ydiagram{2} = \ydiagram{1,1} \cdot \ydiagram{1,1} = \ydiagram{2,2} \ .$$

Ezek alapján könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\left(\ydiagram{1} \right)^4 = 2 \cdot \ydiagram{2,2} \ .$$

Másszóval, ha rögzítünk négy általános helyzetű egyenest $\mathbb{P}^3$-ben, akkor pontosan két olyan egyenes van, amelyik mind a négyet metszi.

4.41. Állítás (Giambelli-formula). *Tetszőleges $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d)$ partíció esetén*

$$\sigma_\lambda = \begin{vmatrix} \sigma_{\lambda_1} & \sigma_{\lambda_1+1} & \cdots & \sigma_{\lambda_1+d} \\ \sigma_{\lambda_2-1} & \sigma_{\lambda_2} & \cdots & \sigma_{\lambda_2+(d-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{\lambda_d-(d-1)} & \cdots & \cdots & \sigma_{\lambda_d} \end{vmatrix} .$$

4.42. Tétel (Dualitási tétel). *Legyen $\mu, \lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d)$ tetszőleges partíció,*

$$\lambda^* = (n-d-\lambda_d \geq \cdots \geq n-d-\lambda_1)$$

a λ-nak megfelelő duális partíció*. Ha $|\lambda| + |\mu| = (d+1)(n-d)$, akkor*

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \delta_{\lambda^*,\mu} \sigma_{(n-d,\ldots,n-d)} \ ,$$

ahol $\sigma_{(n-d,\ldots,n-d)}$ egy $\mathbb{P}^n$-beli egyenes osztálya $H^{2(d+1)(n-d)}(G(n,d))$-ben.

Tartalomjegyzék