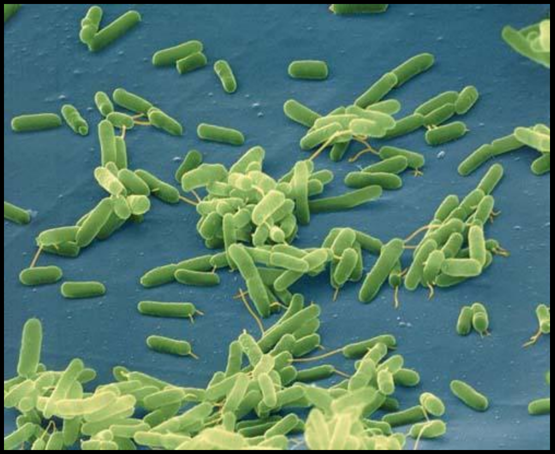
NEMLINEÁRIS KÖZJÓ JÁTÉKOK, CSALÓK ÉS EGYÜTTMŰKÖDŐK EGYÜTTÉLÉSE

avagy mikor növeli a bizonytalanság az együttműködést.

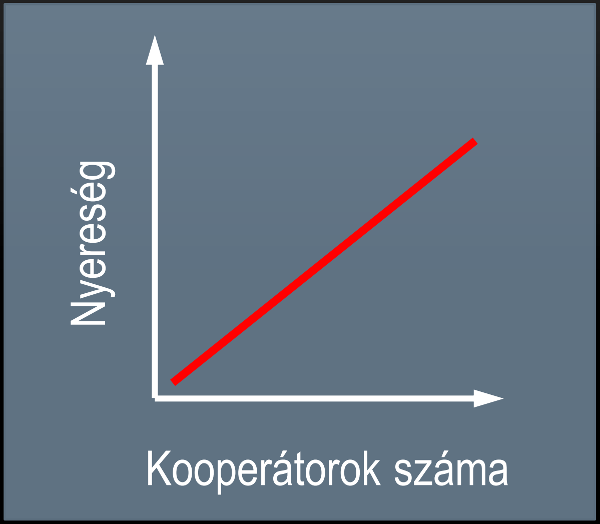
Marco Archetti (UEA) Scheuring István (ELTE-MTA)

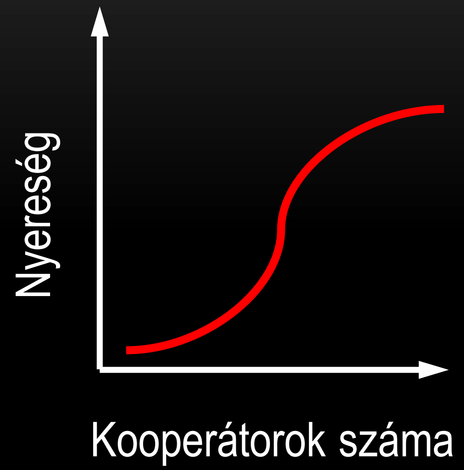
KOOPERÁCIÓ AMIKOR NEM KÉT EGYED VAN KAPCSOLATBAN

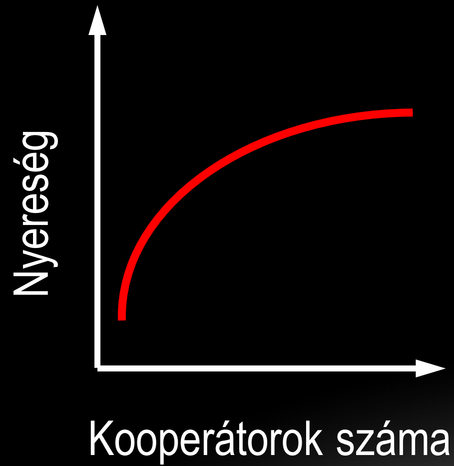
CSALÓK ÉS EGYÜTTMŰKÖDŐK EGYÜTTÉLÉSE

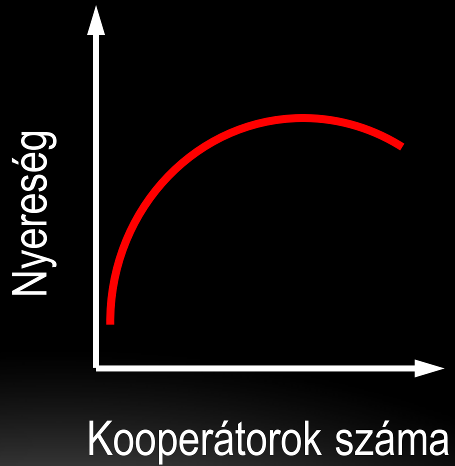


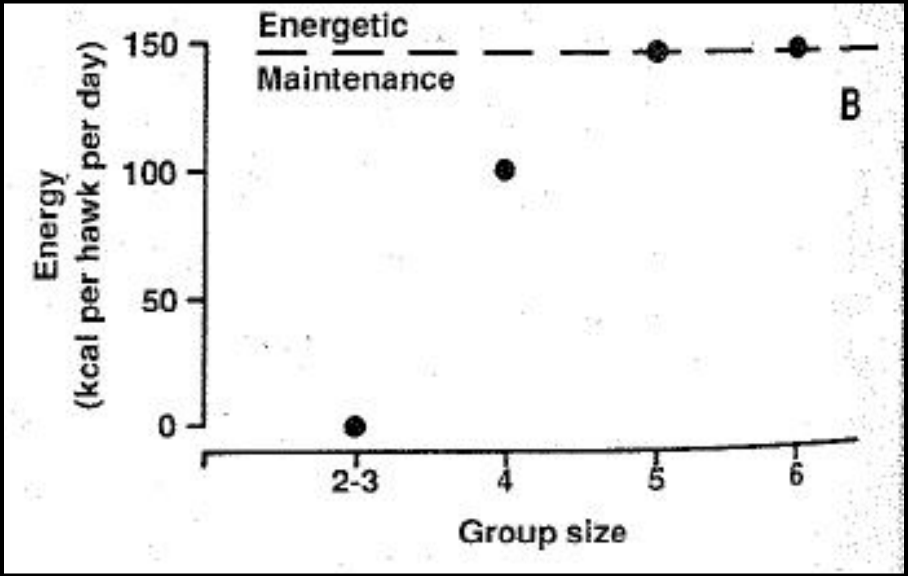
HOGYAN NŐ A NYERESÉG?



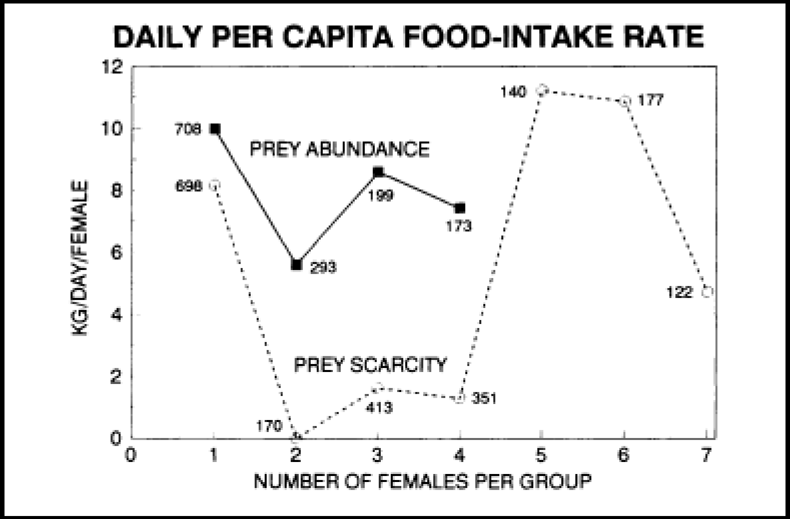






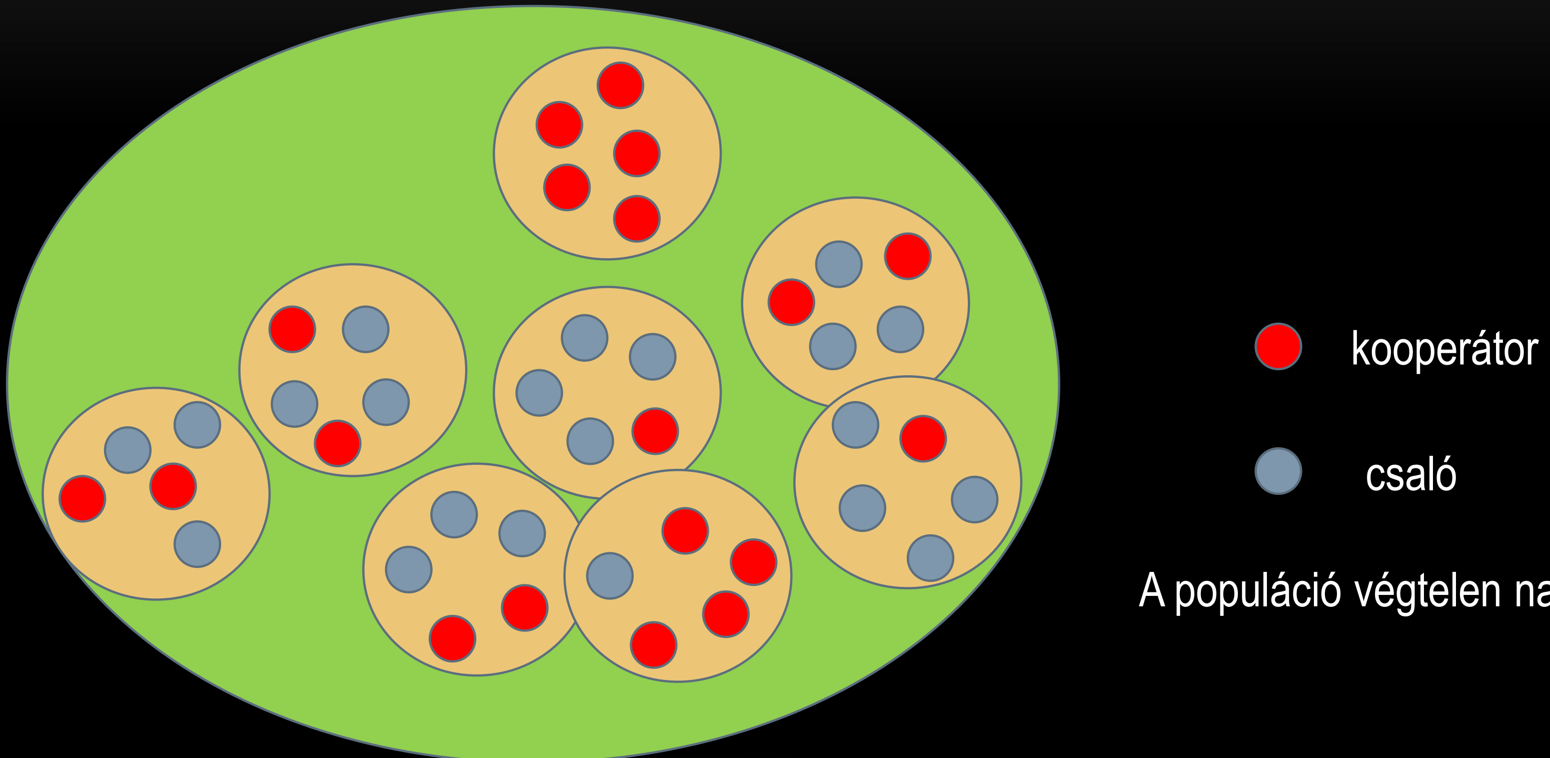


Bednarz 1988



Packer et al. 1990

A MODELL



A populáció végtelen nagy

$$W_C = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} x^j (1-x)^{N-1-j} b(j+1) - c$$

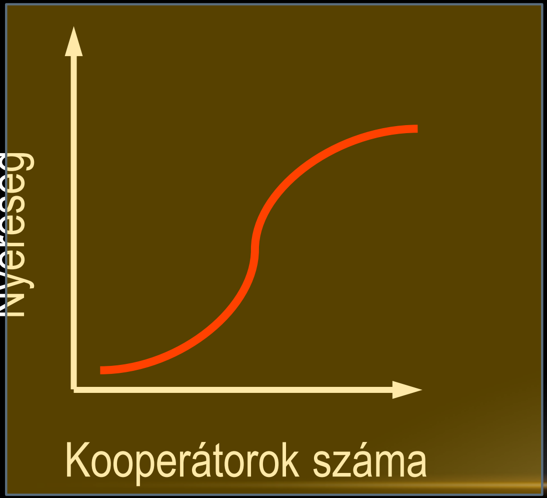
$$W_D = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} x^j (1-x)^{N-1-j} b(j)$$

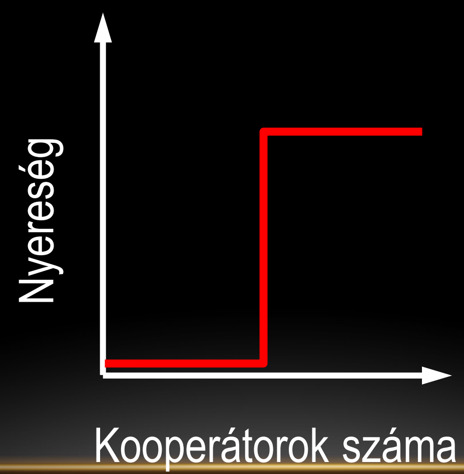
$$\dot{x} = (W_c - W)x$$

$$\dot{x} = x(1-x)\left(W_C - W_D\right)$$

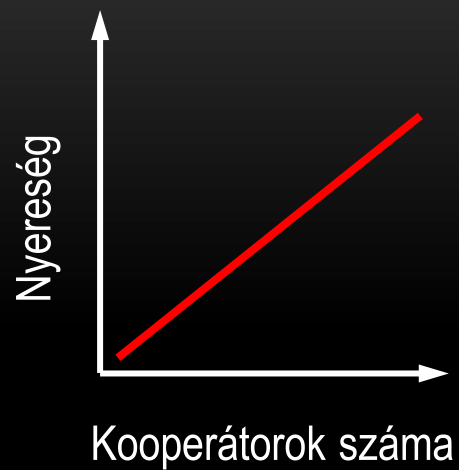
Előzmények

$$b(j) = b\frac{j}{N}$$





$$b(j) = \begin{cases} 0, \text{ ha } \; j < k \\ b, \text{ ha } \; j \geq k \end{cases}$$



$$b(j) = b\frac{j}{N}$$

$$\dot{x} = x(1-x)\left(W_C - W_D\right) = x(1-x)\left(b/N - c\right)$$

$$\hat{x} = 0 \text{ stabil, ha } \frac{b}{N} < c, \text{ azaz } \frac{b}{c} < N$$

$$\hat{x} = 1 \text{ stabil, ha } \frac{b}{c} > N$$

N szereplős rabok dilemmája játék

Harmónia játék

C= kooperátor (önzetlen), D=csaló;
b= nyereség, c= költség; b > c

Rabok dilemmája

	C	D
C	$b-c$	$-c$
D	b	0

Hótorlasz játék

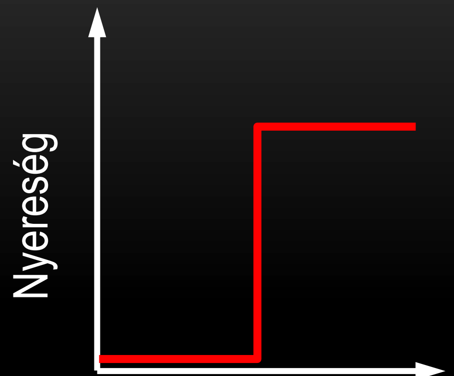
	C	D
C	$b-c/2$	$b-c$
D	b	0

Szarvasvadászat

	C	D
C	$2b-c$	$-c$
D	b	0

Harmónia játék

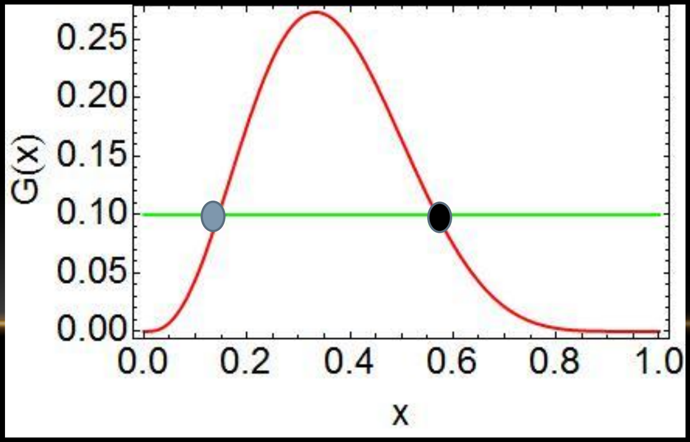
	C	D
C	$2b-c$	$b-c$
D	b	0



$$b(j)=\begin{cases}0, \text{ ha } j<k\\ b, \text{ ha } j\geq k\end{cases}$$

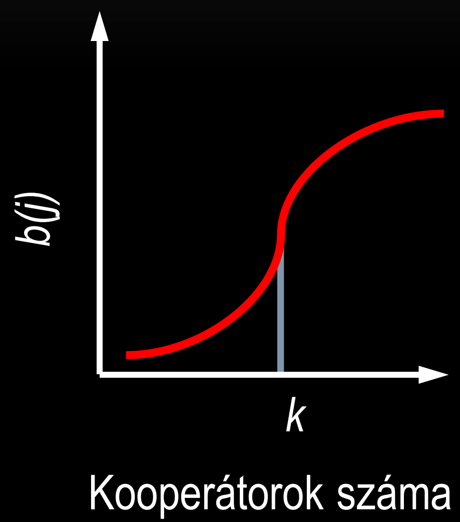
$$\dot{x}=x(1-x)\left(W_C-W_D\right)=x(1-x)\left(G(x)-c\right)$$

$$G(x)=\binom{N-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{N-k}$$



Archetti, 2009, Archetti Scheuring 2011

Az általános probléma



$$\Delta b(j) = b(j+1) - b(j) > 0, \text{ ha } j = 0,1,\ldots N-1$$

$$\Delta b(j+1) \geq \Delta b(j), \text{ ha } j \leq k$$
$$\Delta b(j+1) \leq \Delta b(j), \text{ ha } j > k.$$

- A nyereségfüggvény szigmoid alakú.
- Annak az esélye, hogy a lépcső *k*-nál van *Δb*(*k*).

$$\dot{x} = x(1-x)\left(W_C - W_D\right) = x(1-x)\left(G(x) - c\right)$$

$$G(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \binom{N-1}{j} x^j (1-x)^{N-1-j} \Delta b(j)$$

$$G(x) - c = 0$$

???

BERNSTEIN POLINOMOK

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_{j,n}(x)\beta(j)$$

$$f_{j,n}(x) = \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

$$x \in [01]$$

n+1-ik Bernstein bázis polinom

$$\beta(j)$$

Bernstein koefficiens

Sergei Natanovich Bernstein (1880-1968)

Unimodalitás megőrzése

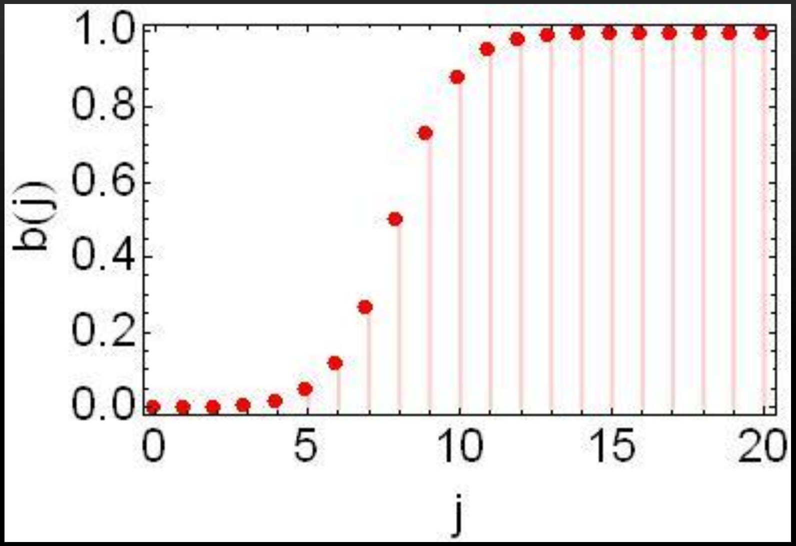
Ha van egyetlen $\hat{j}$, melyre $\beta(\hat{j}) = Max\{\beta(j)\}$,
akkor $B_n(x)$ unimodális az $x \in [01]$-ben.

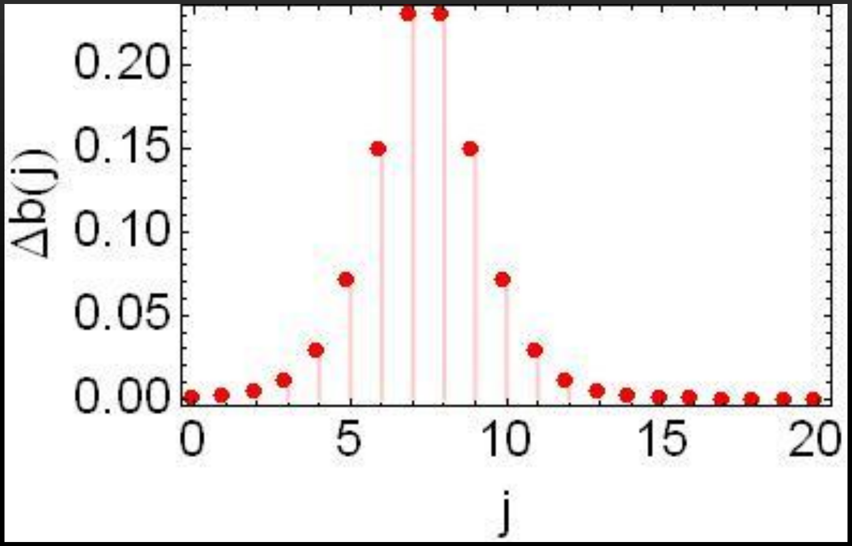
Varianca csökkentő hatás

A $B_n(x)$-nek $d = S(\beta(j)) - 2l$ gyöke van ($l = 0,1,..$).

Végpontok

$$B_n(0) = \beta(0), \; B_n(1) = \beta(n)$$

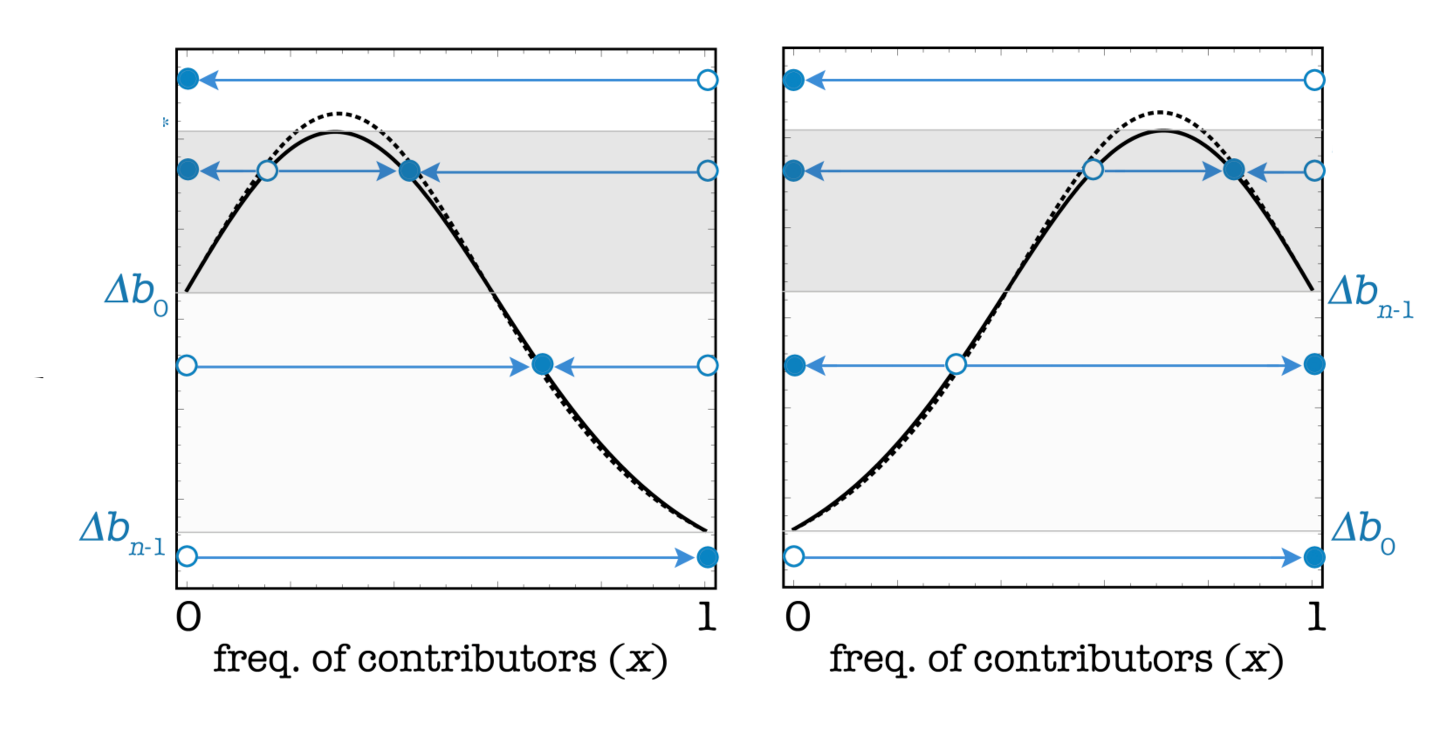




$$G(x)=\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N-1}{j}x^{j}(1-x)^{N-1-j}\,\Delta b(j)$$

$$B_{N-1}(x)=G(x),\quad \beta(j)=\Delta b(j)$$

$$G(x_{\max}) - c,\ \Delta b(0) - c,\ \Delta b(N-1) - c$$



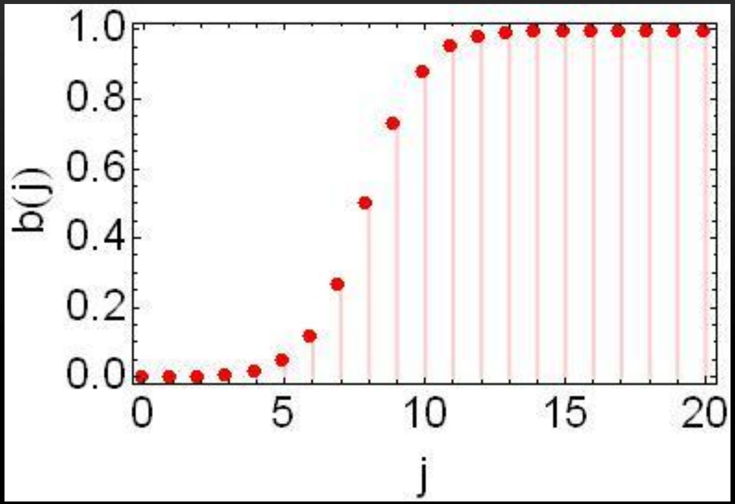
A BERNSTEIN POLINOMOK KONVERGENCIÁJA

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_{j,n}(x)\beta(j/n)$$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = \beta(x)$$

Voronovskaja tétel

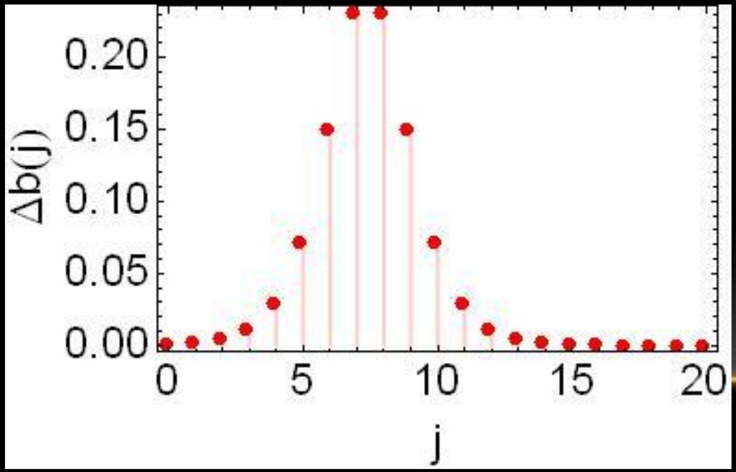
$$\lim_{n\to\infty} n\left[B_n(x) - \beta(x)\right] = 1/2x(1-x)\beta''(x)$$



$$b(j)=\frac{1}{1+e^{1/s(k-j)}},$$

$$b(j/n)=\frac{1}{1+e^{1/s(h-j/n)}}$$

$$\Delta b(j/n)=b(j+1/n)-b(j/n)\approx 1/nb'(j/n)$$



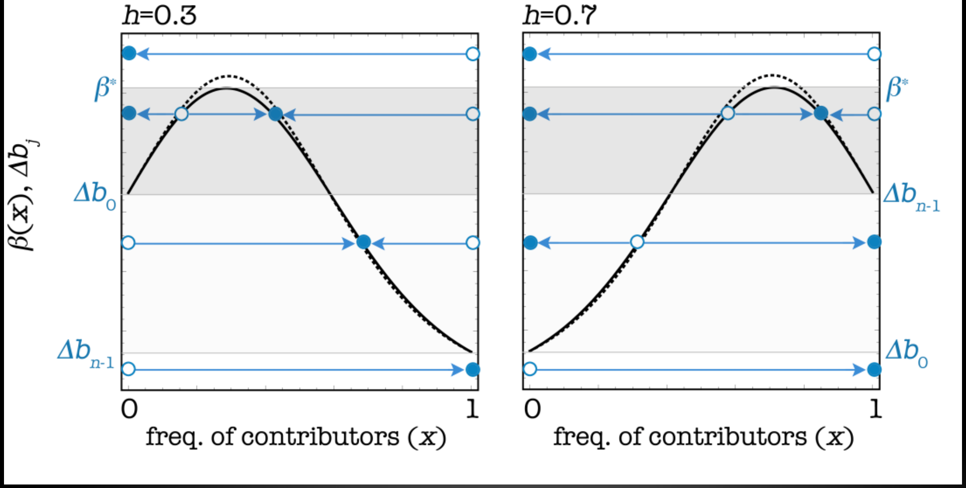
$$G(x)\approx 1/nb'(x)$$

$$b'(x)-cn=0$$

$$b'(x) - cn = 0$$

$$x_{\pm} = h - \frac{s}{n} \log\left[\frac{1 \pm \sqrt{1-4cs}}{2cs} - 1\right]$$

$$x_{-} = x_s,\ x_{+} = x_u \text{ ha } Min[b'(0)/n, b'(1)/n] < c < 1/(4s)$$



s=0.2; n=30,

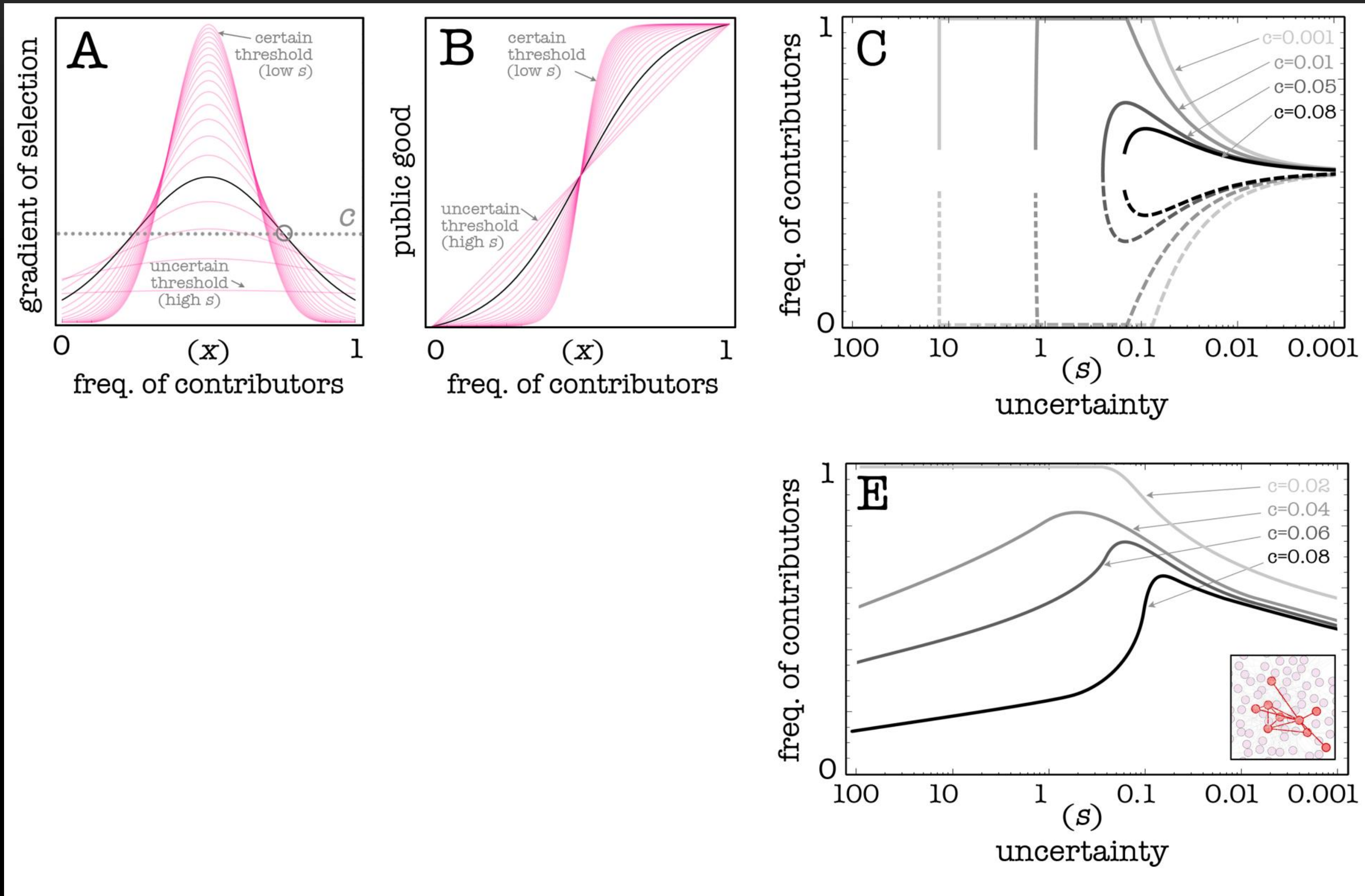
AZ OPTIMÁLIS BIZONYTALANSÁG

$$x_s = h - \frac{s}{n}\log\left[\frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma}}{2} - 1\right], \sigma = \frac{1}{cs}$$

$$\frac{dx_s}{d\sigma} = 0, \frac{d^2 x_s}{d\sigma^2} < 0, \sigma > 4$$

Egyetlen *h*-tól független megoldása van (σ_m), ahol x_s maximális lesz:

$$s_m = \frac{1}{\sigma_m c} \approx \frac{1}{6.98c}$$


A
certain threshold (low s)
uncertain threshold (high s)
c
gradient of selection
0
(x)
1
freq. of contributors
B
certain threshold (low s)
uncertain threshold (high s)
public good
0
(x)
1
freq. of contributors
C
c=0.001
c=0.01
c=0.05
c=0.08
freq. of contributors
1
0
100
10
1
0.1
0.01
0.001
(s)
uncertainty
E
c=0.02
c=0.04
c=0.06
c=0.08
freq. of contributors
1
0
100
10
1
0.1
0.01
0.001
(s)
uncertainty

ÖSSZEGZÉS

- Általános nemlineáris PGG-re a stabil és instabil állapotok kvalitatív jellemzése.
- Nagy *n* limeszben közelítőleg ki is tudjuk számolni ezeket a stabil állapotokat. A közelítés jó, ha a nemlinearitás nem nagyon erős.
- A küszöb közepesen nagy bizonytalansága esetén lesz maximális a kooperáció egyensúlyban. (Klímaváltozás elleni védekezés?)