Simonovits András:

BME TTK, Matematikai Intézet

MATEMATIKAI MÓDSZEREK

A DINAMIKUS KÖZGAZDASÁGTANBAN

MTA, Közgazdaságtudományi Intézet

TARTALOMJEGYZÉK

Előszók 5

Bevezetés 8

I. RÉSZ. DINAMIKA OPTIMALIZÁLÁS NÉLKÜL 18

1. Differenciaegyenletek: alapfogalmak és lineáris rendszerek 19

1.1. Alapfogalmak 19
1.2. Általános lineáris rendszerek 24
1.3. Síkbeli lineáris rendszerek 32
1.4. Lineáris szabályozási rendszerek 35

2. Diszkrét idejű lineáris modellek 42

2.1. A lineáris akcelerátor-multiplikátor modell 42
2.2.* A lineáris indítás-beruházás modell 45
2.3. A lineáris készletjelzéses modellpár 52
2.4.* Decentralizált szabályozás várakozásokkal 57

3. Nemlineáris differenciaegyenletek 62

3.1. A fixpont létezése és stabilitása 62
3.2. Határciklusok 67
3.3. Káosz 69

4. Diszkrét idejű nemlineáris modellek 75

4.1. Szeszélyes növekedési ciklusok 75
4.2. A nemlineáris akcelerátor-multiplikátor modell 77
4.3.* A nemlineáris indítás-beruházás modell 79
4.4. A nemlineáris készletjelzéses modell 86
4.5.* Nemlineáris készletjelzés várakozásokkal 88
4.6. Vegyes várakozások 92
4.7. Tanulságok 96

5. Közönséges differenciálegyenletek **98**

5.1. Alapfogalmak 98
5.2. Lineáris rendszerek 103
5.3. Nemlineáris rendszerek 108
5.4. Szabályozás folytonos időben 111

6. Folytonos idejű modellek **113**

6.1. Növekedési modellek 1113
6.2.* A kormányzati stabilizálás modellje 116
6.3. A versenyzői árigazodás modellje 118

II. RÉSZ. DINAMIKA OPTIMALIZÁLÁSSAL **125**

7. Dinamikus programozás és szabályozáselmélet **126**

7.1. A determinisztikus optimumelv 126
7.2. A sztochasztikus optimumelv 134
7.3. Optimális LQ-szabályozás teljes megfigyelésnél 135
7.4.* Optimális állapotbecslés és szabályozás tökéletlen megfigyelésnél 137

8. A dinamikus programozás alkalmazásai **141**

8.1. Optimális megtakarítás 141
8.2. Optimális felhalmozás 144
8.3. A nagy halháború 148

9. Optimális folyamatok (szabályozás) elmélete **151**

9.1. Alapfeladat 151
9.2. Variációszámítás 155
9.3. Kiegészítések 158

10. Optimális fogyasztási pályák **163**

10.1. Egzogén bér és kamat 163
10.2. Endogén bér és kamat, végtelen időtáv 167
10.3. Véges időtáv, állandó termelés-tőke hányados 170

FÜGGELÉKEK **176**

A. függelék. Lineáris algebrai kiegészítés **177**

B. függelék. Együttélő nemzedékek **186**

B.1. Egy OLG-cseregazdaság 186
B.2. Termelő OLG-gazdaság 194
B.3. Nyugdíjrendszerek és tőkefelhalmozás 197
B.4. A pénz mint csereeszköz egy OLG-modellben 198
B.5. Tanulságok 200

C. függelék.* Együttélő korosztályok **202**

C.1. Egy OLC-cseregazdaság 202
C.2. Állandósult állapotok 211
C.3. Endogén ciklusok racionális várakozásokkal 214
C.4. Dinamika racionális várakozásokkal 219
C.5. Dinamika naiv várakozásokkal 226
C.6. Két tb-rendszer összehasonlítása 232

D. függelék. Optimális nyugdíjjáradék tervezése **235**

E. függelék. Átmenet és foglalkoztatottság **243**

Feladatmegoldások **250**

Irodalomjegyzék **259**

Tárgymutató

ELŐSZÓ AZ ELSŐ KIADÁSHOZ

Kutatói pályám kezdetén, 1973-ban kezdtem foglalkozni dinamikus közgazdasági modellekkel, és kisebb-nagyobb kitérőkkel azóta is ezen a területen dolgozom. Két évtized alatt legalább három dinamikai témakört tanulmányoztam: (i) 1973 és 1981 között az *árjelzésnélküli szabályozás* témakörét vizsgáltam, (ii) majd 1982 és 1991 között a *szocialista gazdaság növekedési problémáit és ciklusait* elemeztem. (iii) Jelenleg az *együttélő nemzedékek és korosztályok* elméletét kutatom, ahol továbbra is dinamikus (vagy azzal határos) kérdésekkel foglalkozom.

Amióta 1988 körül megkezdtem a Budapesti (akkor még Marx Károly) Közgazdaságtudományi Egyetemen dinamikus közgazdaságtani előadásaimat, szomorúan tapasztalom, hogy egyetemi tanulmányaik alatt a hallgatók milyen keveset hallanak a dinamikus közgazdaságtanban szükséges matematikai módszerekről: differenciál- és különösen differenciaegyenletekről, nem is beszélve a dinamikus optimumszámításról. Fokozatosan megérlelődött bennem az igény: jó lenne megismertetni az érdeklődő diákokat azokkal az alapvető matematikai módszerekkel, melyekre a dinamikus közgazdaságtanban szükség van. Vagy kifordítva a gondolatot: bemutatni azokat a dinamikus közgazdasági modelleket, ahol a legfontosabb matematikai módszerek sikerrel alkalmazhatók.

1993-ban a Rajk László Szakkollégium elfogadta pályázatomat, és Soros György anyagi támogatásával örömmel vágtam a feladatnak: nekiláttam egy jegyzet megírásának, melynek javított (de távolról sem végleges) változatait 1993–1997-ben a BKE doktori program I. és II. évfolyama, illetve 1996-ban a BKE ötödéves hallgatóinak adtam elő.

Az ízelítő készítésénél szabadon kölcsönöztem magamtól és más szerzőktől – természetesen a források feltüntetésével és az anyagok átszabásával. A matematikai és közgazdasági fejezetek következetes váltogatásával Chiang (1984) bevezető jellegű, valamint Stokey és Lucas (1989) „nagyon haladó” szintű könyvét követtem, azonban igyekeztem középszinten maradni. Egyrészt be akartam mutatni a nagyon hatékony módszereket némi általánosságban. Másrészt lemondtam a funkcionálanalízis, a mértékelmélet és más magasabb matematikai elméletek és közgazdasági alkalmazásaik bemutatásáról. Csak az Olvasó döntheti el, hogy mennyire sikerült e kísérlet.

Munkahelyemen és vendégkutatói posztjaimon számos kolléga volt hatással rám. Elsőként Kornai Jánost említem meg, aki a szabályozáselmélet és a szocialista makrodinamika témakörébe vezetett be. Húszéves együttműködésünkről számos – részben a könyvben is tárgyalt – közös cikk tanúskodik. Cars Hommes és Helena Nusse a szocialista gazdaság kaotikus modelljének közös kutatása közben szinte bevezettek a nemlineáris dinamika modern fejezetébe. Molnár György az együttélő korosztályok modellezésében volt társszerzőm.

Sokat köszönhetek Bródy Andrásnak, Kapitány Zsuzsának, Michael Lovell-nek és Martos Bélának az árjelzés nélküli szabályozás, Bagdy Gábornak, Bauer Tamásnak, John Burkett-nek, Chikán Attilának, Halpern Lászlónak, Lackó Máriának, Molnár Györgynek, és Soós Károly Attilának a szocialista ciklusok, végül Augusztinovics Máriának, Johann Brunnernek és Eduardo Siandrának az együttélő korosztályok kutatásánál nyújtott segítségért.

Az optimalizáláson alapuló dinamikus modellekre Ambrus-Lakatos Loránd, Kertesi Gábor és Leonard Mirman hívta föl a figyelmem. Köszönetem fejezem ki Balla Katalinnak, Darvas Zsoltnak, Eső Péternek, Kocsis Viktóriának, Magyarkúti Gyulának, Romhányi Balázsnak, Szabó Imrének, Tallos Péternek és Vincze Jánosnak a kézirat korábbi változatainak gondos átnézéséért, Zalai Ernőnek és Michael Landesman-nak támogatásukért és számos további hallgatómnak a hibák gyomlálásáért. Természetesen az említett személyek a könyv tartalmáért és a benne maradó hibákért semmiképpen sem felelősek. Utoljára, de nem utolsósorban itt köszönöm meg Simonovits Miklósnak, hogy saját készítésű programjaival lehetővé tette, hogy csúf Word 5.0 dokumentumomat elegáns TeXanyaggá formáljam.

Itt fejezem ki hálámat a kutatás anyagi és erkölcsi elősegítéséért munkahelyemnek (az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének), az OTKAnak (T 6919 és 019696), a Művelődési és Kulturális Minisztérium MKM 242/1996–97 sz. támogatásának, valamint a következő intézményeknek: a belga CORE, Louvain-la-Neuve; az olasz Modenai Egyetem; az amerikai University of Illinois at Urbana–Champaign és Wesleyan University, CT; a holland Groningeni Egyetem és a Tilburgi Egyetem (CentER), végül az osztrák Linzi Egyetem.

Köszönettel tartozom a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó kollektívájának, hogy mindent megtett a könyv sikeres megjelentetéséért.

Örömmel veszek minden konstruktív megjegyzést a következő címen: mail: simonov@econ.core.hu .

Budapest, 1998. május

A szerző

ELŐSZÓ A MÁSODIK KIADÁSHOZ

Könyvem második kiadásában megtartottam az eredeti szerkezetet, szerkezeti változtatást csak a 4. fejezet utolsó előtti, d-várakozásokkal foglalkozó alfejezetének beiktatása, a 8.1. és 8.2. alfejezet felcserélése, a 8.3. alfejezet törlése és egy új, D. és E. függelék írása jelent? ez utóbbi anyagok társszerzői Eső Péter, illetve a a néhai Balla katalin és Köllő János. A legtöbb helyen megtartottam az eredeti szöveget, alaposabban csupán a 7.1., a 8.2. alfejezetet és a B. függeléket változtattam meg. Ezenkívül igyekeztem az elírásokat kiküszöbölni.

Köszönetet mondok a CEU Közgazdasági Tanszékének és a BME Matematikai Intézetének, hogy lehetővé tették e tárgy oktatását, valamint hallgatóinak, akik megjegyzéseikkel az 1998. őszi félévben előadott II. rész javításához hozzájárultak.

Budapest, 2006. szeptember

A szerző

BEVEZETÉS

Ebben a könyvben viszonylag egyszerű dinamikus közgazdasági modelleket mutatok be, az egyes modellek tanulmányozása előtt azonban ismertetem a szükséges matematikai módszereket. Az egymást követő matematikai és közgazdasági fejezetek párokat alkotnak: minden matematikai (páratlan sorszámú) fejezet előkészíti a következő (páros sorszámú) fejezet(ek)ben szereplő közgazdasági modellek tárgyalását. A három függelékből az A. függelék matematikai, a B. és C. függelék közgazdasági jellegű. Ezenkívül mind a matematikai, mind a közgazdasági fejezetek egymásra épülnek. Ez a felépítés megóvja az Olvasót attól, hogy a közgazdasági modellek tanulmányozása közben kelljen megismerkednie új matematikai fogalmakkal és tételekkel. Ugyanakkor az Olvasónak a közgazdasági részek olvasása előtt el kell hinnie, hogy a matematikai eszközökre szüksége lesz.

A könyvben nem törekszem teljességre, inkább ízelítőt adok az általam alapvetőnek tartott dinamikus kérdésekről. Ugyanakkor igyekszem felkutatni az ősöket, s lehetőleg megjelölni a forrásokat. A könyv tartalmáról a tartalomjegyzék eligazít, ebben a bevezető fejezetben inkább a legfontosabb sajátosságokat próbálom kidomborítani.

KÉRDÉSKÖRÖK

A Bevezetésben először áttekintjük a legfontosabb kérdésköröket: statika vagy dinamika, diszkrét vagy folytonos idő, optimalizáljunk vagy sem, szabályozáselméleti keret, stabilitás és működőképesség, linearitás vagy nemlinearitás, determinisztikus vagy sztochasztikus modellek, várakozások, véges vagy végtelen életű fogyasztó, összevont vagy részletezett modellek, elegancia vagy relevancia, kritikai szemlélet.

Statika vagy dinamika

A hagyományos matematikai közgazdaságtan bevallottan *statikus*: különböző időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók nem szerepelnek benne. Például az általános egyensúlyelmélet alapmodelljében (Arrow és Debreu, 1954) a kereslet, a kínálat és az árvektor egy időpontra vonatkozik. Vannak olyan *kvázidinamikus modellek*, amelyekben különböző időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók szerepelnek, de triviálisan vannak vagy egyáltalán nincsenek összekapcsolva (például a Neumann-modell egyensúlyi volumen- és árpályája; Neumann, 1938). A valóságos gazdaság azonban *dina-*

mikus különböző időpontokra vagy időszakokra vonatkozó változók kapcsolatban állnak egymással (Frisch, 1933). Ebben a könyvben dinamikus kérdéseket vizsgálunk.

Diszkrét vagy folytonos idő

Mind a matematikát, mind a közgazdaságtant végigkíséri a diszkrét és folytonos időfelfogás kettőssége. A köznapi és a fizikai időfelfogás a folytonosnak kedvez, a mérő- és számítóeszközök a diszkrétnek. Az időbeli folyamatok matematikai elméletei általában folytonos idővel dolgoznak. Alapeszközük a (közönséges) *differenciálegyenlet*; amelyben az idő a független változó, s a függő változók és idő szerinti deriváltjaik egy egyenletrendszerben szerepelnek. Például a matematikai inga egyenletében a gyorsulás (a helyzet második deriváltja) közelítőleg a helyzet ellentettjével arányos. A numerikus analízis viszont szükségszerűen diszkrét idővel (lépésszámmal) dolgozik, s a *differenciaegyenlet*re támaszkodik: itt is az idő a független változó, s a függő változók és idő szerinti különbségi hányadosaik, vagy eltoltjaik szerepelnek egy egyenletrendszerben. Például éves kamatozás esetén a tőke és növekménye (a kamat) között az éves kamatláb teremt kapcsolatot. Érdekes módon a differenciaegyenletek elmélete kaleidoszkópszerűbb (kaotikusabb), mint a differenciálegyenleteké (lásd később). Kezdő számára viszont jobban hozzáférhető, hiszen a differenciálegyenletekkel ellentétben, a differenciaegyenletek megoldásának létezése és egyértelműsége magától értetődő.

Az első dinamikus közgazdasági modellekben egyaránt föllelhető a diszkrét és folytonos idejű megközelítés (például Samuelson, 1939a és 1941). Sőt, az üzleti ciklusok első modelljei a két megközelítést egyesítve, *kevert* (diszkrét és folytonos idejű) egyenleteket alkalmaztak (Frisch, 1933).

Azóta már mindkét megközelítésnek kiterjedt irodalma van. Ennek megfelelően a könyv is mindkét megközelítést tartalmazza. Célszerűtlen lenne azonban teljes mértékben kifejteni e párhuzamot, ezért a közgazdasági tartalomtól függően hol ezt, hol azt a módszert mutatjuk be. (Ha azonban választani kellene a két módszer között, akkor a közgazdaságtanban a diszkrét módszert választanám, mert a legfontosabb közgazdasági folyamatokra jobb közelítést nyújt, mint a folytonos.)

Optimalizálás nélkül vagy optimalizálással

A dinamikus közgazdaságtan kialakulásakor egyik modell sem támaszkodott optimalizálásra. Az első korszerű dinamikus optimalizálási modellek 1960 körül jelentek meg (Tinbergen, 1960) és sokáig békésen együtt éltek optimalizálás nélküli társaikkal. Az optimalizálás nélküli modellek az utóbbi időszakban egyre népszerűtlenebbek váltak, mert a döntéshozók viselkedését nem „racionális döntésként" magyarázzák.

Számos „mérsékelten modern" könyv (például Blanchard és Fischer, 1989, 28. o.) kiegyensúlyozott álláspontot foglal el az optimalizálás kérdésében. „Neoklasszikus irányultságunk nem jelenti azt, hogy csak azokat a makromodelleket tekintenénk érvényesnek, melyek maximalizáláson alapulnak...Azt hisszük, hogyha egy alapelveken alapuló modellre várnánk, mielőtt hajlandók lennénk a folyó eseményeket elemezni és gazdaságpolitikai tanácsokat adni, veszélyes utópiát követnénk, amely a való világot a sarlatánokra hagyja azok helyett, akik felismerik mindenkori tudásunk bizonytalanságait."

Az „igazán modern" könyvek viszont egyszerűen kizárják a közgazdaságtan birodalmából az optimalizálás nélküli modelleket. Jellemző például Azariadis (1993, 4. o.) értékelése Solow növekedési modelljéről, ahol Solow a megtakarítási hányadot (a tapasztalattal összhangban) időben állandónak feltételezte: „Solow egy *ad hoc* feltevéssel élt, s kevés ilyen súlyos bűn létezhet egy magára adó közgazdász számára."

Jómagam közelebb állok a „mérsékelten modern", mint az „igazán modern" irányzathoz, de még a mérsékelt irányzatnál is jóval kisebb jelentőséget tulajdonítok az optimalizálásának. Számomra közömbös, hogy a magatartási egyenletek az életből vannak ellesve, vagy pedig fennkölt célfüggvények és költségvetési feltételek nászának gyümölcsei. „Védelmül" három dolgot hozok fel: *a)* A fent említett úttörők iránti tisztelet. *b)* A legtöbb dinamikus optimalizálálási modellben csupán egy döntéshozó van, márpedig jól ismert, hogy ez milyen félrevezető feltevés (Kirman, 1992). Egyébként az optimalizálási feltevés mindenhatóságát bíráló érvek még mindig relevánsak (Kornai, 1971; Nelson és Winter, 1982; Anderson et al., 1988). Sőt, Hildenbrand (1983) hatásosan érvel, hogy az egyénileg nem optimalizáló szereplők megfelelő eloszlása esetén az aggregált viselkedés lehet optimális. *c)* Az optimalizálás nélküli modelleket egyszerűbb elmagyarázni, mint optimalizációs társaikat.

Ennek megfelelően a könyv két részre oszlik: az I. részben nincs, a II. részben van optimalizálás. Például a szocialista gazdaság ciklusait (2.2. és 4.3. alfejezet) nehéz volna egyetlen döntéshozó optimális döntéseként leírni. Ugyanakkor egy személy vagy egy társadalom fogyasztási pályának időbeli optimalizálása értékes hozzájárulás lehet az életciklus megértéséhez.

Szabályozáselméleti keret

A könyv gyakran alkalmazza a matematikai szabályozáselmélet kereteit. Szabályozási rendszerről beszélünk, ha a rendszert *állapot-* és *szabályozási* vektorral jellemezzük, s feltesszük, hogy az állapotváltozás vektora az *állapotegyenletrendszeren* keresztül függ a szabályozási vektortól. Talán a leggyakoribb szabályozási mechanizmus a *visszacsatolás*, amikor a szabályozási vektor a pillanatnyi állapotvektortól függ.

Mások mellett Kornai és Martos (1981a) meggyőzően érvelnek e megközelítés előnyei mellett. Szemléltetésül is az általuk szerkesztett könyvből választunk egy jellemző példát: egy termék outputkészlet változása egyenlő a termelés és az eladás (előjeles) különbségével; a legegyszerűbb készletjelzéses szabályozásnál a termelés csökkenő függvénye az outputkészletnek. A közgazdasági alkalmazások jelentős részében nagy hangsúlyt kap a szabályozás *decentralizált* jellege. Előbbi példánkat általánosítva: ha egy egész gazdaság működik készletjelzésekkel, akkor az egyes vállalat adott termékének outputkészlet-változásában az összes többi vállalat által tőle beszerzett terméköszzege jelenik meg, míg az adott termék termelése továbbra is csak saját outputkészletétől függ (2.3. alfejezet). Ugyanakkor a szocialista gazdaság makromodelljének magatartási szabályai nem decentralizáltak (2.2. alfejezet).

Minden hasznossága ellenére a szabályozáselméleti megközelítés a közgazdaságtani dinamikában nem kizárólagos. Például az együttélő nemzedékek és korosztályok zárt cseregazdaságában (B. és C. függelék) a potenciális állapotváltozót (a megtakarítási állományt) nulla értéken rögzítettük, ezért ott a szabályozáselmélet alkalmazhatatlan.

Stabilitás és működőképesség

Nagyon gyakori, hogy egy dinamikus rendszer pályáját nem lehet vagy nem célszerű explicite leírni. Kiváncsiak vagyunk viszont a pálya kvalitatív viselkedésére. Kiindulásképp a rendszer *fixpont*ja szolgál, amelybe a rendszert eljuttatva, a rendszer ott is marad. A fixpontot a természettudományokban gyakran nevezik *egyensúlyi pont*nak. A közgazdasági alkalmazásokban az egyensúly fogalmát gyakran leszűkítik az ún. *walrasi* egyensúlyra (lásd 6.3. alfejezet), ahol a tökéletesen rugalmas ármechanizmus minden piacon eltünteti a túlkeresletet. Keynes (1936) óta a közgazdaságban beszélnek *munkanélküli* egyensúlyról (lásd például a 2. fejezet különféle modelljeit), és az 1970-es évek óta *nemwalrasi* egyensúlyról is. (Mind a *disequilibrium*, mind az *anti-equilibrium* kifejezés ennek a különbségtevésnek az elmulasztásából származott!) Kornai (1980) és Kornai és Martos (szerk.) (1981b) a semlegesebb *normálállapot* kifejezést használják. Amióta megjelentek időben változó egyensúlyi pályák, a stacionárius egyensúlyra az *állandósult állapot* kifejezést is alkalmazzák (B. és C. függelék).

Felvetődik a kérdés: létezik-e egyensúly, és ha igen, akkor egyértelmű-e az egyensúly? Látni fogjuk, hogy általában mindhárom eset lehetséges: nincs egyensúly, egy vagy több egyensúly létezik. További kérdés az egyensúly *stabilitás*a: ha a rendszer nem az egyensúlyból indul, akkor az idő haladtával visszatalál-e oda? Finomítva a kérdést: mekkora az indulási állapotoknak az a (képletes szóval élve: vonzási) tartománya, amelyből a rendszer az egyensúlyhoz tart? Némileg pontatlanul: ha kicsi a vonzási tartomány, akkor *lokális*, ha nagy (ti. az egész megengedett tartomány), akkor *globális* stabilitásról beszélünk (3. fejezet).

Mind a természetben, mind a társadalomban gyakoriak a *ciklikus* folyamatok. Felsorolásszerűen: a Föld kering a Nap körül, az évszakok váltakoznak, az emberi szív percenként többtucatszor dobog, a gazdaság növekedési üteme több-kevesebb szabályossággal hullámszerű mozgást végez. Érdekes módon minden dinamikus rendszer minden ciklusához megadható egy olyan rendszer, amelyben az eredeti rendszer cikluspontjai egyensúlyi pontok.

Determinisztikus rendszereken belül maradva, a stabil egyensúly és a ciklus mellett azonban még bonyolultabb viselkedési formák is lehetségesek, amelyeket némi leegyszerűsítéssel *kaotikus*nak nevezhetünk. Ilyenkor a pálya érzékenyen függ a kezdőértékektől, ezért a pálya elvileg előrejelezhetetlen. Legismertebb példa a káoszra az időjárás, de elképzelhető, hogy az árfolyam-ingadozások is kaotikusak.

A fenti esetekben fölvetődik a kérdés: *működőképes-e* a rendszer? Például a Naprendszer kb. 10 milliárd évig működhet, egy ember kb. 100 évig élhet, egy társadalmi rendszer pedig évtizedektől évezredekig fennállhat. Ha azonban egy speciális gazdasági modellt vizsgálunk, akkor működőképességen azt értjük, hogy a mozgásegyenleteken kívül a rendszer kielégít bizonyos feltételeket. A közgazdaságtanban a leggyakoribb működési feltételek a nemnegativitási feltételek: például a termelés nem lehet negatív. Konkrétabban: a készletjelzéses modellben kifogyhat a készlet vagy megtelnek a raktárak, stb.

Jelenleg keveset tudunk a gazdasági rendszerek működőképességéről és gyakran be kell érnünk a stabilitás keresésével.

Lineáris és nemlineáris modellek

Minden matematikai természetű vizsgálatnál alapkérdés a linearitás. Némi leegyszerűsítéssel, lineáris egy modell, ha a bemenő változók megduplázása megkettőzi a kimenő vátozók értékét is. Például a készletváltozási egyenlet lineáris: kétszeres termelés és vétel kétszeres készletváltozást okoz. Első látásra a következő készletjelzéses termelésszabályozás is lineáris: minden nap legfeljebb 100 egységet termelünk, de ezt a maximumot csökkentjük az előző nap végén megmaradt termékegység kétszeresével. De mi történik, ha az előző nap végén 51 egység maradt? -2 egységet termelünk? S ekkor belép egy természetes alsó korlát: a nulla, s elvész a linearitás.

A végesdimenziós lineáris dinamikus rendszerek elmélete teljesen megoldottnak tekinthető. Fölírhatjuk a rendszer megoldását, amelynek segítségével számos kvantitatív és kvalitatív eredményt nyerhetünk. A szóban forgó terület egyik legfontosabb jellemzője, hogy az egyensúly körüli *lokális* viselkedés meghatározza a *globális* viselkedést is. Speciálisan: ciklikus viselkedés csak kivételes paraméterértékeknél valósul meg (s az is késélen táncol), instabil viselkedés egyre nagyobb kilengéseken keresztül előbb-utóbb működésképtelenséghez vezet.

Más a helyzet a nemlineáris dinamikus rendszereknél. Már az egyváltozós esetnél is minden lehetséges. Például a lokális stabilitás összefér a globális stabilitás hiányával, stabil ciklikus viselkedés (az ún. határciklus) a paraméterértékek széles tartományában is megvalósulhat, instabil viselkedés összefér hosszú távú működésképességgel. A szabályos *ciklikus* pályák mellett megjelenhetnek szabálytalan, *kaotikus* pályák is. *Analitikusan* viszonylag keveset tudunk, már a kétdimenziós esetben is szükségünk van számítógépes *szimulációra*.

Mind a matematikusok, mind a közgazdászok sokáig megelégedtek a lineáris vagy linearizálható dinamikus rendszerek vizsgálatával. Csak az utóbbi évtizedekben kapott nagyobb lendületet a nemlineáris és instabil rendszerek globális elemzése. Természetesen ezeknél a bonyolult viselkedésű rendszereknél is a lineáris rendszer a kiinduló pont. A könyv egyaránt foglalkozik lineáris és nemlineáris rendszerekkel.

Determinisztikus vagy sztochasztikus rendszerek

A mai kor emberének nyilvánvaló, hogy a determinisztikus és a sztochasztikus szemléletre egyaránt szükség van a folyamatok modellezésénél. Elegendő, ha a klasszikus newtoni mechanika mellett utalunk a heisenbergi–schrödingeri kvantummechanikára.

A dinamikus közgazdaságtanban a sztochasztikus módszerek elterjedése leginkább az ökonometria térhódításához kapcsolódik. A statisztikai módszertannak megfelelően az egyenletek becslésénél célszerű föltenni, hogy sztochasztikus hibataggal terheltek. Nem lehet meglepetés, hogy az ökonometriai egyenleteken alapuló szabályozási modellekben nagy szerepet játszik a sztochasztikus optimalizálás. Ezzel a kérdéskörrel a 7. fejezetben foglalkozunk.

Érdekes, hogy a modern dinamikus közgazdaságtan domináns ága szerint a gazdaság determinisztikus része lineáris és stabil, a gazdaságot csak a sztochasztikus zavarok terelik el az egyensúlyi pályáról. Én nem osztom ezt a nézetet. Egy jóval kisebb, de korántsem jelentéktelen kutatási irányzat híveként, inkább a determinisztikus rendszerek nemlinearitásaiban keresem a ciklus és a káosz forrását. Ezért a sztochasztikus jelenségek nemcsak a szokásosnál, de a megérdemeltnél kisebb hangsúlyt kapnak a könyvben, a nemlineáris determinisztikus modellek viszont nagyobbat (a 3–10. fejezet és a B–C. függelék).

Csak röviden utalok a sztochasztikus módszereknek egy egyszerűbb alkalmazására, amely az emberi élettartam bizonytalanságából fakadó *életbiztosítással* kapcsolatos (10.1. alfejezet).

Várakozások

A közgazdasági modellek egyik megkülönböztető vonása, hogy egyes változók függhetnek más változók jövőre vonatkozó értékétől, a *várakozásoktól*. Például a könyvkereskedő e heti beszerzése függ a jövő hétre várt eladásoktól, vagy az idei megtakarításom függ a jövő évre várt kamatlábtól.

Az 1950–60-as évek modelljeiben a naiv (vagy általánosabban: adaptív) várakozások szerepeltek, ahol a várakozás a korábbi ténytől (és a korábbi várakozástól) függött. Például a kereskedő fölteszi, hogy a jövő héten is ugyanannyi könyvet akarnak vásárolni, mint ezen a héten. Másik példa: a jelzálog kölcsönző bankárok minden évben úgy határozzák meg a törlesztést, hogy fölteszik, a kamatláb a hátralévő időre változatlan.

Ez a feltevés sok kritikát kapott (Lucas, 1976), s egyre inkább a *racionális várakozás*ok feltevése lép a helyére. Ekkor adott információs halmaz esetén a döntéshozó várakozása megegyezik a modellből levezethető várható értékkel. Speciálisan, determinisztikus esetben a *racionális várakozás* megegyezik magával a tényleges értékkel: *tökéletes előrelátás*.

Mi mindkét feltevést megvizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy esetenként (2.4. alfejezet) tényleg jobb a racionális várakozás, mint a naiv várakozás. Más esetekben azonban fordított a helyzet (4.5. alfejezet). Sőt az is előfordul, hogy az állandósult állapotokon kívül szinte értelmezhetetlen a racionális várakozás (C.4. alfejezet).

Szeretnék hozzájárulni ahhoz, hogy újra teret nyerjen az *adaptív várakozások* hipotézise, amely mind empirikusan (Lovell, 1986; Chow, 1989), mind elméletileg (Grandmont és Laroque, 1990, Brock and Hommes, 1997, Grandmont, 1998;) vonzó lehet a racionális várakozásokkal szemben.

Véges vagy végtelen hosszú életű fogyasztó

Az optimalizálással foglalkozó modellekben gyakran fölteszik, hogy a reprezentatív fogyasztó végtelen sokáig él. Ezzel a trükkel el lehet kerülni a zárófeltételek problémáját.

Ez a feltevés nyilvánvalóan ellentétes az emberi élet végességével, s feloldása változtat az eddigi optimumfeltételeken. A Samuelson (1958)-tól származó, ún. *együttélő nemzedékek* modellcsaládjában (B. függelék) a szereplők élettartama rövidebb, mint a vizsgálati időszak; mindenki két időszakig él: először fiatal, később öreg. Minden időszakban együtt élnek fiatalok és öregek: a fiatalok sokat, az öregek keveset (vagy semmit sem) dolgoznak, és a fiatalkorban felhalmozott megtakarításaikból élnek. Mindenféle furcsaság adódik: *a)* Egy felosztó–kiróvó (PAYG) nyugdíjrendszer bevezetése mindegyik nemzedék jólétét javítja, ha a növekedési ütem nagyobb, mint a kamatláb (Samuelson, 1958), általánosítása Aaron-elvként ismert. *b)* Zárt OLG gazdaságban optimalizálás ellenére ciklikus vagy akár kaotikus dinamika jöhet létre (Gale, 1973 és Grandmont, 1985).

Az együttélő nemzedékek modelljét általánosítja az *együttélő korosztályok* modellje (C. függelék): különböző életkorú korosztályok tagjai élnek együtt, korspecifikus túlélési valószínűséggel, keresettel és fogyasztási egységekkel. Ez az általánosítás gyengíti az együttélő nemzedékekről szóló tételeket: *a)* Az Aaron-elv csak akkor igaz, ha eltekintünk attól, hogy nemcsak a fiatalok támogatják az időseket (nyugdíj), de az idősebbek is támogatják a fiatalokat (gyereknevelés). *b)* Éves bontású modellben racionális várakozás mellett általában nincs is definiálva a dinamika minden kezdőértékre, a reális 2-ciklusok létezését már sikerült kizárni. Naiv várakozások mellett azonban az állandósult állapot mentén elég sokáig képes működni a rendszer.

Összevont vagy részletezett modellek

Az 1950–60-as években nagyon fontosnak tartották, hogy a modellek részletezettek, sokszereplősek legyenek. A lineáris rendszerek keretében a mátrixok is nagy figyelmet kaptak. Ahogyan Samuelson mondta egyik cikkében, ez volt a Leontief modellek kora. Manapság ez a megközelítés háttérébe szorult, és az elméleti közgazdászok gyakran megelégednek az egy-két szektoros modellekkel. Ez a könyv ebben a tekintetben is visszatér a hagyományokhoz. Több helyen is foglalkozunk sokszektoros modellekkel: a 2. és a 4. fejezetben az n-szektoros Leontief gazdaság szabályozását vizsgáljuk, míg a C. függelékben sokváltozós modelleket tanulmányozunk. Ennek megfelelően az A. függelékben összefoglaljuk a lineáris algebrai tudnivalókat.

Elegancia vagy relevancia

Könyvem egyaránt alkalmaz analitikus és numerikus módszereket. Egyrészt egyszerűségre törekszem. Mindig örülök annak, ha valamit analitikusan is vizsgálhatunk. Másrészt nagyra tartom a realizmust is. Nem vagyok hajlandó a relevanciát föláldozni az egyszerűség oltárán.

Néhány példát említenék. *a)* Az indítás–beruházás lineáris modelljében (2.3. alfejezet) – némileg körülményesen –, bevezetek többletváltozókat, hogy természetesen mutathassam be a feszültségenyhítés és a stabilizálás ellentétét. *b)* Az indítás–beruházás nemlineáris modelljében (4.4. alfejezet) – ugyancsak körülményesen –, lemondok a legegyszerűbb eset vizsgálatáról. El akarom ugyanis kerülni a természetellenes *bang–bang* szabályozást, ahol a szabályozási változók kizárólag a minimális és maximális értéküket veszik föl. *c)* A könyv C. függelékében tetszőleges számú együttélő korosztályt vezetek be, mert nem tudom elfogadni az együttélő nemzedékek elméletének imént említett legegyszerűsítő feltevéseit. S a valósághoz való közeledés új megvilágításba helyez számos korábbi állítást, lásd fent.

Nem teszek úgy, mintha alkalmazott közgazdász volnék, aki hatalmas empirikus modellekkel dolgozik a számítógépén. Mégis azt tanácsolom, hogy az olvasó használja a számítógépét (vagy néha akár a zsebszámológépét), hogy némileg belelásson a dinamikus modellek kvantitatív alkalmazásába.

Mondanivalóm alátámasztására idézem Arrow és Honkapohját (1985a, 26. o.): „Két általános közgazdaságtani javaslat vetődött föl [a szimpóziumon, *S.A.*]: 1. Figyelembe véve azoknak az eseteknek a nagy számát, amikor nincsenek elméleti eredmények vagy csak nagyon nehezen elérhetők, jobban kell támaszkodni a numerikus szimulációra, mégpedig különféle paraméterértékeknél. A szimuláció segít eligazodni abban, hogy mennyire függnek az eredmények a sajátos numerikus feltevésektől. 2. Ehhez szorosan kapcsolódott az az ajánlás, hogyha egy elméleti kutató egy speciális területet modellez, jelezze, hogy a paraméterértékek milyen tartományát tartja a modell alkalmazhatóságával összeférhetőnek."

Kritikai szemlélet

Meglepőnek tűnhet, milyen sok kritikai megjegyzés található egy tankönyvben. Nem lenne jobb megkímélni az olvasót a bonyodalmaktól, és kizárólag a helyes megoldást bemutatni? Úgy vélem, nem. Egyrészt a matematikai közgazdaságtanban nem annyira a matematikai tévedések, mint a közgazdaságilag hibás vagy érdektelen feltevések okozzák az igazi bajokat. Másrészt még a fizika legnagyobbjai is elkövettek kisebb-nagyobb tévedéseket, s ezek feltárása (Simonyi, 1981) csak izgalmasabbá teszi a történetet.

FORMAI JEGYEK

Eddig a könyv tartalmi jegyeit vázoltam. Talán még ezeknél is fontosabb a könyv formai jegyeiről szólni.

Módszerek és modellek

A könyvben szereplő közgazdasági modellek elsősorban bizonyos matematikai módszereket hivatottak *szemléltetni*. Ebből a szempontból Baumol (1954), Gandolfo (1971), Kamien és Schwartz (1981), Chiang (1984), valamint Stokey és Lucas (1989) példáját követem, hogy csak néhány művet említsek. Könyvem közgazdaságilag nem összefüggő, és alkalmatlan arra, hogy átfogó ismereteket nyújtson a közgazdasági dinamikáról. (Azok az olvasók, akik nem szeretik ezt a módszert, számos hasonló, de *közgazdaságilag összefüggő* könyvet találhatnak: Kornai és Martos (szerk.) (1981b), Blatt (1983), Blanchard és Fischer (1989), Martos (1990) és Azariadis (1993)).

Sokféle módszer

Nem korlátozom a könyvet egy vagy két matematikai módszer bemutatására. Célom inkább Lancaster (1968), Takayama (1974), Chiang (1984), Sargent (1987), valamint Stokey és Lucas (1989) célkitűzéséhez hasonló: minél több fontos módszerből szeretnék ízelítőt adni. Azoknak, akik inkább az egyes módszerekre kiváncsiak, más könyveket ajánlhatok. Gandolfo (1971) főszövege a lineáris szabályozási rendszerek optimalizálás nélküli elemzéseit taglalta. Kamien és Schwartz (1981) a variációszámítás és az optimális folyamatok számos fejezetét és alkalmazását ismertette. Hommes (1991), Medio (1992) és Day (1994) a káoszelméletet alkalmazták a közgazdaságtanban.

Nehézségi fok

Eredetileg *középfokú*nak neveztem a könyvet, de több olvasóm meggyőzött arról, hogy azért annál nehezebb. Mindenesetre föltételezem, hogy az Olvasó már alaposan ismeri a differenciál- és integrálszámítást (a matematikai analízist), a lineáris algebrát és a mikro- és makroökonómiát. Fontos követelmény, hogy érdekeljék a bizonyítások elvei, ha nem is a részletei. A bizonyításokban azonban szintén nem törekszem teljességre. Például a differenciálegyenletek megoldása létezésének és egyértelműségének a bizonyításánál elkerülöm a funkcionálanalízis mély módszereit. Az alapvető szerepet játszó kontrakciós elvet csak végesdimenziós terekre mondom ki. Csupán utalok arra, hogy az elv szükséges általánosítása magasabb dimenziós terekre szintén érvényes. Ez a megközelítés jóval több erőfeszítést követel az Olvasótól, mint Chiang könyve, de jóval kevesebbet, mint Stokey és Lucas. A tárgyalás szintje Takayama (1974) és Sargent (1987) könyvéhez áll közel.

Példák és feladatok

A könyv számos példát és feladatot tartalmaz, melyek a kérdés előfordulási helyén vannak elhelyezve. Célszerű őket azonnal megoldani, vagy ha nem sikerül, akkor belenézni a könyv végén elhelyezett *Feladatmegoldások*ba. A csillaggal jelölt feladatok (és megjegyzések) nehezek, ezért csak az elszántabb olvasóknak ajánljuk.

Oktatási követelmények

Kezdeti tapasztalataim alapján a következőket gondolom az anyag egyetemi oktatásáról. 1. Fontos, hogy az Olvasó a megfelelő előismeretek birtokában legyen. 2. Elengedhetetlen, hogy az Olvasó megoldja a feladatokat, de legalábbis próbálkozzon a megoldással. 3. Az irodalomjegyzék sok olyan forrást tartalmaz, mellyel az Olvasó bővítheti és elmélyítheti a könyvben szerzett tudását. Külön szólok az anyagfeldolgozás *időigény*éről. Heti kétórás előadást és többórás otthoni munkát számítva, a *teljes* anyag egy év alatt vehető át.

Rövidebb (féléves) idő vagy közös feladatmegoldás esetén a tananyagból többféleképpen is lehet válogatni. Például:

– Matematikai ismeretek (páratlan fejezetek és az A. függelék).
– Közgazdasági ismeretek (páros fejezetek és a B. függelék).
– Optimalizálás nélküli dinamika (I. rész).
– Optimalizálási dinamika (II. rész): megfelelő előkészítés esetén.
– Diszkrét idejű dinamikus modellek (1-4. és 7-8. fejezet, valamint a függelékek).
– Káoszelméleti modellek a közgazdaságtanban (3. és 4. fejezet, valamint a B. függelék) az 1. fejezettel együtt.
– Minimális anyag (1–5., 9. és 10. fejezet).

Irodalmi hivatkozások

Az irodalmi hivatkozások között kizárólag olyan források szerepelnek, amelyekre a főszövegben hivatkozunk. Kivételként megemlítek három magyar forrást, amely elérhetőbb a közgazdász (hallgató) olvasóknak, mint az általam hivatkozott források: Dancs (1992) analízis tankönyve, Puskás (1993) lineáris algebra tankönyve és Tallos (1999) dinamikai rendszerekkel foglalkozó könyve. Mint a cimből is látható, Tallos könyve részben átfedi e könyvet, de sokkal inkább kiegészíti könyvemet. Ha egy hivatkozott forrásnak van magyar fordítása, akkor az angol publikáció évszámával, de magyar adatokkal hivatkozunk rá: például Keynes (1936), és csak az irodalomjegyzékben tüntetjük föl a magyar kiadás évszámát, 1965. Több forrásban is megtalálható közismert állításokra és saját eredményeimre forrásmegjelölés nélkül hivatkozom.

JELÖLÉSEK

Jelölési elveink a szokásosak, egészen addig, ameddig a különböző eredetű szokások nem ütköznek. Tételeket, példákat, feladatokat és képleteket minden fejezetben egymástól függetlenül, kettős számozással jelölünk: az első szám a fejezet, a második az illető kategória fejezeten belüli sorszáma. Egy függeléken belüli egységekre A., B. és C. sorszámmal utalunk.

Matematikai jelölések

Mátrixokat latin nagybetűvel jelöljük. Vektorokat, a mátrix, illetve a vektor elemeit a megfelelő latin kisbetűvel jelöljük: $A = (a_{i,j})$, $b = (b_j)$. Az egységmátrix jele I. A nullamátrix, a nullavektor és a közönséges skalár nulla egyaránt 0. Egy komplex szám konjugáltját felülvonás, a vektor és mátrix transzponálását $^{\mathbf{T}}$ jelöli. Az M mátrix sajátértékét λ, sajátvektorát s, spektrálsugarát $\rho(M)$ jelöli. Diagonális mátrix jele $\langle\rangle$. Az i a képzetes egységgyök, $\pi = 3{,}14...$, az e az Euler-szám.

A diszkrét és a folytonos idő jele egyaránt t, de míg csak az előbbinél sorozatra utaló alsó index, az utóbbinál a függvényre utaló független változó: x_t, illetve $x(t)$. A $\dot{x}$ vagy x' pedig x deriváltját jelöli, míg az $m \times n$ F_x mátrix az $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ függvény x szerinti deriváltmátrixát jelöli. Takarékosságból ugyanúgy jelöljük a diszkrét és a folytonos idejű mennyiségeket, bár ez némileg zavaró. Záróidőszak (-pont) jele: T, periódusé P.

Szabályozáselméletben szokásos módon az állapotvektor az n-dimenziós x vektor, a szabályozási vektor pedig az m-dimenziós u vektor.

Állandósult (egyensúlyi, stacionárius, normál) vagy optimális értéket ^{o} felső indexszel vagy $_F$ alsó indexszel különböztetünk meg közönséges társától, a * jel más különlegességre utal. A vessző (x') vagy a pont ($\dot{x}$) a differenciálás jele. A felülvonás a komplex konjugáltat jelenti. A fekete négyzet a bizonyítás végére utal.

Ha vektorsorozat koordinátájáról van szó, akkor az $x_{i,t}$ kettős indexet alkalmazzuk, ahol az első index az i-edik koordináta, a második index a t-edik időszak. Figyeljük meg a különbséget x_F és x_{F} között: az elsőben F egy matematikai mennyiség, a másodikban egy név (például az angol feasible rövidítése.)

Közgazdasági jelölések

A makroökonómiában megszokott módon Y, C, I általában a makrotermelésre (GDP), fogyasztásra és beruházásra utal. Fajlagos (egy főre, GDP-re stb. vetített) értékük rendre y, c és i. Γ a GDP növekedési tényezője (vagy üteme), a leszámítolási tényező (vagy -ráta), r a kamattényező (vagy -láb). $U(.)$ és u a hasznosságfüggvény.

A különböző modellekben ugyanaz a jel mást-mást jelenthet, de lehetőség szerint nem ütközik a matematikai fejezetek jelöléseivel. A hagyományok azonban megakadályoztak abban, hogy eltérő jelölést keressek a hasznosságfüggvénynek (8. fejezet) és a szabályozási változónak (7. fejezet) (u), illetve az alapegyenletben szereplő függvénynek (1. fejezet), a termelési függvénynek (8. fejezet) és az alapfüggvénynek (7. fejezet) (f).

I. RÉSZ

DINAMIKA OPTIMALIZÁLÁS NÉLKÜL

Ebben a részben olyan matematikai módszerekkel és dinamikus közgazdasági modellekkel foglalkozunk, amelyekben a magatartási szabályokat egyszerűen föltételezzük és nem optimalizálásból származtatjuk. A Bevezetésben már indokoltuk e megközelítés jogosultságát.

Az 1. fejezetben a *diszkrét idejű* (szakaszos működésű) rendszereket a *differenciaegyenletek* segítségével tanulmányozzuk, ahol az egyenletek bal és jobb oldalán eltérő időindexű változók szerepelnek. Az *elemi fogalmak* ismertetése után a *lineáris* differenciaegyenletekkel foglalkozunk.

A 2. fejezetben négy olyan *lineáris gazdasági modell* stabilitását és oszcillációját tanulmányozunk, melyeknél az 1. fejezetben bevezetett különféle módszerek jól használhatók.

A 3. fejezetben *nemlineáris differenciaegyenletek*et vizsgálunk, ahol az instabilitás összefér a megoldás korlátosságával, a ciklus nem véletlen és kis kezdeti hibák nagy későbbi hibához vezethetnek.

A 4. fejezetben föloldjuk a 2. fejezet modelljeinek linearitását, és egy ötödik modellre is kiterjesztjük az elemzést. *Nemlineáris gazdasági modell*jeink tanulmányozásánál a 3. fejezetben bevezetett különböző módszerek jól használhatók.

Az 5. fejezetben *folytonos idejű* dinamikus rendszerek viselkedését *differenciálegyenletek* segítségével vizsgáljuk, ahol a közönséges változók mellett azok idő szerinti deriváltjai is szerepelnek.

A 6. fejezetben három folytonos idejű gazdasági modell stabilitását elemezzük az 5. fejezetben bevezetett elmélettel.

1. DIFFERENCIAEGYENLETEK: ALAPFOGALMAK ÉS LINEÁRIS RENDSZEREK

Ebben a fejezetben olyan egyenletrendszereket vizsgálunk, amelyekben minden változónak időindexe van, s legalább egy egyenletben egy bal oldali változó indexe nagyobb, mint jobb oldali megfelelőjéé. Az ilyen egyenleteket *differenciaegyenletek*nek vagy *differenciaegyenlet-rendszerek*nek nevezzük, amelyek *diszkrét idejű (szakaszos működésű) dinamikus rendszerek*et írnak le. (N. B. Nemcsak idő, hanem más skalár is lehet a független változó. Egyébként a matematikában *absztrakt* dinamikus rendszeren a differenciálegyenlet-rendszer általánosítását értik, lásd Zalai, 1989, 7. fejezet függeléke). Közvetlenül vagy közvetve erre a fejezetre épül az egész könyv. Az 1.1. alfejezetben a differenciaegyenletek *alapfogalmait* vezetjük be. Az 1.2–1.4. alfejezetban a legegyszerűbb, az ún. *lineáris* rendszereket vizsgáljuk. Egymás után áttekintjük az általános, a síkbeli és a szabályozási rendszerek tulajdonságait. Hasznos tudnivalókat tartalmaz Samuelson (1947, 1983, B. függelék), Varga (1962), Ralston (1965), Lancaster (1969), Young (1979), Martos (1981) és az A. függelék.

1.1. ALAPFOGALMAK

Ebben az alfejezetben bevezetjük a differenciaegyenletek elméletének olyan alapfogalmait mint a fixpont, a stabilitás, a ciklus és a szabályozási rendszer.

Elsőrendű differenciaegyenlet-rendszer

Legyen az idő egy *diszkrét* változó: $t = 0, 1, \ldots$. Legyen x egy n-elemű valós vektor, legyen $\mathcal{X}$ az n-dimenziós tér, $\mathbf{R}^n$ tartománya és legyen $\{f_t(\cdot)\}_{t=1}^{\infty}$ e tartomány önmagára való leképezéseinek (transzformációinak) egy sorozata. Ekkor az

$$x_t = f_t(x_{t-1}), \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

egyenletrendszert *elsőrendű explicit differenciaegyenlet-rendszer*nek nevezzük. Vektorálisan gondolkodva beszélhetünk (vektorértékű) differenciaegyenletről is.

Érdemes lehet az (1.1) rendszert a következőképpen átalakítani:

$$x_t - x_{t-1} = f_t^*(x_{t-1}), \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{1.1*}$$

ahol $f_t^*(x_{t-1}) = f_t(x_{t-1}) - x_{t-1}$. Valóban, (1.1*) az *igazi differencia*egyenlet-rendszer, amely jól összehasonlítható a később bevezetendő, folytonos idejű (5.1) *differenciál*egyenlet-rendszerrel. Mi azonban visszatérünk az egyszerűbb (1.1) alakhoz.

Ha adott az x_0 *kezdeti állapot*, akkor az (1.1) rendszer egyértelműen meghatározza az $x_1, x_2, \ldots$ *pályá*t.

Közgazdasági alkalmazásoknál gyakran indítjuk a rendszert az x_{-1} kezdeti állapotból, azaz a mozgásegyenlet már $t = 0$-ra is érvényes.

Az egyszerűség kedvért a továbbiakban majdnem mindig csak olyan, ún. autonóm rendszereket vizsgálunk, amelyek explicite nem függenek az időtől:

$$x_t = f(x_{t-1}). \tag{1.2}$$

Közgazdasági modelleknél ez gyakran úgy érhető el, hogy a növekedési trendet kiküszöböltük a modellből.

Az (1.2) felírás koordinátamentes, s ez tömörsége és lényegkiemelése miatt előnyös. Gyakran előfordul azonban, hogy koordinátákban van adva a feladat:

$$x_{i,t} = f_i(x_{1,t-1}, \ldots, x_{n,t-1}), \qquad i = 1, \ldots, n; \tag{1.2'}$$

ahol $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény és $\{x_{i,t}\}_{t=0}^\infty$ skalár sorozat. Néhány alkalmazásban nem a kezdeti, hanem a végső állapot van megadva. Más alkalmazásoknál (7–10. fejezet) egyes állapotváltozóknak a kezdeti, a többinek a végállapota van megadva.

Minden időben változó rendszer formálisan fölírható időben változatlan rendszerként, ha a $x_{0,t} = t$ változót tekintjük az $(n+1)$-edik változónak:

$$x_{0,t} = x_{0,t-1} + 1, \tag{1.2*a}$$

$$x_{i,t} = f_i(t, x_{1,t-1}, \ldots, x_{n,t-1}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.2*b}$$

Az $X = (t,x)$ és $F(X) = (t, f(X))$ jelöléssel, $X_t = F(X_{t-1})$. Mégsem fogunk ezzel az átírással élni, mert célszerűtlen volna.

Kezdeti feltétellel adott, mindenütt értelmezett jobb oldalú, explicit differenciaegyenlet-rendszereknek mindig van pontosan egy megoldásuk és vizsgálatuk is egyszerűnek tűnik. Ha azonban *peremfeltételek* vannak vagy *implicit* differenciaegyenlet-rendszerünk van (mint például a II. részben és a B. és C. függelékben), akkor mindenféle bonyodalmak följéphetnek. Külön gondot okoznak a racionális várakozások, amely által vezérelt dinamikában a jelent nemcsak a múlt, hanem a jövő is befolyásolja; s a sztochasztikus környezet tovább bonyolítja a helyzetet.

Már a középiskolai tanulmányainkból jól ismerjük a következő példát.

1.1. példa. Mértani sorozat. Legyen $\{x_t\}$ egy skalár mértani sorozat, amelyre $x_t = qx_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots$. Ekkor $x_t = q^t x_0$. (Hasonlóan definiálható a számtani sorozat: $x_t = x_{t-1} + d$, $t = 1, 2, \ldots$.)

Jól ismert, hogy megfelelő átalakítással a magasabb rendű (több késleltetést tartalmazó) rendszerek elsőrendűvé alakíthatók, ezért feltevésünk nem megszorító. Az általános levezetés helyett egy példát mutatunk be.

1.2. példa. Vizsgáljuk a *másodrendű* skalár rendszert: $y_t = g(y_{t-1}, y_{t-2})$. Legyen $x_{1,t} = y_t$, $x_{2,t} = y_{t-1}$, ekkor $x_{2,t-1} = y_{t-2}$, azaz az

$$x_{1,t} = g(x_{1,t-1}, x_{2,t-1}) \qquad \text{és} \qquad x_{2,t} = x_{1,t-1}$$

elsőrendű kétváltozós rendszer ekvivalens a másodrendű skalár rendszerrel.

1.1. feladat. Matematikai inga. Tekintsük a súrlódásmentes matematikai inga (5.6. példa) diszkrét idejű változatát. Válasszuk az időegységnek az ingaperiódus negyedét és számítsuk az idő kezdetét egy maximális kilengésbeli időponttól. Legyen y_t az inga kilengésének a függőlegessel bezárt szöge a t-edik időszakban. Ekkor $y_t = -y_{t-2}$ az inga differenciaegyenlete, és $y_1 = 0$, $y_0 > 0$ a két kezdeti feltétel. Hajtsuk végre az 1.2. példában szereplő átalakítást az egyenleten!

Fixpont és stabilitás

A dinamikus rendszerekben kitüntetett szerepet játszik a fixpont, más néven állandósult állapot. Egy $x^o \in \mathcal{X}$ pontot az f *rendszer fixpontj*ának nevezünk, ha belőle indítva a rendszert, az mindig ott is marad. Képletben:

$$\text{Ha} \qquad x_0 = x^o, \qquad \text{akkor} \qquad x_t = x^o, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Ekkor x^o az f leképezés *fixpont*ja:

$$x^o = f(x^o). \tag{1.3}$$

Szemléltetésül áll az

1.3. példa. A mértani sorozat fixpontja. Az 1.1. példában $q = 1$-re minden pont fixpont, egyébként egyetlen egy fixpont létezik: $x^o = 0$.

A következő feladat rávilágít a késleltetéses rendszerek egy érdekes sajátosságára.

1.2. feladat. Miért nem áll meg az inga az alsó pontban? Pontosabban: miért nem marad az $y_0 = 0$ „fixpontban” az 1.1. feladat rendszere?

Most definiáljuk a fixpont stabilitását.

1. Az (1.2) rendszer x^o fixpontját *Ljapunov-stabil*nak nevezünk, ha hozzá elegendő közeli bármely x_0 kezdőállapotból induló pálya az x^o-hoz mindvégig közel marad. Bevezetve a közönséges euklideszi távolságfogalmat általánosító *vektornormá*t (lásd: A. függelék), és a jelölését: $||x||$-et, a definíció képletben is megfogalmazható: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$ szám, hogyha $||x_0 - x^o|| < \delta$, akkor $||x_t - x^o|| < \varepsilon$ tetszőleges t-re.

2. Egy Ljapunov-stabil x^o fixpontot *lokálisan aszimptotikusan stabil*nak nevezzük, ha x^o-hoz elegendő közeli bármely x_0 kezdőállapotból induló pálya az x^o-hoz tart.

3. *Globális stabilitás*ról beszélünk, ha majdnem minden x_0 induló állapot egy és ugyanazon fixponthoz tartó pályát származtat. (A rendszer többi fixpontját természetesen ki kell zárni az induló állapotok közül, lásd a 3.3. példa.)

4. Egy fixpontot aszimptotikusan vagy Ljapunov-értelemben *instabil*nak nevezünk, ha nem aszimptotikusan stabil vagy nem Ljapunov-stabil.

Megjegyzések. 1. Ismert, hogy a fixpont létezéséből még *nem* következik, hogy a rendszer mindig mozdulatlan; sőt még az sem, hogy a rendszer aszimptotikusan a fixponthoz tart.

2. A közgazdaságtani stabilitás-irodalomban el szokták hagyni a matematikában kötelező *aszimptotikus* jelzőt, viszont kiteszik a matematikában elrejtett Ljapunov-jelzőt.

3. Számos matematikai közgazdász (például Arrow és Hahn, 1971 és Zalai, 1989) a globális stabilitás definíciójában nem követeli meg a vonzó fixpont egyértelműségét.

4. Fontossága miatt megemlítjük az instabilitás egyik speciális esetét, a *nyeregpont-instabilitást*: bizonyos kezdeti feltételek stabil, mások instabil pályákat származtatnak. Ha minden nemstacionárius pálya instabil, akkor *teljes instabilitás*ról is szoktak beszélni.

A következő példa megmutatja, hogy miért nem elegendő a konvergencia a Ljapunov-stabilitás nélkül az aszimptotikus stabilitás definíciójában.

1.4. példa. (Elagdi, 1991, Example 4.4.) Konvergencia Ljapunov-stabilitás nélkül. Tekintünk egy polárkoordinátákkal megadott síkbeli rendszert: $r_t = \sqrt{r_{t-1}}$, $\vartheta_t = \sqrt{2\pi\vartheta_{t-1}}$, ahol $r > 0$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Könnyen belátható, hogy az állandósult állapot $(1{,}0) = (1{,}2\pi)$, amelyhez minden pálya konvergál. Valóban, r_t monoton nő (csökken), ha $r_t < 1$, $(r_t > 1)$ és ϑ_t növekedve tart 2π-hez. De hiába van akármilyen közel a ϑ_0 kezdőállapot 0-hoz, a sorozat rossz irányba mozdul el.

A következő feladat az ingához tér vissza.

1.3. feladat. Az inga stabilitása. *a)* (Aszimptotikusan) stabil-e az inga – 1.1. feladat – (0,0) fixpontja? *b)* (Aszimptotikusan) instabil-e?

Ciklus

A fixponténál némileg bonyolultabb, de viszonylag még egyszerű fogalom a ciklusé. Legyen P egy 1-nél nagyobb természetes szám. Egy $x_1, x_2, \dots, x_P$ vektorsorozatot az f rendszer *P-periódusú ciklus*ának nevezzük, ha az x_1-ből induló pálya $x_2, \dots, x_P$-n keresztül visszatér x_1-be. Képletben:

$$x_t = f(x_{t-1}), \qquad t = 2,\, 3,\, \dots,\, P+1, \qquad x_{P+1} = x_1. \tag{1.4}$$

Általában fölteszik, hogy a ciklus pontjai különbözők. Egyszerű következményként adódik $x_{kP+Q} = x_Q$, ahol $Q = 1,\, \dots,\, P$, $k = 1,\, 2, \dots$.

Szemléltetésül szolgál az

1.5. példa. Ciklusok. Az 1.1. példában $q = -1$ esetén minden nemegyensúlyi pálya 2-ciklus, egyébként nincs ciklus.

1.4. feladat. Az inga ciklusai. Milyen ciklusai vannak az ingának (az 1.1. feladatnak)? b) Hogyan lehetne 2-ciklust kapni az ingaegyenlet változtatásával?

Szabályozási rendszer

Mind a műszaki, mind a közgazdasági alkalmazásokban kiemelkedő szerepet játszik a *szabályozási rendszer* fogalma. Alapfogalom az n-dimenziós *állapotvektor* és az m-dimenziós *szabályozási vektor*, jelük rendre x és u, valamint az *állapotegyenlet*, amely az új állapotot az előző állapot és az új szabályozás függvényeként határozza meg:

$$x_t = g(x_{t-1}, u_t), \qquad t = 1,\, 2,\, \dots, \tag{1.5}$$

ahol g egy $\mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^n$ függvény.

Egy g rendszert *szabályozható*nak nevezünk, ha bármilyen x^1 kezdőállapotból bármilyen x^2 végállapotba véges számú T időszak alatt alkalmas $u_1,u_2,\ldots,u_T$ szabályozással átvihető.

*Visszacsatolás*ról beszélünk, ha a szabályozás csak az előző időszak állapotától függ:

$$u_t = h(x_{t-1}), \qquad t = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{1.6}$$

(1.6)-ot behelyettesítve (1.5)-be, az adódó $x_t = f(x_{t-1})$ egyenletet *alapegyenlet*nek nevezzük:

$$x_t = f(x_{t-1}) = g[x_{t-1},h(x_{t-1})], \qquad t = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{1.7}$$

Megjegyzés. Közgazdasági alkalmazásokban nagy szerepet kap az *állomány* és *folyam* (stock vs. flow) megkülönböztetés. Az állapotváltozó állomány jellegű, az időszak végére vonatkozó érték, például az évvégi tőkeállomány. A szabályozási változó folyam jellegű, az időszak egészére vonatkozó érték, például az évi termelés. Diszkrét idejű modellek gyengesége, hogy önkényes, hogy valamit a $(t-1)$-edik időszak záróállományának tekintünk vagy a t-edik időszak nyitóállományának. Egyelőre az elsőt választjuk, s a második választásnál (1.5)–(1.7) a következőképp módosul:

$$x_{t+1} = g(x_t,u_t), \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{1.5$'$}$$

$$u_t = h(x_t), \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{1.6$'$}$$

$$x_{t+1} = f(x_t) = g[x_t,h(x_t)], \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots. \tag{1.7$'$}$$

*Stabilizálás*ról beszélünk, ha a visszacsatolás stabilizálja az állapotegyenletet, azaz ha az alapegyenlet fixpontja stabil. Stabilizálás esetén az (1.7) alapegyenlet fixpontja, x^{o}, megad egy stacionárius szabályozásvektort is:

$$x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}}) \qquad \text{és} \qquad u^{\mathrm{o}} = h(x^{\mathrm{o}}). \tag{1.8}$$

A mindennapos gyakorlatból ismert a következő szabályozási rendszer.

1.6. példa. *a)* A hőmérséklet szabályozása fűtéssel. Legyen x_t egy szoba hőmérséklete és w_t külső környezeté a t-edik perc végén, és legyen u_t a fűtés erőssége a t-edik perc alatt. Ekkor a hőmérséklet dinamikája $x_t = A(x_{t-1} - w_t) + Bu_t$, ahol A és B alkalmas állandók. *b)* A szoba hőmérsékletének stabilizálása hőfokszabályozóval. Tegyük föl, hogy a kívánt szobahőmérséklet x^* és a hőfokszabályozó egyenlete $u_t = -Kx_{t-1} + q_t$. Ekkor a csatolt rendszer egyenlete $x_t = A(x_{t-1} - w_t) - BKx_t + Bq_t$. Ideális esetben K és q_t megfelelő választásával $x_t = x^*$ elérhető.

*Teljesen decentralizált visszacsatolásos szabályozás*ról beszélünk, ha $m = n$ és a visszacsatolás szétesik n független skalár visszacsatolásra:

$$u_{i,t} = h_i(x_{i,t-1}), \qquad i = 1,\, \ldots,\, n \qquad \text{és} \qquad t = 1,\, 2,\, \ldots \tag{1.9}$$

Egyelőre nem adunk példát szabályozhatóságra és decentralizált szabályozásra, mert ehhez további előkészületekre van szükség.

1.2. ÁLTALÁNOS LINEÁRIS RENDSZEREK

Mint általában a matematikai analízisben, a differenciaegyenletek elméletében is kiemelkedő fontosságúak a lineáris rendszerek. Ezért a fejezet hátralévő részében és a 2. fejezetben kizárólag velük foglalkozunk, s csak a 3. fejezetben térünk vissza a nemlineáris egyenletekhez. Az (1.2) rendszert *lineáris*nak nevezzük, ha az f függvény lineáris, azaz $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ minden x,$y \in \mathbf{R}^n$-re és α, $\beta \in \mathbf{R}$-re, $\alpha + \beta = 1$. Ekkor van olyan $n \times n$-es M mátrix és n-dimenziós w vektor, amelyre $f(x) = Mx + w$. (Az $\alpha + \beta = 1$ megszorításra az inhomogenitás miatt van szükség.)

Inhomogén egyenletrendszer

Lineáris esetben az autonóm (1.2) differenciaegyenlet a következő alakot ölti:

$$x_t = Mx_{t-1} + w, \qquad t = 1,\, 2,\, \ldots. \tag{1.10}$$

A tömör (1.10) felírás koordinátamentes. Gyakran előfordul azonban, hogy koordinátákban van adva a feladat:

$$x_{i,t} = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_{j,t-1} + w_i, \qquad i = 1,\, \ldots,\, n, \tag{1.10$'$}$$

ahol $M = (m_{ij})$ az M transzformáció mátrixa rögzített koordinátarendszerben. Általában félreértés nélkül beszélhetünk felváltva transzformációról és mátrixról, mint ahogyan a koordinátamentes, illetve a koordinátás vektornál sem teszünk különbséget.

Rátérünk a fixpont tárgyalására. (1.10)-ből a következő implicit egyenlet adódik a fixpontra:

$$x^{\mathrm{o}} = Mx^{\mathrm{o}} + w. \tag{1.10$^{\mathrm{o}}$}$$

(1.10$^{\mathrm{o}}$) megoldhatóságával kapcsolatban felidézzük a λ *sajátérték*, az s *sajátvektor* és a $P(\lambda)$ *karakterisztikus polinom* fogalmát [(A.2) és (A.3)]:

$$Ms = \lambda s, \quad s \neq 0, \tag{1.11}$$

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M). \tag{1.12}$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei azonosak a sajátértékekkel. A fixpont létezése és egyértelműsége triviális:

1.1. tétel. *Az (1.10) lineáris rendszernek pontosan egy fixpontja van, ha M-nek az 1 nem sajátértéke. Képlete:*

$$x^{\mathrm{o}} = (I - M)^{-1} w. \tag{1.13}$$

A következő feladat a legegyszerűbb 2-dimenziós esetben szemlélteti a tételt.

1.5. feladat. (Vö. A.1. példa.) Legyen α és β negatív skalár. Határozzzuk meg az

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rendszer fixpontját és ellenőrizzük az 1.1. tételt!

Homogén egyenletrendszer

Az algebrai lineáris egyenletrendszerek megoldásából ismert az inhomogén és homgén egyenlet megoldásának kapcsolata. Most ezt a fajta kapcsolatot aknázzuk ki a differenciaegyenlet-rendszer esetén.

Vezessük be az

$$x_t^{\mathrm{d}} = x_t - x^{\mathrm{o}} \tag{1.14}$$

*eltérés*vektort, és vonjuk ki (1.10)-ből (1.10°)-t:

$$x_t^{\mathrm{d}} = M x_{t-1}^{\mathrm{d}}. \tag{1.15$^{\mathrm{d}}$}$$

Szóban: az eltérésvektorok kielégítik azt a homogén rendszert, amely az inhomogén (1.10) rendszerből az additív állandó elhagyásával keletkezik. (1.15$^{\mathrm{d}}$) sorozatos behelyettesítésével adódik

$$x_t^{\mathrm{d}} = M x_{t-1}^{\mathrm{d}} = M^2 x_{t-2}^{\mathrm{d}} = \cdots = M^t x_0^{\mathrm{d}}. \tag{1.16$^{\mathrm{d}}$}$$

Visszaírva az eredeti változókat: $x_t = x^{\mathrm{o}} + M^t(x_0 - x^{\mathrm{o}})$. Figyeljük meg, hogy ezt a képletet közvetlenül is, bár némileg bonyolultabban, a mértani sorozat általánosított összegképlete segítségével is megkaphattuk volna.

A továbbiakban a homogén rendszerrel foglalkozunk, és rövidség kedvéért elhagyjuk a $^{\mathrm{d}}$ felső indexet, (azt is mondhatjuk, hogy $w = 0$.) A hivatkozások kedvéért új alakjában újra fölírjuk az (1.15$^{\mathrm{d}}$) – (1.16$^{\mathrm{d}}$) egyenletetpárt:

$$x_t = M x_{t-1}, \tag{1.15}$$

$$x_t = M^t x_0. \tag{1.16}$$

Általában célszerűtlen minden x_0 kezdőállapotra a hozzátartozó x_t-t (1.16)-tal, mátrixhatványozással kiszámítani. Még akkor is igaz ez a megállapítás, ha a takarékos $M^t x_0 = M(M^{t-1}x_0)$ iterációt alkalmazzuk. Lineáris algebrából azonban ismert, hogy M sajátértékei és sajátvektorai segítségével M^t egyszerűen fölírható. A dinamikus rendszerek elemzésénél a transzformáció sajátértékeinek és sajátvektorainak jelentőségét éppen az adja, hogy a transzformáció hatványozásánál az előbbiek úgy viselkednek, mintha skalárok volnának, az utóbbiak pedig helyben maradnak. Pontosabban:

$$M^t s = \lambda^t s, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.17}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy létezik n darab lineárisan független sajátvektor, azaz egy *sajátbázis*:

$$P(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{1.18}$$

$$M s_j = \lambda_j s_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.19}$$

Ekkor bármely x_0 kezdeti vektor felírható a sajátvektorok segítségével:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j s_j. \tag{1.20}$$

Fölhasználva (1.16)–(1.17)-et, (1.19)–(1.20) a következő összefüggést adja:

$$x_t = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \lambda_j^t s_j, \qquad t = 1, 2, \ldots \tag{1.21}$$

Igaz az

1.2. tétel. *Ha létezik egy sajátbázis, akkor a sajátvektorok segítségével a kezdeti állapotot fölírhatjuk (1.20) alakban, és a sajátértékeket is igénybe véve a t-edik állapot fölírható (1.21) alakban.*

Megjegyzés. Gyakorlati számításokban elegendő csak a sajátértékeket meghatározni. Ugyanis az $x_t = \sum_{j=1}^{n} v_j \lambda_j^t$, $t = 0, 1, \ldots$ összefüggésekben szereplő ismeretlen v_j vektorokat a kezdeti feltételekből lehet meghatározni.

A következő példa és két feladat a legegyszerűbb esetekben mutatja be az általános módszer működését.

1.7. példa. Diagonális mátrix. Tegyük föl, hogy az M mátrix diagonális: $M = \langle m \rangle$. Ekkor a sajátértékek: $\lambda_j = m_j$ és a sajátvektorok: $s_j = e_j$ (a j-edik egységvektorok). Végül $\xi_j = x_{j,0}$ a kezdeti állapot j-edik koordinátája, azaz $x_t = \sum_j x_{j,0}\lambda_j^t e_j$. A sajátbázisra való áttérés *diagonalizálja* az eredeti tanszformációt.

1.6. feladat. Számolás. Írjuk föl az 1.5. feladat általános homogén megoldását a most leírt módszerrel!

1.7. feladat. Alsóháromszög-mátrix. Hogyan egyszerűsödik a megoldás egy alsóháromszög-mátrixnál, ahol $m_{ij} = 0$, ha $j > i$?

Többszörös sajátértékek*

Mi történik, ha egy s sajátvektorhoz egy λ sajátérték r-szeres algebrai multiplicitással tartozik: $r > 1$? Itt segít a blokk-diagonális szerkezet (A.5. tétel). A Jordan-féle blokk-diagonalizálás miatt elegendő csupán egyetlen blokkra szorítkozni, amelyiknek egyetlen sajátvektora és egyetlen sajátértéke van, ez utóbbi r-szeres algebrai multiplicitással. M_{QQ} helyett M-et írva, M felírható a következő alakban: $M = \lambda I + N$, ahol $N^r = 0$. M^t-re felírva a binomiális tételt, csak az első r tag nem tűnik el: $(\lambda I + N)^t = \lambda^t I + t\lambda^{t-1}N + \ldots + C_{t,r-1}\lambda^{t-r+1}N^{r-1}$, ahol $C_{t,r}$ a (t,r) binomiális együttható. Kiemelve λ^{t-r}-t, M^t elemei t-nek legfeljebb $(r-1)$-edfokú polinomjai. Végül s_j-vel jelöljük a j-edik *fővektor*t – $s_{j-1} = (\lambda I - M)s_j$ – $j = r, r-1, \ldots, 1$, ahol s_1 az egyetlen sajátvektor és $s_0 = 0$. Ekkor

$$x_t = \sum_{j=0}^{r} \xi_j \lambda^{t-j} t^j s_j. \tag{1.21*}$$

Számos matematikus-közgazdász úgy oldja meg ezt problémát, hogy fölteszi: minden sajátérték különböző. Ezzel azonban kizárja magát az azonosság mátrixot is, ahol a geometriai és az algebrai multiplicitás egybeesik, tehát van sajátbázis. Arnold (1984, 26. 4.) szellemesen jegyzi meg: amikor a 18. században Euler és Lagrange a differencia- (pontosabban: differenciál)egyenletrendszerek megoldásánál többszörös sajátértékekkel találkoztak, még nem ismerték a mátrixok Jordan-alakját. *Heurisztikus* gondolatmenetük a kétszeres sajátérték ($r = 2$) esetében a következőképpen szemléltethető: közelítsük meg az M mátrixot olyan $\{M_k\}$ mátrix-sorozattal, hogy M_k minden sajátértéke különböző. Ekkor $\lambda_{1,k}$ és $\lambda_{2,k}$ konvergál a kétszeres multiplicitású λ sajátértékhez, az $s_{1,k}$ és $s_{2,k}$ sajátvektor pedig a hiányos s sajátvektorhoz. De a $\xi_1\lambda_1^t$ és $\xi_2\lambda_2^t$ kombináció helyett vehetjük a $\xi_1\lambda_1^t$ és $\xi_2(\lambda_2^t - \lambda_1^t)/(\lambda_2 - \lambda_1)$ kombinációt, s akkor határértékben $\xi_1\lambda^t$ mellé a $\xi_2 t\lambda^{t-1}$ alapmegoldást kapjuk.

Komplex sajátértékek

Az (1.21) egyenlet közvetlenül hasznosítható, ha M összes sajátértéke valós. Mi történik azonban, ha vannak komplex sajátértékek? Mivel az M mátrix elemei valósak, a $P(\lambda)$ polinom együtthatói is valósak. Jól ismert elemi algebrai tétel szerint ekkor minden komplex sajátérték komplex konjugáltjával együtt fordul elő. Belátható, hogy ekkor az s_j sajátvektorok és a ξ_j koordináták is konjugált párjukkal együtt vannak jelen, s végül is a komplex számok eltüntethetők. Valóban, a megoldások összeadhatósága (szuperponálhatósága) miatt n független sajátvektor létezése esetén feltehető, hogy $\xi_j = 0$, $j = 3 \ldots, n$. Legyen rendre az első sajátérték, sajátvektor és koordináta λ, s és ξ, a második hármas pedig a *konjugáltjuk*, $\bar{\lambda}$, $\bar{s}$ és $\bar{\xi}$:

$$(1.19') \qquad Ms = \lambda s \qquad \text{és} \qquad M\bar{s} = \bar{\lambda}\bar{s}.$$

Mivel ξ és $\bar{\xi}$ nem nulla, s és $\bar{s}$ normálásával föltehetjük, hogy mind ξ, mind $\bar{\xi}$ egységnyi. Írjuk föl x_0-t a sajátvektorok segítségével:

$$(1.20') \qquad x_0 = s + \bar{s},$$

és alkalmazzuk az M operátort t-szer:

$$(1.21') \qquad x_t = \lambda^t s + \bar{\lambda}^t \bar{s}.$$

Legyen $s = \mathbf{Re}s + i\mathbf{Im}s$ (koordinátánként), ahol $i = \sqrt{-1}$; s írjuk föl a Moivre-képletet:

$$\lambda = |\lambda|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Rightarrow \lambda^t = |\lambda|^t(\cos\varphi t + i\sin\varphi t).$$

E képletet behelyettesítve, (1.21′) a következő alakot ölti:

$$x_t = |\lambda|^t[(\cos\varphi t + i\sin\varphi t)(\mathbf{Re}s + i\mathbf{Im}s) + (\cos\varphi t - i\sin\varphi t)(\mathbf{Re}s - i\mathbf{Im}s)].$$

Rendezzük a kapcsos zárójelben lévő kifejezést. Kiesnek a képzetes tagok, azaz csak valós tagok maradnak, $\cos\varphi t$ és $\sin\varphi t$ szorzókkal. Igaz az

1.3. tétel. *Ha az M mátrixnak van egy egyszerű komplex λ sajátértéke és s sajátvektora, akkor a megfelelő konjugált pár blokk-megoldás alakja*

$$(1.22) \qquad x_t = 2|\lambda|^t[\mathbf{Re}s\cos\varphi t - \mathbf{Im}s\sin\varphi t].$$

Szemléltetésül következik egy példa és egy feladat.

1.8. példa. 90°-os forgatás a síkban. Legyen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor könnyen belátható, hogy az $x_t = Mx_{t-1}$ leképezés 90°-os elforgatás a síkban. Nem meglepő, hogy $\lambda_{1,2} = \pm i$, azaz az $x_{1,0} = 1$ és $x_{2,0} = 0$ kezdeti állapot mellett $x_{1,t} = \cos(t\pi/2)$ és $x_{2,t} = \sin(t\pi/2)$.

1.8. feladat. Legyen ρ és φ két pozitív valós szám. Legyen

$$M = \rho\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy az $x_t = Mx_{t-1}$ leképezés egy ρ-szoros nagyítást/kicsinyítést és φ szögű forgatást ír le a síkban! Igazoljuk, hogy $\lambda_{1,2} = \rho[\cos\varphi \pm i\sin\varphi]$, valamint $x_{1,t} = \rho^t\cos\varphi t$ és $x_{2,t} = \rho^t\sin\varphi t$!

Magasabb rendű egyenletek.

Az 1.2. példában már említettük, hogy vannak (1–nél) magasabb rendű differencia-egyenletek is, de ezek visszavezethetők elsőrendű rendszerekre. Most bemutatunk egy ilyen visszavezetést az n-edrendű skaláris homogén lineáris esetben. Legyen γ_k valós együttható, $k = 1, \ldots, n$, és

$$y_t = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_{t-k}, \qquad t = n, n+1, \ldots,$$

ahol adott az $y_0, \ldots, y_{n-1}$ kezdeti állapot.

Bevezetve az $x_{k,t} = y_{t-k}$ jelölést, alkalmas $n \times n$-es M mátrixra felírható az $x_t = Mx_{t-1}$ egyenletrendszer. Egyszerűbb azonban rögtön felírni a rendszer karakterisztikus egyenletét: $P(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \lambda^{n-k} = 0$. Legyen az n gyök $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, és alkalmas $\xi_1, \ldots, \xi_n$ állandók segítségével a megoldás $y_t = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k^t$ alakban felírható.

A következő példa klasszikus alkalmazása az imént elmondottaknak.

1.9. példa. Fibonacci-számok (1202). „Egy gazdának van egy pár nyula. Tegyük föl, hogy ez a pár nyúl minden hónapban egy újabb pár nyulat fiadzik, amelyek mindegyike kéthónapos korától szintén havonta egy pár nyúlnak ad életet. A kérdés az, hogy az egymás után következő hónapokban hány pár nyula lesz a gazdának” (Simonyi, 1981, 122. o.). Könnyű belátni, hogy a választ a következő rekurzió adja: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$. A rendszer karakterisztikus egyenlete (más szóval: a sorozat generátorfüggvénye): $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. A megoldás $F_t = \xi_1 \lambda_1^t + \xi_2 \lambda_2^t$ alakú. A kezdeti feltételekből ξ_1 és ξ_2 meghatározható: $F_0 = \xi_1 + \xi_2 = 1$ és $F_1 = \xi_1 \lambda_1 + \xi_2 \lambda_2 = 1$. $\xi_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/10$.

Megjegyzés*. Fontos hangsúlyozni, hogy a magasabb rendű rendszerekben a többszörös gyökökhöz csak egyetlen egy sajátvektor tartozik, tehát itt a Jordan-alak alkalmazandó. Más esetekben azonban egyáltalán nem biztos, hogy az algebrailag többszörös sajátértékek geometriailag is többszörösek.

Stabilitás vagy instabilitás

Az 1.1. alfejezetben definiáltuk a lokális és globális stabilitás fogalmát. Most szükségünk lesz a spektrálsugár fogalmára. A négyzetes M mátrix *spektrálsugara* a legnagyobb abszolút értékű (domináns) sajátérték abszolút értéke, jele: $\rho(M)$. Lineáris rendszerek esetén a globális és a lokális stabilitás ekvivalens, s viszonylag egyszerűen bizonyítható az

1.4. tétel. *A diszkrét idejű (1.15) lineáris rendszer akkor és csak akkor stabil, ha*

$$\rho(M) < 1. \tag{1.23}$$

Bizonyítás. *a)* Tegyük föl, hogy létezik sajátbázis. Ekkor (1.21) [és (1.22)] szerint x_t akkor és csak akkor tart nullához, ha minden sajátérték-hatvány nullához tart, azaz minden sajátérték abszolút értékben kisebb, mint 1, azaz (1.23) teljesül. *b*)* Az általános esetben (1.21*) ugyanehhez az eredményhez vezet. ∎

Megjegyzések. 1. Az 1.4. tétel alapján egy, az (1.23) feltételt kielégítő mátrixot diszkrét időben *stabil*nak nevezik.

2. Ha $\rho(M) = 1$, akkor egyszeres domináns gyök esetén Ljapunov-stabilitás, többszörös domináns gyök esetén instabilitás igazolható. Ha $\rho(M) > 1$, akkor a rendszer robbanó, legalábbis majdnem minden kezdőállapotra (lásd 1.10. példát később).

3. A skalárokra ismert végtelen mértani sor összegképletét triviálisan általánosíthatjuk stabil mátrixokra: $(I - M)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} M^t$ (Neumann-sor).

1.9. feladat. Multiplicitás és stabilitás. Hasonlítsuk össze az

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixú feladatok megoldásainak stabilitását! Figyeljük meg, hogy M_1-nek két egyszerű domináns sajátértéke van, M_2-nek egyetlen domináns sajátértéke van, 2-multiplicitással!

Élesebb eredményt kapunk, ha bevezetjük *a nemnegatív elemű, irreducíbilis mátrix* fogalmát. Az A.7. tétel szerint ekkor igaz az 1.1. tétel élesítése.

1.5. tétel. *Ha $M \geq 0$ irreducíbilis és stabil, valamint $w > 0$, akkor az (1.10) lineáris rendszernek pontosan egy fixpontja van, amely pozitív.*

Stabilitásnál a konvergencia aszimptotikus sebességét a *csillapítási tényezővel* mérjük, amelyet két egymást követő állapoteltérés vektor hosszával (normájával) képzett reciprok hányadosának a határértékeként kapunk, ha a határérték létezik. Képlete:

$$\Phi = \lim_t \frac{||x_t^d||}{||x_{t+1}^d||}.$$

Könnyen belátható az

1.6. tétel. *(Mises.) Ha az M mátrix domináns sajátértéke valós, akkor az (1.10) iteráció csillapítási tényezője majdnem minden kezdőállapotra létezik és*

$$\Phi = \frac{1}{\rho(M)}.$$

Bizonyítás. Sajátbázis létezése esetén (1.21)-ből következik az állítás, feltéve, hogy a kezdőállapotnak van domináns sajátvektor (mondjuk, s_1) irányú összetevője: $\xi_1 \neq 0$. Az általános bizonyításnál (1.21*)-ot alkalmazzuk. ∎

Érdekes, hogy gépi számításnál még akkor is igaz a tétel, ha a kezdőállapotnak nincs s_1 irányú összetevője: $\xi_1 = 0$. A következő példa bemutat egy ilyen esetet:

1.10. példa. „Önkorrekció" (Ralston, 1965, 10.2. példa)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0{,}5 \\ 1 & 1 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0{,}64955116 \\ 0{,}74822116 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Most x_t $\xi_2\lambda_2^t s_2$-t követi egy ideig ($t = 2$ és 20 között), de a kerekítési hibák hatására a 40. lépéstől kezdve „rálép a helyes útra”: $x_t \approx \xi\lambda_1^t s_1$ körülbelül $t = 40$-től (1.1. ábra). Egyébként majdnem minden kezdőállapotra teljesül a $\xi_1 \neq 0$ feltétel.

Megjegyzések. 1. Komplex domináns sajátértékek esetén nincs konvergencia, de $1/\rho(M)$ még ekkor is jó tájékoztatást ad arról, hogy a rendszer átlagosan milyen gyorsan közeledik a fixponthoz (vagy távolodik attól) (vö. 1.3. alfejezet).

2. Paradox módon a numerikus analízisben az 1.6. tételt visszafelé használják: az (1.15) iteráció segítségével állapítják meg az M transzformáció domináns sajátértékét.

Az A. függelékben bevezetett aciklikus mátrixoknál A.8b. tételt alkalmazva élesíthető a tétel:

Következmény. *Ha $M \geq 0$ és $M^n > 0$ (aciklikus mátrix), akkor az M mátrixnak egyetlen egyszerű pozitív domináns sajátértéke van, s a csillapítási tényező minden pozitív kezdőállapotra létezik.*

Különleges eset

Külön figyelmet érdemel a $w = 0$ és $\rho(M) = 1$ eset, egyszeres valós gyökkel. Ha a domináns gyök pozitív, azaz 1, akkor a bal és jobb oldali domináns sajátvektor, p_1 és s_1, fixpont. Megfelelő normálással, például $p_1^{\mathbf{T}} s_1 = 1$, egyértelmű megoldást kapunk.

1.7. tétel. *Tegyük föl, hogy $w = 0$ és az M mátrix domináns sajátértéke 1, bal oldali domináns sajátvektora $p_1^{\mathbf{T}} = p_1^{\mathbf{T}} M$ és szorítkozzunk a $p^{\mathbf{T}} x_0 = 1$ hipersíkra. Ekkor az (1.10) iteráció tagjai is a hipersíkon maradnak:*

$$p_1^{\mathbf{T}} x_t = 1, \qquad t = 1, 2, \ldots; \tag{1.24}$$

és az (1.24) normálás mellett a az iteráció s_1-hez tart.

Bizonyítás. (1.21)-et balról beszorozva p_1-gyel, $p_1^{\mathbf{T}} x_t = p_1^{\mathbf{T}} M^t x_0 = p_1^{\mathbf{T}} x_0 = 1$. Beszorozva (1.21)-et p_1-gyel és figyelembe véve az A.3. tételt, adódik $p_1^{\mathbf{T}} x_t = \sum_j \xi_j \lambda_j^t p_1^{\mathbf{T}} s_j = \xi_1 p_1^{\mathbf{T}} s_1$. Normálásunk folytán $\xi_1 = 1$. ∎

Következmény. *Az 1.7. tétel feltételei mellett, ha $M \geq 0$ és $M^n > 0$, akkor p_1 és $s_1 > 0$ és minden $x_0 > 0$ kezdőállapotnak van domináns sajátvektor (s_1) irányú összetevője: $\xi_1 > 0$, tehát $\lim_t x_t = \xi_1 s_1$.*

Bizonyítás. $M^n > 0$ esetén a domináns sajátérték algebrai multiplicitása 1 (A.8b. tétel), $s_1 > 0$, $p_1 > 0$. ∎

Megjegyzés. Érdemes valószínűségszámítási nyelvre is lefordítani az 1.7. tételt. Legyen $M = (m_{ij})$ egy átmenetvalószínűségi mátrix, ahol $m_{ij} \geq 0$ annak a valószínűsége, hogy egy lépés alatt a rendszer a j-edik állapotból az i-edikbe kerül: $\sum_i m_{ij} = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Legyen $x_t \geq 0$ valószínűségi eloszlásvektor, ahol $x_{i,t}$ annak a valószínűsége, hogy a t-edik időszakban a rendszer az i-edik állapotban van: $\sum_i x_{i,t} = 1$. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint $x_{i,t} = \sum_j m_{ij} x_{j,t-1}$. Mátrixjelölésekre áttérve: $\mathbf{1}^{\mathbf{T}} M = \mathbf{1}^{\mathbf{T}}$, $x_t = M x_{t-1}$ és $\mathbf{1}^{\mathbf{T}} x_t = 1$. *Homogén Markov-lánc*unk van, amelynek átmenetmátrixáról föltesszük, hogy aciklikus: $M^n > 0$. Ekkor a határeloszlás létezik, azaz a lánc *ergodikus*: $\lim_{t\to\infty} x_{j,t} = x_j^{\text{o}}$, $j = 1, \ldots, n$ (Rényi, 1966, 403–409. o.): $x^{\text{o}} = Mx^{\text{o}}$, a jobb oldali domináns sajátvektor. Negatív domináns sajátérték ($\lambda_1 = -1$) esetén nagyon egyszerű ciklusmodellt kapunk: $s_1 = -Ms_1$ miatt $x_t \approx -x_{t-1}$, azaz $x_t \approx x_{t-2}$, 2-határciklus. „Mindössze" az a nehézség, hogy – ellentétben a $\lambda_1 = 1$ esettel –, nincs okunk azt feltételezni, hogy $\rho(M) = 1$ *tipikusan* teljesül.

Stabilitás és működőképesség

Már a könyv Bevezetésében szóltunk arról, hogy a stabilitás csak aszimptotikus minősítés, és gyakran szükségünk van az átmeneti folyamatok elemzésére is. Erre vonatkozik a *működőképesség* fogalma, amely legegyszerűbb esetben azt jelenti, hogy az x_t állapot minden t-re eleme az $\mathbf{R}^n$-beli $\mathcal{P}$ tartománynak. Vektor- és mátrixnorma segítségével gyakran egyszerű becslést tudunk adni azokra a kezdeti állapotokra, amelyekből működőképes pálya indul. Föltesszük, hogy az x^{o} fixpont a $\mathcal{P}$ tartomány belső pontja, azaz van olyan $r > 0$ szám, amelyre az $||x - x^{\text{o}}|| < r$ feltételnek eleget tevő állapotok mind benne vannak $\mathcal{P}$-ben. Az r sugarú, x^{o} középpontú $B(x^{\text{o}},r)$ gömb része $\mathcal{P}$-nek: $B(x^{\text{o}},r) \subseteq \mathcal{P}$. A vektor- és a mátrixnorma jó szolgálatot tesz a stabilitás elemzésénél is.

1.8. tétel. *(Vö. Martos, 1990, 7. fejezet.) a) Ha létezik állandósult állapot és alkalmas normában*

$$||M|| \le 1, \qquad \text{illetve} \qquad ||M|| < 1, \tag{1.25}$$

akkor az (1.10) iteráció Ljapunov (aszimptotikusan) stabil.

b) Az a) pont feltételei mellett tegyük föl, hogy alkalmas $r > 0$ számra $B(x^{\text{o}},r) \subseteq \mathcal{P}$. Ekkor a $B(x^{\text{o}},r)$ tartomány minden pontjából működőképes pálya indul.

Bizonyítás. *a)* Visszatérünk az eltérésrendszer jelöléseihez: (1.15$^{\text{d}}$) szerint $x_t^{\text{d}} = Mx_{t-1}^{\text{d}}$, (A.17) és (1.25) szerint

$$||x_t^{\text{d}}|| = ||Mx_{t-1}^{\text{d}}|| \le ||M||\,||x_{t-1}^{\text{d}}|| \le ||x_{t-1}^{\text{d}}||, \tag{1.26}$$

azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz elegendő $\delta = \varepsilon$-t választani, hogy $||x_0^{\text{d}}|| < \delta$-ból következzék $||x_t^{\text{d}}|| < \varepsilon$.

b) $||x_t^{\text{d}}|| < ||x_0^{\text{d}}||$ értelmében $x_0 \in B(x^{\text{o}},r)$-ből következik $x_t \in B(x^{\text{o}},r)$. Hasonló a bizonyítás aszimptotikus stabilitásnál. ∎

Az alfejezetet lezárja az

1.10. feladat. Tekintsük át a fenti tételeket $n = 1$ esetén.

Az $n = 1$ esetén az 1.2. ábra az előjelváltó (későbbi elnevezéssel: oszcilláló) $M = -1{,}1; -1, -0{,}9$; az 1.3. ábra az előjeltartó (későbbi elnevezéssel: oszcillálómentes) 0,9; 1 és 1,1 esetet ábrázolja. Látható, hogy mindkét esetben rendre instabil, ciklikus/állandó és stabil pálya alakul ki.

1.3. SÍKBELI LINEÁRIS RENDSZEREK

Alapfogalmak

A differenciaegyenletek elméletében kiemelkedően fontosak a kétváltozós rendszerek, s azon belül is a lineárisak. Ebben a pontban tehát az állandó-együtthatós kétváltozós (síkbeli) lineáris rendszereket külön megvizsgáljuk: $n = 2$, különös tekintettel az oszcillációkra (ciklusra). Szükségünk lesz a rendszer másodfokú karakterisztikus polinomjára, melynek gyökei meghatározzák a rendszer kvalitatív viselkedését:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \omega\lambda + \vartheta, \tag{1.27}$$

ahol

$$\omega = \operatorname{tr} M = m_{11} + m_{22} \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \det M = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}. \tag{1.28}$$

Oszcillációról beszélünk, ha az eltérésváltozók minden időbeli korlátozáson túl időnként előjelet váltanak. Két alesete van:

a) Elfajult oszcilláció áll fönn, amikor egy átmeneti időszak után mindkét változó minden időszakban előjelet vált.

b) Szabályos oszcilláció áll fönn, amikor a két változó előjelváltása nem mindig egyidejű.

A jelzők arra a következő fejezetben szereplő 2.2. és 2.3. ábrán bemutatott tényre utalnak, hogy aszimptotikusan az *a)* esetben 1, a *b)* esetben 2-dimenziós a dinamika.

Először a sajátértékek alapján osztályozzuk a síkbeli lineáris rendszereket. Nemlineáris rendszerekben látni fogjuk (3. és 4. fejezet), hogy egy adott rendszer különböző kezdőállapotai különböző típusú (oszcilláló vs. oszcillációmentes vagy stabil vs. instabil) pályákat adnak. Kétváltozós lineáris rendszerben osztályozásunk – jelentéktelen kivételektől eltekintve –, független a kezdőállapottól, azaz egy adott típus (majdnem) minden pályája ugyanolyan típusú.

1.9. tétel. *Tipikusan a következő sajátérték párosítások alapján osztályozzuk a síkbeli lineáris rendszereket; szimmetria miatt feltehető, hogy $|\lambda_2| \le |\lambda_1|$:*

a) a domináns sajátérték pozitív, $|\lambda_2| < \lambda_1$: oszcillációmentes;

b) a domináns sajátérték negatív, $|\lambda_2| < -\lambda_1$: elfajultan oszcilláló;

c) komplex sajátértékek, $|\mathbf{Re}\lambda_1| < |\lambda_1|$: szabályos oszcilláció.

Megjegyzés. Elvileg az *a)–c)* eset bármelyike kombinálódhat a stabil, instabil és Ljapunov-stabil eset bármelyikével. Sőt, további fontos alesetek is előfordulnak, például, kettős valós sajátérték ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) esetén a rezonancia. Nincs terünk az összes eset számbavételére. Végül megemlítjük, hogy a differenciaegyenleteknél föllépő sokféleség az egyik oka annak, hogy a matematikusok inkább differenciálegyenletekkel dolgoznak (lásd 5. fejezet).

Bizonyítás. Föltesszük a sajátbázis létezését, s ez a tipikus eset. (1.21) most kéttagú, $x_t = \xi_1\lambda_1^t s_1 + \xi_2\lambda_2^t s_2$. Valós gyökök esetén λ_1^t dominanciája miatt $x_t \approx \xi_1\lambda_1^t s_1$. Az aszimptotikus tag koordinátáinak előjele nagy t-re *a)*-nál t-től független, *b)*-re alternáló. *c)* Lásd az (1.22) összefüggést.

Az 1.4. ábra némileg eltérő osztályozást szemléltet.

1.11. feladat. *a)* Írjuk föl a hiányzó lényegtelen eseteket! *b)* Mi a különbség a következő két sajátértékpár között: (1;0,5) és (1;−0,5)?

A sajátértéken alapuló osztályozást kiegészíti az együtthatókon alapuló osztályozás.

1.10. tétel. *Elfajult oszcilláció akkor és csak akkor valósul meg, ha*

$$\omega^2 \geq 4\vartheta \tag{1.29}$$

és

$$\omega \leq 0.$$

Bizonyítás. Induljunk ki a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói jólismert összefüggéspárjából:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \omega, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \vartheta. \tag{1.30}$$

(1.29) azzal ekvivalens, hogy $P(\lambda)$ mindkét gyöke valós, $\omega \leq 0$ azt biztosítja, hogy van negatív domináns sajátérték. ∎

Következik a szemléltetés.

1.11. példa. Elfajult vagy szabályos oszcilláció. *a)* Negatív domináns diagonálismátrixú ($m_{11}m_{22} > m_{12}m_{21}$) rendszer elfajultan oszcillál. *b)* A négyfázisú inga szabályosan oszcillál (4-ciklusa van, 1.1. feladat).

A szabályos oszcillációt részletesebben elemezzük. Ekkor matematikailag *folytonos*sá tehető a megoldás, hiszen (1.22)-ben a $\cos\varphi t$ és a $\sin\varphi t$ függvény tetszőleges valós t-re értelmezve van. Értelmezhető egy folytonos idejű periódus is. Beláttuk, hogy folytonos idejű oszcillációnál az állapoteltérés iránya visszatér korábbi helyzetébe: ez a folytonos idejű *periódus.*

Egy kétváltozós lineáris rendszert *folytonos időben ciklikus*nak nevezünk, ha oszcillál, és nemcsak az irány, hanem maga az állapot tér vissza. Ezen belül két aleset különböztethető meg: α) *ciklus* és β) *kváziciklus.*

A 20. század elején Weyl tanulmányozta a kváziciklus legegyszerűbb esetét, az irracionális forgásszögű forgatást. Legyen ψ_t egy valós szám, amely a rendszer állapotát mutatja a t időszakban, konkrétabban: az egységkörvonalon milyen szöget zár be a vízszintes tengellyel. Legyen φ/π egy irracionális szám. Ekkor $\psi_t = \psi_{t-1} + \varphi$.

Weyl fedezte föl, hogy e fenti leképezés egyenletes eloszlást generál (Pólya és Szegő, 1924/80, II. kötet II. rész, 4.1. alfejezet)

Az elmondottakat a naptár példáján szemléltetjük. Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a Föld pontosan 365 és 1/4 nap alatt kerüli meg a Napot. Diszkrét időben (napokban) számolva a periódus kb. 4 év ($4 \cdot 365 + 1 = 1461$ nap), holott a valóságban minden évben visszatér a Föld korábbi helyzetébe. A megoldás Julius Ceasar i.e. 45-ben bevezett naptára volt, amely minden néggyel osztható évet *szökőév*nek nevezett, és egy 366. napot (február 29.-ét) is hozzáadott. A Föld esetében *folytonos idejű* mozgás diszkrét megfigyeléséről van szó, de más, „tiszta diszkrét” esetben is előfordul, hogy egy „nagy ciklus” több, egymáshoz közeli „kis ciklusból” áll. Pontosabb közelítésben a Föld

Nap körüli pályája kváziciklikus, mert a csillagászati év és a nap tartamának hányadosa nem (kis nevezőjű) racionális szám (a 365 és 1/4 érték csak közelítés, ezért kellett XIII. Gergely pápának 1582-ben kivennie a 100-as éveket és benntartania a 400-as éveket a szökőévek között).

Folytatjuk az 1.10. tételben elkezdett osztályozást.

1.11. tétel. *a) A kétváltozós lineáris rendszer akkor és csak akkor szabályosan oszcilláló, ha teljesül (1.29) tagadása:*

$$\omega^2 < 4\vartheta.$$

b) Szabályos oszcilláció esetén a folytonosított megoldás P periódusa és Φ csillapítási tényezője független a kezdeti értékektől:

$$P = \frac{2\pi}{\varphi}, \qquad \text{ahol} \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{\omega}{2\sqrt{\vartheta}}\right) \tag{1.31}$$

és

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}. \tag{1.32}$$

c) A szabályosan oszcilláló rendszer akkor és csak akkor ciklikus a folytonos időben, ha (1.29) tagadása mellett teljesül

$$\vartheta = 1. \tag{1.33}$$

Megjegyzés. Az imént kimondott tétel alapján könnyen tehetünk hasonló megállapításokat a nem vizsgált esetekre. Például a szabályos oszcilláció stabil, ha $\vartheta < 1$; és instabil, ha $\vartheta > 1$.

Bizonyítás. *a)* Komplex gyökök negatív diszkriminánsnál lépnek föl.

b) Legyen a két gyök $\lambda_{1,2} = (\cos\varphi \pm i\sin\varphi)/\Phi$, ahol φ és Φ pozitív valós szám, és i a komplex egységgyök. Behelyettesítve a komplex gyökpárt (1.30)-ba, adódik, hogy $2\cos\varphi = \omega\Phi$ és $1/\Phi = \sqrt{\vartheta}$. Ezzel bebizonyítottuk az (1.31)–(1.32) összefüggést.

c) Nyilvánvaló, hogy a szabályos oszcilláció akkor ciklikus folytonos időben, ha csillapítási tényezője 1, azaz – (1.32) folytán – ha (1.33) teljesül. ∎

A következő példa közvetlenül az együtthatók alapján alapján határozza meg a stabilitási feltételeket.

1.12. példa. Stabilitási feltételek (Samuelson, 1947). A síkbeli lineáris dinamikus rendszer akkor és csak akkor stabil, ha az (1.27)–(1.28)-beli karakterisztikus egyenlet együtthatói kielégítik a következő három feltételt: $1+\omega+\vartheta > 0$, $1-\omega+\vartheta > 0$ és $\vartheta < 1$.

Bizonyítás. *a)* Komplex gyökök: az 1.11. tétel szerint $\omega^2 < 4\vartheta$, (1.32): $0 < \vartheta < 1$. $1 \pm \omega + \vartheta > 1 \pm 2\sqrt{\vartheta} + \vartheta = (1-\sqrt{\vartheta})^2 > 0$.

b) Valós gyökök. Megint a gyökök és együtthatók közti (1.30) összefüggést használjuk. Az összes esetet végig vizsgálva adódik, hogy $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ ekvivalens a

$P(1) > 0$, $P(-1) > 0$ és $\vartheta < 1$ feltételhármassal. ∎

A lineáris ciklusmodelleknek két alapvető problémája van: 1. a kváziciklus, de méginkább a diszkrét periódusú ciklus csak kivételes paraméterértékekre valósul meg, lásd ϑ (1.28) definíciója és (1.33); 2. az itt nem tárgyalt amplitudót, a legnagyobb kilengést a kezdeti érték egyértelműen meghatározza. Ezt az ikerproblémát csak nemlineáris modellekben lehet megoldani (3. fejezet).

1.4*. LINEÁRIS SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK

Ebben az alfejezetben az 1.1. alfejezetben röviden bevezetett szabályozási rendszerek lineáris osztályával foglalkozunk (vö. Aoki, 1976 és Martos, 1981).

Szabályozhatóság

Legyen $x \in \mathbf{R}^n$ az *állapot*vektor és $u \in \mathbf{R}^m$ a *szabályozási* vektor. Legyen A és B rendre az $n \times n$-es *rendszer*- és az $n \times m$-es *bemeneti* mátrix, p egy n-dimenziós vektor. Fölírhatjuk egy diszkrét-idejű állandó-együtthatós lineáris rendszer *Állapotegyenlet*ét:

$$x_t = Ax_{t-1} + Bu_t + p, \qquad t = 1,2,.., \tag{1.34}$$

az x_0 kezdeti állapot adott.

Föltehetjük, hogy a szabályozási vektor dimenziója legfeljebb akkora, mint az állapotvektoré: $m \le n$ (miért?). Mindenekelőtt mutatunk egy olyan példát, ahol az állapotvektor dimenziója nagyobb, mint a szabályozási vektoré.

1.13. példa. $n = 2 > m = 1$. $y_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \beta u_t$, ahol y_t és u_t skalárváltozók. Legyen $x_t = (y_t, y_{t-1})$, s az 1.1. alfejezetben bemutatott átalakítás szerint

$$x_{1,t} = \alpha_1 x_{1,t-1} + \alpha_2 x_{2,t-1} + \beta u_t \qquad \text{és} \qquad x_{2,t} = x_{1,t-1}.$$

Azaz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igaz az

1.12. tétel. *(Kalman, 1960.) Egy lineáris (A,B) szabályozási rendszer akkor és csak akkor szabályozható, ha teljesül a következő rangfeltétel:*

$$r[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n, \tag{1.35}$$

ahol az $n \times m$-es $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ mátrixok egymás mellett állnak. Ekkor legfeljebb n időszak alatt elérhetjük célunkat.

A bizonyítás előtt két végletes példát mutatunk be:

1.14. példa. $A = I$ esetén (1.35) az $r(B) = n$ egyenlőségre egyszerűsödik, azaz $m \geq n$. Kiválasztva n független oszlopot, ugyanannyi szabályozási változót kapunk, mint állapotváltozót, és a cél valóban azonnal megvalósítható: tegyük fel, hogy B egy $n \times n$ invertálható mátrix. Ekkor $u_1 = B^{-1}(x_1 - x_0 + p)$.

1.15. példa.* $m = 1$ esetén (1.35)-re a mátrixok Jordan-alakjából ciklikus feltételt kapunk: a $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ vektoroknak függetleneknek kell lenniük, sőt bázist kell alkotniuk.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a rendszer szabályozható, azaz van olyan $u_1, \ldots, u_T$ szabályozási vektorsorozat, amelyre $x_0 = x^1$ és $x_T = x^2$. Az ún. *megoldó-szorzók módszerét* alkalmazva, szorozzuk be a t-edik időszakra vonatkozó egyenletet A^{T-t}-vel:

$$A^{T-t}x_t = A^{T-t+1}x_{t-1} + A^{T-t}Bu_t, \qquad t = 1, \ldots, T.$$

Vegyük észre, hogy a t-edik sor bal oldalán ugyanaz a kifejezés áll, mint a $(t+1)$-edik sor jobb oldalán. Ezért a T egyenletet összeadva, a következő egyenletet kapjuk:

$$x_T = A^T x_0 + \sum_{t=1}^{T} A^{T-t}Bu_t. \tag{1.36}$$

Az (1.36) egyenlet tanúsága szerint a bal oldalon álló tetszőleges x_T vektor előállítható a jobb oldalon szereplő alakban, tehát a rangfeltétel teljesül, mégpedig a Cayley–Hamilton (A.4.*) tétel szerint $T \leq n$. Megfordítva, ha teljesül a rangfeltétel, akkor megfelelő $\{u_t\}$-sorozatra az x_T-re vonatkozó (1.36) egyenlet teljesül. ∎

Megjegyzés. Érdemes megemlíteni, hogy az (1.36) jobb oldalán álló két tagnak szemléletes jelentése van: az első tag az x_0 kezdeti feltételhez tartozó homogén megoldás $(u = 0)$, a második tag pedig az $x_0 = 0$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás.

A következő példa emlékeztet arra, hogy az imént látott eljárást már középiskolából ismerjük.

1.16. példa. A mértani sor összegképlete: $s_t = s_{t-1} + q^{t-1}$, $s_0 = 1$. Fokozatos behelyettesítéssel: $s_t = 1 + q + \ldots + q^t$. Beszorozva mindkét oldalt $q \neq 1$-gyel: $qs_t = s_t + q^{t+1} - 1$, majd kivonva egymásból a két egyenletet, adódik $s_t = (q^{t+1} - 1)/(q - 1)$.

Megfigyelhetőség

Gyakori, hogy az állapotvektort nem tudjuk teljesen megfigyelni, de azért mégis szeretnénk az (1.34) rendszert szabályozni. Ezt a helyzetet formalizáljuk most. Legyen $y \in \mathbf{R}^z$ a *megfigyelési* vektor és C egy $z \times n$-es *megfigyelési* mátrix, amelyek meghatározzák a *megfigyelési egyenletet*:

$$y_t = Cx_t. \tag{1.37}$$

Szükségünk lesz a következő definícióra: egy (A,C) rendszert *megfigyelhetőnek* nevezünk, ha bármilyen x_0 kezdőállapot véges sok későbbi megfigyelésből kiszámítható.

1.13. tétel. *(Kalman, 1960.) Egy lineáris* (A,C) *megfigyelési rendszer akkor és csak akkor megfigyelhető, ha teljesül a következő rangfeltétel:*

$$r[C,CA,\ldots,CA^{n-1}] = n, \tag{1.38}$$

ahol a $z \times n$*-es* $C,CA,\ldots,CA^{n-1}$ *mátrixok egymás alatt állnak. Ekkor legfeljebb* n *időszak alatt megállapíthatjuk* x_0*-t.*

A korábbi két szélsőséges példát most új szereposztásban mutatjuk be.

1.17. példa. $A = I$ esetén $r(C) = n$, azaz választva n független sort, ugyanannyi megfigyelési változót kapunk mint állapotváltozót, és a rekonstrukció azonnal megvalósítható.

1.18. példa.* $z = 1$ esetén a C mátrix a c vektorra egyszerűsödik, (1.38)-ra a mátrixok Jordan-alakjából ismert ciklikus feltételt kapjuk: a $c,cA,\ldots,cA^{n-1}$ vektoroknak függetleneknek kell lenniük és bázist kell alkotniuk.

Bizonyítás. Ha (1.38) teljesül, akkor a hipermátrix oszlopai függetlenek, tehát tetszőleges, képtérbeli $\{y_0/y_1/\ldots/y_{n-1}\}$ hipervektorhoz található n olyan valós szám, hogy a belőle képzett x_0 vektor képe a hipervektor, azaz x_0 a megfelelő kezdeti állapot. A megfordítás bizonyítása hasonló. ∎

Belátható, hogy a megfigyelési és a szabályozási feladat egymás duálisa: az 1.12. és az 1.13. tétel egymásból az A mátrix transzponálásával adódik. A továbbiakban mindig feltesszük, hogy az (A,B,C) rendszer szabályozható és megfigyelhető.

Visszacsatolás és stabilizálhatóság

Lineáris visszacsatolásról beszélünk, ha a szabályozás lineáris függvénye az állapotnak:

$$u_t = -Kx_{t-1} + q, \tag{1.39}$$

ahol q egy n-dimenziós vektor.

A K mátrix k_{ij} elemeit *reakcióegyütthatók*nak nevezzük, hiszen azt mutatják, hogy az i-edik döntés mennyire reagál a j-edik jelzésre. Egy (1.34) alakú lineáris differenciaegyenlet-rendszert az (1.39) *lineáris visszacsatolással stabilizálható*nak nevezünk, ha létezik olyan $m \times n$-es K mátrix, amelyre az $M = A - BK$ mátrix stabil: $\rho(M) < 1$.

Bizonyítható (Aoki, 1976, 135–136. o.) az

1.14. tétel. *(Kalman, 1960.) Ha az* (A,B) *rendszer szabályozható, akkor stabilizálható.*

Az 1.14. tételt szemlélteti a következő példa.

1.19. példa. Az 1.14. példa folytatása. Az elemi $x_t = x_{t-1} + Bu_t$ dinamikus szabályozható rendszer a $K = B^{-1}$ visszacsatolással a stabilizálható.

Decentralizált stabilizálás

Mind a numerikus analízisban, mind a közgazdasági szabályozáselméletben alapvető a *teljesen decentralizált lineáris szabályozás* és *–stabilizálhatóság.* Számos alkalmazás szempontjából (lásd: 2.3. és 6.3. alfejezet) elegendő azt az esetet vizsgálni, ahol $m = n$, $A = I$, B invertálható (1.14. példa), és a K visszacsatolási mátrix diagonális, vagy sorcserékkel azzá tehető: $K = \langle k \rangle$. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy létezik n független szabályozó egység, az i-edik egység megfigyeli saját állapotát, $x_{i,t-1}$-t és annak értéke alapján hozza meg az $u_{i,t}$ döntését. A decentralizálás nagy előnye a centralizált megoldással szemben: nem kell egy központba összegyűjteni az információkat. Ekkor (1.34) és (1.39) alapján

$$x_t = x_{t-1} + Bu_t + p, \tag{1.40}$$

$$u_t = -\langle k \rangle x_{t-1} + q; \tag{1.41}$$

azaz

$$x_t = (I - B\langle k \rangle)x_{t-1} + p + Bq. \tag{1.42}$$

Vagyis az $M = I - B\langle k \rangle$ és $w = p + Bq$ jelöléssel visszajutunk az (1.10) alapegyenlethez. Mielőtt a decentralizált stabilizálhatóságra vonatkozó eredményeket ismertetnénk, kimondunk egy feltételt, amely a B mátrix invertálhatóságánál (regularitásánál) némileg erősebb. Egy B mátrixot *erősen reguláris*nak nevezünk, ha sorai és oszlopai egyidejű felcserélésével olyan alakra hozható, hogy a keletkező (de jelöletlen) $B_r = (b_{ij})_{1 \le i,j \le r}$ sarokmátrixok is invertálhatók, $r = 1, 2, \ldots, n$. Fuller és Fisher (1958) numerikus analízisbeli tételét alkalmazva, belátható az

1.15. tétel. *(McFadden, 1969.) Minden erősen reguláris B mátrixú (1.40) rendszer teljesen decentralizáltan stabilizálható.*

A bizonyítás lényege hasonlít a mátrixok ε-triangularizálásnál (Zalai, 1989, 7. fejezet függeléke, vagy e könyv 5.10. tételének bizonyításvázlata) használt elvhez: az i-edik döntéshozó érdemben csak a j-edik döntéshozókra hat ($j < i$), s a visszacsatolási reakcióegyütthatójának nagyságrendje ε^i. Sajnálatos módon az így adódó konvergencia nagyon lassú. ∎

Ezen a ponton a következő megállapítást tehetjük. A numerikus analízis nyelvén szólva, egy gyorsan konvergáló (1.40)–(1.41) iteratív megoldás algoritmikusan hatékonyabb lehet, mint ha (1.13) alapján $I - M$ invertálásával keresnénk meg az x^{o} fixpontot. Bodewig (1959) és Varga (1962) élvezetes történeti visszatekintést ad, a feladat visszavezethető Gauss 1823-as leveléhez.

Most pedig győződjünk meg az 1.15. tételbeli két fogalom különbségéről.

1.12. feladat. Centralizált és decentralizált stabilizálhatóság. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha,\beta < 0$ esetén a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix *a)* invertálható, *b)* nem erősen reguláris, *c)* centralizáltan stabilizálható és *d)* nem stabilizálható teljesen decentralizáltan!

A fejezet hátralévő részében Simonovits (1978) és (1981b) eredményeit foglalom össze. A bemeneti mátrixok egy speciális osztályával foglalkozunk, amely mind a numerikus analízisben, mind a közgazdasági alkalmazásokban fontos (Young, 1970, 2.7. fejezet L-mátrixai, vagy a Metzler-mátrixok (1945) ellentettjei). A B mátrix átlós elemei egységnyiek és az átlón kívüli elemek nem pozitívak:

$$b_{ii} = 1 \qquad \text{és} \qquad b_{ij} \le 0, \quad i \ne j. \tag{1.43}$$

Szükségünk lesz (1.40) koordinátás alakjára:

$$x_{i,t} = x_{i,t-1} + u_{i,t} + \sum_{j \ne i} b_{ij} u_{j,t} + p_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Bevezetjük a *kereszthatások mátrixát*:

$$N = I - B \ge 0, \tag{1.44}$$

és kikötjük, hogy N *irreducíbilis* és *a sajáthatások dominálják a kereszthatásokat*:

$$-\sum_{i \ne j} b_{ij} < 1, \quad j = 1,..,n.$$

Vektoralakban:

$$\mathbf{1}^\mathbf{T} N < \mathbf{1}^\mathbf{T}, \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{1}^\mathbf{T} = (1, \ldots, 1) \tag{1.45}$$

az összegző sorvektor.

Az A.9. tétel b) következménye szerint (1.45) ekvivalens az N mátrix stabilitásával: $\rho(N) < 1$.

Rátérünk a dinamikára. Az alapegyenlet mátrixa most

$$M == I - B\langle k \rangle = I - \langle k \rangle + N\langle k \rangle \tag{1.46}$$

Vegyük észre, hogy *csillapított visszacsatolás*, azaz

$$0 < k \le \mathbf{1} \tag{1.47}$$

esetén M jól kezelhető.

1.1. segédtétel. *Tegyük föl, hogy pozitív sajáthatások dominálják a negatív kereszthatásokat [(1.43) és (1.45)] és csillapított a visszacsatolás [(1.47)]. Ekkor az M mátrix nemnegatív elemű, irreducíbilis és spektrálsugara csökkenő függvénye k minden elemének, következésképpen kisebb, mint 1: az M mátrix stabil.*

Bizonyítás. (1.47) esetén M nyilvánvalóan nemnegatív elemű és irreducíbilis. Legyen M pozitív domináns sajátértéke ρ, a hozzátartozó sajátvektor $s > 0$. Írjuk föl a megfelelő sajátérték-egyenletet: $\rho s = Ms$. Behelyettesítve (1.46)-ot:

$$\rho s = (I - \langle k \rangle + N\langle k \rangle)s. \tag{1.48}$$

Próbáljuk meg az egyenletet olyan alakra hozni, hogy k csak pozitív előjellel szerepeljen. Rendezéssel adódik $(1-\rho)^{-1}s = \langle k\rangle^{-1}(I-N)^{-1}s$.

A jobb oldalon az $(I-N)^{-1} > 0$ *rezolvens mátrix* szerepel, amely a közgazdaságtanban a folyó-ráfordítások mátrixának *Leontief-inverze* néven közismert (A.7e. tétel). Most alkalmazzuk az A.7d. tételt, mely szerint a spektrálsugár növekvő függvénye a mátrix minden elemének. Rögzített i-re, k_i-t növelve k_i^{-1} csökken, $(1-\rho)^{-1}$ szintén, tehát ρ szintén csökken. Mivel $k = 0$-ra $\rho = 1$, $\rho < 1$. (A szemipozitív k eset;vel nem foglalkoyunk.) ∎

Hála a modell egyszerű szerkezetének, az 1.1. segédtétel alapján az 1.2. fejezet eredményei közvetlenül alkalmazhatók a stabilitásra, az általánosított oszcillációmentességre és a csillapítási tényezőre. Az 1.6. tétel következményéből adódik az

1.16. tétel. *Tegyük föl, hogy a pozitív sajáthatások dominálják a negatív kereszthatásokat [(1.45)] és csillapított visszacsatolás működik [(1.47)].*

a) A decentralizált visszacsatolás stabil, csillapítási tényezője

$$\Phi = \frac{1}{\rho(I-\langle k\rangle + N\langle k\rangle)}. \tag{1.49}$$

b) A maximális csillapítási tényező a $k = \mathbf{1}$ esetén valósul meg, értéke

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho(N)}. \tag{1.50}$$

c) A szabályozás tipikusan (aszimptotikusan) oszcillációmentes.

Megjegyzés. Ha túllépünk a $0 < k \le \mathbf{1}$ korláton, akkor legtöbbször tovább gyorsíthatjuk a szabályozás konvergenciáját. Ez a jelenség jól ismert a lineáris egyenletrendszerek numerikus megoldásával foglalkozó irodalomból és a túlrelaxálás nevet viseli (Young, 1970, 4. fejezet).

Élesíthetjük az eredményt, ha bevezetjük a *P-ciklikus mátrix*ok osztályát. (Az 1.12. feladat $B = N$ mátrixa a legegyszerűbb 2-ciklikus mátrix.)

$$N = \begin{pmatrix} 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_P & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.51}$$

ahol a N_Q mátrix $r_Q \times r_{Q+1}$ méretű, $Q = 1, \dots, P$, $r_{P+1} = r_1$.

A lineáris decentralizált (1.41) visszacsatolást *egyöntetű*nek nevezzük, ha minden reakcióegyüttható azonos:

$$k = \kappa\mathbf{1}. \tag{1.52}$$

Egyöntetű visszacsatolásnál vagy ciklikus bemeneti mátrixnál az 1.16. tétel élesíthető:

1.17. tétel. *a) Tegyük föl, hogy a pozitív sajáthatások dominálják a kereszthatásokat [(1.45)], a kereszthatás-mátrix P-ciklikus [(1.51)] és a visszacsatolás egyöntetű [(1.52)]. Ekkor a decentralizált szabályozás csillapítási tényezője* $\kappa > 1$ *esetén csökkenő függvény.*

b) Az a) esetben az optimum (1.47) korlátozás nélkül is a $\kappa = 1$ *esetben valósul meg.*

c) 2-ciklikus kereszthatás-mátrix és tetszőleges reakcióegyüttható esetén is az optimum a $k = \mathbf{1}$*-nél valósul meg.*

Bizonyítás. *a)* (1.46) és (1.52) értelmében $M = (1-\kappa)I+\kappa N$. Az A.8a. tétel szerint a nemnegatív elemű P-ciklikus mátrixok (domináns) sajátértékei P-szimmetrikusak. Legyen ε a P-edik komplex egységgyök és $\vartheta = \rho(N)$: ekkor a pozitív ϑ sajátérték mellett a $\vartheta\varepsilon^Q$ is sajátérték, $Q = 1, \ldots, P-1$: $\lambda_Q = 1 - \kappa + \kappa\vartheta\varepsilon^Q$. Könnyen belátható, hogy $\kappa > 1$ esetén $\lambda_1 > 0$ elveszti dominanciáját, s helyébe a $q = [(P+1)/2]$ indexű sajátérték lép (ahol [ ] egy valós szám egész részét jelöli). Valóban, páros P esetén $\lambda_q = 1 - \kappa - \kappa\vartheta < -\vartheta$. Páratlan P esetén egy olyan derékszögű háromszög keletkezik, amelyben a befogók hossza $\kappa - 1$ és $\kappa\vartheta\varepsilon^q$, az átfogóé $|\lambda_q|$. Mindkét esetben $|\lambda_q| > \vartheta$.

b) Nyilvánvalóan következik az 1.16. tételből és *a)*-ból.

c) Ha lemondunk mind a csillapítottságról, mind egyöntetűségről, akkor olyan bonyolult a levezetés, hogy elhagyjuk. Az alapötlet a következő átalakításon nyugszik:

$$x = [(\lambda - 1)I + \langle k\rangle]^{-1}\langle k\rangle N x. \tag{1.53}$$

$P = 2$ és $k = \mathbf{1}$ esetén pozitív λ sajátérték mellett a negatív $-\lambda$ is sajátérték. (Ez valós mátrixok komplex sajátértékeire természetes, de a valós sajátértékeire nem.) Jelenleg ismeretlen, hogy igaz-e a *c)* állítás tetszőleges P-ciklikus mátrixra. ∎

Következik a szemléltetés.

1.20. példa. Síkbeli rendszer. $n = 2$ és 2-ciklikus rendszer ($n_{11} = n_{22} = 0$) és egyenletes visszacsatolásnál, mindkét sajátérték valós, $k = 0$-nál 1, $k = 1$-nél $\pm\sqrt{b_{11}b_{22}} \to$ optimum.

2. DISZKRÉT IDEJŰ LINEÁRIS MODELLEK

Ebben a fejezetben *diszkrét idejű lineáris gazdasági modell*eket tanulmányozunk. Diszkrét idejű gazdasági modellekben az elemzési időszak hossza általában egy év vagy egy negyedév, de szélsőséges esetben lehet akár több évtized is (B. függelék). Lineáris modellekben a bemenet és a kimenet arányosak. A Bevezetésben már szóltunk a diszkrét idő és a linearitás jelentőségéről, később még találkozunk folytonos idejű vagy nemlineáris modellekkel is. A 2.1. alfejezetben a tőkés gazdaság *akcelerátor–multiplikátor* elemi és összetett modelljét vizsgáljuk. A 2.2.* alfejezetben a szocialista gazdaság lineáris *indítási–beruházási* modelljét tanulmányozzuk. A 2.3. alfejezetben egy többszektoros gazdaság kétféle *készletjelzéses szabályozásá*t vizsgáljuk. A 2.4.* alfejezetben az *eladási várakozások*at, illetve általánosításukat kutatjuk. Mindegyik modellre jellemző, hogy árjelzések nélkül működik, és instabil esetben nemlineáris általánosításra szorul, amelyre csak a 4. fejezetben kerül sor. Ellentétben a harmadik és a negyedik modellel, az első és a második modell csupán néhány egyenletet tartalmaz (makromodellek).

2.1. A LINEÁRIS AKCELERÁTOR–MULTIPLIKÁTOR MODELL

Hicks (1950) ciklusmodellje az egyik legérdekesebb és leghasznosabb modell. Módszertani szempontból az adja az érdekességét, hogy mindössze két független változóval képes a gazdaság ciklusait modellezni. Először Hicks (1950) *elemi* modelljét ismertetjük, majd vázoljuk az *összetett* modell egyenleteit is. Makroökonómiában megszokott módon változatlan áras értékekkel dolgozunk. Legyen Y_t a *termelés* (GDP), I_t a *nettó beruházás* és C_t a *fogyasztás* volumene a t-edik időszakban. A készletfelhalmozást belefoglaljuk a beruházásba (tulajdonképpen felhalmozásra gondolunk), s zárt gazdaságot feltételezünk.

ELEMI MODELL

Volumenek

Zárt gazdaságban a három változó között egy azonosság áll fenn: termelés =beruházás+fogyasztás, azaz teljesül a
GDP azonosság

$$Y_t = I_t + C_t. \tag{2.1}$$

J. M. Clark 1917-ben vezette be a *beruházási akcelerátor*t, amely szerint minden időszakban a beruházás arányos az előző időszak termelésváltozásával. A szóban forgó egyenletet Hicks (1950)-ben kiegészítette az *autonóm beruházás*sal.
Teljes beruházás

$$I_t = I_t^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{2.2}$$

Keynes (1936) óta a fogyasztást gyakran az előző időszaki jövedelem (azaz termelés) lineáris függvényeként írják le, amelyet még egy autonóm taggal módosítanak.
Fogyasztási függvény

$$C_t = C_t^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{2.3}$$

ahol γ a *fogyasztási határhajlandóság*, $0 < \gamma < 1$; és $1/(1-\gamma)$ a híres *multiplikátor*.

Adott I^{A} és C^{A} pálya, adott β és γ együttható, valamint adott Y_{-1}, Y_{-2} kezdeti érték mellett az I, C és Y pálya egyértelműen meg van határozva.

Tegyük föl, hogy I^{A} és C^{A} szabályos abban az értelemben, hogy időben változatlan $\Gamma > 1$ *növekedési együttható*val bővül, azaz

$$I_t^{\mathrm{A}} = i^{\mathrm{A}}\Gamma^t \qquad \text{és} \qquad C_t^{\mathrm{A}} = c^{\mathrm{A}}\Gamma^t. \tag{2.4}$$

Ekkor megfelelő kezdeti feltételek mellett a C, I, valamint az Y pálya is szabályos – ugyanazzal a trenddel.

Relatív értékek

A (2.4) feltétel mellett ezeket a vizsgálatokat azonban egyszerűbb a *relatív rendszer*ben végezni, ahol az eredeti változókat és bizonyos paramétereket a növekedési trenddel elosztjuk.
Relatív változók

$$y_t = \frac{Y_t}{\Gamma^t}, \qquad i_t = \frac{I_t}{\Gamma^t} \qquad \text{és} \qquad c_t = \frac{C_t}{\Gamma^t}. \tag{2.5}$$

Relatív paraméterek

$$i^{\mathrm{A}} = \frac{I_t^{\mathrm{A}}}{\Gamma^t} \qquad \text{és} \qquad c^{\mathrm{A}} = \frac{C_t^{\mathrm{A}}}{\Gamma^t}. \tag{2.6}$$

A $\psi = 1/\Gamma$ jelölés bevezetése után már fölírhatjuk a *relatív egyenletek*et:

$$y_t = i_t + c_t, \tag{2.1$'$}$$

$$i_t = i^{\mathrm{A}} + \beta\psi(y_{t-1} - \psi y_{t-2}), \tag{2.2$'$}$$

$$c_t = c^{\mathrm{A}} + \gamma\psi y_{t-1}. \tag{2.3$'$}$$

Alapegyenlet-rendszer

Három egyenletünk van, három változóval. Érdemes azonban megszabadulni a nélkülözhető változóktól és a nélkülözhető egyenletektől. Két lehetőségünk van, hogy a szokatlan alakú egyenletrendszert szokásos alakra hozzuk: visszavezetni *a)* két elsőrendű többváltozós differenciaegyenletre, vagy *b)* egy másodrendű egyváltozós differenciaegyenletre. A másodikat választva, helyettesítsük be (2.2′)-t és (2.3′)-t (2.1′)-be, s rendezéssel eljutunk egy másodrendű, egyváltozós
*alapegyenletrendszer*hez:

$$y_t = i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}} + (\beta+\gamma)\psi y_{t-1} - \beta\psi^2 y_{t-2}, \qquad t = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \tag{2.7}$$

ahol y_{-2} és y_{-1} adott kezdeti értékek. Az y_t *alapváltozó* dinamikájának ismeretében a többi változó (i_t és c_t) dinamikája egyszerűen kiszámítható a (2.2′) és a (2.3′) egyenletből.

Két tételt mondunk ki: egyet a egyensúlyra, egyet a stabilitásra és oszcillációra.

2.1. tétel. *(Hicks, 1950.) Az elemi hicksi rendszer y^{o} egyensúlya létezik és egyértelmű:*

$$y^{\mathrm{o}} = \frac{i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}}}{1-\psi(\beta+\gamma)+\psi^2\beta}, \qquad \text{ahol} \qquad 1-\psi(\beta+\gamma)+\psi^2\beta > 0. \tag{2.8}$$

Az 1.9–1.11. tételek bonyolult osztályozása most eléggé leegyszerűsödik:

2.2. tétel. *(Hicks, 1950.) Az elemi hicksi rendszerben eltekintünk a növekedéstől: $\psi = 1$.*

a) A rendszer akkor és csak akkor oszcillál, ha

$$\gamma < 2\sqrt{\beta} - \beta. \tag{2.9}$$

b) A rendszer akkor és csak akkor stabil, ha

$$\beta < 1. \tag{2.10}$$

Megjegyzés. Valóságos körülmények között éves modellben $\beta \approx 0{,}5$ és $\gamma \approx 0{,}75$. Tehát oszcilláció és stabilitás empirikusan összeférhetetlen. A determinisztikus lineáris modell helyett vagy determinisztikus nemlineáris modellt kell vizsgálni (4.1. alfejezet) vagy sztochasztikus lineáris modellt (8. fejezet).

Bizonyítás. Az $y_t = y_0\lambda^t$ alapmegoldást behelyettesítve (2.7) homogén részébe, a $P(\lambda) = \lambda^2 - (\beta+\gamma)\lambda + \beta$ karakterisztikus polinomot kapjuk. Szétválasztjuk a valós és a komplex sajátértékek esetét. A diszkrimináns negativitása négyzetgyökvonás után valóban (2.9)-et adja. A stabilitásnál az 1.12. példára hivatkozhatunk. ∎

A következő feladat és példa segít elmélyíteni ismereteinket.

Mivel a gyakorlatban $\psi \approx 1$, $y^{\mathrm{o}} \approx (i^{\mathrm{A}}+c^{\mathrm{A}})/(1-\gamma) > 0$. A következő szimulációban $y^{\mathrm{o}} = 1$ és $\psi = 1$, ezért $i^{\mathrm{A}} + c^{\mathrm{A}} = 1-\gamma$.

2.1. feladat. Válasszunk olyan paraméterértékeket, amelyekre mind a négy eset megvalósul! Írjunk számítógépes programot a GDP-pályára, és futassuk le mind a négy esetre: $\psi = 1$ (nulla növekedés); $i^{\mathrm{A}} = 0$, $c^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$ (Blatt, 1983, 192. o.)!

2.1. példa. Hicks szabályozási modellje. Az 1.13. példa alapján a hicksi modell szabályozási modellként is felírható, ahol az autonóm beruházás a szabályozási változó.

ÖSSZETETT MODELL

Már Hicks (1950) is vizsgált olyan *összetett modell*t, amelyben a beruházási vagy a fogyasztási függvény osztott késleltetésen alapul.
Beruházási függvény osztott késleltetéssel

$$i_t = i^{\mathrm{A}} + \sum_{k>0} \beta_k \psi^k (y_{t-k} - \psi y_{t-k-1}). \tag{2.11}$$

Fogyasztási függvény osztott késleltetéssel

$$c_t = c^{\mathrm{A}} + \sum_{k>0} \psi^k \gamma_k y_{t-k}, \quad \gamma_k \geq 0; \quad \sum_{k>0} \psi^k \gamma_k < 1. \tag{2.12}$$

Ekkor az elemi modellben leírt osztályozásnál jóval több eset lehetséges, ez azonban kívül esik fejtegetésünk körén. A 4.2. alfejezetben azonban visszatérünk az öszszetett modell nemlineáris módosítására.

2.2.* A LINEÁRIS INDÍTÁS–BERUHÁZÁS MODELL

A modell verbális öszefoglalása

Ellentétben az előző modellel, a most tárgyalandó modell (Simonovits, 1988b) külföldön alig ismert, hiszen egy nemrég kimúlt szocialista gazdaságról szól, amelynek működése létezésekor sem keltett túl nagy figyelmet. Ismeretlensége miatt nagyobb teret kell szentelnünk a modell gazdasági értelmezésének, mint a könyv többi modelljénél.

Előre bocsátjuk, hogy az alapelvekben Kornai (1980), (1982), Kornai és Martos (szerk.) (1981b) módszertanát alkalmazzuk, és a részletekben Bauer (1978) ciklussémájának Lackó (1980) és (1989) dolgozatban leírt ökonometriai modelljét követjük. Alapgondolat: a tartós túlberuházási igények és döntések miatt tartós feszültségek keletkeznek (állapotvektor), s a döntések (szabályozási vektor) reagálnak a feszültségekre. A részletesebb ismertetéshez szükségünk lesz két fogalomra; a beruházási indításra és a beruházási elkötelezettségre: röviden indításra és elkötelezettségre.

*Indítás*nak (S) az adott évben elindított beruházási projektumok teljes költségelőirányzatát nevezzük, amely már Frisch (1933) modelljében kulcsszerepet kapott. *Elkötelezettség*en (K) az adott év végén még folyamatban lévő beruházások maradék költségelőirányzatát értjük. Jól ismert a beruházási ráfordítás fogalma, melyet hagyományosan *beruházás*nak (I) neveznek. Ha nem lenne *költségtúllépés*, akkor a három fogalom között egy azonosság állna fenn: az elkötelezettség változása azonos volna az indítás és a beruházás különbségével ($K_t = K_{t-1} + S_t - I_t$). Feltesszük, hogy a költségtúllépés egy éven belül teljes mértékben kiderül, arányos az indítással ($(\sigma_S - 1)S$), és hozzáadódik az elkötelezettség tiszta változásához.

Két feszültségváltozóval dolgozunk: a beruházási szféra belső- és külső feszültségével. Nyitott gazdaságban a beruházási folyamat *külső feszültség*e (a) a nettóimportnak (B) a GDP-hez (Y) viszonyított értéke ($b = B/Y$), levonva a minimális nettóimport-hányadot (b^*). Zárt gazdaságban a beruházási folyamat *külső feszültség*e (a) a maximális fogyasztási hányadból (c^*) levonva a fogyasztási hányadot ($c = C/Y$).

A továbbiakban a nyitott gazdasággal foglalkozunk. A beruházási folyamat *belső feszültség*e (e) az elkötelezettségi hányadnak ($k = K/Y$) az ésszerű érték (k^*) fölötti része. A külső feszültség (a) azért keletkezik, mert túl nagy a beruházások összege, a belső feszültség pedig azért jön létre, mert a beruházási ráfordításhoz képest nagy az indítási összeg.

Most rátérünk a feszültségekre való reagálás leírására. Bauer elméletének központi gondolata szerint *a)* adott a tervalku által felfújt *indítási igényhányad* (σ), *b)* az *indítási hányad* ($s = S/Y$) kisebb az indítási igényhányadnál, és az előző évi belső és külső feszültség csökkenő (nemnövekvő) függvénye. Szakítunk az indítás-beruházás kapcsolat hagyományos magyarázatával, amely a beruházást a korábbi indítások függvényeként írta le (lásd Frisch (1933), Kornai (1982)). Ehelyett Lackó (1980) megoldását követjük és egyszerűsítjük: *a)* adott az *autonóm beruházási hányad* (ι), és *b)* a beruházási hányad ($i = I/Y$) az autonóm beruházási hányadnál nagyobb, és az előző évi belső feszültségnek növekvő (nemcsökkenő) függvénye. Lineáris közelítésben a feszültségegyenletek mellett a reakciófüggvények is lineárisak. (Ne tévesszük össze az itteni autonóm beruházási hányadot hicksi párjával!) Feltesszük, hogy a (görög betűvel vagy speciálisan megkülönböztetett latin betűvel jelzett) együtthatók időben állandók. Speciálisan a GDP növekedési együtthatójának (Γ) a beruházási hányad ingadozásához viszonyított ingadozása a szocialista gazdaságban gyakorta sokkal kisebb, mint a tőkés gazdaságban: a 2.1. alfejezetben említett akcelerátor-elv itt nem működik, ezért Γ-t állandónak vesszük.

Mivel a GDP növekedési tényezője időben állandó, $\Gamma = Y_t/Y_{t-1}$, most nem Γ^t-nel, hanem $Y_t = Y_0\Gamma^t$-nel osztva kapjuk a relatív változóinkat.

A modell egyenletei

Fölírjuk a modell egyenleteit.

Elkötelezettségi hányad

$$k_t = \psi k_{t-1} + \sigma_S s_t - i_t, \qquad 0 < \psi = 1/\Gamma < 1 \qquad \text{és} \qquad \sigma_S \geq 1. \tag{2.13}$$

Belső feszültség

$$e_t = k_t - k^*, \quad k^* > 0. \tag{2.14}$$

Nettóimport-hányad

$$b_t = -\beta + \beta_i i_t, \quad \beta > 0, \quad \beta_i \geq 1. \tag{2.15}$$

Külső feszültség

$$a_t = b_t - b^*. \tag{2.16}$$

Indítási hányad

$$s_t = \sigma - \sigma_e e_{t-1} - \sigma_a a_{t-1}, \quad \sigma,\sigma_e,\sigma_a > 0, \tag{2.17}$$

ahol σ_a és σ_e rendre a külső és belső feszültség $\to$ indítási reakcióegyüttható.
Beruházási hányad

$$i_t = \iota + \iota_e e_{t-1}, \quad \iota,\iota_e > 0, \tag{2.18}$$

ahol ι_e a belső feszültség $\to$ beruházás reakcióegyüttható.

Megjegyzések. 1. A modell hat egyenletből áll, hat változó szerepel benne, és két kezdeti érték határozza meg a rendszer pályáját: k_{-1} és b_{-1}. A modell *rekurzív.* Valóban, (k_{-1},b_{-1}) (2.14) és (2.16) segítségével meghatározza az (e_{-1},a_{-1}) feszültségpárt, amelyet behelyettesítve (2.17)–(2.18)-ba adódik az (s_0,i_0) döntéspár. Innen már (2.13)-ból adódik k_0 és (2.15)-ből b_0.

2. Az 1.4. alfejezet szabályozási rendszerével, (1.34)-gyel és (1.39)-cel összevetve, látjuk, hogy az állapotvektor $x = (k,b)$, a szabályozási vektor $u = (s,i)$ és a reakcióegyütthatók mátrixa

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_e & \sigma_a \\ -\iota_e & 0 \end{pmatrix}.$$

Az alapegyenlet-rendszer

A hat egyenletből és hat változóból álló modell vizsgálatához méginkább szükség van az *alapegyenletek*re, amelyek a feszültségváltozók dinamikáját a többi változótól függetlenül írják le. Levezetés nélkül közöljük az
*alapegyenlet-rendszer*t.

$$e_t = \varepsilon + \varepsilon_e e_{t-1} - \varepsilon_a a_{t-1}, \tag{2.19}$$

$$a_t = \alpha + \alpha_e e_{t-1}, \tag{2.20}$$

ahol (e_{-1},a_{-1}) adott, és

$$\varepsilon = \sigma_S\sigma - \iota - (1-\psi)k^*, \quad \varepsilon_e = \psi - \sigma_S\sigma_e - \iota_e, \quad \varepsilon_a = \sigma_S\sigma_a, \tag{2.21}$$

$$\alpha = -\beta + \beta_i\iota - b^*, \quad \alpha_e = \beta_i\iota_e. \tag{2.22}$$

A (2.19)–(2.20) alapegyenlet-rendszer két elsőrendű, kétváltozós differenciaegyenletből áll, s a rendszer rekurzív; adott (e_{-1},a_{-1}) esetén (e_t,a_t) minden t-re egyértelműen meg van határozva.

A (2.13)–(2.18) eredeti egyenletrendszer ekvivalens a (2.19)–(2.20) alapegyenlet-rendszerrel.

Ezzel a modell ismertetését befejeztük.

Normák

Ebben a pontban az imént bevezetett modell stacionárius állapotát tanulmányozzuk, melyet gyakran normál állapotnak nevezünk majd. Az 1.1. alfejezetben meghatároztuk egy általános rendszer fixpontját. Most egy konkrét rendszerre kell alkalmaznunk az ott elmondottakat. Most is igaz, hogy a hatismeretlenes hategyenletes algebrai egyenletrendszer gyöke helyett elegendő a kétismeretlenes kétegyenletes algebrai alapegyenletrendszer gyökét megkeresni. A többi változó stacionárius értéke is kifejezhető a stacionárius feszültségek függvényében:

$$k^{\mathrm{o}} = e^{\mathrm{o}} + k^*, \qquad b^{\mathrm{o}} = a^{\mathrm{o}} + b^*, \tag{2.23}$$

$$i^{\mathrm{o}} = \frac{\beta + b^{\mathrm{o}}}{\beta_i} = \iota + \iota_e e^{\mathrm{o}}, \quad s^{\mathrm{o}} = \frac{i^{\mathrm{o}} + (1-\psi)k^{\mathrm{o}}}{\sigma_s} = \sigma - \sigma_e e^{\mathrm{o}} - \sigma_a a^{\mathrm{o}}. \tag{2.24}$$

Befejezve az előkészítést, kimondható a normál állapot létezése és egyértelműsége.

2.3. tétel. *A (2.19)–(2.20) alaprendszer normál állapota létezik és egyértelmű. Képlete:*

$$e^{\mathrm{o}} = \frac{1 - \varepsilon_e + \alpha_e \varepsilon_a}{\pi} \qquad \text{és} \qquad a^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha_e \varepsilon + (1-\varepsilon_e)\alpha}{\pi}, \tag{2.25}$$

ahol

$$\pi = 1 - \varepsilon_e + \alpha_e \varepsilon_a = 1 - \psi + \sigma_S \sigma_e + (1 + \beta_i \sigma_S \sigma_a)\iota_e. \tag{2.26}$$

Megjegyzés. Korábbi feltevések szerint $\pi > 0$, tehát (2.25) értelmes.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy létezik egy (e^{o},a^{o}) normál feszültség vektor. Ekkor az említett vektor kielégíti a (2.19)–(2.20) alapegyenletrendszert. Új egyenletrendszerünket rendezve az $(1-\varepsilon_e)e^{\mathrm{o}} + \varepsilon_a a^{\mathrm{o}} = \varepsilon$ és $-\alpha_e e^{\mathrm{o}} + a^{\mathrm{o}} = \alpha$ egyenletrendszert kapjuk. Fejezzük ki a^{o}-at a második egyenletből, és helyettesítsük be az elsőbe: ekkor $(1 - \varepsilon_e + \varepsilon_a \alpha_e)e^{\mathrm{o}} = \varepsilon - \varepsilon_a \alpha$, azaz (2.25a)–(2.26). Hasonlóan igazolható a^{o} képlete. ∎

A norma szerinti szabályozás

A normál állapotot meghatározván rátérhetünk a nem stacionárius pályák vizsgálatára. Fölidézzük az 1.2. alfejezetben bevezetett mennyiségeket, a tényleges- és a stacionárius értékek *eltérését*, de már a gazdasági modellre alkalmazva:

$$e_t^{\mathrm{d}} = e_t - e^{\mathrm{o}}, \quad a_t^{\mathrm{d}} = a_t - a^{\mathrm{o}}, \quad s_t^{\mathrm{d}} = s_t - s^{\mathrm{o}} \qquad \text{és} \qquad i_t^{\mathrm{d}} = i_t - i^{\mathrm{o}}. \tag{2.27}$$

Helyettesítsük be (2.24)-et és (2.27)-et a (2.17)–(2.18) szabályozási egyenletekbe:

$$s_t^{\mathrm{d}} = -\sigma_e e_{t-1}^{\mathrm{d}} - \sigma_a a_{t-1}^{\mathrm{d}} \qquad \text{és} \qquad i_t^{\mathrm{d}} = \iota_e e_{t-1}^{\mathrm{d}}. \tag{2.28}$$

A modell *norma szerinti szabályozásá*t a következőképp lehet szavakban kifejezni: az indítási- és a beruházási hányad stacionárius értéktől való eltérése egyenlő a késleltetett belső és a külső feszültség stacionárius értéktől való eltérésének pozitív, illetve negatív súlyokkal képzett összegével (Kornai és Martos, szerk. 1981b). A stacionárius értékeket *normák*nak nevezzük. Egyébként Lackó (1980) szabályozási egyenletei is ilyen alakban vannak megadva. Az 1.2. alfejezetben elmondottak értelmében az eltérésfeszültségek kielégítik azt a homogén alaprendszert, amely az inhomogén (2.19)–(2.20) alaprendszerből az additív állandók elhagyásával keletkezik:

$$e_t^{\mathrm{d}} = \varepsilon_e e_{t-1}^{\mathrm{d}} - \varepsilon_a a_{t-1}^{\mathrm{d}}, \tag{2.29}$$

$$a_t^{\mathrm{d}} = \alpha_e e_{t-1}^{\mathrm{d}}, \tag{2.30}$$

ahol $(e_{-1}^{\mathrm{d}}, a_{-1}^{\mathrm{d}})$ adott.

Az 1.3. alfejezetben elmondottak értelmében az eltérésváltozók dinamikájának kvalitatív tulajdonságait a (2.29)–(2.30) együttható-mátrixának $P(\lambda) = \lambda^2 - \omega\lambda + \vartheta$ karakterisztikus polinomja határozza meg, amelynek ω és ϑ együtthatója az alaprendszer paramétereinek a következő függvénye:

$$\omega = \varepsilon_e \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \varepsilon_a \alpha_e. \tag{2.31}$$

A (2.21)–(2.22) jelölések értelmében ω és ϑ kifejezhető az eredeti paraméterek függvényeként:

$$\omega = \psi - \sigma_S \sigma_e - \iota_e \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \beta_i \iota_e \sigma_S \sigma_a. \tag{2.32}$$

Megemlítjük, hogy (2.26) és (2.31) szerint $\pi = 1 - \omega + \vartheta$.

A pályák osztályozása

Az 1.3. alfejezetben definiált fogalmak most gazdasági köntöst öltenek.

2.2. példa. Három ábrán három fajta rendszer látható: (i) szabályosan ciklikus, (ii) elfajultan oszcilláló stabil (amely majdnem ciklikus) és (iii) oszcillációmentes stabil rendszer. Mindhárom rendszernek azonosak a következő paraméterei: $\beta_i = 1$, $\beta = 0{,}2$; $b^* = 0$; $\psi = 1/1{,}06 = 0{,}943$, $k^* = 0{,}4$; $\iota = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}4$, $\sigma_S = 1{,}2$. Különböznek viszont a reakcióegyütthatók: (i) $\iota_e = 0{,}4$; $\sigma_e = 0{,}453$; $\sigma_a = 2{,}083$; (ii) $\iota_e = 0{,}3$; $\sigma_e = 1{,}4$; $\sigma_a = 0{,}2$; (iii) $\iota_e = 0{,}3$; $\sigma_e = 0{,}5$; $\sigma_a = 0$.

Megjegyzés. A 2.2–2.4. ábra a fázissíkban ábrázolja a pályát. A folytonosítást kihasználva, a 2.2. ábra (s később a 2.5. ábra) *negyedévi* felbontásban ábrázolja a szabályos oszcillációt. A 2.3. és a 2.4. ábra elfajult oszcillációt, illetve oszcillációmentes pályát ábrázol, szükségképpen éves bontásban.

Szabályos oszcilláció

Közgazdaságilag a szabályos oszcilláció a legfontosabb. A rá vonatkozó 1.11. tételt egyszerűen kimásoljuk az 1.3. alfejezetből:

2.4. tétel. *a) A (2.29)–(2.30) kétváltozós lineáris alaprendszer akkor és csak akkor szabályosan oszcilláló, ha teljesül*

$$\omega^2 < 4\vartheta. \tag{2.33}$$

b) Szabályos oszcilláció esetén a folytonosított rendszer P periódusa és Φ csillapítási tényezője független a kezdeti értékektől:

$$P = \frac{2\pi}{\varphi}, \qquad \text{ahol} \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{\omega}{2\sqrt{\vartheta}}\right) \tag{2.34}$$

és

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}. \tag{2.35}$$

c) A szabályosan oszcilláló rendszer akkor és csak akkor ciklikus a folytonos időben, ha (2.33) mellett teljesül

$$\vartheta = 1. \tag{2.36}$$

Megjegyzések. 1. Behelyettesítve a modell eredeti paramétereit a (2.33)–(2.36) egyenletekbe, a szigorú ciklusnak az eredeti paraméterekkel kifejezett feltételeit kapjuk:

$$4\sigma_S\beta_i\iota_e\sigma_a > (\psi - \iota_e - \sigma_S\sigma_e)^2, \tag{2.33'}$$

$$\sigma_S\beta_i\iota_e\sigma_a = 1. \tag{2.36'}$$

Új összefüggéseink szerint

$$\frac{1}{\sigma_S\beta_i\iota_e} = \sigma_a > \frac{(\psi - \iota_e - \sigma_S\sigma_e)^2}{4\sigma_S\beta_i\iota_e}.$$

Adott ι_e és σ_e esetén az egyenlőség-egyenlőtlenség párnak akkor és csak akkor van megoldása, ha $\iota_e + \sigma_S\sigma_e < 2 + \psi$. Tekintve, hogy σ_S és ψ 1 körüli számok, az utolsó feltétel mérsékelten megszorító.

2. Az imént kimondott tétel alapján könnyen tehetünk hasonló megállapításokat a nem vizsgált esetekre. Például a szabályos oszcilláció stabil, ha $\vartheta < 1$; instabil, ha $\vartheta > 1$.

Oszcillációmentes szabályozásnál (2.33) nem teljesül és $\omega > 0$; míg elfajult oszcillációnál (2.33) nem teljesül és $\omega \leq 0$.

3. Feltételeink a következő speciális esetben különösen szemléletesek: $\sigma_a = 0$, amikoris $\omega = 0$, tehát a (2.33) szabályos oszcilláció-feltétel nem teljesül; a rendszer vagy oszcilláció-mentes (ha $\vartheta > 0$), vagy elfajultan oszcillál ($\vartheta < 0$).

Feszültségcsökkentés vs stabilizálás

Felfogásunk szerint a reakcióknak az az egyik szerepük, hogy fokozásukkal csökkenjenek a normál feszültségek. Ezirányú várakozásunk általában igazolódik, de van egy fontos kivétel: a normál külső feszültség, amely a belső feszültség → beruházás reakcióegyütthatónak (ι_e) növekvő függvénye.

Belátható, hogy reális paraméterértékek esetén a feszültségenyhítés keresztezi az anticiklikus politika egyik célját: az oszcilláció fölszámolását. Mennyire lehet összehangolni a normál feszültségek enyhítését az oszcilláció csillapítási tényezőjének a növelésével? A választ megadja a

2.5. tétel. *Szabályos oszcillációnál ellentmondás van a két cél (a feszültségenyhítés és a stabilizálás) között a belső feszültség → beruházás (ι_e) és a külső feszültség → indítás (σ_a) reakciónál, de nincs ellentét a belső feszültség → indítás (σ_e) reakciónál: ez utóbbi erősítésekor mindkét normál feszültség csökken, míg a csillapítási tényező változatlan marad.*

Megjegyzés. A 2.5. tétel alapján a következő anticiklikus politika lenne javasolható: induljunk ki olyan rendszerből, amely ugyan szabályosan oszcillál, de kilengései viszonylag gyorsan csillapodnak. (2.32) és (2.35) értelmében az utóbbihoz az kell, hogy $\beta_i\sigma_S\sigma_a\iota_e$ viszonylag kicsi legyen. A normál feszültségekkel nem kell törődni, mert azok σ_e növelésével anélkül csökkenthetők, hogy befolyásolnánk a csillapítás sebességét. Természetesen vigyáznunk kell arra, hogy a rendszer ne hagyja el a működőképes szabályos oszcillációk (itt nem vizsgált) tartományát: a reakciók ne legyenek túl erősek.

2.3. példa. Sikeres anticiklikus politika. Megtartva a 2.1. példában szereplő rendszerek közös paraméterértékeit, új reakcióegyütthatókat mutatunk be: $\iota_e = 0{,}4$; $\sigma_e = 1{,}1$; $\sigma_a = 0{,}4$. Ekkor $\varepsilon = 0{,}257$; $\Phi = 2{,}282$; $e^{\mathrm{o}} = 0{,}131$ és $a^{\mathrm{o}} = 0{,}052$.

Megjegyzések. 1. A 2.3. példa azt mutatja, hogy elvben, legalábbis modellünk világában, a normál feszültségek enyhítése és a beruházási ingadozások gyors csillapítása lehetséges még irreálisan nagy indítási igényhányadoknál és minimális autonóm beruházási hányadoknál is. Óvatosan fogadjuk azonban az ellenpéldát! Jó lenne tudni, hogy milyen feltevések bevezetésével zárhatjuk ki a gyorsan stabilizálódó, valószínűleg csak modellvilágunkban létező rendszereket! Ez azonban már egy további vizsgálat feladata.

2. Phillips (1954) hasonló ellentmondást talált makroszabályozási modelljében (lásd 6.2. alfejezet).

Speciális modellek

Simonovits (1987) és (1988a) rendre a jelen modell következő speciális eseteit tanulmányozta.

Egyszerű stop-go ciklus

Az indítást és az elkötelezettséget kihagyjuk, és (2.18) helyett a következő beruházási egyenletet feltételezzük:

$$i_t = \iota^* - \iota_a a_{t-1}, \quad \iota^*,\iota_a > 0. \tag{2.18*}$$

2.2. feladat. Elemezzük az *egyszerű stop-go* ciklust!

Összetett stop-go ciklus
Az indítást és az elkötelezettséget kihagyjuk, és (2.18*) helyett a következő valósághűbb beruházási egyenletet feltételezzük:

$$i_t = \iota^* - \iota_a^* a_{t-2}, \quad i^*, \iota_a^* > 0. \tag{2.18**}$$

2.3. feladat. *a)* Elemezzük az *összetett stop-go ciklust*! *b)* Mutassuk meg, hogy az indítás-beruházás modell az összetett stop-go modellre egyszerűsödik, ha $\vartheta = 0$, azaz $P = 4$!

Rejtett ciklus
A beruházási hányad rögzített: $i_t = i^{\text{o}}$, és (2.17) helyett a következő indítási egyenlet áll:

$$s_t = \sigma^* - \sigma_e e_{t-1}, \quad \sigma^*, \sigma_e > 0. \tag{2.17*}$$

2.4. feladat. Elemezzük a *rejtett ciklus*t!

Adósság

Tegyük föl, hogy a nettóimport hányad helyett a külső adósságállomány határozza meg a külső feszültséget.

2.5. feladat. Írjuk föl a módosított egyenleteket és elemezzük az új modellt!

2.3. LINEÁRIS KÉSZLETJELZÉSES MODELLPÁR

Ebben az alfejezetben a többszektoros gazdaság készletjelzéses szabályozásának két lineáris modelljét ismertetjük. Az egyszektoros gazdaságra vonatkozóan Metzler (1941) foglalkozott a kérdéssel. A többszektoros gazdaság vizsgálatát Kornai és Martos (1971) kezdeményezte, s az általuk szerkesztett 1981-es kötetben számos cikk foglalkozik a témával. Később Martos (1984) és (1990) jutott letisztultabb eredményekhez.

OUTPUTKÉSZLET-JELZÉSES SZABÁLYOZÁS

A modell

Egy n-szektoros gazdaságból indulunk ki, ahol a szektorok közti kapcsolatokat egy készletekkel bővített nyílt Leontief-modell írja le (Bródy, 1969). Ellentétben a hagyományos készletszabályozási modellekkel, ebben a modellben (és a modellcsalád többi modelljében) azt akarjuk vizsgálni, miképp működhet egy egész gazdaság *decentralizált készletjelzések* alapján. Egyszerűen szólva azt tételezzük föl, hogy a termelők a termelésüket aszerint növelik vagy csökkentik egy kívülről adott normál értékhez képest, hogy a saját outputkészletük kisebb-e vagy sem a normálisnál. Az éppen időre termelést (angol rövidítése: JIT) modellezve, ebben a modellben nincsenek inputkészletek, (vö. Martos, 1990, a P-modell: 149. o. és az SM-modell: 186. o.).

A jelölési egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a gazdaság hosszú távon nem nő és nem csökken. Legyen a_{ij} a j-edik szektor egységnyi termeléséhez szükséges anyagigény az i-edik szektortól, legyen rendre a t-edik időszakban $z_{i,t}$ és $y_{i,t}$ az i-edik szektor *záró outputkészlete* és *kibocsátása*, valamint c_i a végső fogyasztás az i-edik szektor termékéből. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: A, z_t, y_t és c. Szokás szerint föltesszük, hogy A nemnegatív elemű, irreducíbilis mátrix, melynek spektrálsugara kisebb, mint 1 : $\rho(A) < 1$. Megfelelő mértékegységválasztással biztosítható, hogy $\mathbf{1}^\mathbf{T} A < \mathbf{1}^\mathbf{T}$ (A.9. tétel *b)* következménye).

A modell dinamikája egy egyszerű azonosságon alapul:

készletváltozás = termelés – termelői fogyasztások összege – végső fogyasztás.

A termelői fogyasztás arányos a termeléssel, a végső fogyasztás adott. A modellt egy lineáris decentralizált szabályozási egyenlettel zárjuk le:

az i-edik szektor termelése = kapacitás – reakcióegyüttható $\times$ saját outputkészlete.

A modell egyenletei

Fölírjuk a modell egyenleteit.
Outputkészlet-változás

$$z_t = z_{t-1} + (I - A)y_t - c. \tag{2.37}$$

Decentralizált termelésszabályozás

$$y_t = y^* - \langle d \rangle z_{t-1}, \tag{2.38}$$

ahol $\langle d \rangle = \langle d_i \rangle > 0$ egy diagonális mátrix.

(2.38)-at behelyettesítve (2.37)-be, adódik az
alapegyenletrendszer

$$z_t = (I - \langle d \rangle + A\langle d \rangle)z_{t-1} + (I - A)y^* - c. \tag{2.39}$$

Normál állapot

Mielőtt elemeznénk az alapegyenletrendszer dinamikáját, közvetlenül tanulmányozzuk a normál állapot tulajdonságait. Mindenekelőtt egy feltevéssel élünk. A teljes kapacitás képes fedezni a végső fogyasztást:

$$y^* > (I - A)^{-1}c. \tag{2.40}$$

2.6. tétel. *Megfelelő kapacitások esetén [(2.40)] az outputkészlet-jelzéses rendszernek létezik egyetlen egy pozitív normál kibocsátása és készlete:*

$$y^o = (I - A)^{-1}c \qquad \text{és} \qquad z^o = \langle d \rangle^{-1}[y^* - (I - A)^{-1}c]. \tag{2.41}$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be a $z_t = z_{t-1} = z^o$ és az $y_t = y^o$ összefüggést a (2.37)–(2.38) összefüggéspárba, ahonnan helyettesítéssel adódik (2.41). $\rho(A) < 1$, A.7e. tétel és $c > 0$ folytán $y^o > 0$ és (2.40)–(2.41) értelmében $z^o > 0$. ∎

Stabilitás és oszcillációmentesség

Ha $x \to z$, $u \to y$, $M \to A$, $w \to c$ és $k \to d$ megfeleltetéssel élünk, akkor közvetlenül alkalmazhatjuk az 1.4. alfejezetben nyert eredményeket: az 1.16. tételt. Szükségünk lesz a következő fogalomra.
visszacsatolás csillapított:

$$0 < d \le \mathbf{1}. \tag{2.42}$$

2.7. tétel. *Tegyük föl, hogy csillapított visszacsatolás működik: (2.42). Ekkor*
a) Az outputkészlet-jelzéses szabályozás stabil.
b) A maximális csillapítási tényező a $d = \mathbf{1}$ *esetben valósul meg, értéke*

$$\Phi_1 = \frac{1}{\rho(A)}.$$

c) Az outputkészlet-jelzéses szabályozás tipikusan (aszimptotikusan) oszcillációmentes.

Megjegyzések. 1. Ha túllépünk a $0 < d \le \mathbf{1}$ korláton, akkor általában tovább gyorsíthatjuk a szabályozás konvergenciáját.

2. Atkinson (1969) rámutatott arra, hogy a közgazdasági szakirodalom általában elhanyagolja a csillapítási tényező kvantitatív kérdését, s megelégszik a stabilitás kvalitatív megállapításával. Modellünk bíztató, hiszen a konvergencia-sebesség megfelelően nagy.

3. Vegyük észre, hogy a stabil készletjelzéses szabályozás hosszú távon elvezet a stacionárius készletvektorhoz. Előzetesen z^{o} értéke csak centralizált számítással határozható meg.

4. Kornai és Martos (1971) eredetileg egy folytonos idejű és növekvő gazdasági modellel dolgoztak. A készletjelzés mellett figyelembe vették a termelői és a végső fogyasztás növekedését, s ezzel elrontották a szabályozás decentralizáltságát. A Kornai és Simonovits (1975) és (1981) cikkben már diszkrét idejű modell szerepelt, s a szabályozás egyidejű, ún. *on-line* decentralizáltsága a normaképzés időben előzetes, ún. *off-line* centralizáltsága árán valósult meg: (2.41) mellett

$$y_t - y^{\text{o}} = -\langle d\rangle(z_{t-1} - z^{\text{o}}) \tag{2.38$'$}$$

szerepelt. Martos (1984) és (1990) visszatért a növekedésmentes gazdasághoz, és a jelen modell gondolatát megelőlegezve, megalkotta a teljesen (on-line és off-line) decentralizált készletszabályozás modelljét.

5. Figyelemre méltó, hogy Lovell (1962) és Bródy (1973) az outputkészlet-jelzéses szabályozáshoz hasonló, de eladási várakozásokon (lásd 2.4. alfejezet), illetve árszabályozáson (lásd 6.3. alfejezet) alapuló modellt elemzett. Az első készletjelzéses modell Metzler (1941) nevéhez fűződik.

6. A közgazdaságelmélet nyelvén szólva, ha az (1.40)–(1.41) decentralizált mechanizmus stabil, akkor a decentralizált szabályozás információval takarékoskodva eljuttathatja a rendszert az egyensúlyba – anélkül, hogy egy központba gyűjtené össze az összes információt. Ez a párhuzam jellemezte a szocializmus racionalizálhatóságában hívők és

ellenfeleik közti vitát (Lange és von Mises, lásd Hayek, szerk. 1935). Ma, a szocializmus világtörténelmi bukásakor már megállapíthatjuk, hogy a *piaci szocializmus*nak nevezett elméleti megközelítés – minden elméleti és gyakorlati érdeme ellenére –, nem jutott el a dolog lényegéhez, Misesnek volt igaza (Kornai, 1993, 498. o.).

*INPUT- ÉS OUTPUTKÉSZLET-JELZÉSES SZABÁLYOZÁS**

A modell

Jól ismert, hogy – ellentétben a tőkés gazdasággal –, a szocialista gazdaságban az eddig vizsgált output készleteknél sokkal jelentékenyebbek voltak az inputkészletek (Kornai és Martos, szerk. 1981b és Chikán et al., 1978). Ez indokolta, hogy a modellcsalád többi tagjában az n db outputkészlet mellett szerepelt a maximálisan n^2 db inputkészlet, s az ezzel járó beszerzési döntések. Ekkor a modell dimenziója maximálisan $n+n^2$-re ugrik, de a modell reálisabbá válik. (Kellően dezaggregált modellnél számos szektorpárnál j közvetlenül független i-től: $a_{ij}=0$. Ekkor $y_{ij}=z_{ij}=0$, tehát a dimenziószám jóval kisebb, mint a fentebb jelzett maximális érték.) Érdemes röviden vázolni a bővített modell szerkezetét és egyenleteit:

Legyen $z_{i,j,t}$ és $y_{i,j,t}$ rendre a j-edik szektor i-edik termékből való *záró inputkészlet*e és *vétel*e. A megfelelő mátrixok és vektorok jele: Z_t és Y_t. A bővített modell dinamikája két egyszerű azonosságtípuson alapul:

outputkészletváltozás = termelés – felhasználói vételek összege – végső fogyasztás, valamint

inputkészletváltozás = felhasználói vétel – termelői fogyasztás.

A termelői fogyasztás arányos a termeléssel, a végső fogyasztás adott. A modellt két lineáris decentralizált szabályozási egyenletrendszerrel zárjuk le:

az i-edik szektor termelése = kapacitás – reakcióegyüttható × saját outputkészlete és

a j-edik szektor vétele az i-edik szektor termeléséből = kapacitás – reakcióegyüttható × saját inputkészlete.

A modell egyenletei

Fölírjuk a bővített modell egyenleteit.
Outputkészlet-változás

$$z_t = z_{t-1} + y_t - Y_t\mathbf{1} - c. \tag{2.43}$$

Inputputkészlet-változás

$$Z_t = Z_{t-1} + Y_t - A\langle y_t\rangle. \tag{2.44}$$

Decentralizált termelésszabályozás

$$y_t = y^* - \langle d\rangle z_{t-1}. \tag{2.45}$$

Decentralizált vételszabályozás

$$Y_t = Y^* - D \times Z_{t-1}, \tag{2.46}$$

ahol $D > 0$ egy $n \times n$-es mátrix, és $\times$ elemenkénti szorzást jelöl.

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a szektorok közötti decentralizáláson túl a szektorokon belül is decentralizált a szabályozás: az i-edik termelő kizárólag a saját outputkészletét figyeli meg, s az alapján dönt termeléséről; a j-edik termék i-edik beszerzője kizárólag saját inputkészletét figyeli meg, s ez alapján dönt beszerzéséről.

Normál állapot és stabilitás

A normál állapot elemzése semmi újat nem nyújt, ezért ezt feladatnak hagyjuk.

2.6. feladat. A 2.6. tétel alapján határozzuk meg a bővített rendszer normálállapotát!

Jelölje $\mathbf{11^T}$ azt a mátrixot, amely az összegző $\mathbf{1}$ oszlopvektor és az $\mathbf{1^T}$ sorvektor diadikus szorzata, tehát minden eleme 1. 2.45)–(2.46)-ot behelyettesítve (2.43)–(2.44)-be, rendezéssel adódik a
bővített alapegyenletrendszer

$$z_t = (I - \langle d \rangle) z_{t-1} + (D \times Z_{t-1})\mathbf{1} + y^* - Y^*\mathbf{1}, \tag{2.47}$$

$$Z_t = A \langle \langle d \rangle z_{t-1} \rangle + (\mathbf{11^T} - D) \times Z_{t-1} + Y^* - A\langle y^* \rangle. \tag{2.48}$$

(2.42) mellett korlátozni kell a vételi döntések reakcióegyütthatóit is:

$$0 < d \le \mathbf{1} \qquad \text{és} \qquad 0 < D \le \mathbf{11^T}. \tag{2.49}$$

(Az $n \times n$-es $\mathbf{11^T}$ mátrixnak minden eleme 1.) Belátható, hogy a (2.47)–(2.48) rendszer együttható mátrixa 2–ciklikus, ezért az 1.17. tétel szerint igaz a

2.8. tétel. *(Kornai és Simonovits, 1981, 61. tétel.) Tegyük föl, hogy a bővített modellben csillapított visszacsatolás működik: (2.49).*
a) Az input- és outputkészletjelzéses szabályozás stabil.
b) A maximális csillapítási tényező a $d = \mathbf{1}$, $D = \mathbf{11^T}$ esetben valósul meg, értéke

$$\Phi_{\mathbf{1},\mathbf{11^T}} = \frac{1}{\sqrt{\rho(A)}}.$$

c) Az input- és outputkészlet-szabályozás tipikusan (aszimptotikusan) oszcillációmentes.
d) A maximális csillapítási tényező tetszőleges visszacsatolás esetén is a b) pontbeli érték.

Megjegyzés. Érdemes egy pillanatra összehasonlítani az egyszerű modell feltételes és a bővített modell feltétel nélküli optimális csillapítási tényezőjét (2.7. és 2.8. tétel). Mivel $0 < \rho(A) < 1$, $\rho(A) < \sqrt{\rho(A)}$, azaz $1/\rho(A) > 1/\sqrt{\rho(A)}$.

Tehát az egyszerű modell aszimptotikusan gyorsabban stabilizál, mint a bővített: a kezdőeltérést fele olyan rövid idő alatt csökkenti adott relatív mértékben, mint társa. Elhamarkodott lenne azonban az egyszerűbb modellt a gyorsabb alkalmazkodás miatt jobbnak kikiáltani. Például az egyszerűbb modell várakozási változata (Lovell, 1962) már nem decentralizált, míg az összetett modell várakozási változata (Simonovits, 1979) decentralizált, lásd a következő alfejezetet.

2.4.* DECENTRALIZÁLT SZABÁLYOZÁS VÁRAKOZÁSOKKAL

Az előző alfejezetben már utaltunk az eladási várakozások szerepére a készletjelzéses szabályozásban. Most visszatérünk az 1.4. alfejezetben bevezetett általános decentralizált lineáris szabályozáshoz, s erre alkalmazzuk a várakozásokat. Absztrakt eredményeink értelemszerűen érvényesek a konkrét közgazdasági modellekre is. Röviden megismételjük az 1.4. alfejezet idevágó részeit.

Decentralizált szabályozási rendszerek

Legyen $x \in \mathbf{R}^n$ az *állapot*vektor és $u \in \mathbf{R}^n$ a *szabályozási* vektor. Legyen I és B rendre az $n \times n$-es *rendszermátrix* és az $n \times n$-es *bemeneti* mátrix, p egy n-dimenziós vektor most 0. Fölírhatjuk egy diszkrét idejű állandó együtthatós lineáris rendszer *állapotegyenlet*ét:

(2.50) $$x_t = x_{t-1} + Bu_t, \quad t = 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \qquad \text{kezdeti} \quad \text{állapot}.$$

Szükségünk lesz (2.50) koordinátás alakjára:

$$x_{i,t} = x_{i,t-1} + b_{ii}u_{i,t} + \sum_{j \neq i} b_{ij}u_{j,t}, \quad i = 1, \ \ldots, n.$$

Normáljuk a sajáthatásokat: $b_{ii} = 1$, és bevezetjük a *keresztthatások nemnegatív mátrix*át:

(2.51) $$N = I - B \geq 0$$

Föltesszük, hogy e mátrix stabil: $\rho(N) < 1$. N segítségével (2.50) a következő alakot ölti:

(2.52) $$x_t = x_{t-1} + u_t - Nu_t.$$

Bevezetve a $v_t = Nu_t$ *hatásvektor*t, (2.52) helyett

(2.53) $$x_t = x_{t-1} + u_t - v_t$$

írható. Ezzel az i-edik állapotváltozó változását két részre bontottuk: a hozzárendelt szabályozási változó és a hatás különbségére.

Várakozások

A t-edik időszakban az i-edik szabályozó ismeri saját szabályozási változóját, de csak elképzelése van az őt érő hatásról. Ezt az elképzelést *várakozás*nak nevezzük és $v^{\mathrm{e}}_{i,t}$-vel jelöljük. Ebben és a további fejezetekben kétféle várakozással foglalkozunk: a racionális várakozásokkal (tökéletes előrelátással) és a naiv várakozásokkal.
Racionális várakozás esetén az előrejelzés mindig egyenlő a tényleges hatással:

(2.54) $$v^{\mathrm{e}}_t = v_t.$$

Naiv várakozások esetén az előrejelzés mindig egyenlő az előző időszak tényleges hatásával:

(2.55) $$v^{\mathrm{e}}_t = v_{t-1}.$$

Figyeljük meg, hogy a t-edik időszak végén az i-edik szabályozó ismeri $v_{i,t}$-t $x_{i,t} = x_{i,t-1} + u_{i,t} - v_{i,t}$-ből, azaz a naiv várakozás összhangban van a decentralizálással. Mivel $v_{i,t}$ az időszak elején még nem ismert, a racionális várakozás valamilyen gyors tanulási folyamatot feltételez, amelyet általában nem modelleznek (ennek kritikáját lásd például Grandmont, 1998).

Megjegyzés. Számos dolgozat vizsgálja a naiv várakozások következő általánosítását.

Adaptív várakozások esetén az előrejelzés mindig egyenlő az előző időszak tényleges hatásának és előrejelzésének súlyozott átlagával:

$$v_t^{\mathrm{e}} = \langle a \rangle v_{t-1} + \langle \mathbf{1} - a \rangle v_{t-1}^{\mathrm{e}}, \qquad \text{ahol} \qquad 0 < a \le \mathbf{1}. \tag{2.56}$$

Helyet és számolást kímélendő, a továbbiakban adaptív várakozások helyett mindig naiv várakozást vizsgálunk, ahol $a = \mathbf{1}$.

Szabályozás várakozásokkal

Már korábban láttuk, hogy a szabályozáshoz normákra van szükség. A következőkben x_t^{e} *normál állapot*ot a várt v_t^{e} hatással arányosnak fogjuk tekinteni, ahol a h arányossági vektort *normavektor*nak nevezzük:

$$x_{i,t}^{\mathrm{e}} = h_i v_{i,t}^{\mathrm{e}}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

s ez az összefüggés vektoralakban is fölírható:

$$x_t^{\mathrm{e}} = \langle h \rangle v_t^{\mathrm{e}}. \tag{2.57}$$

Meglehetősen költséges lenne a rendszert egy időszak alatt a normál pályára vezérelni. Ehelyett a *tervezett állapot*ot tűzzük ki célul, amely a normál állapot és az előző tényleges állapot súlyozott átlaga:

$$x_t^{\mathrm{p}} = \langle k \rangle x_t^{\mathrm{e}} + \langle \mathbf{1} - k \rangle x_{t-1}, \quad 0 < k \le \mathbf{1}. \tag{2.58}$$

A k vektort *reakcióvektor*nak nevezzük. A tervezett állapot definíciója szerint az u_t szabályozási vektor (2.53)-ból úgy állapítható meg, hogy az új állapot helyére a tervezett állapotot és a hatás helyére a várt hatást írjuk: $x_t^{\mathrm{p}} = x_{t-1} + u_t - v_t^{\mathrm{e}}$. (2.57)–(2.58) értelmében $u_t = (I + \langle k \rangle \langle h \rangle) v_t^{\mathrm{e}} - \langle k \rangle x_{t-1}$. Bevezetve a $\langle b \rangle = I + \langle k \rangle \langle h \rangle$ jelölést, a szabályozás

$$u_t = \langle b \rangle v_t^{\mathrm{e}} - \langle k \rangle x_{t-1}. \tag{2.59}$$

(2.59)-et behelyettesítve a $v_t = N u_t$ definícióba,

$$v_t = N \langle b \rangle v_t^{\mathrm{e}} - N \langle k \rangle x_{t-1} \tag{2.60}$$

adódik. Sorozatos kiküszöböléssel eljuthatnánk az $x_t = M x_{t-1}$ standard alakhoz, de áttekinthetetlen volna az eredmény. Más utat választunk, a sajátérték-egyenleteket. Ezért szükségünk lesz még egy összefüggésre. (2.59)-et behelyettesítve (2.53)-ba:

$$v_t + x_t = \langle \mathbf{1} - k \rangle x_{t-1} + \langle b \rangle v_t^{\mathrm{e}}. \tag{2.61}$$

Az egyensúly és a stabilitás definíciójától eltekintünk. Röviden összefoglaljuk a várakozási modellre vonatkozó stabilitási eredményeket. A logikai sorrendet követve először a racionális várakozást, másodszorra a naiv várakozást vizsgáljuk.

Racionális várakozás

A közgazdaságtan főárama szerint az egyének nemcsak adott megfigyelés szerint optimalizálják döntéseiket, hanem a rendelkezésre álló információt is optimálisan hasznosítják. Azaz „az egyedüli helyes” feltevés (2.54). Helyettesítsük be (2.54)-et (2.60)-ba, $v_t = N\langle b\rangle v_t - N\langle k\rangle x_{t-1}$, ahonnan

$$(I - N\langle b\rangle)v_t = -N\langle k\rangle x_{t-1}. \tag{2.62}$$

Vegyük figyelembe, hogy (2.62) implicit egyenlet, amelynek lehet, hogy nincs megoldása; lehet, hogy egy megoldása van; és lehet, hogy több megoldása van. El akarjuk kerülni e kellemetlenségeket, ezért föltesszük, hogy

$$\rho(N\langle \mathbf{1} + h\rangle) < 1. \tag{2.63}$$

Mivel $\rho(N) < 1$ és a spektrálsugár növekvő függvény (A.7d. tétel), (2.63) ekvivalens azzal, hogy a normavektor elég kicsiny. Mivel $0 < k \leq \mathbf{1}$, ezért $b \leq \mathbf{1} + h$, (2.63)-ból $\rho[N\langle b\rangle] < 1$, $(I - N\langle b\rangle)^{-1} > 0$ adódik (A.7e. tétel), hogy az inverz létezik és pozitív. Innen (2.62) egyszerűsödik:

$$v_t^{\mathrm{e}} = v_t = -(I - N\langle b\rangle)^{-1} N\langle k\rangle x_{t-1}. \tag{2.64}$$

Most már alkalmazhatjuk az 1.4. tételt.

2.9. tétel. *Tegyük föl, hogy (2.63) teljesül. a) A h normavektor esetén a racionális várakozás akkor és csak akkor stabil, ha mind a kereszthatások, mind a reakciók kicsik:*

$$\rho(N\langle 2b - k\rangle\langle 2\cdot\mathbf{1} - k\rangle^{-1}) < 1. \tag{2.65}$$

b) Adott normavektor esetén, ha a szabályozás stabil egy k reakcióvektornál, akkor stabil minden gyengébb ($0 < k' \leq k$) reakcióvektornál.

c) A szabályozás akkor és csak akkor stabil minden csillapított reakcióvektornál, ha a normavektor elegendően kicsiny:

$$\rho(N\langle \mathbf{1} + 2h\rangle) < 1. \tag{2.66}$$

Megjegyzések. 1. A *b)* pont természetesenek tűnik, de más modellekben nem feltétlenül teljesül (Simonovits (1981a) és e könyv 4.8. példája). A *c)* pont egyenes következménye *a)*-nak és *b)*-nek.

2. A 2.8. tételben láttuk, hogy az input- és outputkészlet-jelzéses szabályozásnál $\rho(N) = \sqrt{\rho(A)}$. Nyitott gazdaságban $\rho(A)$ 1/2 körüli érték, tehát (2.66) eléggé tág határt enged a normáknak.

Bizonyítás. Legyen λ a standard alak M mátrixának tetszőleges sajátértéke. Ekkor a megfelelő alapmegoldás

$$x_{t-1} = \lambda^t x_0, \quad u_t = \lambda^t u_0 \qquad \text{és} \qquad v_t = \lambda^t v_0. \tag{2.67}$$

Az 1.1. segédtétel gondolatmenetét követve nemlineáris fixpont-feladattá alakítjuk a problémát. Helyettesítsük be (2.67)-et (2.61)-be, majd (2.60)-ba:

$$v = N\langle b\rangle v - N\langle k\rangle\langle(\lambda-1)\mathbf{1}+k\rangle^{-1}\langle b-\mathbf{1}\rangle v.$$

Tömörebben:

$$v = N\langle p(\lambda)\rangle v, \tag{2.68}$$

ahol

$$\langle p(\lambda)\rangle = \langle(\lambda-1)b+k\rangle\langle(\lambda-1)\mathbf{1}+k\rangle^{-1}. \tag{2.69}$$

Mielőtt továbbmennénk, oldjuk meg a a következő feladatot.

2.7. feladat. Legyen λ egy komplex szám, α és ε pozitív szám, kielégítve az $\varepsilon < 1$ és $\varepsilon < \alpha < \beta$ feltételeket. Legyen

$$\pi(\lambda) = \frac{\beta\lambda - \alpha}{\lambda - \varepsilon}.$$

Ekkor $|\pi(\lambda)| < |\pi(-1)|$ ha $|\lambda| = 1$ és $\lambda \neq -1$.

A bizonyítás folytatása. Belátjuk, hogy a $|\lambda| = 1$ stabilitási határon $\lambda = -1$, s ekkor (2.69)-ből adódik (2.65).

Indirekt bizonyítunk. Eljárásunk hasonlít a következő ismert lemma bizonyításához: tetszőleges komplex elemű $G = (g_{ij})$ és $G^{\#} = (|g_{ij}|)$ mátrixpárra $\rho(G) \leq \rho(G^{\#})$.

Legyen λ_1 egy domináns sajátérték a stabilitási határon: $|\lambda_1| = 1$. Vegyük a (2.68) egyenlet mindkét oldalának abszolút értékét: $v^{\#} \leq N\langle p(\lambda_1)^{\#}\rangle v^{\#}$. Legyen $\beta_i = b_i$, $\alpha_i = b_i - k_i$ és $\varepsilon_i = 1 - k_i$, $\pi_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$. A 2.7. feladat implikálja, hogy $p(\lambda_1)^{\#} < p(-1)$, ahol $|\lambda_1| = 1$, $\lambda_1 \neq -1$. A monotonitási tétel szerint $1 < \rho(N\langle p(\lambda_1)^{\#}\rangle) < \rho(N\langle p(-1)\rangle)$.

Mivel $\lim_{\lambda\to-\infty} \rho(N\langle p(\lambda)\rangle) = 0$, létezik egy skalár λ^*, amelyre $-\infty < \lambda^* < -1$ és $\rho(N\langle p(\lambda^*)\rangle) = 1$. Tehát $|\lambda^*| > 1$, azaz λ nem domináns sajátvektor. Ellentmondás. ∎

2.8. feladat. Igazoljuk (2.65)-öt a speciális $h = \chi\mathbf{1}$ és $k = \kappa\mathbf{1}$ esetben!

Naiv várakozás

Miután definíciós nehézségekbe ütköztünk, és Lovell (1986) nyomán tudjuk, hogy a racionális várakozás empirikusan közel sem olyan meggyőző, mint azt hívei gondolják, érdemes megvizsgálni a naiv várakozásokat.

2.10. tétel. *Tegyük föl, hogy (2.63) teljesül. a) A h normavektor esetén a naiv várakozás stabil, ha mind a keresztthatások, mind a reakciók gyengék:*

$$\rho(N\langle 2b+k\rangle\langle 2\cdot\mathbf{1}-k\rangle^{-1})<1. \tag{2.70}$$

Ha az N mátrix 2–ciklikus, akkor (2.70) szükséges és elégséges feltétele a stabilitásnak.

b) Adott normavektor esetén, ha a naiv várakozáson alapuló szabályozás stabil egy k reakcióvektornál, akkor stabil minden gyengébb ($0<k'\le k$) reakcióvektornál.

c) Ez a szabályozás akkor és csak akkor stabil minden csillapított reakcióvektornál, ha a normavektor elegendően kicsiny:

$$\rho(N\langle 3\cdot\mathbf{1}+2h\rangle)<1. \tag{2.71}$$

d) Tegyük föl megint (2.63)-at. Ha a naiv várakozásokon alapuló szabályozás stabil, akkor a racionális várakozás alapuló szabályozás is az. Sőt, az utóbbi gyorsabb konvergenciát ad, mint az előbbi.

Megjegyzések. 1. A *d)* pont természetesnek tűnik, de általában nem az, hiszen sem a 4.4. alfejezetben, sem a C. függelékben nem igaz.

2. Figyelemre méltó, hogy míg a naiv várakozás egy egyenletrendszer Gauss–Seidel-féle iteratív megoldásának felel meg, addíg a racionális várakozás az ún. csoportos relaxálásnak (Young, 1971). Nemnegatív mátrixok esetén a numerikus analízisben is a második módszer gyorsabb mint az első.

3. Nagyon kicsiny norma esetén (2.71) $\rho(N)<1/3$-ra egyszerűsödik, amely eléggé szoros, de nem abszurd korlátot ad $\rho(A)$-ra a készletjelzéses modellben.

2.9. feladat. Bizonyítsuk be a 2.10. tételt! Útmutatás. Mivel z_t helyére z_{t-1} lép, (2.69) is módosul: $\langle p(\lambda)\rangle=\langle(1-\lambda^{-1})b+k\rangle\langle(\lambda-1)\mathbf{1}+k\rangle^{-1}$.

3. NEMLINEÁRIS DIFFERENCIAEGYENLETEK

Ebben a fejezetben röviden ismertetjük az időben állandó, *nemlineáris* differencia-egyenletek elméletének azokat az elemeit, amelyeket e könyvben alkalmazunk. A 3.1. alfejezetben a *fixpont* létezését és stabilitását vizsgáljuk, kiterjesztve a lineáris esetre kapott tételeket a nemlineárisra. A 3.2. alfejezetben a *határciklusok*at tanulmányozzuk. A 3.3. alfejezetben az ún. *kaotikus dinamiká*t vizsgáljuk, ahol a pálya érzékenyen függ a kezdőállapottól. Hasznos tudnivalókat tartalmaz Guckenheimer (1979), Szépfalussy és Tél szerk. (1982), Grandmont (1986), Devaney (1989) és Fokasz szerk. (1998).

3.1. A FIXPONT LÉTEZÉSE ÉS STABILITÁSA

Visszatérünk az 1.1. alfejezetben tárgyalt általános, nemlineáris rendszerek elemzésére, különös tekintettel a fixpont lokális és globális stabilitására. Megint fölírjuk a differenciaegyenlet-rendszert,

(3.1) $$x_t = f(x_{t-1}), \qquad t = 1, 2, \ldots, \qquad x_0 \qquad \text{adott;}$$

és annak fixpontját:

(3.2) $$x^o = f(x^o).$$

Fixpont létezése

Először a fixpont létezésének feltételét elemezzük.

3.1. tétel. *(Brouwer-féle fixponttétel.) Ha az f folytonos leképezés az n-dimenziós korlátos, zárt és konvex $\mathcal{X}$ halmazt önmagába képezi le (invariancia), akkor létezik legalább egy fixpontja.*

Megjegyzések. 1. Ez a tétel mind a matematikában, mind a közgazdaságtanban alapvető szerepet játszik. Valóban, a fixpont létezése az n-dimenziós zárt és konvex tartományokat önmagukba leképező folytonos leképezések egyik legfontosabb tulajdonsága. Hasonlóan, a fixpont létezése az általános egyensúlyelmélet alapja.

2. A Brower-féle fixponttétel azonban nem mondja meg, hogy miképp lehet a fixpontot megtalálni. Scarf (1967) algoritmust ad a közelítő fixpont megtalálására:

tetszőlegesen kicsiny pozitív ε-ra egy olyan x^ε pontot szolgáltat, amelyre $||x^\varepsilon - f(x^\varepsilon)|| < \varepsilon$. Lehetséges azonban, hogy x^ε távol esik bármely x^o fixponttól.

3. A zártság és a korlátosság szerepe nyilvánvaló, a konvexitásét egy egyszerű példán mutatjuk meg.

3.1. példa. Nincs konvexitás $\Rightarrow$ nincs fixpont. Legyen $\mathcal{X}$ egy síkbeli körgyűrű, melynek pontjaira teljesül $1 \le x_1^2 + x_2^2 \le 4$. Legyen f a körgyűrű 90^o-os elforgatása az origó körül. $\mathcal{X}$ korlátos és zárt (de nem konvex), f folytonos, $f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$, de f-nek nyilván nincs fixpontja. (Az $x_1^2 + x_2^2 \le 4$ körlemeznél $0 = f(0)$ lenne a fixpont!)

3.2. példa. A köztes érték tétele. Skalár függvény esetén ($n = 1$) a 3.1. tétel a jól ismert Bolzano-tételre vezet. Valóban, ekkor $\mathcal{X} = [a,b]$, s az $f(x) - x$ függvény a-ban nem negatív, b-ben nem pozitív, azaz egy közbülső $x^o \in \mathcal{X}$ helyen nulla, (3.2).

Dinamikus vizsgálatokban azonban nem szorítkozhatunk csupán az egyensúly létezésének elemzésére. Tudnunk kell azt is, hogy stabil-e a fixpont, azaz a fixpontból kívül induló pályák tartamak-e a fixponthoz.

Globális stabilitás

Globális stabilitásnál a konvergenciát tetszőleges kezdőpontra kell bizonyítani. Egyelőre feltesszük, hogy létezik (legalább) egy fixpont. Föltesszük még, hogy $f : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ függvény, ahol $\mathcal{X}$ kompakt halmaz $\mathbf{R}^n$-ben.

Ljapunovtól származik az az elgondolás, hogy anélkül is vizsgálható a stabilitás (Molnár et al., 1992), hogy a megoldást meg tudnánk (vagy meg kellene) határozni, *kvalitatív elmélet*. Csupán egy olyan pozitív függvényre van szükség, amellyel mérve a távolságot a fixponttól, a függvény csökken. Szabatosan megfogalmazva: egy folytonos $V : \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ függvényt *Ljapunov függvény*nek nevezünk az f függvényre nézve, ha

(i) a V függvény a fixpontban nulla, különben pozitív:

$$V(x^r o) = 0 \qquad \text{és} \qquad V(x) > 0 \quad (x \ne x^o);$$

és

(ii) lényegében minden $(x,f(x))$ állapotpárban V csökken:

$$V[f(x)] < V(x) \qquad \text{kivéve, ha} \qquad x = x^o.$$

3.2. tétel. *(Lyapunov, 1893.) Ha létezik egy Ljapunov-függvény a dinamikára nézve, akkor a fixpont globálisan stabil.*

Megjegyzések. 1. Általában nehéz találni Ljapunov-függvényt, speciális esetekben azonban vannak módszerek, amelyek segítenek. Például minden stabil lineáris rendszerre létezik egy kvadratikus Ljapunov-függvény. Konkrétan: tekintsük az 1.8. feladatban megadott spirál esetét, ahol $V(x) = |x|$ egy Ljapunov-függvény: csökken, ha $\rho < 1$ és növekszik, ha $\rho > 1$.

2. Érdemes megemlíteni a Ljapunov-tétel fizikai hátterét: disszipatív rendszerben (ahol a mechanikai energia egy része más fajta energiává alakul át), a mechanikai energia mindaddig csökken, amíg a rendszer el nem éri az egyensűlyi állapotát.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathcal{X}$ tetszőleges kezdő állapot és legyen $\{x_t\}$ a belőle induló pálya. Ha a pálya valamikor beleugrik a fixpontba, akkor a stabilitás triviális. A továbbiakban kizárhatjuk ezt az esetet. Ekkor a $\{V(x_t)\}$ sorozat pozitív és csökkenő, tehát van torlódási pontja, amelyet V^*-gal jelölünk. Mivel $\mathcal{X}$ kompakt, tartalmaz legalább egy konvergens részsorozatot: $\{x_{t_j}\}$, amelynek határértéke x^*. Mivel V folytonos függvény, $V(x^*) = V^*$ és $\{f(x_{t_j})\}$ konvergál $f(x^*)$-hoz. De $\{V(x_t)\}$ is konvergens, tehát a két torlódási pont azonos: $V(x^*) = V[f(x^*)]$. A (ii) tulajdonság értelmében $x^* = x^{\mathrm{o}}$. Ha minden részsorozat ugyanoda tart, akkor a teljes sorozat is konvergens. ∎

Lokális stabilitás

A globális konvergenciával szemben, a lokális stabilitás csak a fixpont megfelelően kis környezetéből induló pályák konvergenciáját szavatolja. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható függvény egy x^{o} fixpontban, és legyen

$$M = \mathbf{D}f(x^{\mathrm{o}}), \qquad w = f(x^{\mathrm{o}}) - Mx^{\mathrm{o}},$$

ahol $\mathbf{D}$ a differenciál-operátor. Ekkor az

$$x_t = Mx_{t-1} + w$$

rendszert a (3.1) rendszer *linearizált részé*nek nevezzük. Most kimondjuk az 1.4. tétel nemlineáris általánosítását:

3.3. tétel. *A diszkrét idejű, nemlineáris (3.1) dinamikus rendszer lokálisan stabil az x^{o} pontban, ha a linearizált rész stabil, azaz a mátrix spektrálsugara kisebb, mint 1:*

$$\rho(M) < 1.$$

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy folytonos jobb oldalú differencia-egyenlet-rendszer jobb oldalát kicsit megváltoztatva, adott időszakban a megoldás is csak kicsit változik. A 3.3. tétel ezt a folytonosságot terjeszti ki az egész időtengelyre, egyenletesen.

2. A tétel kiegészítése is fontos: a rendszer lokálisan instabil, ha a linearizált rész instabil: $\rho(M) > 1$. Mi van akkor, ha $\rho(M) = 1$? Hasonlóan az analízishez, amikor a lokális szélsőértékről semmit sem tudunk mondani, ha a második derivált nulla, ilyenkor további vizsgálatokra van szükség.

Bizonyítási alapötlet. A 3.3. tétel folytonos idejű változatáról az 5.3. alfejezetben szólunk, s ekkor részletesebben szólunk a bizonyításról. A dolog lényege az, hogy stabil lineáris rész esetén szerkeszthető Ljapunov-függvény, amelynek segítségével a stabilitás igazolható.

A skalár esetben megadjuk a teljes bizonyítást is. Legyen $x^{\mathrm{o}} = 0$, akkor $f(x) = Mx + \vartheta(x)$, ahol $\lim_{x\to 0} \vartheta(x)/x = 0$. Ismét $V(x) = x^2$ a jelöltünk a Ljapunov-függvény szerepére. Akkor a nemnegativitási feltétel teljesül és a monotonitási feltétel $V[f(x)] < V(x)$, azaz $M^2x^2 + 2Mx\vartheta(x) + \vartheta(x)^2 < x^2$ is áll, ha $\varepsilon = \vartheta(x)/x$-ra teljesül

$$\varepsilon < \min\left[\frac{\sqrt{1-M^2}}{2}, \frac{1-M^2}{4|M|}\right].$$

Ehhez elegendő, ha $|x|$ elegendően kicsiny. ∎

A fejezet hátralévő részében alapvető szerepet játszik a legegyszerűbb nemlineáris függvény.

3.3. példa. Logisztikus egyenlet: Legyen $n = 1$ és

$$f(x) = ax(1-x), \quad 0 < x < 1 \qquad \text{és} \qquad 0 \le a \le 4.$$

Működőképesség: $0 \le f(x) \le f(1/2) = a/4 < 1 \Leftrightarrow 0 \le a \le 4$. Fixpont: $x^o = 1 - 1/a$ (és a triviális $x^o = 0$). Lokális stabilitás: $f'(x) = a(1-2x) \Rightarrow f'(x^o) = 2 - a$; stabilitási tartomány: $1 < a < 3$. (A triviális $x^o = 0$ fixpont instabil: $f'(0) = a > 1$.)

Ismét globális stabilitás

A következő tételben visszatérünk a globális stabilitáshoz, de olyan erős feltevések mellett, hogy a fixpont létezését és egyértelműségét nem is kell föltennünk, mert bizonyíthatjuk.

Ehhez szükségünk lesz a kontrakció fogalmára. Egy $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ leképzést a korlátos és zárt (kompakt) $\mathcal{X}$ halmazon *kontrakció*nak (zsugorításnak) nevezünk, ha $f(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$ és a képpontok távolsága kisebb, mint a tárgypontoké:

$$||f(x) - f(y)|| < ||x - y||, \qquad \text{ha} \qquad x \ne y \in \mathcal{X}. \tag{3.2}$$

Megjegyzés. Az $\mathcal{X}$ halmaz kompaktsága és a norma folytonossága miatt – a Weierstrass-tétel értelmében – (3.2) élesíthető: van olyan $0 < \delta < 1$ valós szám, amelyre

$$||f(x) - f(y)|| < \delta ||x - y||, \qquad \text{ha} \qquad x \ne y \in \mathcal{X}.$$

Ha a fenti képlettel definiáljuk a kontrakciót, akkor nincs szükség az $\mathcal{X}$ halmaz korlátosságára.

Most már kimondható a nevezetes

3.4. tétel. *(Banach-féle fixpont tétel.) Ha az f függvény kontrakció az $\mathcal{X}$ kompakt halmazon, akkor a (3.1) rendszernek pontosan egy fixpontja van, s ez globálisan stabil.*

Megjegyzés*. Ez a tétel általánosabb terekre is érvényes, ahol a tér elemei nem végesdimenziós vektorok, hanem például az A. függelék végén említett folytonos függvények. A leképezések például az 5. fejezetben tárgyalandó differenciálegyenlet megoldásának fokozatos megközelítései, s a határérték a differenciálegyenlet pontos megoldása (5.2. tétel), de alkalmazásként a 7.1. alfejezetet is említhetjük.

Bizonyítás. A kontrakció erősebb definíciójából teljes indukcióval adódik

$$||x_{t+1} - x_t|| = ||f(x_t) - f(x_{t-1})|| < \delta ||x_t - x_{t-1}|| < \delta^t ||x_1 - x_0||.$$

Innen $u > t$-re a háromszögegyenlőtlenség ismételt alkalmazásából adódik

$$||x_u - x_t|| \le ||x_u - x_{u-1}|| + \cdots + ||x_{t+1} - x_t|| < \sum_{k=t}^{u-1} \delta^k ||x_1 - x_0|| < \frac{\delta^t}{1-\delta} ||x_1 - x_0||.$$

Tehát $\{x_t\}$ Cauchy-sorozat, létezik $\mathcal{X}$-beli határértéke: x^o. Az f folytonossága miatt $x^o = \lim_t x_t = \lim_t f(x_{t-1}) = f(x^o)$, tehát x^o fixpont. Indirekt módon belátjuk, hogy csak egy fixpont van. Legyen legalább két különböző fixpont: $y^o \neq x^o$. Ekkor $||x^o - y^o|| = ||f(x^o) - f(y^o)|| < ||x^o - y^o||$, ellentmondás. ∎

Megjegyzések. 1. $n = 1$ esetén egy sima f leképezés a korlátos és zárt I szakaszon kontrakció, ha $||f'(x)|| < 1$, $x \in I$. Valóban, a Lagrange-féle középértéktétel szerint minden (x,y) párhoz van olyan z, amely x és y között van, és amelyre $||f(x) - f(y)|| = ||f'(z)||\,||x - y|| < ||x - y||$.

2. $n > 1$ esetén még lineáris $f(x) = Mx + w$ leképezés esetén sem egyszerű megadni a kontrakció szükséges és elégséges feltételét (lásd Halmos, 1958, vagy Young, 1970, 3.7. alfejezet). A transzformáció-normákról mondottakból világos, hogy a lineáris elméletben megismert spektrálsugárra vonatkozó $\rho(M) < 1$ egyenlőtlenség *szükséges* feltétel, az $||M|| < 1$, illetve $||M^k|| < 1$ pedig *elégséges* (vö. 1.8. tétel).

3. Valójában itt az $V(x) = ||x - x^o||$ függvény egy Ljapunov-függvény.

A következő feladatok a kontrakciós-elv alkalmazhatóságának korlátjait mutatják meg.

3.1. feladat. Nincs fixpont. *a)* Lássuk be, hogy az $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ függvénynek nincs fixpontja $(-\infty,\infty)$-ban, bár $0 < f'(x) < 1$ minden valós x-re teljesül! *b)* Miért nem alkalmazható a kontrakciós tétel?

Skalárfüggvények esetén jól használható az ún. *Lamerey-lépcső* (Arnold, 1984, 18. ábra), amely a síkbeli $\{(x_t,f(x_t))\}$ és $\{(x_t,x_t)\}$ pontsorozatokat összekötő vízszintes és függőleges szakaszokból álló lépcső. Például az x_0 pont képe $f(x_0)$: $(x_0,0)$ pontból egy függőleges egyenes visz az $(x_0,f(x_0))$ pontba. Innen egy vízszintes egyenes az $y = x$ egyenesből kimetszi az (x_1,x_1) pontot: $x_1 = f(x_0)$, ahonnan újabb függőleges és vízszintes egyenesek jönnek. A 3.1. és a 3.2. ábra két logisztikus függvényre bemutat egy ilyen lépcsőt (lásd még 3.3. feladat). (Közgazdászok a pókháló-elméletből ismerik, amelyet elsőként talán Ezekiel (1938) tárgyalt.)

3.2. feladat. Négyzetgyökvonás. Egy β pozitív szám pozitív négyzetgyökét a következő iterációs eljárással számíthatjuk ki:

$$x_t = \frac{1}{2}\left(x_{t-1} + \frac{\beta}{x_{t-1}}\right),$$

ahol x_0 egy tetszőleges pozitív szám.

a) Bizonyítsuk be az eljárás konvergenciáját a Lamerey-lépcső segítségével a $\beta < x_0 < \infty$ tartományra! *b)* Bizonyítsuk be, hogy a leképezés kis x-ekre nem kontrakció, de az eljárás mindig β négyzetgyökéhez konvergál!

3.3. feladat.* *a)* Igazoljuk, hogy a logisztikus leképezés fixpontja lokális stabilitás esetén $(1 < a < 3)$ globálisan is stabil! (Válasszuk szét az $a < 2$ és az $a > 2$ esetet; a 3.1. és 3.2. ábra alapján nézzük meg külön, hogy mi lesz az első iterációk után!) *b)* Milyen a konvergencia-sebesség az $a = 2$ értéknél?

Most egy olyan példát mutatunk be, ahol a lokális stabilitásból *nem* következik a globális stabilitás.

3.4. példa. Legyen $f(x) = (x^3 + 1)/3$. *a)* A 3.3. ábra szerint három fixpont van, jelük β,γ, ε, ahol $-2 < \beta < -1 < 0 < \gamma < 1 < \varepsilon < 2$ és *b)* csak a középső lokálisan stabil, s vonzási tartománya (β,ε).

a) Egyszerű számolással megállapítható $p(x) = f(x) - x$ előjele a következő pontokban: $p(-2) < 0$, $p(-1) > 0$, $p(0) > 0$, $p(1) < 0$, $p(2) > 0$. Azaz a három fixpont tényleg a fent leírt módon helyezkedik el. *b)* $f'(x) = x^2$, azaz f pontosan a $(-1;1)$ intervallumban kontrakció, s ott a rendszer stabil. A hiányzó $(\beta, -1)$ és az $(1,\gamma)$ intervallumbeli kezdőértékekből induló pályák stabilitása könnyen belátható: $f'(x) > 1$ miatt például $x_0 \in (\beta, -1)$ esetén $\beta < x_0 < f(x_0) < 0$ miatt a keletkező sorozat előbb-utóbb belép a $(-1,0)$ intervallumba. A $(-\infty,\beta)$ és az (ε,∞) szakaszokból induló pályák $-\infty$-ba, illetve ∞-ba tartanak.

Megjegyzés. Magasabb fokú polinomokat vagy bonyolultabb függvényeket használva több lokálisan stabil fixpontot is kaphatunk.

3.2. HATÁRCIKLUSOK

Mindenekelőtt fölidézzük az 1.1. alfejezet ciklus-definícióját. Legyen P egy 1-nél nagyobb természetes szám. Egy $x_1, x_2, \ldots, x_P$ vektorsorozatot az f rendszer *P-periódusú ciklus*ának nevezzük, ha az x_1-ből induló pálya $x_2, \ldots, x_P$-n keresztül visszatér x_1-be.

Nemcsak a fixpont, de a ciklus is lehet stabil. Egy $x_1, \ldots, x_P$ ciklust az f rendszer *P-periódusú lokális határciklus*ának nevezünk, ha az x_1 közelében induló pályák rásimulnak a ciklusra. Képletben:

$$\text{(3.3)} \qquad \text{Ha} \quad y_1 \approx x_1, \qquad \text{akkor} \quad \lim_{k\to\infty} y_{kP+Q} = x_Q,$$

ahol k és Q egészek, $1 \le Q \le P$.

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_P$ ciklus azonos az $x_2, \ldots, x_P, x_1$ ciklussal. Ezért a konvergencia (3.3) definíciójánál óvatosan kell eljárnunk.

2. *Globális határciklus* esetén *majdnem* tetszőleges induló állapotból induló pályától megköveteljük a konvergenciát. Lehetnek azonban kivételes induló állapotok, például egy instabil fixpont, amelyből nyilván nem mozdul ki a rendszer.

A fixpont és a ciklus közti hasonlóságot az f függvény *iteráltjai*nak segítségével érthetjük meg, amelyeket rekurzióval definiálunk:

$$f^1(x) = f(x), \quad f^2(x) = f(f(x)), \ldots, f^t(x) = f(f^{t-1}(x)).$$

Megjegyezzük, hogy $x)t = f^t(x_0)$.

3.5. tétel. *Ciklus és fixpont. a) A (3.1) rendszernek az $x_1, x_2, \ldots, x_P$ sorozat akkor és csak akkor P-periódusú ciklusa, ha a*

$$z_t = f^P(z_{t-1})$$

P-iterált rendszernek x_Q a Q-adik nemtriviális fixpontja:

$$x_Q = f^P(x_Q) \neq f(x_Q), \qquad Q = 1, \ldots, P.$$

b) Az a) ciklus akkor és csak akkor lokálisan stabil (határciklus), ha a megfelelő fixpontok stabilak, azaz, ha a megfelelő mátrix stabil:

$$\rho[\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_1)] < 1. \tag{3.4}$$

Bizonyítás. *a)* Triviális. *b)* A 3.3. tétel szerint $\rho[\mathbf{D}f^P(x_1)] < 1$, s a szóban forgó mátrix a láncszabály szerint $\mathbf{D}f(x_P)\cdots\mathbf{D}f(x_1)$-gyel egyenlő. ∎

A P-ciklus P különböző alakjával kapcsolatos a

3.4. feladat.* Mi történik, ha az $x_2, \ldots, x_P, x_1$ ciklusra írjuk föl (3.4)-et? (Bizonyítsuk be, majd használjuk föl azt a lineáris algebrai tételt, hogy ha A és B $n\times n$-es mátrix, akkor az AB és a BA mátrixnak azonosak a sajátértékei, Young, 1970, 2.1.11. tétel!)

A következő példában egy 2-határciklust határozunk meg.

3.6. példa. Iterált logisztikus egyenlet. 2-határciklus: A 3.5. tétel alapján

$$f^2(x) = af(x)[1 - f(x)] = a^2x(1-x)(1-ax+ax^2), \quad 0 < x < 1.$$

2-ciklus: $x_i = f^2(x_i)$, $i = 1{,}2$ és $x_i \neq x^{\mathrm{o}}$. A kapott $a^3x^3 - 2a^3x^2 + a^2(1+a)x - a^2 = 0$ harmadfokú egyenletet elosztva $a(x - x^{\mathrm{o}})$ elsőfokú gyöktényezővel, egy másodfokú egyenlethez jutunk: $a^2x^2 - a(a+1)x + (a+1) = 0$, melynek két valós gyöke van:

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a},$$

mindkettő 0 és 1 közé esik, ha $3 < a < 4$.

Stabilitás: (3.4) szerint $f^{2'}(x_i) = f'(x_1)f'(x_2) = -a^2+2a+4$, stabilitási tartomány: $|f^{2'}(x_i)| < 1$, azaz $3 < a < 1+\sqrt{6}$.

Megjegyzés. A 3.8. tételben látni fogjuk, hogy nagyobb a-kra 4-, 8-, 16-, stb. határciklusok jelennek meg, melyek összetevői redukálás után 4-ed, 8-ad, 16-od, stb. fokú egyenletekben jelennek meg. Az elsők kivételével ezeket azonban explicit alakban nem tudjuk már előállítani. (Négynél magasabb fokú algebrai egyenletek általában nem oldhatók meg zárt alakban!) Ezért itt már elvileg is számítógépes módszerekre vagyunk utalva! (A gyakorlatban már a négyzetgyökvonás is közelítő módszerekkel történik, lásd 3.2. feladat!)

Attraktor és kváziciklus

A fixpont és ciklus után következne a kváziciklus áttekintése, amelynek lineáris változatáról az 1.10. tétel után szóltunk. Nemlineáris esetben csak topológiai eszközökkel tudnánk pontosan definiálni a fogalmat. Mindenekelőtt az attraktort kell körülírni. Itt pontatlanul azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ halmaz az f rendszer *attraktora*, ha minden $a \in \mathcal{A}$-ra létezik egy olyan $x_a \in \mathcal{X}$ kezdőállapot, hogy a belőle induló $\{f^t(x_a)\}_t$ pályának az a pont torlódáspontja. Szintén pontatlanul azt mondjuk, hogy az f leképezésnek *kváziciklikus attraktor*a van, ha az f leképezés az attraktorra leszűkítve topológiailag hasonlít a kör már említett irracionális forgatásához.

3.3. KÁOSZ

Most olyan nemlineáris rendszereket fogunk tanulmányozni, amelyek se nem stabilak, se nem ciklikusak, se nem kvázi-ciklikusak, hanem kaotikusak. [Részletesebben lásd Szépfalussy és Tél (1982), valamint Devaney (1989)].

Kezdőértékre való érzéketlenség

Természetesnek tűnhet, hogy a dinamikus rendszer pályája alig változik, ha a kezdőérték kicsit változik. Ezen alapul a Laplace-féle determinizmus: ha ismerjük a rendszer kezdőállapotát és mozgásegyenletét, akkor tetszőleges múltbeli vagy jövőbeli pillanatra meghatározható a rendszer állapota. Ennek egyik legsikeresebb példája az volt, amikor Leverrier (és Adams) számításai alapján a csillagászok 1846-ban fölfedezték a Neptunt. A (3.1) dinamikus rendszerről azt mondjuk, hogy az x_0 pontban *érzéketlen a kezdőérték*re, ha *a)* a pálya korlátos és *b)* közelről induló pályák mindig közel maradnak egymáshoz. Képletben: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, hogy ha $||x_0 - y_0|| < \delta_\varepsilon$, akkor $||x_t - y_t|| < \varepsilon$, $t = 1, 2, \ldots$.

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy egy korlátos lineáris rendszer minden pontjában érzéketlen a kezdőértékre. Valóban, az *a)* feltétel miatt csak olyan rendszereket kell tekintenünk, melyeknek a sajátértékei abszolút értékben nem nagyobbak, mint 1 [(1.21)]. Emiatt az eltérések tetszőleges kicsinek tarthatók.

2. Ha nem tennénk föl a korlátosságot, akkor számos lineáris rendszer nem lenne a kezdőértékekre érzéketlen. Valóban, legyen $x_{t+1} = 2x_t$. Ekkor kis δ esetén az $x_0 = \delta$ és a 0 kezdőérték nagyon közel van egymáshoz, de a belőlük induló $2^t\delta$ és 0 pályák egyre messzebb kerülnek egymástól. Ebben semmi meglepő nincsen, s a továbbiakban nem foglalkozunk nem korlátos rendszerekkel.

3. Emlékeztetőül: még olyan jól viselkedő nemlineáris rendszer is érzékeny néhány kezdőállapotra, amelynek globális határciklusa van; az instabil fixpontból induló pálya a fixpontban marad, de akármilyen szűk környezetéből induló összes többi pálya a határciklushoz tart: a 3.5. példa.

Káosz

Eddig kizárólag klasszikus fogalmakkal foglalkoztunk, amelyeknek önmagukban semmi közük sincs a káoszhoz. Most rátérünk az alfejezet központi fogalomcsoportjára. A (3.1) dinamikus rendszerről azt mondjuk, hogy az x_0 pontban *érzékenyen függ a kezdőértéktől*, ha *a)* az x_0 környezetéből induló pályák korlátosak, és *b)* közelről induló pályák nem mindig maradnak közel egymáshoz. Képletben: van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy tetszőlegesen kicsiny $\delta > 0$ esetén létezik olyan természetes t_δ szám és y_0 állapotvektor, hogy hiába teljesül $||x_0 - y_0|| < \delta$, mégis igaz $||x_{t_\delta} - y_{t_\delta}|| > \varepsilon$.

Egy dinamikus rendszert *valóban kaotikus*nak nevezünk, ha pozitív valószínűséggel a pálya érzékenyen függ a kezdőértéktől.

Korábbi megfigyelésünk szerint csak nemlineáris függvényeknél találkozhatunk káosszal.

Egy valóban kaotikus rendszer legalábbis egy pozitív mértékű kezdőállapot-halmazon rosszul viselkedik. Ez azt jelenti, hogy a rendszerre pozitív valószínűséggel *nem* érvényes a laplace-i determinizmus. Az elv annak ellenére nem érvényes, hogy nagyon egyszerű, kis-szabadságfokú rendszerről van szó. Ezt a körülményt még 1900 előtt Poincaré fölismerte az ún. háromtest probléma kapcsán, de ez több évtizedig elsikkadt.

Egyébként a kaotikus dinamikának számos definíciója van, ezek közül még egyet körvonalazunk. Egy dinamikus rendszer *topologikusan kaotikus*, ha *a)* végtelen sok különböző periódusú ciklusa van, *b)* megszámlálhatatlanul sok aciklikus (nem ciklikus) pályája van, és *c)* az aciklikus pályák mind egymástól, mind a ciklusoktól időnként határozottan eltérnek.

Vannak olyan topologikusan kaotikus rendszerek, amelyek nem valódi kaotikus rendszerek (például a későbbi 3.6. példa). Ezek a rendszerek *hosszú távon* elég rosszul, *kiszámíthatatlanul* viselkedhetnek bizonyos kivételes kezdőállapotokra, de aszimptotikusan jól, *kiszámíthatóan* viselkednek a legtöbb kezdőállapotra. (*Rövid távon* viszont sok kezdőállapotnál is rosszul viselkednek!) Mind a valódi, mind a topologikusan kaotikus dinamikán belül további megkülönböztetést tehetünk: (i) Egy kaotikus dinamikus rendszert *aciklikus*nak (*egyszerű*nek) nevezünk, ha a hosszú távú viselkedést leíró *attraktor* öszefüggő. (ii) Egy f rendszert *p-periódussal kaotikus*nak nevezünk, ha az iterált f^p rendszer egyszerűen kaotikus, $p > 1$.

Megjegyzések. 1. A furcsa viselkedés erősebben érvényes az egyszerű káoszra, és gyengébben érvényes a ciklikus káoszra, ahol legalább azt tudjuk, hogy a rendszer *aszimptotikusan* az összefüggő $\mathcal{A}_q$ halmazból az összefüggő $\mathcal{A}_{q+1}$ halmazba ugrik, $q = 1, 2, \ldots, p$, $\mathcal{A}_{p+1} = \mathcal{A}_1$.

2. Lehetséges, hogy az $\mathcal{A}_q$ halmazok olyan kicsik, hogy $p > 1$ esetén gyakorlatilag ciklussal állunk szemben (4.8. példa), $p = 1$ esetén pedig fixponttal.

Most pedig bemutatjuk az $a = 4$ paraméterértékű logisztikus függvényt egyszerűsítetten szemléltető *sátor-leképezés*t:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2; \\ 2-2x, & \text{ha } 1/2 < x \le 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Szóban: a függvény az első intervallumban lineárisan nő, a másodikban lineárisan csökken, 0 és 1 között.

Ismerkedésként kezdjük a következő feladattal.

3.5. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a sátorleképzés *a)* igazi fixpontja $x^{\mathrm{o}} = 2/3$ és *b)* 2-ciklusa $x_1 = 2/5$ és $x_2 = 4/5$, *c)* két 3-ciklusa van: $\{2/9, 4/9, 8/9\}$ és $\{2/7, 4/7, 6/7\}$, *d)* mindegyik instabil!

Belátható a

3.6. tétel. *(Ito et al., 1979.) A (3.5) sátorleképezés kaotikus.*

Bizonyítás helyett. Könnyen belátható, hogy a t-edik iterált függvény $2^t - 2^{t-1}$ db. egyenlő hosszúságú szakaszon nő/csökken lineárisan 0 és 1 között, a páratlan sorszámú szakaszokon nő, a párosokon csökken. A fixpontok száma 2^t, ebből a 0 mellett 2^{k-1} számú fixpont a k-adik iterációnál megjelenő 2^{k-1}-ciklust adja, $k = 1, 2, \ldots, t$-re (3.4. ábra). A kezdeti értéktől való érzékeny függés most jól látható. Akármilyen közel fekszik az x_0 és az y_0 kezdőérték egymáshoz, létezik egy $s/2^t$ alakú osztópont, (s és t természetes szám), hogy az $u > t$ iteráció után x_u és y_u különböző ágra kerül. ∎

A logisztikus leképezés csak a legegyszerűbb esetben kezelhető elemileg.

3.6. feladat. Az $x_t = \sin^2 \varphi_t$ transzformáció segítségével vizsgáljuk meg az $x_t = 4x_{t-1}(1 - x_{t-1})$ leképezést! A 3.5. ábra az eredeti, a 2. és a 3. iteráltat ábrázolja. Figyeljük meg a hasonlóságot a 3.4. ábrával!

Mit mondhatunk az iterációk határértékéről, ha általános skalárfüggvénnyel dolgozunk?

3.7. tétel. *Legyen f egy egycsúcsú és sima függvény, amely az $I = [a,b]$ valós intervallumot önmagára képezi le. Tegyük föl, hogy a függvénynek van 3-ciklusa, azaz egy olyan c pontja, amelyre*

$$f(c) \neq f^2(c) \neq f^3(c) = c.$$

a) (Sárkovszkij, 1964.) Ekkor bármely, 1-nél nagyobb természetes P számra a rendszernek van P-ciklusa.
b) (Li és Yorke, 1975). Ekkor a rendszer topologikusan kaotikus.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás meglehetősen hosszadalmas, de nem igényel mély eszközöket. Meglepő, hogy a tételt nem fedezték föl jóval korábban.

2. Sárkovszkij némileg többet bizonyított, mint amit *a)*-ban kimondtunk: létezik az 1-nél nagyobb természetes számoknak egy univerzális (f-től független) rendezése. Ha a rendezésben P megelőzi Q-t, és a rendszernek van Q-ciklusa, akkor van P-ciklusa is. A némileg bonyolult rendezés ismertetése helyett megelégszünk azzal, hogy 2 az első, és 3 az utolsó elem.

3. Könnyen belátható, hogy számos függvénynek van 3-ciklusa (például az alábbi 3.6. példa), de nagyon meglepő, hogy minden P-re van P-ciklus. Képzeljünk el egy olyan $\{x_{1,P},x_{2,P},\ldots,x_{P,P}\}_{P=2}^{\infty}$ kettős sorozatot a (0,1) intervallumban, amelyben f : $x_{1,P} \to x_{2,P} \to \ldots \to x_{P,P} \to x_{1,P}$, $P = 2, 3, \ldots$.

Nem lenne csoda, hogy egy ilyen rendszer vadul viselkedne, ahogyan Li és Yorke állítja. Valóban? A választ a számítógépes szimuláció adja. Ez segít az analitikus vizsgálatokban alkalmazott függvények tulajdonságainak megállapításában és gyakran pótolja az analitikus elemzést. A szimuláció további előnye, hogy megvilágít bizonyos mennyiségi viszonyokat.

Először csak egy dinamikus rendszer néhány pályáját tanulmányozzuk.

3.7. feladat. A logisztikus egyenlet néhány pályája. Írjunk egy számítógépes programot a logisztikus egyenlet viselkedésének tanulmányozására a következő paraméterértékeknél! a =1; 2; 3; 3,5; 3,839 és 4. Kísérletezzünk a kezdőértékekkel!

3.6. példa. Egy vagy végtelen sok ciklus? Legyen $a = 3{,}839$. *a)* Ekkor az $x_{1,3} = 0{,}149888$, $x_{2,3} = 0{,}489172$ és $x_{3,3} = 0{,}959299$ sorozat globálisan stabil 3-ciklust alkot. *b)* Következésképpen az összes többi P-ciklus ($P = 2, 4, 5, \ldots$) lokálisan instabil.

A 3.6. példában láttuk, hogy előfordulhat, hogy végtelen sok különböző ciklus van, de közülük csak egy stabil. Az elméleti megértéshez szükségünk lesz a következő fogalmakra. Legyen f egy I intervallumon definiált, 3-szor folytonosan differenciálható függvény. A függvény *Schwarz-féle deriváltj*át a következő kifejezés adja:

$$S(f) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3f''(x)^2}{2f'(x)^2}.$$

Ha $f'(x) = 0$, akkor további elemzés szükséges $S(f)$ meghatározására.

A c pontot az f függvény *kritikus pontjá*nak nevezzük, ha $f'(c) = 0$. Például a logisztikus függvényre $S(f) = -6/(1-2x)^2$ és egyetlen kritikus pontja $c = 1/2$. Értelemszerűen $S(c) = -\infty$. Belátható, hogyha f és g két sima függvény negatív Schwarz-féle deriválttal, akkor az fog kompoziciójuk is ilyen. Ezen alapul a

3.8. tétel. *(Singer, 1978.) Ha f az I intervallum önmagára való sima leképezése, f-nek egyetlen egy kritikus pontja van és a Schwarz-féle deriváltja negatív (beleértve a $-\infty$-t), akkor legfeljebb egy stabil ciklusa lehet.*

Megjegyzés. Belátható (Grandmont, 1986), hogy ha létezik stabil ciklus, akkor a kritikus pont iteráltjai konvergálnak hozzá. Némileg erősebb feltevések mellett a lokálisan stabil ciklus majdnem globálisan stabil.

Bifurkáció

A logisztikus egyenlet stabil fixpontjáról, valamint 2- és 3-határciklusáról mondottakat folytatjuk (3.3. feladat és 3.5., 3.6. példa), és alkalmazzuk a 3.8. tételt.

3.9. tétel. *Logisztikus egyenlet. Az $x_t = ax_{t-1}(1 - x_{t-1})$ logisztikus leképezésnek*

a) $1 < a < 3$ esetén egyetlen globálisan stabil fixpontja van;

b) $3 < a_k < a < a_{k+1} < 3{,}57$ esetén egyetlen globálisan stabil, 2^k-ciklusa, véges számú instabil 2^h-ciklusa ($h = 1, 2, \ldots, k-1$) és egy instabil fixpontja van;

c) $3{,}57 < a \le 4$ esetén bizonyos paraméterértékeknél végtelen számú (különböző periódusú) instabil ciklusa, mégtöbb aperiodikus pályája van: hol topologikus, hol valóban kaotikus dinamikáról tanúskodva.

Bizonyítás helyett. A bizonyítás nagyon bonyolult és mély matematikai eszközöket igényel, ezért csak utalunk a 3.7. tételbeli sátor-leképezésre. A dolog lényege az, hogy a növelésével a k-adik iterált függvény a fixpontok közelében hasonlóvá válik elődjéhez, lásd Szépfalussy és Tél (1982); Devaney (1989).

Megjegyzések. 1. Sokan elfeledkeznek arról, hogy a logisztikus egyenletnek minden a-ra legfeljebb egy határciklusa lehet, azaz a többi ciklus láthatatlan. Sőt, az is előfordul, hogy a határciklus majdnem globálisan vonzó.

2. Nem eleve világos, hogy a kaotikus (3,57;4] intervallum pontjai paraméterként milyen dinamikát származtatnak. Jakobson (1981) azonban igazolta, hogy pozitív mértékű halmazon a logisztikus egyenlet igazi (ergodikus) káoszt ad.

Érdemes egy vagy néhány pálya helyett az összes paramétert egyszerre és aszimptotikusan vizsgálni. Ezt a megoldást alkalmazza a

3.8. feladat. Bifurkációs diagram. Írjunk egy számítógépes programot a logisztikus egyenlet aszimptotikus viselkedésének tanulmányozására: az a paraméter a $h = 0{,}01$ lépésközzel fussa be a [2,7;4] szakaszt! *a)* Minden a-ra a kezdőérték legyen $x = 0{,}6$ és az első 200 állapotot dobjuk el (átmeneti állapotok), a harmadik 100 állapot értékét rajzoljuk ki!

b) Javíthatjuk a kép élességét (meggyorsíthatjuk a konvergenciát), ha az a futás kezdőértéke az $a - h$ futás végértéke (3.6. ábra).

3.9. feladat. Önhasonlóság. Nagyítsuk ki a 3.6. ábrát például a $3{,}841 < a < 3{,}857$ és $0{,}13 < a < 0{,}18$ téglalapban. A 3.6. és 3.7. ábra összehasonlítása azt sugallja, hogy a részkép az egész képhez hasonlít, s ez további nagyítás esetén is fennmarad: a jelenséget *önhasonlóság*nak nevezzük.

Ha a perióduskettőzés csupán a logisztikus egyenletre lenne jellemző, akkor nem sokat foglalkoznánk sem vele, sem a perióduskettőzéssel. Mivel univerzális jelenségről van szó, a megállapítások lényege érvényes minden egycsúcsú és sima függvényre. (Grandmont, 1986, 7. pontja további információkat tartalmaz a bifurkáció jelenségéről.)

Ergodicitás*

A sátor-leképezésen jól szemléltethető, hogy az egyedileg kaotikusan viselkedő pályák statisztikus szabályosságoknak engedelmeskednek. Ezek közül a legfontosabb a nagy számok törvényét általánosító ergodicitás (például Day és Pianigiani, 1991). Legyen ν egy olyan abszolút folytonos – sűrűségfüggvénnyel rendelkező – valószínűségi mérték az $[a,b]$ intervallumon, amely *f–invariáns*: $\nu(f^{-1}(\mathcal{A})) = \nu(\mathcal{A})$ minden mérhető $\mathcal{A}$ halmazra. A ν mértéket *ergodikus*nak nevezzük, ha minden ν-integrálható függvényre az aszimptotikus pályaátlag és a térátlag megegyezik:

$$\lim_k \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{n} g(f^{j-1}(x)) = \int g\, d\nu \quad \nu\text{−majdnem mindentt.}$$

Például ha $g = 1_{\mathcal{A}}$ az $\mathcal{A}$ halmaz indikátorfüggvénye (1, ha $x \in \mathcal{A}$ és 0 egyébként), és $v_k(x_0)$ az $f^{j-1}(x) \in \mathcal{A}$ relatív gyakorisága, akkor a relatív gyakoriság aszimptotikusan tart az elméleti valószínűséghez: $\lim_k v_k(x_0) = \nu(\mathcal{A})$ ν-majdnem mindenütt.

A következő tétel elégséges feltételt nyújt ergodikus mérték létezésére.

3.10. tétel. *(Vö. Grandmont, 1986, 5. tétel.) Ha nem létezik stabil ciklus, és létezik a kritikus pontnak egy olyan V környezete, amelybe az x^*-ból induló pálya soha nem tér vissza, akkor létezik és egyértelmű a teljesen folytonos invariáns valószínűségi mérték, amely ergodikus.*

Megjegyzés. Sajnálatos módon az ergodikus mérték létezése összefér a kváziciklussal is (Medio, 1995).

Turbulencia

Egy $f : I \to I$ leképezést *turbulens*nek nevezünk, ha I-nek létezik két olyan kompakt J és K részintervalluma, melyeknek legfeljebb egy közös pontjuk van és egyesítésük része a képük metszetének: $J \cup K \subseteq f(J) \cap f(K)$.

Könnyen belátható, hogy mind az $f(x) = 4x(1 - x)$, mind a sátorleképezés turbulens, $J = [0{,}1/2]$ és $K = [1/2{,}1]$ mellett. Figyelemre méltó, hogy egy ilyen egyszerű fogalom milyen érdekes tulajdonságokat implikál.

3.11. tétel. *a) Ha az $f : I \to I$ leképezés turbulens, akkor f-nek minden $P > 1$ természetes számra van P-ciklusa.*

b) Ha az $f : I \to I$ leképezésnek valamilyen páratlan $P > 1$ természetes számra van P-ciklusa, akkor f^2 iterált leképezés turbulens.

Káosz a síkban

Mivel az elsőrendű egyváltozós rendszerek elmélete nagyon kidolgozott, a káosszal foglalkozó legtöbb modell egyszerűen az egyváltozós egypúpú leképezések elméletére épül: a könyvben ilyen a 4.1. és a B.1. alfejezet. A többváltozós rendszerek tanulmányozása még gyerekcipőkben jár. A közgazdaságtanban főleg a Hicks-típusú, alsó-felső korlátos szabályozási modellek elemzésében sikerült előre jutnunk, számítógépes számításokra támaszkodva (4.2–4.5. alfejezet). A megoldás elve viszonylag egyszerű: kiválasztunk egy kitüntetett értéket, amelyről tudjuk, hogy rajta a rendszer egyik koordinátája előbb-utóbb mindig áthalad, s ezekben az átmetszési pontokban azt vizsgáljuk, hogy a másik koordináta értékei két szomszédos metszéskor milyen kapcsolatban vannak egymással. Az így kapott egyváltozós *monodrómiá*t a következőképpen lehet definiálni: tekintsük azokat a t-ket, amelyekre $x_{1,t} = x_1^{\mathrm{u}}$ maximális érték, és válasszuk az egymás utáni t' és t'' indexet ezzel a tulajdonsággal! Legyen J az $x_{2,t'}$ értékkészlete az x_0 megengedett kezdeti állapotra. Ekkor $x_{2,t''} = R[x_{2,t'}]$ a visszatérési leképezés. f és R viselkedése kapcsolatban áll egymással: mindkettő ciklikus (vagy kaotikus) azonos paraméterértékre (lásd Hommes, 1991).

4. DISZKRÉT IDEJŰ NEMLINEÁRIS MODELLEK

Az 1. és a 2. fejezetből nyilvánvaló, hogy a lineáris determinisztikus modellekben az élet „túl szép ahhoz, hogy igaz legyen”. Ebben a fejezetben a 3. fejezetre építve nemlineáris determinisztikus modelleket tanulmányozunk, amelyekben nemcsak véletlenül, hanem tipikusan is ciklusokat vagy bonyolultabb pályákat kapunk. A fejezet szerkezete a következő: a 4.1. alfejezetben a szeszélyes növekedési ciklusok modelljét tanulmányozzuk, amely visszavezethető a 3.2. és 3.3. fejezetben vizsgált logisztikus egyenletre. A 4.2–4.5. alfejezetben a 2.1–2.4. alfejezetben vizsgált négy lineáris modell nemlineáris általánosítását (az utolsó esetben makrovariánsát) elemezzük. A 4.6. alfejezetben az elosztott várakozásokat vizsgáljuk, míg a 4.7. alfejezet a tanulságokat összegzi.

4.1. SZESZÉLYES NÖVEKEDÉSI CIKLUSOK

Ez az alfejezet egy egyszerű növekedési modellel foglalkozik (Day, 1982). Legyen y_t az egy főre jutó kibocsátás a t-edik időszakban és k_t tőkeállomány a t-edik időszak végén. Kapcsolatukat egy neoklasszikus f *termelési függvény* írja le:

$$y_t = f(k_t). \tag{4.1}$$

Legyen c_t a *fogyasztás* és

$$i_t = y_t - c_t \tag{4.2}$$

a *beruházás*. Föltesszük, hogy a beruházás arányos a kibocsátással:

$$i_t = \iota y_t, \qquad \iota y_t > 0. \tag{4.3}$$

Legyen d_t az egy időszakra jutó *értékcsökkenés*. Ekkor a tőkeállomány dinamikája

$$k_t = k_{t-1} + \iota f(k_{t-1}) - d_t. \tag{4.4}$$

Az elemzést egyszerűsítendő, föltesszük, hogy a selejtezés éppen az előző időszakból örökölt tőkeállománnyal egyenlő:

$$d_t = k_{t-1}. \tag{4.5}$$

(4.5)-öt behelyettesítve (4.4)-be, adódik az
általános alapegyenlet

$$k_t = \iota f(k_{t-1}). \tag{4.6}$$

Day (1982) a logisztikus egyenlethez akart eljutni, ezért módosította a jól ismert Cobb-Douglas termelési függvényt:

$$f(k) = Ak^\alpha, \qquad \text{ahol} \qquad A > 0 \qquad \text{és} \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{4.7}$$

Föltette, hogy létezik egy maximális tőkeállomány (k^*), amely mellett a környezetszennyezés olyan nagy, hogy a termelés nulla. Alacsonyabb tőkeállománynál egy $(k^* - k)^\gamma$ tényező csökkenti a tőketermelékenységét:

$$f(k) = Ak^\alpha (k^* - k)^\gamma, \qquad \text{ahol} \qquad \gamma > 0. \tag{4.8}$$

(4.8)-at behelyettesítve (4.6)-ba, adódik a
parametrikus alapegyenlet:

$$k_t = \iota A k_{t-1}^\alpha (k^* - k_{t-1})^\gamma. \tag{4.9}$$

Nyilvánvaló, hogy a (4.9) jobb oldalán álló függvény egycsúcsú. Föltesszük, hogy a ι, A, α, γ és k^* paraméterértékek olyanok, hogy a (4.9) leképezés a $(0,k^*)$ szakaszt önmagába képezi le. A 3.9. tétel általánosítását alkalmazva, adódik a

4.1. tétel. *(Day, 1982.) A paraméterértékektől függően stabil, ciklikus és kaotikus pályák keletkeznek.*

4.1. feladat. Logisztikus leképezés. $A = 20$, $k^* = 1$, $\alpha = 1$ és $\gamma = 1$. Mutassuk meg, hogy $\iota = 0{,}1$; 0,16 és 0,2 esetén rendre stabil, 2-ciklikus és kaotikus pálya keletkezik, $k_{-1} = 0{,}7$!

4.2. feladat. Átmeneti káosz. Mutassuk meg, hogy a 4.1. feladat paramétereit megtartva, $\iota = 0{,}1919$ esetén átmeneti káosz keletkezik: $k_{-1} = 0{,}538$ és $k_{-1} = 0{,}539$!

Megjegyzés. 1. A logisztikus leképezést jóval azelőtt ismerték, hogy a kaotikus dinamikával való kapcsolatát (3.9. tétel) fölfedezték. Például Samuelson (1947, 291. o.) taglalta e függvényt, de folytonos idejű keretben.

2. A B.6. példában látni fogjuk, hogy Gale (1973) egészen közel volt ahhoz, hogy a logisztikus függvény négyzetgyökén keresztül fölfedezze a káoszt az együttélő nemzedékek modelljében, de elmulasztotta az alkalmat.

3. Goodwin (1967) nagyon népszerű folytonos idejű modelljét diszkrét idejűvé alakítva, Pohjola (1981) szintén a logisztikus egyenletet alkalmazta egy érdekes feladatra. Lineáris Phillips görbéje azonban negatív béreket adott alacsony munkanélküliség esetén. Pohjola csupán mennyiségi torzulásról beszélt. Szerintem egy ilyen modell abszurd. (Egyelőre nyitott kérdés, hogy létezik-e olyan nemlineáris Phillips görbe, amely életképes káoszt származtat. Én csak azt tudtam igazolni, hogy a logisztikus egyenlet lineáris transzformációi esetén a feladat megoldhatatlan.)

4. Bródy és Farkas (1987) a káosz-elmélet érdekes közgazdasági alkalmazása.

5. Két olyan összefoglalót említünk meg, amelyek nemlineáris dinamikus gazdasági modellek elemzésével foglalkoznak, a logisztikus egyenletre való közvetlen és közvetett visszavezetéssel: Cugno és Montrucchio (1984), valamint Boldrin és Woodford (1990). Lásd még a 8.3. és B.1. alfejezetet.

4.2. NEMLINEÁRIS AKCELERÁTOR–MULTIPLIKÁTOR MODELL

Ebben az alfejezetben is a tőkés gazdaság beruházási ciklusait tanulmányozzuk, de most a 2.1. alfejezet modelljének nemlineáris változatán. Samuelson (1939b)-t követve, Hicks (1950) ötlete volt, hogy a tervezett lineáris szabályozást időben állandó (szerkezetű), kívülről adott korlátok módosíthatják, azaz a rendszer csak *szakaszonként lineáris*, azaz nemlineáris. Ezt az ötletet alkalmazzuk majd a következő alfejezetekben is.

ELEMI MODELL

Rögtön a relatív értékekre ugrunk. A (2.1') azonosságot egyszerűen megismételjük, a lineáris (2.2') és (2.3') beruházási és fogyasztási egyenletet most csupán tervnek tekintjük, melyre a $^{\mathrm{p}}$ felső index utal.
Termelés-hányad-azonosság

$$y_t = i_t + c_t. \tag{4.10}$$

Tervezett beruházási függvény

$$i_t^{\mathrm{p}} = i^{\mathrm{A}} + \beta\psi(y_{t-1} - \psi y_{t-2}), \tag{4.11}$$

ahol ψ az autonóm fogyasztás és -beruházás közös növekedési tényezőjének a reciproka.
Tervezett fogyasztási függvény

$$c_t^{\mathrm{p}} = c^{\mathrm{A}} + \psi\gamma y_{t-1}, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{4.12}$$

Hicks bevezette a beruházások i^{l} alsó és a GDP y^{u} felső korlátját, amelyet nem léphet át a rendszer.
Tényleges beruházás

$$i_t = \begin{cases} i^{\mathrm{l}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} < i^{\mathrm{l}}; \\ i_t^{\mathrm{p}}, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{4.13}$$

Tényleges fogyasztás

$$c_t = \begin{cases} y^{\mathrm{u}} - i_t, & \text{ha } c_t^{\mathrm{p}} + i_t > y^{\mathrm{u}}; \\ c_t^{\mathrm{p}}, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{4.14}$$

Rendezéssel adódik a következő
alapegyenletrendszer:

$$y_t = f_1(y_{t-1},y_{t-2}) = \min\{\max[i^{\mathrm{A}} + \psi\beta(y_{t-1} - \psi y_{t-2}),i^{\mathrm{l}}] + c^{\mathrm{A}} + \psi\gamma y_{t-1},y^{\mathrm{u}}\}, \tag{4.15}$$

ahol y_{-2} és y_{-1} adott.

Belátható, hogy a lineáris modell egyensúlya a nemlineáris modell korlátai között fekszik:

$$i^{\mathrm{o}} > i^{\mathrm{l}} \qquad \text{és} \qquad y^{\mathrm{o}} < y^{\mathrm{u}}. \tag{4.16}$$

Lokális instabilitás és határciklus

Az első hicksi tételünket bizonyítás nélkül említjük meg.

4.2. tétel. *(Hicks, 1950.) Ha a lineáris multiplikátor–akcelerátor rendszer stabil, akkor nemlineáris variánsa globálisan is stabil.*

Megjegyzés. *A 3.4. példában láttuk, hogy nemlineáris rendszerekben a lokális stabilitásból nem következik a globális stabilitás. Meglepő módon számos korlátos rendszernél – Hicks (1950), Arrow et al. (1959) [lásd 6.3. alfejezet] és Simonovits (1981a) [lásd a 4.4. alfejezet] – megőrződik a stabilitás a korlátok bevezetése után. Csak a következő alfejezetben fogjuk látni, hogy ez nem is olyan természetes, mint amilyennek első látásra tűnik. Hicks szerint azonban a valódi rendszerek többé–kevésbé ciklikusak, tehát az akcelerátor-multiplikátor modell lokálisan instabil kell hogy legyen.*

Vélekedés. *(Hicks, 1950.) Tegyük föl, hogy a nemlineáris akcelerátor–multiplikátor rendszer lokálisan instabil:*

$$\psi^2\beta > 1. \tag{4.17}$$

Ekkor létezik egy globálisan vonzó egyszerű határciklus, amelyre a pálya az első korlátbaütközés után ráugrik.

Megjegyzés. Könnyen átlátható, hogy az instabil akcelerátor-multiplikátor modell oszcillál. Elfajult instabil oszcilláció esetén a rendszer mind az alsó, mind a felső korlátba beleütközik, szabályos instabil oszcilláció esetén három eset lehet: mindkét korlátba beleütközik, csak az alsó, vagy csak a felső korlátba ütközik bele.

A hicksi problémakör szemléltetésére a következő specifikációt használjuk: $\psi = 1$ (nulla növekedés); $y^{\mathrm{u}} = 1{,}2$; $i^{\mathrm{A}} = 0$, $c^A = 1 - \gamma$, azaz $y^{\mathrm{o}} = 1$ (Blatt, 1983, 192. o.). Kezdjük egy egyszerű határciklussal!

4.1. példa. Egyszerű határciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta = 1{,}5$; $\gamma = 0{,}75$ paraméterű rendszer 11-határciklus.

Hicks vélekedésének egyszerű cáfolatát nyújtja a

4.2. példa. Összetett határciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta = 1{,}5$; $\gamma = 0{,}7$ paraméterű rendszer *összetett 23-határciklus,* azaz két *„11,5”-határciklus* egymásutánja.

Bonyolultabb, de igazibb ellenpéldát ad a

4.3. példa. Kváziciklus. Az $i^{\mathrm{l}} = -0{,}05$; $\beta = 1{,}25$; $\gamma = 0{,}7$ paraméterű rendszer *kvázi „12,4”-határciklus.*

A bemelegítés után, bizonyítás nélkül kimondható az elég bonyolult bizonyítású

4.3. tétel. *(Hommes, 1991, 4.1B. tétel.) Lokális instabilitás mellett a pályák globálisan konvergálnak a következő három attraktor egyikéhez: egyszerű-, összetett- vagy kváziciklushoz.*

Megjegyzések. 1. A határciklus tétel „bizonyításakor” Hicks valószínűleg elnézte, hogy másodrendű rendszernél nem az y_t skalárnak, hanem az (y_t,y_{t-1})-párnak kell visszatérnie. Közgazdasági szempontból viszont nincs nagy különbség a három attraktor között, hiszen Hommes tételéből következik, hogy az átlagos forgásszám létezik.

2. Hicks maga is jelezte, hogy ellentétben a valósággal, modelljében a fellendülés rövidebb ideig tart, mint a visszaesés.

ÖSSZETETT MODELL

Már Hicks (1950) is foglalkozott az általunk összetettnek nevezett modellel, azonban viszonylag kevés figyelmet szentelt a dolognak. A (2.11) és (2.12) egyenletben i_t és c_t helyett i_t^{P} és c_t^{P} írandó.
Tervezett beruházási függvény osztott késleltetéssel

$$i_t^{\mathrm{P}} = i^{\mathrm{A}} + \sum_{k>0} \psi^k \beta_k (y_{t-k} - \psi y_{t-k-1}). \tag{4.11$'$}$$

Tervezett fogyasztási függvény osztott késleltetéssel

$$c_t^{\mathrm{P}} = c^{\mathrm{A}} + \sum_{k>0} \psi^k \gamma_k y_{t-k-1}, \quad \gamma_k \ge 0; \quad \sum_{k>0} \psi^k \gamma_k < 1, \tag{4.12$'$}$$

s ekkor a (4.10), (4.11′), (4.12′), (4.13) és (4.14) differenciaegyenlet-rendszer adja az összetett modellt. Hommes (1991, 4. fejezet) bizonyította be, hogy osztott késleltetésnél kaotikus dinamika is fölléphet. Itt elégedjünk meg a következővel.

4.4. példa. Káosz. Az $y^{\mathrm{u}} = 1{,}5$; $i^{\mathrm{A}} = 0$; $\gamma_1 = 0{,}1$; $\gamma_2 = 0{,}3$; $\gamma_3 = 0{,}4$; $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0{,}8$; $\gamma^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$; $i^{\mathrm{l}} = -0{,}1$; $\beta_1 = 2{,}25$; $\beta_2 = 0$ rendszer kaotikusan viselkedik.

4.3. feladat. Írjunk számítógépes programot és lehetőleg grafikusan ellenőrizzük a 4.3–4.6. példákat!

Megjegyzések. 1. A sors iróniája, hogy maga Hicks nem szerette ezt a modelljét, mert azt hitte, hogy a valóságtól eltérően túl szabályosan viselkedik. Talán örült volna, ha megtudja, hogy modellje mégsem viselkedik olyan jól matematikai szempontból, illetve olyan rosszul közgazdaságilag.

2. Külön felhívjuk a figyelmet Blatt (1978) és (1983, 11. fejezet) szellemes példájára. Vegyünk egy konkrét Hicks-modellt, és számítsuk ki a pályáját! Alkalmazzuk a hagyományos *lineáris* ökonometriai becslést! Egy Frisch-féle lineáris sztochasztikus rendszert kapunk, annak ellenére, hogy nemlineáris determinisztikus rendszerrel származtattuk az idősort. A becslés egyszerűen elsikkasztja a nemlinearitásokat.

3. Hommes (1991, 4. fejezet, 226. o.) példát hoz arra, hogy két stabil (4- és 6-periódusú) határciklus létezhet egymás mellett. Kár, hogy a numerikus példa nagyságrendjei nem reálisak.

4.3. A NEMLINEÁRIS BERUHÁZÁS–INDÍTÁS MODELL

Az előző alfejezet ötletét kiterjesztve, a 2.2. alfejezetben elemzett lineáris beruházás-indítási modellt alsó és felső korlátok bevezetésével nemlineárissá tesszük. Az alfejezet Simonovits (1990) dolgozaton alapul, de röviden ismerteti Hommes et al. (1995) néhány eredményét is. Részletes matematikai tárgyalást Hommes (1991, 4. fejezet) tartalmaz.

Korlátos szabályozás

A nemlineáris szabályozási modellben a lineáris reakciófüggvények csak az alsó és felső korlátok között érvényesek. A korlátokat túllépő reakciók tervek maradnak, a tényleges döntés a megfelelő alsó vagy felső korlát lesz: ún. „biliárdasztal”-típusú nemlinearitásokkal dolgozunk. (Aláhúzzuk, hogy ez a modell a döntési változókat alulról is és felülről is korlátozza, míg Hicks modelljében nincsenek döntési változók, továbbá a beruházásnak csak alsó, a GDP-nek csak felső korlátja van.)

Az alfejezet három további pontot tartalmaz. Először röviden ismerteti az indítási-beruházási ciklus nemlineáris modelljét, majd a keletkező határciklusokat vizsgálja, végül a kváziciklikus és kaotikus pályákkal foglalkozik.

A modell változói és egyenletei

A modell nyolc egyenletből áll, és nyolc változója van. Hat egyenletet és hat relatív változót a lineáris modellből vettünk át: a teljesség kedvéért felsoroljuk őket, GDP-hányadokban. Indítási hányad: s_t, beruházási hányad: i_t, elkötelezettségi hányad: k_t, nettóimport-hányad: b_t, belső feszültség: e_t és külső feszültség: a_t. A két új változó a tervezett indítási hányad: s^{p} és az tervezett beruházási hányad: i^{p}.

Legyen s^{l} és s^{u} két pozitív szám, ahol $s^{\mathrm{l}} < s^{\mathrm{u}}(< \sigma)$ az *indítási hányad alsó és felső korlát*ja. Legyen i^{l} és i^{u} két pozitív szám, ahol $(\iota <)i^{\mathrm{l}} < i^{\mathrm{u}}$, a *beruházási hányad alsó és felső korlát*ja.

Most pedig közöljük a nemlineáris modell összes egyenletét.

Elkötelezettségi hányad

(4.18) $$k_t = \psi k_{t-1} + \sigma_S s_t - i_t, \qquad 0 < \psi = 1/\Gamma < 1 \qquad \text{és} \qquad \sigma_S \geq 1.$$

Belső feszültség

(4.19) $$e_t = k_t - k^*, \quad k^* > 0.$$

Nettóimport-hányad

(4.20) $$b_t = -\beta + \beta_i i_t, \qquad \beta > 0 \qquad \text{és} \qquad \beta_i \geq 1.$$

Külső feszültség

(4.21) $$a_t = b_t - b^*.$$

Tervezett indítási hányad

(4.22) $$s_t^{\mathrm{p}} = \sigma - \sigma_e e_{t-1} - \sigma_a a_{t-1}, \quad \sigma,\sigma_e,\sigma_e > 0.$$

Tényleges indítási hányad

(4.23) $$s_t = \begin{cases} s^{\mathrm{l}}, & \text{ha } s_t^{\mathrm{p}} \leq s^{\mathrm{l}}, \\ s_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } s^{\mathrm{l}} < s_t^{\mathrm{p}} < s^{\mathrm{u}}, \\ s_t^{\mathrm{u}}, & \text{ha } s_t^{\mathrm{p}} \geq s^{\mathrm{u}}. \end{cases}$$

Tervezett beruházási hányad

(4.24) $$i_t^{\mathrm{p}} = \iota + \iota_e e_{t-1}, \quad \iota,\iota_e > 0.$$

Tényleges beruházási hányad

(4.25) $$i_t = \begin{cases} i^{\mathrm{l}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} \leq i^{\mathrm{l}}, \\ i_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } i^{\mathrm{l}} < i_t^{\mathrm{p}} < i^{\mathrm{u}}, \\ i_t^{\mathrm{u}}, & \text{ha } i_t^{\mathrm{p}} \geq i^{\mathrm{u}}. \end{cases}$$

Az alapegyenletek

Az alapegyenletek a következők:

$$e_t = \psi e_{t-1} + \sigma_S s(e_{t-1},a_{t-1}) - i(e_{t-1}) - \varepsilon_o, \tag{4.26}$$

ahol $\varepsilon_o = (1-\psi)k^*$;

$$a_t = \beta_i i(e_{t-1}) - \beta_o, \tag{4.27}$$

ahol $\beta_o = \beta + b^*$, valamint $s(e_{t-1},a_{t-1})$ és $i(e_{t-1})$ a megfelelő (4.22)–(4.23), illetve (4.24)–(4.25) reakciófüggvény.

Mind az indítást, mind a beruházást a feszültségektől függően három függvényág definiálja, ezért minden időszakban összesen $3 \cdot 3 = 9$ lineáris leképezés (rendszer) alakulhat ki. A (4.26)–(4.27) differenciaegyenlet-rendszer mindegyik rendszerben lineáris, s jobb oldala a rendszereket elválasztó határon nem sima. A korlát nélküli rendszert az egyszerűség kedvéért *lineáris rendszernek* nevezzük.

Az eredeti egyenletrendszer ekvivalens az alapegyenlet-rendszerrel.

Stacionárius pálya és lineáris rendszer

Megismételjük a stacionárius pálya definícióját:

$$\text{Ha} \qquad (e_{-1},a_{-1}) = (e^o,a^o), \qquad \text{akkor} \qquad (e_t,a_t) = (e^o,a^o). \tag{4.28}$$

Az analitikus vizsgálatoknál föltesszük, hogy a lineáris modell stacionárius indítási és beruházási értéke a korlátok közé esik:

$$s^l < s^o < s^u \qquad \text{és} \qquad i^l < i^o < i^u. \tag{4.29}$$

Megjegyzések. 1. Ekkor a nemlineáris modell stacionárius pályája független a korlátoktól, és megfelelő feltételek mellett minden eleme pozitív (2.2. tétel).

2. A numerikus vizsgálatoknál nem tesszük föl (4.29)-et. Belátható, hogy létezhet olyan stacionárius pálya, amely különbözik a lineáris rendszerétől, sőt, előfordulhat, hogy nincs stacionárius pálya. Hommes és Nusse (1992) nagyon fontosnak tartják az ekkor keletkező jelenséget: a *határátlépő kettéválás*t.

4.4. feladat. Számítsunk ki egy olyan normál állapotot, amelyben $s^o = s^u$ és $i^o = i^l$!

Indítási-beruházási határciklusok

Az alábbiakban felhasználjuk a 3. fejezetben szereplő, nemlineáris diszkrét idejű rendszerek határciklusáról szóló elemi definíciókat és tételeket. Meghatározzuk egy 4-éves indítási-beruházási határciklus létezésének feltételét, és számítógépes szimulációval szemléltetjük a tételt. E szerint (lásd később) e modellben többféle határciklus létezhet: *a)* a periódus lehet $P = 2, 3, 4, \ldots$,; sőt lehetséges, hogy nincs is ciklus. (Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a 3.7. tétel: „A 3-ciklus káosszal jár”, egyváltozós rendszerre vonatkozik!) *b)* Adott periódusnál is többféle határciklus jöhet létre, attól függően, hogy egy ciklus alatt az egyes korlátok hányszor és mikor érvényesülnek. Bauer négyfázisú sémáját legegyszerűbben egy 4-éves határciklussal írhatjuk le.

A sokféle lehetséges 4-éves határciklus közül némileg önkényesen kiválasztunk egyet. (Másfajta határciklust választva a képletek némileg változnának, a lényeg azonban változatlan maradna.) A felső indítási és az alsó beruházási korlát hat az 1. fázisban, az alsó indítási és a felső beruházási korlát hat a 3. fázisban, végül a páros fázisokban a korlátok nem hatnak, de a fázisnak megfelelően viszonyulnak stacionárius értékükhöz. Képletben:

(4.30) $$s_1 = s^{\mathrm{u}}, \quad s^{\mathrm{o}} < s_2 < s^{\mathrm{u}}, \quad s_3 = s^{\mathrm{l}}, \quad s^{\mathrm{l}} < s_4 < s^{\mathrm{o}},$$

(4.31) $$i_1 = i^{\mathrm{l}}, \quad i^{\mathrm{o}} < i_2 < i_t^u, \quad i_3 = i^{\mathrm{u}}, \quad i^{\mathrm{l}} < i_4 < i^{\mathrm{o}}.$$

Jelölje e_t és a_t a feltételezett ciklus belső és külső feszültségét ($t = 1{,}2{,}3{,}4$). Létezése esetén a ciklusnak ki kell elégítenie azokat az összefüggéseket, amelyeket a (4.30)–(4.31) összefüggéspárnak (4.26)–(4.27)-be való behelyettesítése ad (az új paramétereket (4.43)–(4.46) tartalmazza):

(4.32) $$e_1 = \psi e_4 + \varepsilon_{\mathrm{ul}},$$

(4.33) $$e_2 = \varepsilon_e e_1 - \varepsilon_a a_1 + \varepsilon,$$

(4.34) $$e_3 = \psi e_2 + \varepsilon_{\mathrm{lu}},$$

(4.35) $$e_4 = \varepsilon_e e_3 - \varepsilon_a a_3 + \varepsilon$$

és

(4.36) $$a_1 = \beta_i i^{\mathrm{l}} - \beta_{\mathrm{o}},$$

(4.37) $$a_2 = \alpha + \alpha_e e_1,$$

(4.38) $$a_3 = \beta_i i^{\mathrm{u}} - \beta_{\mathrm{o}},$$

(4.39) $$a_4 = \alpha + \alpha_e e_3,$$

feltéve, hogy

(4.40) $$\sigma_e e_4 + \sigma_a a_4 < \sigma - s^{\mathrm{u}}, \quad \sigma_e e_2 + \sigma_a a_2 > \sigma - s^{\mathrm{l}},$$

(4.41) $$\sigma - s^{\mathrm{u}} < \sigma_e e_1 + \sigma_a a_1 < \sigma - s^{\mathrm{o}}, \quad \sigma - s^{\mathrm{o}} < \sigma_e e_3 + \sigma_a a_3 < \sigma - s^{\mathrm{l}},$$

(4.42) $$e^{\mathrm{l}} < e_1 < e^{\mathrm{o}} < e_3 < e^{\mathrm{u}}, \quad e_4 < e^{\mathrm{l}}, \quad e_2 > e^{\mathrm{u}},$$

ahol (2.20) és (2.21) mellett a paraméterek a következők:

(4.43) $$\varepsilon_{\mathrm{ul}} = \sigma_S s^{\mathrm{u}} - i^{\mathrm{l}} - \varepsilon_{\mathrm{o}}, \quad \varepsilon_{\mathrm{lu}} = \sigma_S s^{\mathrm{l}} - i^{\mathrm{u}} - \varepsilon_{\mathrm{o}},$$

(4.44) $$\varepsilon = \sigma_S \sigma - \iota - \varepsilon_{\mathrm{o}}, \quad \varepsilon_e = \psi - \sigma_S \sigma_e - \iota_e, \quad \varepsilon_a = \sigma_S \sigma_a,$$

(4.45) $$\alpha = -\beta + \beta_i \iota - b^*, \quad \alpha_e = \beta_i \iota_e,$$

(4.46) $$e^{\mathrm{l}} = \frac{i^{\mathrm{l}} - \iota}{\iota_e}, \quad e^{\mathrm{u}} = \frac{i^{\mathrm{u}} - \iota}{\iota_e}.$$

Kimondható a

4.4. tétel. *A (4.30)–(4.31)-típusú 4-éves ciklus akkor és csak akkor létezik, ha a (4.32)–(4.42), egyenlet- és egyenlőtlenségrendszernek van megoldása. A ciklusfeszültségek a (4.32)–(4.39) egyenletrendszerből egyértelműen meghatározhatók. A ciklus lokálisan stabil, azaz határciklus, ha*

$$\sigma_S \sigma_e + \iota_e < \psi + \frac{1}{\psi}. \tag{4.47}$$

Megjegyzések. 1. A nyolc lineáris egyenletből [(4.32)–(4.39)] álló algebrai egyenletrendszer nyolc ismeretlent tartalmaz, szerencsére szerkezete nagyon egyszerű. (4.36)-ban és (4.38)-ban a_1, illetve a_3 már eleve adva van. Ezért a (4.32)–(4.35) részrendszer független (4.37) és (4.39) részrendszerétől. Egymás utáni behelyettesítéssel például e_4, majd e_1, e_2 és e_3 meghatározható. A belső feszültség-ciklus meghatározása után a_2 és a_4 az e_1, illetve e_3 lineáris függvényeként van meghatározva. A képletek bonyolultsága miatt ismertetésük célszerűtlen lenne.

2. Ellenőrizni kell, hogy a tizenkét egyenlőtlenségből álló (4.40)–(4.42) teljesül-e. Behelyettesítésekkel elvileg levezethetők a konzisztencia-feltételek, de az adódó egyenlőtlenségek vélhetőleg még a ciklus-feszültségek képleteinél is bonyolultabbak lennének.

3. Eddig a ciklus *lokális* stabilitásával foglalkoztunk, márpedig ez nagyon csalóka lehet: (i) Nemcsak elvileg, de modellünkben is előfordulhat, hogy az induló állapotoknak az a tartománya, amelyben a ciklus lokális stabilitása érvényes (röviden: stabilitási környezet) nagyon szűk, s azon kívül a ciklus instabil: globális instabilitás. (ii) Hiába nagy a lokális konvergencia-sebesség, ha ez egy viszonylag szűk tartományra korlátozódhat. De még globálisan stabil ciklus esetén is elképzelhető, hogy a „globális" konvergencia nagyon lassú.

4. Itt jegyezzük meg, hogy a ciklus lokális stabilitásának feltétele a ciklus fajtájától függően változik: például van olyan fajta ciklus is (lásd a 4.5. feladatot), ahol a megfelelő feltétel $\psi < 1$, s ez mindig teljesül. Egyelőre nem tudom, hogy a (4.47) feltétel hogyan viszonyul a (4.32)–(4.42) ciklusfeltétel-rendszerhez: következik-e belőle, vagy nem? Mindenesetre (4.47) nagyon gyenge feltevés, és ha nem teljesül, akkor a ciklus érdektelen és valószínűleg abszurd.

Bizonyítás. *a) A ciklus létezése.* A (4.32)–(4.39)-ban meghatározott belső-külső feszültség-négyes kielégíti a (4.26)–(4.27) és (4.30)–(4.31) egyenlőtlenségrendszert, tehát a 4-éves ciklus létezik.

b) A ciklus lokális stabilitása. A ciklus megfelelően kicsiny környezetére szorítkozva a leképezés lineáris, ezért a 3.4. tétel alkalmazható a (4.32)–(4.35) irreducíbilis alrendszerre: (3.4) értelmében a négy derivált szorzata $\psi^2 \varepsilon_e^2$, s a szorzat pozitív; akkor és csak akkor kisebb, mint 1, ha a (4.47) feltétel teljesül. ∎

A ciklusfeltétel-rendszer önmagában nehezen értelmezhető. Fölvetődik a kérdés: milyen lineáris rendszerek adnak határciklusokat (nemcsak 4-éves ciklusokat)? Válasz helyett csupán sejtéssel szolgálhatok.

4.1. sejtés. *Ha létezik 2-évesnél nagyobb periódusú indítási-beruházási határciklus, akkor a lineáris rendszer szabályosan oszcillál és instabil.*

Megjegyzések. 1. Számítógépes szimulációk alátámasztják a sejtést.

2. Valószínűleg *nem* igaz viszont a sejtés megfordítása: bár a lineáris rendszer szabályosan oszcillál és instabil, lehetséges, hogy nem kapunk reguláris határciklust.

3. A lineáris rendszer elfajult oszcillációja esetén az esetleg keletkező határciklus 2-éves lenne.

A következő részben egy olyan rendszert mutatunk be, amely kielégíti a 4.4. tétel feltételeit.

4.5. példa. 4-éves határciklus. $\sigma_S = 1{,}2$; $\beta_i = 1$; $\beta = 0{,}2$; $b^* = 0$; $\Gamma = 1{,}06$; $k^* = 0{,}4$; $\iota = 0{,}2$; $\sigma = 0{,}4$; $\iota_e = 0{,}5$; $\sigma_e = 0{,}5$; $\sigma_a = 2$. Könnyen belátható, hogy a megfelelő lineáris rendszer szabályosan oszcillál és instabil. A korlátok a következők: $s^{\mathrm{l}} = 0{,}18$; $s^{\mathrm{u}} = 0{,}29$; $i^{\mathrm{l}} = 0{,}23$; $i^{\mathrm{u}} = 0{,}28$.

A (4.29) feltétel ellenőrzéséhez megadjuk a stacionárius értékeket: $s^{\mathrm{o}} = 0{,}236$; $i^{\mathrm{o}} = 0{,}255$ ($e^{\mathrm{o}} = 0{,}109$; $a^{\mathrm{o}} = 0{,}055$). A 4.1. táblázatban közöljük a határciklus adatait, a 4.7a–b. ábrapár a 4-éves határciklus időtartománybeli és fázissíkbeli kialakulását szemlélteti. A fázissíkban a −1 pont a kezdőállapotot jelzi, az 1;2;3;4 pont viszont rendszerre a határciklus 1., 2., 3. és 4. fázisát. A kezdőérték $(k_{-1}, b_{-1}) = (0{,}45; 0{,}05)$.

4.1. táblázat. A 4-határciklus adatai

	Belső	Külső	Indítási	Beruházási
Év	f e s z ü l t s é g h á n y a d o k			
t	e_t	a_t	s_t	i_t
1	0,147	0,030	0,290	0,230
2	0,162	0,074	0,266	0,274
3	0,066	0,080	0,180	0,280
4	0,055	0,033	0,206	0,233

Megjegyzés. Már beszéltünk arról, hogy számos más struktúrájú 4-éves határciklus léphet még föl. Számítógépes futásaink szerint periódusonként egy-két indítási vagy beruházási hányad korláton belül maradhat, de szélsőséges esetben az is lehetséges, hogy minden évben a korlátok érvényesülnek. Természetesen típusváltozásnál módosul a (4.32)–(4.46) feltételrendszer: mindenfajta 4-éves határciklushoz saját feltételrendszer tartozik.

4.5. feladat. A legegyszerűbb 4-éves ciklus. A 4.5. példa adataiban módosítsuk a reakcióegyütthatókat és a korlátokat: $\iota_e = 1$; $\sigma_e = 1$; $\sigma_a = 3$ és $s^{\mathrm{l}} = 0{,}19$; $s^{\mathrm{u}} = 0{,}26$; $i^{\mathrm{l}} = 0{,}225$; $i^{\mathrm{u}} = 0{,}265$! Mutassuk meg, hogy ekkor $s_1 = s^{\mathrm{u}}$, $s_2 = s^{\mathrm{u}}$, $s_3 = s^{\mathrm{l}}$, $s_4 = s^{\mathrm{l}}$ és $i_1 = i^{\mathrm{l}}$, $i_2 = i^{\mathrm{u}}$, $i_3 = i^{\mathrm{u}}$, $i_4 = i^{\mathrm{l}}$! Írjuk föl a (4.32)–(4.46) rendszer megfelelőjét! (Mégsem ezt az esetet tárgyaltuk a főszövegben, mert a valóságban a gazdaság nincs kizárólag a padlón vagy a mennyezeten. Egyébként a kapott stacionárius belső feszültség irreálisan kicsi, 0,044: nem írja le a szocialista gazdaságot.)

Megjegyzés. A 3.3. alfejezetben leírt bifurkációs diagramjának adaptációjából (a lejjebb lévő 4.11. ábra) kitűnik, hogy a 4-éves határciklusok elsősorban $\sigma_e = 0{,}5$ közelében jelentkeznek. Az is igazolható, hogy a 4-éves határciklusokat adó korlátok meglehetősen tág határok között változhatnak.

Jóval bonyolultabb a helyzet, ha létezik ugyan egy határciklus, de még a közeli pályák is nagyon lassan konvergálnak hozzá. Ismét egy konkrét feladattal próbálkozunk.

4.6. feladat. Határciklus lassú konvergenciával. Mutassuk meg, hogy $\iota_e = 0{,}5$; $\sigma_e = 1$; $\sigma_a = 3$ esetén létezik egy 20-éves határciklus, amely gyakorlatilag két, majdnem azonos 10–10-éves ciklusból áll! A gyakorlatilag fontos első évtizedekben, az „átmeneti" pálya kiszámíthatatlanul viselkedik: ciklusai egy ideig csúsznak, közeli pályák teljesen másképp viselkednek (például a $b_{-1} = 0{,}051$-ből induló pálya szinte azonnal célba ér). A kiválasztott pálya csak 80–90 év alatt jut el a határciklushoz.

Kváziciklikus és kaotikus pályák

Tovább folytatjuk vizsgálatunkat, és határciklusok helyett kváziciklikus és kaotikus pályákat tanulmányozunk. Ebben a pontban több példát hozunk bonyolult dinamikára.

4.6. példa. Kváziciklikus pálya: $\iota_e = 0{,}5$; $\sigma_e = 0{,}55$; $\sigma_a = 2$. A 4.8a–b. ábrapár pályája nagyon hasonlít a 4.5. példa 4-éves határciklusához, de láthatóan nem konvergál semmilyen határciklushoz sem. A kváziciklus (vagy ahogyan hagyományosan nevezik: kváziperiodicitás) matematikai definícióját Hommes et al. (1995) tartalmazza.

4.7. példa. Kaotikus pálya: $\iota_e = 0{,}6$; $\sigma_e = 2{,}75$; $\sigma_a = 2$. A 4.9a. és b. ábra pályája nagyon vadul viselkedik, és nemcsak az első 50 évben, de még 1000 év után is. Külön figyelemre méltó, hogy a (0,4501;0,05) pontból induló „szomszédos" pálya – amely egy ideig követi szomszédját –, egy idő után megmakrancosodik, és hűtlenül elhagyja szomszédját (4.9c. ábra). Nyomatékosan aláhúzzuk, hogy az új pálya időnként úgy tesz, mintha megnyugodna, normál állapotba érne, de aztán újra megbokrosodik.

Eddigi példáinkban feltételezhetően csak egyetlen határviselkedés (attraktor) létezett. Most egy olyan példát mutatunk be és egy olyan feladatot adunk föl, ahol legalább két határviselkedés létezik. Az, hogy melyik valósul meg, kizárólag a kezdőállapottól függ.

4.8. példa. Lokálisan stabil normál állapot és 2-ciklusú káosz: $\iota_e = 0{,}5$; $\sigma_e = 1{,}9$; $\sigma_a = 1{,}6$. Ebben a példában legalább kétféle hosszú távú viselkedés létezik: (i) a (0,45;0,03) induló állapotú pálya a (0,468;0,034) lokálisan stabil stacionárius ponthoz konvergál (4.10a. ábra), (ii) míg a (0,45;0,05) induló állapotú pálya egy 2-ciklusú káoszhoz tart (4.10b–c. ábra).

Egyébként ez az eset a korábban említett destabilizálás! Ismét fölhívjuk a figyelmet a kvalitatív és kvantitatív vonatkozások eltérésére. Mindkét pálya jó ideig 2-éves határciklusnak látszik, s csupán finomabb vizsgálatból derül ki az első pálya konvergenciája, s a második pálya (szűk korlátok közti) szeszélyes viselkedése (4.10c. ábra).

4.7. feladat. 5-határciklus és 3-ciklikus káosz. Mutassuk meg, hogy $\iota_e = 0{,}6$; $\sigma_e = 1{,}78$; $\sigma_a = 2$ esetén is legalább kétféle hosszú távú viselkedés valósul meg: (i) a (0,45;0,05) induló állapotú pálya lokálisan stabil 5-határciklushoz konvergál, (ii) míg a (0,55;0,05) induló állapotú pálya egy 3-ciklusú káoszhoz tart.

Megjegyzés. Hommes et al. (1995) analitikus bizonyításokat ad arra, hogy a példákban és feladatokban szereplő, vagy ahhoz hasonló pályák a szóban forgó tulajdonságúak. A bizonyítások lényegére már utaltunk a 3. fejezet végén: megnézzük, hogy mi a kapcsolat két egymás utáni falbaütközés előtti belső feszültség között. Ha az így szerkesztett egydimenziós leképezés ciklikus vagy kaotikus, akkor az eredeti kétdimenziós leképezés is az volt.

Megjegyzés. Hommes et al. (1995) analitikus bizonyításokat ad arra, hogy a példákban és feladatokban szereplő, vagy ahhoz hasonló pályák a szóban forgó tulajdonságúak. A bizonyítások lényegére már utaltunk a 3. fejezet végén: megnézzük, hogy mi a kapcsolat két egymás utáni falbaütközés előtti belső feszültség között. Ha az így szerkesztett egydimenziós leképezés ciklikus vagy kaotikus, akkor az eredeti kétdimenziós leképezés is az volt.

Eddig csak ötletszerűen mutattunk be különféle furcsa rendszereket. Most bemutatunk egy módszert, melynek segítségével rendszeresen fölkutathatjuk a különféle dinamikákat. A keresési módszer neve bifurkációs (kettéválási) diagram, melyet a 3.3. alfejezetben írtunk le.

A 4.11. ábra bifurkációs diagramján $U = 100$, $V = 600$ és a felosztás maximális (képernyőtől függően több száz). A $\sigma_e = 0{,}5$ pont körül eléggé széles intervallumon viszontlátjuk a korábban analitikusan vizsgált 4-éves határciklusunknak (vagy ikertestvéreinek) a belső feszültségeit. A $\sigma_e = 1$ ponttól jobbra előkerül egy 3-éves határciklus, majd $\sigma_e = 3$ után egy 8-éves határciklus. A többi intervallum fölött meglehetősen zavaros a kép: szinte minden pont ki van töltve: vagy lassú a konvergencia, vagy kváziciklikus, illetve kaotikus rendszerrel van dolgunk. A részletek nagyításával pontosíthatjuk megfigyeléseinket, de ezzel már nem foglalkozunk. Inkább rátérnénk arra, hogyan lehet megtalálni a 4.8. példa és a 4.7. feladat együttélő attraktorát, hosszú távú alakzatait.

Figyeljük meg, hogy a fenti számításban balról jobbra haladtunk, de haladhatunk jobbról balra is: a $\sigma_e(z)$-hez tartozó (e_t, a_t)-sorozat induló értéke a $\sigma_e(z+1)$ paraméterértékhez tartozó pálya záróértéke, (e_V, a_V). Ha az így kapott bifurkációs diagram különbözik az eredetitől, például egy σ_e értéknél, akkor ennél a paraméterértéknél valószínűleg két különböző attraktor is létezik.

4.4. A NEMLINEÁRIS KÉSZLETJELZÉSES MODELL

Ebben az alfejezetben visszatérünk a 2.3. alfejezetben bevezetett outputkészlet-jelzéses gazdasághoz, de most már a nemlineáris modellt ismertetjük. Mint már említettük, az alapgondolat Kornai és Martos (1971) cikkéből származik. A nemlineáris készletmodell Simonovits (1981a)-ban jelenik meg szemléltetésként, itt egy egyszerűsített változatát mutatjuk be.

A modell egyenletei

A nemlineáris modell abban különbözik lineáris elődjétől, hogy a termelés a készletnek nemlineáris, csak nemcsökkenő függvénye. Például a lineáris szabályozási egyenleteket csak terveknek tekintjük, s tényleges értéküket alsó és felső korlátok közé szorítjuk. Fölírjuk a modell egyenleteit.

Készletváltozás

$$z_t = z_{t-1} + (I - A)y_t - c. \tag{4.48}$$

Tényleges decentralizált szabályozás

$$y_{i,t} = y_i(z_{i,t-1}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.49}$$

ahol $y_i(.)$ egy egyváltozós nemcsökkenő függvény.

Két példát mutatunk be.

a) Rögzítve egy működőképes $(y^{\mathrm{o}}, z^{\mathrm{o}})$ normál állapotot, a nemlineáris szabályozás lehet

$$y_{i,t} - y_i^{\mathrm{o}} = \arctan[d_i(z_{i,t-1} - z_i^{\mathrm{o}})], \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.50}$$

b) Természetesen visszatérhetünk a hicksi eljáráshoz is, a szakaszosan lineáris rendszerhez.

Tervezett decentralizált szabályozás

$$y_t^{\mathrm{p}} = y^* - \langle d \rangle z_{t-1}, \tag{4.51}$$

ahol $\langle d \rangle$ egy diagonális mátrix.

Tényleges decentralizált szabályozás

$$y_{i,t} = \begin{cases} y_i^{\mathrm{l}}, & \text{ha } y_{i,t}^{\mathrm{p}} \le y_i^{\mathrm{l}}; \\ y_{i,t}^{\mathrm{p}}, & \text{ha } y_i^{\mathrm{l}} < y_{i,t}^{\mathrm{p}} < y_i^{\mathrm{u}}; \\ y_i^{\mathrm{u}}, & \text{ha } y_{i,t}^{\mathrm{p}} \ge y_i^{\mathrm{u}}; \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.52}$$

(4.51)-et behelyettesítve (4.52)-be, adódik a hicksi $y(z_{t-1})$ függvény. (4.49)-et behelyettesítve (4.48)-ba, megkapjuk az

alapegyenletrendszert

$$z_t = z_{t-1} + (I - A)y(z_{t-1}) - c. \tag{4.53}$$

Normál állapot

Kezdjük a normál állapottal. Először tegyük föl, hogy a normál állapot létezik és pozitív. (4.53) szerint $y^{\mathrm{o}} = (I - A)^{-1}c$ független az y függvénytől! Behelyettesítve (4.49)-be és invertálva, adódik

$$z_i^{\mathrm{o}} = y_i^{-1}(y_i^{\mathrm{o}}) > 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4.54}$$

ahol y_i^{-1} az y_i függvény inverze. Azaz igaz a triviális

4.5. tétel. *(4.54) esetén az outputkészlet-jelzéses szabályozásnak létezik egy pozitív normál állapota.*

Globális stabilitás

Hála a modell egyszerű szerkezetének, a feltevések alapján az 3.1. alfejezet eredményei közvetlenül alkalmazhatók a globális stabilitásra. Szükségünk lesz a (2.49) feltevést általánosító feltevésre, ti. hogy a szabályozás kontrakció:

$$|y_i(z_i') - y_i(z_i)| \le \delta |z_i' - z_i|, \quad 0 < \delta < 1, \tag{4.55}$$

tetszőleges z_i' és z_i párra.

A 3.3. tételből és a hozzáfűzött 3. megjegyzésből következik a

4.6. tétel. *A (4.55) feltevés esetén az outputkészlet-jelzéses szabályozás globálisan stabil.*

Bizonyítás. Térjünk át az eltérésrendszerre:

$$z_t^{\mathrm{d}} = z_t - z_t^{\mathrm{o}} \qquad \text{és} \qquad y_t^{\mathrm{d}} = y_t - y_t^{\mathrm{o}}. \tag{4.56}$$

Ekkor (4.53) a következő alakot ölti:

$$z_t^{\mathrm{d}} = z_{t-1}^{\mathrm{d}} + (I - A)y^{\mathrm{d}}(z_{t-1}^{\mathrm{d}}), \tag{4.57}$$

ahol $y^{\mathrm{d}}(z_{t-1}^{\mathrm{d}}) = y(z_{t-1}) - y^{\mathrm{o}}$.

Belátható, hogy y^{d} is kontrakció δ állandóval, és pozitív változóra pozitív értéket vesz föl, negatívra negatívot. Válasszunk egy olyan mértékegység-rendszert, amelyben teljesül, hogy A oszlopösszegei mind kisebbek, mint 1:

$$\mathbf{1}^{\mathbf{T}} A < \alpha \mathbf{1}^{\mathbf{T}}, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.58}$$

Írjuk föl (4.57)-et koordinátásan, vegyük az abszolút értékeket és adjuk össze őket! Az (A.15)-beli $l_1 - norma$ értelmében

$$\sum_i |z_{i,t}^{\mathrm{d}}| \le \sum_i \Big[|z_{i,t-1}^{\mathrm{d}}| - (1-\alpha)\delta |z_{i,t-1}^{\mathrm{d}}| \Big] = 1 - (1-\alpha)\delta \sum_i |z_{i,t-1}^{\mathrm{d}}|, \tag{4.59}$$

azaz

$$||z_t^{\mathrm{d}}||_1 \le [1 - (1-\alpha)\delta] ||z_{t-1}^{\mathrm{d}}||_1, \tag{4.60}$$

ahonnan a 3.4. kontrakciós tétel alkalmazható. ∎

4.8. feladat. Időben változó rendszer stabilizálása. Tegyük föl, hogy az A input-output mátrix időben változik, jele A_t, de van egy olyan állandó mértékegységrendszer, amelyben teljesül (4.58) megfelelője:

$$\mathbf{1}^{\mathbf{T}} A_t < \alpha \mathbf{1}^{\mathbf{T}}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{4.58'}$$

Bizonyítsuk be a 4.6. tétel általánosítását!

4.5.* NEMLINEÁRIS KÉSZLETJELZÉS VÁRAKOZÁSOKKAL

Jó lenne ugyanúgy általánosítani a 2.4. alfejezet decentralizált lineáris várakozásos szabályozási modelljét nemlineárisra, ahogyan az sikerült a 2.3. alfejezet készletjelzéses modelljével a 4.4. alfejezetben. Sajnos, erre teljes általánosságban képtelenek vagyunk, de egy makromodellben sikerült a kiterjesztés. A vizsgálatokat Honkapohja és Ito (1980), Simonovits (1983), valamint Hommes és Nusse (1989) végezték el.

Disequilibrium dinamika

Hagyományos makromodellel dolgozunk, azaz egy termék van, amelyet a munkások tőke nélkül, egységnyi termelékenységgel állítanak elő. A disequilibrium-elmélet (Benassy, 1974) szellemében mind a munka-, mind a termékpiacon megkülönböztetjük a keresletet ($^{\mathrm{D}}$ felső index) és a kínálatot ($^{\mathrm{S}}$ felső index), és a tényleges tranzakciót a kettő minimuma adja. Csak outputkészlet van, a tervezett és a normálkészlet azonos: $I_t^{\mathrm{p}} = I_t^*$. A $t-1$ időszakban a t időszakra vonatkozó *eladási várakozás* ${}_{t-1}Y_t^D$. A rövidség kedvéért további magyarázat nélkül fölírjuk a modell egyenleteit.
Munkakínálat

$$L_t^{\mathrm{S}} = 1.$$

Árukínálat

$$Y_t^{\mathrm{S}} = I_{t-1} + L_t.$$

Készletdinamika

$$I_t = I_{t-1} + L_t - Y_t.$$

Tervezett készlet

$$I_t^{\mathrm{p}} = I_{t-1} + L_t^{\mathrm{D}} - {}_{t-1}Y_t^{\mathrm{D}}.$$

Árukereslet

$$Y_t^{\mathrm{D}} = \alpha + \mu L_t, \qquad \alpha > 0, \quad 0 < \mu < 1.$$

Normálkészlet

$$I_t^* = \beta\ {}_{t-1}Y_t^{\mathrm{D}}, \qquad \beta > 0.$$

Racionális eladási várakozás

$${}_{t-1}Y_t^{\mathrm{D}} = Y_t^{\mathrm{D}}.$$

Naiv eladási várakozás

$${}_{t-1}Y_t^{\mathrm{D}} = Y_{t-1}^{\mathrm{D}}.$$

Tényleges foglalkoztatás

$$L_t = \min(L_t^{\mathrm{D}}, L_t^{\mathrm{S}}).$$

Tényleges termelés

$$Y_t = \min(Y_t^{\mathrm{D}}, Y_t^{\mathrm{S}}).$$

Racionális várakozás

Honkapohja és Ito (1980) és Hommes (1991, 2.B. fejezet) a racionális várakozást vizsgálta.
Alapegyenletrendszer
Szükségünk lesz a következő jelölésekre:

$$\gamma = 1 - \mu - \alpha, \quad \chi = 1 - (\beta + 1)\mu, \quad I^{\mathrm{u}} = (\beta + 1)\alpha, \quad I^{\mathrm{l}} = I^{\mathrm{u}} - \chi.$$

Gazdaságilag érdektelen eseteket elkerülendő, föltettük, hogy $\gamma > 0$ és $\chi > 0$.

Némi számolás után a disequilibrium-elméletben szokásos esetszétválasztásokkal, adódik a következő egyenlet.

Foglalkoztatási dinamika

$$L_t = \begin{cases} 1, & \text{ha } I_{t-1} \le I^{\mathrm{l}}; \\ (I^{\mathrm{u}} - I_{t-1})/\chi, & \text{ha } I^{\mathrm{l}} < I_{t-1} < I^{\mathrm{u}}; \\ 0, & \text{ha } I_{t-1} \ge I^{\mathrm{u}}. \end{cases}$$

Ennek behelyettesítésével a következő egyváltozós, szakaszonként lineáris differenciaegyenletet kapjuk.
Készletdinamika

$$I_t = \begin{cases} I_{t-1} + \gamma, & \text{ha } I_{t-1} \le I^{\mathrm{l}}; \\ \beta(\alpha - \mu I_{t-1})/\chi, & \text{ha } I^{\mathrm{l}} < I_{t-1} < I^{\mathrm{u}}; \\ I_{t-1} - \alpha, & \text{ha } I_{t-1} \ge I^{\mathrm{u}}. \end{cases} \tag{4.61}$$

Egyensúly
Egyszerű számolással adódik a keynesi egyensúly:

$$I^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha\beta}{1-\mu} \qquad \text{és} \qquad L^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha}{1-\mu}. \tag{4.62}$$

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy az egyensúly független a várakozás típusától, mert egyensúlyban minden józan várakozás ugyanazt az értéket adja, az egyensúlyt.
Stabilitás és ciklus
Először a stabilitást vizsgáljuk.

4.7. tétel. *(Honkapohja és Ito, 1982.) A racionális várakozás mellett a makroszabályozás (4.62) egyensúlya pontosan akkor lokálisan stabil, ha $\beta\mu < \chi$, azaz $(2\beta + 1)\mu < 1$.*

Bizonyítás. A lokális stabilitást (4.61) alapján ránézésre kimondhatjuk. Szakaszonként lineáris, egyváltozós rendszernél a globális stabilitás a lokálisból következik. ∎

Mi történik, ha nem stabil a rendszer?

4.8. tétel. *(Hommes, 1991, 2.B.1. tétel.) A racionális várakozás mellett a makroszabályozás kaotikus, ha $\beta\mu > \chi$.*

A bizonyítás bonyolult, ismertetésétől eltekintünk.

Naiv várakozások

Simonovits (1983), Hommes és Nusse (1989) és Hommes (1991, 2.A. fejezet) a naiv várakozásokat vizsgálta.
Alapegyenletrendszer
Szükségünk lesz a következő módosított jelölésekre:

$$I^{\mathrm{u}}(L_t) = (\beta + 1)(\alpha + \mu L_t), \quad I^{\mathrm{l}}(L_t) = I^{\mathrm{u}}(L_t) - \chi.$$

A disequilibrium-elméletben szokásos esetszétválasztásokkal a következő szakaszonként lineáris, síkbeli differenciaegyenlet-rendszert kapjuk.

Foglalkoztatási dinamika

$$L_t = \begin{cases} 1, & \text{ha } I_{t-1} \le I^{\mathrm{l}}(L_{t-1}); \\ (I^{\mathrm{u}}(L_{t-1}) - I_{t-1})/\chi, & \text{ha } I^{\mathrm{l}}(L_{t-1}) < I_{t-1} < I^{\mathrm{u}}(L_{t-1}); \\ 0, & \text{ha } I_{t-1} \ge I^{\mathrm{u}}(L_{t-1}). \end{cases} \tag{4.63}$$

Készletdinamika

$$I_t = \begin{cases} I_{t-1} + \gamma, & \text{ha } I_{t-1} \le I^{\mathrm{l}}(L_{t-1}); \\ I_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } I^{\mathrm{l}}(L_{t-1}) < I_{t-1} < I^{\mathrm{u}}(L_{t-1}); \\ I_{t-1} - \alpha, & \text{ha } I_{t-1} \ge I^{\mathrm{u}}(L_{t-1}), \end{cases} \tag{4.64}$$

ahol $I_t^{\mathrm{p}} = \mu(\beta+1)[(1-\mu)L_{t-1} - \alpha] + \mu I_{t-1} + \alpha\beta$.
Stabilitás, kváziciklikusság és káosz
Először a (4.63)–(4.64) rendszer stabilitását vizsgáljuk. Az 1.11. tétel szerint komplex sajátértékek lépnek föl, s a stabilitási feltétel is egyszerű. Kimondható tehát a

4.9. tétel. *Naiv várakozás mellett a makroszabályozás (4.62) egyensúlya pontosan akkor stabil, ha $\chi > 0$.*

Megjegyzés. A két várakozás stabilitási feltételének összehasonlításából azonnal leolvasható, hogy a racionális várakozás stabilitásából következik a naiv várakozás stabilitása. Ez egyaránt ellenkezik intuíciónkkal és a 2.10d. tétellel. Két tanulság is levonható: *a)* a racionális várakozás nem feltétlenül tökéletes, sőt nem feltétlenül jobb, mint sokat szidalmazott elődje, a naiv várakozás; és *b)* eredményeink nagyon érzékenyek a modell másodrangúnak tűnő elemeire, ti. hogy vannak-e vagy nincsenek inputkészletek.

Bizonyításvázlat. *a)* Lokális stabilitás: az 1.11. tétel alapján belátható, hogy a rendszer szabályosan oszcillál, és akkor stabil, ha $\mu(\beta+1) < 1$.

b) Globális stabilitás: geometria okoskodással igazolható, hogy a lokális stabilitásból következik a globális stabilitás. Az alapötlet a következő: vizsgáljuk meg azoknak a pontoknak sorozatát, ahol a rendszer éppen leválik a folytonosított pályáknak teljes foglalkoztatás faláról. Azt látjuk, hogy a rendszer mindig kijjebb fekvő pályáról beljebb fekvő pályára ugrik. ∎

Mi történik, ha nem stabil a rendszer? 1983-as tanulmányomban azt sejtettem, hogy a lokálisan instabil rendszer majdnem mindig kaotikus. Hommes és Nusse (1989) megcáfolták sejtésemet.

Lássunk két számpéldát, ahol $\alpha = 0{,}95$, $\mu = 0{,}9$!

4.9. példa. Határciklus. $\beta = 0{,}3$; $L_{-1} = 0{,}96$; $I_{-1} = 0{,}28$.

4.10. példa. Aciklikus káosz. $\beta = 0{,}4335$: $L_{-1} = 1$; $I_{-1} = 0{,}3$.

Bizonyítás nélkül kimondható a

4.10. tétel. *(Hommes, 1991, 2.A.1. tétel.) Naiv várakozások mellett a lokálisan instabil makroszabályozásnak ($\beta\mu > \chi$) lehet határciklusa, kváziciklusa és viselkedhet kaotikusan.*

4.6. VEGYES VÁRAKOZÁSOK

Grandmont és Laroque (1990), valamint Grandmont (1998) nyomán egy absztrakt dinamikus rendszert vizsgálunk, amelyet az ún. *vegyes várakozások* hajtanak (Simonovits, 1999b).

Az idő jele ismét $t = 0, 1, 2, \ldots$, a rendszer skalár állapota a t-edik időszakban x_t, ${}_tx_\tau$ a t időszakban képzett $\tau(> t)$ időpontra vonatkozó várakozást jelöli. Legyen m és n két természetes szám, amelyek rendre a jelent befolyásoló múltbeli és a jövőbeli állapotok számát jelölik.

A modell dinamikája a következő:

$$g(x_{t-m}, \ldots, x_{t-1}, x_t, {}_tx_{t+1}, \ldots, {}_tx_{t+n}) = 0. \tag{4.65}$$

Vegyes várakozások

Mielőtt bevezetnénk az alfejezet központi fogalmát, a vegyes várakozásokat (amelyeket korábban, Molnár és Simonovits (1996)-ban d-várakozásnak neveztünk), megismételjük a két legfontosabb speciális esetet, a racionális várakozásokat és a naiv várakozásokat.
Racionális várakozások
Minden várt állapot megegyezik a *megfelelő* időszak modellbeli tényleges értékével:

$$ {}_tx_{t+i} = x_{t+i}; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.66}$$

Naiv várakozások
Minden várt állapot megegyezik a *jelenlegi* tényleges értékkel:

$$ {}_tx_{t+i} = x_t; \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4.67}$$

Vegyes várakozások
A közös tárgyalás kedvéért bevezetünk egy általánosabb várakozási sémát, a *vegyes várakozások*ét. Legyen d egy egész szám: $0 \le d \le n$.

A vegyes várakozásokat a következő tulajdonságok határozzák meg.

(i) Az x_t jelen állapot mellett a közeljövő $x_{t+1}, \ldots, x_{t+d}$ állapotai is ismertek a t-edik időszakban:

$$ {}_tx_{t+i} = x_{t+i}, \qquad i = 1, \ldots, d. \tag{4.68}$$

(ii) A távoli jövő $r_{t+d+1}, \ldots, r_{t+n}$ állapotainak várt értékei megegyeznek a $(t+d)$-edik időszak állapotával:

$$ {}_tx_{t+i} = x_{t+d}, \qquad i = d+1, \ldots, n. \tag{4.69}$$

Behelyettesítve (4.68)–(4.69)-et (4.65)-be, az alapegyenlethez jutunk:

$$g(x_{t-m}, \ldots, x_{t+d-1}, x_{t+d}, \ldots, x_{t+d}) = 0. \tag{4.70}$$

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy az igazi vegyes várakozásoknál (ahol $d > 0$) a t-edik időszakban az egyidejű x_t állapot helyett a jövőbeli x_{t+d} állapot határozódik meg. Emiatt a 0-adik időszakban nemcsak a múltbeli $x_{-m}, \ldots, x_{-1}$ állapotokat kell megadni, hanem az x_0 induló állapot mellett a közeljövőbelieket is: $x_{t+1}, \ldots, {}_0x_{d-1}$. Laitner (1981) az előbbieket *történelmi*, az utóbbiakat *nemtörténelmi kezdeti érték*nek nevezi.

Lokális stabilitás

Ismét x^{o} jelöli az állandósult állapotot. Könnyen belátható, hogy minden állandósult állapot független a várakozások típusától. Mostantól feltesszük, hogy legalább egy állandósult állapot létezik. (Látni fogjuk, hogy a B. és a C. függelékben tipikusan kettő vagy annál is több állandósult állapot létezik.)

Linearizáljuk (4.70)-et x^{o} körül. Legyen a g függvény x_{t+i} szerinti parciális deriváltja az x^{o} pontban γ_i, $i = -m, \ldots, n$. Legyen $x_t^{\mathrm{d}} = x_t - x^{\mathrm{o}}$. Ekkor az x^{o} pont körüli lokális g_d-dinamikát a következő lineáris differenciarendszer írja le:

$$\sum_{i=-m}^{d-1} \gamma_i x_{t+i}^{\mathrm{d}} + \Big(\sum_{j=d}^{n} \gamma_j\Big) x_{t+d}^{\mathrm{d}} = 0.$$

A negatív indexektől megszabadulhatunk, ha bevezetjük a következő mennyiségeket: $\alpha_i = \gamma_{i-m}$. Ekkor

$$p_d(\lambda) = \sum_{i=0}^{m+d-1} \alpha_i \lambda^i + \Big(\sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j}\Big)\lambda^{m+d}$$

a megfelelő karakterisztikus polinom. A stabilitás a $p_d(\lambda)$ polinom gyökeinek elhelyezkedésétől függ.

A dinamika nagyon bonyolult lehet, amelyet az $(m+d)$-fokú polinom $m+d$ gyöke és a hozzátartozó $m+d$ kezdeti feltétel határoz meg.

Nyilvánvaló, hogy egy szabadságfokunk van g, vagy másképp fogalmazva, α_i-k választásában. A következő normalizálást választjuk: $\alpha_{m+n} = 1$.

A következő példa a legegyszerűbb esetben szemlélteti a helyzetet.

4.11. példa. (Vö. Grandmont, 1998.) Legyen $m = n = 1$. Normalizálás: $\alpha_2 = 1$. Jelölés: $\beta = \alpha_1 + 1 \neq 0$. Ekkor $p_0(\lambda) = \alpha_0 + \beta\lambda$ és $p_1(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \lambda^2$. A naiv várakozások stabilitási feltételei triviálisak: $-1 < \lambda = -\alpha_0/\beta < 1$, azaz a stabilitás ekvivalens az $|\alpha_0| < |\alpha_1 + 1|$ feltétellel. A racionális várakozások stabilitási feltételei (1.12. példa): $\alpha_0 + \alpha_1 + 1 > 0$, $\alpha_0 - \alpha_1 + 1 > 0$ és $\alpha_0 < 1$. A 4.12. ábra illusztrálja a helyzetet az (α_0,α_1)-síkban. A függőlegesen és vízszintesen csíkozott terület a paraméter-síkban rendre a racionális, illetve a naiv várakozások stabilitását jelöli. Közös részük az egyidejű stabilitást jelöli.

Rátérve a nyeregpont-stabilitás feltételére: $p_1(1) < 0 < p_1(-1)$ vagy $p_1(-1) < 0 < p_1(1)$, azaz $|\alpha_1| > |\alpha_0 + 1|$. Ekkor λ_2-vel jelölve a stabil gyököt, a ${}_0x_1^{\mathrm{d}} = \lambda_2 x_0^{\mathrm{d}}$ választással a robbanó irány eltűnik.

Mi történik azonban akkor, ha mindkét gyök instabil? Ekkor még a meglehetősen törékeny megoldás is lehetetlenné válik, és nem marad más kiút az instabilitásból, minthogy egyszerűen az állandósult állapotra szorítjuk a dinamikát. Ez a közgazdaságilag indokolatlan megkülönböztetés a kétfajta instabilitás között viszont aláássa a korlátozás hitelét.

Egyelőre csak egyszerű elégséges feltételeket ismerünk vegyes várakozások (in)stabilitásra, illetve a racionális várakozások instabilitására és a naiv várakozások stabilitására.

4.11. tétel. *Adott d-re tegyük föl, hogy $p_d(\lambda)$-nak nincs egységgyöke.*
a) Az állandósult állapot nyeregpont-instabil, ha

$$|\alpha_0| \ge \Big| \sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j} \Big|, \tag{4.71}$$

b) Az állandósult állapot stabil, ha

$$\sum_{i=0}^{m+d-1} |\alpha_i| \le \Big| \sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j} \Big|. \tag{4.72}$$

Megjegyzések. 1. Az egységgyök kizárása általában jellemző az irodalomra és tipikusan teljesül.

2. A (4.71) feltétel azt jelenti, hogy a legtávolabbi múlt hatása abszolút értékben erősebb, mint a $n - d + 1$ legtávolabbi jövőé.

3. A (4.72) feltételt elég nehéz közgazdaságilag értelmezni. Ha az α_i-k előjele változik, akkor (4.72) aligha teljesül.

Bizonyítás. *a)* A vegyes várakozás nyeregpont-instabilitása majdnem triviális. p_d egy olyan $(m+n)$-fokú polinom, amelynek főegyütthatója $\beta_d = \sum_{j=d}^{n} \alpha_{m+j}$. Emlékezzünk a gyökök és együtthatók közti összefüggésre, amely szerint p_d gyökeinek szorzata nem más mint $(-1)^{m+n}\alpha_0/\beta_d$. Feltételünk szerint egyetlen egy gyök sem fekszik az egységkörvonalon, tehát legalább egy gyök az egységkörön kívül fekszik. Hasonlóan igazolható, hogy legalább egy gyök az egységkörön belül fekszik.

b) A stabilitási feltétel szintén nagyon egyszerű. Tegyük föl az ellenkezőjét, azaz létezik p_d-nek egy instabil gyöke, λ_1, amelyre $|\lambda_1| > 1$. Ekkor

$$p_d(\lambda_1) = \sum_{i=0}^{m+d-1} \alpha_i \lambda_1^i + \beta_d \lambda_1^{d+m}, \qquad \text{azaz} \qquad -\beta_d \lambda_1^{m+d} = \sum_{i=0}^{m+d-1} \alpha_i \lambda_1^i.$$

Áttérve az abszolút értékre, elosztjuk mindkét oldalt $|\lambda_1|^{m+d}$-vel és alkalmazzuk a háromszögegyenlőtlenséget:

$$|\beta_d| \le \sum_{i=0}^{m+d-1} |\alpha_i| \; |\lambda_1|^{i-m-d}.$$

Mivel $|\lambda_1|^{i-m-d} < 1$, elhagyva őket növeljük a jobboldalt:

$$|\beta_d| < \sum_{i=0}^{m+d-1} |\alpha_i|,$$

ellentmondva (4.72)-nek. ∎

Ha rendre $d = n$ és $d = 0$ értéket helyettesítjük be a (4.71) instabilitási és a (4.72) stabilitási feltételbe, akkor egyszerre jutunk el a racionális várakozás instabilitási és a naiv várakozások stabilitási feltételéhez.

4.12. tétel. *a) A racionális várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot nyeregpont-instabil, ha*

$$|\alpha_0| \geq \alpha_{m+n} = 1. \tag{4.73}$$

b) A naiv várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot stabil, ha

$$\sum_{i=0}^{m-1} |\alpha_i| \leq \Big| \sum_{j=0}^{n} \alpha_{m+j} \Big|. \tag{4.74}$$

Megjegyzések. 1. A (4.73) feltevés azt jelenti, hogy abszolút értékben a legrégebbi múlt hatása erősebb, mint a legtávolabbi jövőé.

2. A (4.74) feltevés értelmezéséhez tegyük föl, hogy minden múltbeli hatásnak azonos az előjele: (i) $\alpha_i > 0$, $i = 0, \ldots, m-1$ vagy (ii) $\alpha_i < 0$, $i = 0, \ldots, m-1$. Bevezetve az

$$\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \qquad \text{és} \qquad \beta = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{m+j},$$

jelöléseket, a (4.74) feltevés a következőre egyszerűsödik:

$$|\alpha| \leq |\beta|. \tag{4.75}$$

Vegyük észre, hogy (4.75)-tel már találkoztunk, szigorú egyenlőtlenséggel, a 4.11. példában (lásd még Grandmont [1998] Proposition 2.2).

Figyelemre méltó, hogy számos szerző örömmel fogadja a racionális várakozásokra jellemző instabilitást. Például Laitner (1981) és (1984) éppen a racionális várakozásoknál fellépő meghatározatlanságot használja fel az instabilitás kiküszöbölésére. Ha az instabil sajátértékek és a nemtörténelmi kezdeti feltételek száma azonos (kiegyensúlyozott nyeregpont-instabilitás, ez a numerikus vizsgálatok szerint a szóban forgó feltétel gyakran teljesül), akkor az állandósult állapot közelében minden történeti kezdeti feltételhez választhatunk olyan nemtörténeti kezdeti feltételt, hogy a keletkező pálya stabil legyen: *lokális meghatározottság.* Ugyanakkor ez a megoldás rendkívüli számítási pontosságot feltételez, amely nem várható el egy közönséges szereplőtől (lásd még Kehoe, 1991). Viszont minél több független változó van, annál kétségesebb az eljárás numerikus stabilitása. Emlékeztetünk az 1.10. példára (Ralston, 1965, 10.2. példa): a kerekítési hibák előbb-utóbb letérítik a lineáris rendszert a stabil irányról. S hiába vannak ma már sokkal jobb számítógépek, mint Ralston (1965) könyve írásakor, a modellezett valódi döntések nyilvánvalóan nem hajszálpontosak. A legegyszerűbb út a nyeregpont-stabilitáshoz a múlt és a jövő szimmetriájának föltevésében rejlik:

$$m = n \qquad \text{és} \qquad \alpha_{2n-i} = \alpha_i, \qquad i = 0, \ldots, n-1. \tag{4.76}$$

Könnyen eljutunk a szimmetriához, ha g eleve szimmetrikus, azaz a dinamika időben megfordítható (reverzíbilis). (Emlékeztetünk arra, hogy reverzibilitás a mechanikára jellemző, de a hőtanra nem.)

4.13. tétel. *a) A racionális várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot kiegyensúlyozott nyeregpont-instabil, de lokálisan meghatározott, ha teljesülnek a (4.76) szimmetria-feltételek.*

b) Szimmetria és nemnegativitás esetén a naiv várakozás melletti dinamikában az állandósult állapot stabil, ha vagy $\alpha_n > 0$ vagy $\alpha_n < 0$ és $\alpha < -\alpha_n/2$.

Bizonyítás. a) A racionális várakozás kiegyensúlyozottt nyeregpont-stabilitása majdnem triviális. A normalizálás értelmében polinomunk $2n$-fokú. (4.73) szerint $p_n(\lambda)$ ún. *reciprok polinom*, azaz ha λ gyök, akkor $1/\lambda$ is gyök.

b) Most $\beta = \alpha_n + \alpha$, és (4.76) esetén (4.74) (4.75)-re egyszerűsödik. ∎

A racionális várakozások részleges kudarca elfogadhatóbbá teszi a naiv várakozásokat? Nem igaz az, hogy naiv várakozásoknál folyamatosan triviális hibát követnek el? A klasszikus egyváltozós pókháló modelben valóban ez a helyzet, azonban vannak olyan dinamikus rendszerek, ahol semmilyen linearis statisztikai próba nem fedez fel semmilyen hibát sem (Hommes és Sorger, 1997).

4.7. TANULSÁGOK

Talán nem árt, ha összefoglaljuk a tanulságokat. A tőkés gazdaság beruházási ciklusainak kutatói már évtizedek óta föladták a determinisztikus és lineáris megszorítás valamelyikét: (i) Frisch (1933) sztochasztizálta a lineáris ciklusmodellt, (ii) Hicks (1950) pedig a beruházásra vonatkozó alsó, és a nemzeti jövedelemre vonatkozó felső korlát bevezetésével kapott nemlineáris ciklusmodellt. A nemlineáris modellek elemzőinek a matematika és a számítástechnika akkori szintjén csupán korlátozott eredményeket sikerült elérniük. Egészen az 1970-es évek végéig kellett várni, hogy a nemlineáris dinamikus rendszerek elmélete gyökeret verjen a közgazdaságtanban. Mindkét megközelítésnek vannak előnyei és hátrányai. Bár a modern gazdaságokban a „jó” és a „rossz” időszakok viszonylag szabályosan váltják egymást, a beruházási- és különösen a készletfelhalmozási mutatók mintája ciklusról–ciklusra ismétlődik, az ismétlődés azonban sokkal pontatlanabb, mint a természettudományokban. Míg a sztochasztikus megközelítésnél a pontos ismétlődéstől nem kell tartani, a nemlineáris megközelítésnél – lokális instabilitást feltételezve –, rövid átmenet után Hicks pontosan ismétlődő ciklusokat kapott – legalábbis azt hitte. Hicks állítólag éppen emiatti elkeseredésében fordult el az általa modernizált cikluselmélettől. A valóságos ciklusok felszálló ága sokkal tovább tart, mint a leszálló ága. A sztochasztikus modell azonban – legalábbis átlagban –, szimmetriát mutatnak, míg a nemlineáris modellek képesek az aszimmetria tükrözésére (Blatt, 1980, 1983). Megemlítjük még Brock (1986) újszerű próbálkozását a két elmélet relevanciájának megállapítására.

Világnézetileg is fontos a lineáris sztochasztikus és a nemlineáris determinisztikus megközelítés közti különbség. Az első megközelítés hívei általában ellenzik, a másodiké viszont támogatják az állam beavatkozását a piac működésébe. Hiszen a sztochasztikus zavarok hatását a gazdaságra jellemző késleltetések és mérési hibák miatt lehetetlen kiküszöbölni, de a determinisztikus ugrándozások megszelídíthetők. Ebben a fejezetben a nemlineáris determinisztikus megközelítést követtük, s a lineáris sztochasztikus megközelítésre csak a 7–8. fejezetpárban térünk ki.

Bonyolult matematikai fejtegetésünk végére érve nem árt ismét emlékeztetni a közgazdasági és matematikai ciklusfogalom különbségére. Ha Ickes (1986) általánosabb *közgazdasági* ciklusfogalmát fogadjuk el, ti. hogy (i) minden fázis oka a következő fázisnak, (ii) a fázisok ismétlődése szabályszerű, de nem feltétlenül periodikus, akkor a határciklusok mellett számos más csillapítatlan oszcilláció is „ciklusnak” tekinthető.

5. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

*Közönséges differenciálegyenlet*ről vagy *-rendszer*ről beszélünk, ha egy egyenletben az időtől (általánosabban, egy skalártól) függő változókon kívül azoknak az idő (vagy más skalár) szerinti deriváltjai is szerepelnek. Látni fogjuk, mennyire hasonlítanak a differenciálegyenletekre vonatkozó tételek a differenciaegyenletekre vonatkozó megfelelőikre (lásd 1. és 3. fejezet). A jobb áttekinthetőség kedvéért a legfontosabb definíciókat és tételeket „megismételjük”, a teljes párhuzam kibontásától azonban megkíméljük az Olvasót. (Adósak maradunk a ciklus és a káosz kifejtésével.) Az 5.1. alfejezetben a differenciálegyenletek alapfogalmait vezetjük be. Az 5.2. alfejezetben az általános lineáris rendszerek tulajdonságait tekintjük át. Az 5.3. alfejezetben visszatérünk a nemlineáris rendszerekre, és kiterjesztjük a lineáris esetre kapott stabilitási tételeket a nemlineáris esetre. Az 5.4. alfejezetben a folytonos idejű szabályozás kérdéseit vázoljuk. Hasznos tudnivalókat tartalmaz Samuelson (1947), Pontrjágin (1961), Martos (1981) és Arnold (1984). Hirsch (1989) érdekes történeti áttekintést nyújt a kérdéskörről. Terjedelmi korlátok miatt különösen vázlatos lesz ez a fejezet.

5.1. ALAPFOGALMAK

Elsőrendű differenciálegyenlet-rendszer

Legyen $\mathbf{T} = [0,T]$ egy valós (idő)intervallum, x egy n-dimenziós valós vektor, és $f(.,.)$ az $(n+1)$-dimenziós tér egy $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^n$ tartományának $\mathbf{R}^n$-be való leképezése. Legyen $x(t)$ egy vektor-értékű sima időfüggvény, és $\dot{x}(t)$ a derivált-függvény. Ha x és $\dot{x}$ kielégíti az

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = f[t,x(t)] \tag{5.1}$$

*elsőrendű közönséges differenciálegyenlet(-rendszer)*t, akkor az $x(t)$ függvényt az egyenletrendszer *megoldásá*nak nevezzük. Az $x(t_0) = x_0$ *kezdeti állapot* általában adva van, s ilyenkor az adott kezdeti feltétel melletti megoldásról beszélünk. Lehet *végérték-*, sőt *peremérték*-feladatról is beszélni, ez utóbbiban bizonyos kezdeti és végérték van megadva (9. fejezet). Mivel ebben a könyvben mindvégig közönséges differenciálegyenletekről beszélünk, a jelzőt elhagyhatjuk.

Az (5.1) egyenlet koordinátamentes alakban van fölírva, s ez a tömörség miatt is előnyös. Nagyon gyakran azonban az egyenletrendszer koordinátásan van megadva:

$$(5.1') \qquad \dot{x}_i(t) = f_i[t, x_1(t), \ldots, x_n(t)], \qquad i = 1, \ \ldots, \ n;$$

ahol $f_i : \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}$ függvény és $x_i(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény.

Magasabb rendű egyenletek segédváltozók bevezetésével ugyanúgy visszavezethetők elsőrendű egyenletekre, mint a differenciaegyenletek.

Legyen $y^{(n)} = g(y^{(n-1)}, \ldots, \dot{y}, y)$. A következő jelölésekre lesz szükségünk: $x_i = y^{(i-1)}$, $i = 1, \ \ldots, \ n$, melyek segítségével a következő n-változós elsőrendű rendszert kapjuk: $\dot{x}_1 = x_2, \ \ldots, \ \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = g(x_n, \ldots, x_2, x_1)$.

Ellentétben a differenciaegyenletekkel, egyes differenciálegyenleteknek nincs megoldása, másoknak több is van. Az is lehetséges, hogy bár létezik és egyértelmű a megoldás, nem terjeszthető ki a teljes $[0,\infty)$ időtengelyre. (N. B. Mindvégig *explicit* egyenletekkel foglalkozunk. *Implicit* egyenleteknél a differenciaegyenletek is „nélkülözhetik" a megoldásukat vagy több is lehet belőlük: B.4. és C.4. alfejezet.)

A következő négy példáról deriválással beláthatjuk, hogy igazak a bennük szereplő állítások.

5.1. példa. „Szép" megoldás. $\dot{x} = \lambda x$, $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, $t > 0$.

5.2. példa. Nincs megoldás. Dirichlet-függvény: $\dot{x} = 1$, ha x racionális; $\dot{x} = 0$, ha x irracionális. (Darboux tétele szerint egy derivált függvény – ha nem is folytonos – minden közbülső értéket fölvesz; Rudin, 1976, 5.12. tétel).

5.3. példa. Több megoldás van. $\dot{x} = x^{2/3}$, $x_0 = 0 \Rightarrow x(t) = 0$ és $x(t) = (t/3)^3$.

5.4. példa. A megoldás értelmezési tartománya korlátos. $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 \Rightarrow x(t) = -1/(t - 1/x_0)$, ahol $0 \le t < 1/x_0$.

Ha már ismerjük a megoldást, akkor behelyettesítéssel igazolható, hogy a szóban forgó függvény tényleg megoldás. Számos fogás ismeretes a megoldás megkeresésére, ezzel a kérdéskörrel azonban alig foglalkozunk. Mivel sok differenciálegyenletnek nincs zárt alakú megoldása (elemi függvényekkel), gyakran kell numerikus közelítő megoldásra szorítkoznunk. (Ilyen problémával már az integrálásnál is találkozhatunk, például a Gauss-féle Φ hibafüggvény sem elemi függvény.) Ezért is fontos, hogy kvalitatív eredményeink legyenek a differenciálegyenletek megoldásairól. Most két olyan differenciálegyenletet mutatunk be, amelynek nincs zárt alakú megoldása.

5.5. példa. Nincs zárt alakú megoldás (Arnold, 1984, 6.6.). Az $\dot{x} = x^2 - t$ egyenlet megoldása nem írható föl explicite, kizárólag elemi függvények segítségével.

5.6. példa. A matematikai inga egyenlete. Legyen a nehézségi gyorsulás g, az inga hossza L és a pillanatnyi szög $x(t)$. Fizikai törvények szerint $y(t)$ kielégíti a következő másodrendű nemlineáris differenciálegyenletet: $\ddot{y} = -B \sin y$, ahol $B = L/g$, $y_0 = A$, $\dot{y}_0 = 0$. Ennek az egyenletnek sincs zárt megoldása, de tapasztalatból is tudjuk, matematikailag is igazolható, hogy periodikus a megoldása: $y(t) = y(t - P_A)$, ahol P_A az A-tól függ.

Egzisztencia és unicitás

A(z ellen)példák áttekintése után pozitív tételekkel folytatjuk az ismertetést. Föltesszük, hogy $x_0 \in \mathcal{X}$, megengedett kezdeti feltétel. Kezdjük egy egzisztencia-tétellel.

5.1. tétel. *(Cauchy és Peano egzisztencia-tétele, 19. század, illetve 1890.) Ha $f(t,x)$ a $T \times \mathcal{X}$ tartományon folytonos, akkor minden megengedett kezdeti értékre létezik legalább egy megoldás a megfelelő J részintervallumon.*

Bizonyítás helyett.* Az általános bizonyítás mély matematikai meggondolásokat igényel. Az Eulertől származó alapötlet azonban könnyen elmagyarázható, és a sokáig mostohán kezelt differenciaegyenletekkel való közelítésen alapul. Osszuk föl a $\mathbf{T}$ időtartományt k db $h = T/k$ egyenlő hosszúságú részre! Az osztópontokat jelöljük $t_{k,i}$-vel! Az f függvény folytonossága miatt vélhetőleg nem követünk el nagy hibát, ha a $\mathbf{T}_{k,i} = (t_{k,i-1},t_{k,i})$ intervallumban $f(t,x)$-et a rögzített $f(t_{k,i-1},x_{k,i-1})$-gyel helyettesítjük. Ekkor az $x_k(t) = x_k(t_{k,i-1}) + f(t_{k,i-1},x_{k,i-1})(t - t_{k,i-1})$ törtvonal adódik közelítő megoldásként $\mathbf{T}_{k,i}$-n. Ha $k \to \infty$, akkor egy mély matematikai tétel (Rudin, 1976, 7.23. tétel) szerint kiválasztható legalább egy olyen részsorozat, amelyre szorítkozva $x_k(t)$ minden $t \in \mathbf{T}$-re tart az $x(t)$ függvényhez, amely (5.1)-nek megoldása. ∎

Az 5.5. példában szereplő differenciálegyenletet az $x_0 = 1$ kezdeti feltétellel $k = 20$ mellett a $[0;1]$ időintervallumban a fenti módszerrel megoldottuk, s az 5.1. ábrán mutattuk be.

5.1. feladat. Töröttvonalas közelítés. Bizonyítsuk be, hogy adott t-re az 5.1. példában szereplő $\dot{x} = \lambda x$, $x_0 = 1$ differenciálegyenlet *a)* k-részes töröttvonalas megoldása $x_k(t) = (1 + \lambda t/k)^k$ és *b)* $k \to \infty$ esetén tart $e^{\lambda t}$-hez! (Megjegyezzük, hogy az egész $[0,t]$ szakaszon vett közelítő megoldások konvegálnak a pontos megoldáshoz. Pontosabb közelítéshez a függvényeket nem lineárisan, hanem magasabb fokú polinommal közelítjük.)

Az 5.1. példában szereplő differenciálegyenletet $\lambda = -1$ és 1 paraméterértékre az $x_0 = 1$ kezdeti feltétellel $k = 20$ és 40 mellett a $[0;1]$ időintervallumban a fenti módszerrel megoldottuk és összevetettük az elméletileg ismert pontos megoldással. Az 5.2 és 5.3. ábrán látható, hogy a durvább közelítés rosszabb, a finomabb jobb.

Az 5.3. példa szerint a megoldás egyértelműségének kimondásához a jobb oldal folytonosságánál szigorúbb feltevésre lesz szükség. Egy $f(t,x)$ függvényt *Lipschitz-tulajdonságú*nak nevezünk a $\mathbf{T} \times \mathcal{X}$ halmazon, ahol $\mathcal{X}$ egy $\mathbf{R}^n$-beli konvex tartomány, ha tetszőleges $x,y \in \mathcal{X}$-re és alkalmas K számra teljesül $||f(t,x) - f(t,y)|| < K||x - y||$. A Lagrange-féle középértéktételből látható, hogy egy kompakt halmazon a Lipschitz-tulajdonság következik az f függvény simaságából. Figyelemre méltó, hogy $K < 1$ esetén a Lipschitz-feltétel (amelyet általánosan 1876-ban éppen az egyértelműség miatt vezetett be Lipschitz) a kontrakciót adja [(3.2)].

5.2. tétel. *(Picard és Lindelöf unicitási tétele, 1890, illetve 1894.) Ha az $f(t,x)$ függvény a $\mathbf{T} \times \mathcal{X}$ tartományon folytonos és x-ben Lipschitz-tulajdonságú, akkor (5.1) megoldása minden megengedett kezdőértékre egyértelmű egy alkalmas J részintervallumon.*

Megjegyzés. Differenciálegyenletek elméletében nagyon fontos és a bizonyításból könnyen kiolvasható, hogy adott t időre az $x(t,x_0)$ *megoldás folytonosan függ a kezdőértékektől.* A kaotikus viselkedésnél azonban ez a függés nagyon gyorsan gyöngül az idővel!

Bizonyítás helyett. Az általános bizonyítás mély matematikai meggondolásokat igényel (Pontrjágin, 1961), az alapötlet azonban könnyen elmagyarázható. Először differenciálegyenletünket egy ekvivalens integrálegyenletként írjuk át (vö. Newton–Leibniz-szabály):

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f[\tau,x(\tau)]\,d\tau. \tag{5.2}$$

Legyen $x_k(t)$ folytonos függvény az integrálegyenlet k-adik közelítő megoldása ($x_0(t) \equiv x_0$). Tekintsük a folytonos függvények $C[J]$ absztrakt terét, melynek az x_k függvény absztrakt eleme. Ekkor a $(k+1)$-edik közelítő megoldást a 3.1. alfejezet általános kontrakció-elvében szereplő iteráció szerint számítjuk ki:

$$x_{k+1}(t) = x(0) + \int_0^t f[\tau,x_k(\tau)]\,d\tau, \qquad \text{ahol} \qquad x_0(t) \equiv x_0. \tag{5.3}$$

Megmutatható, hogy megfelelően kicsiny J időintervallumon az $x_{k+1} = \phi(x_k)$ leképezés kontrakció, azaz létezik egyetlen fixpontja, nevezetesen az integrálegyenlet megoldása. ∎

Megoldási módszerek

A most leírt *fokozatos megközelítés módszere* tetszőleges sima függvényre numerikus közelítésként alkalmazható. (Ezen a ponton le kellett mondanunk arról az általános elvünkről, hogy a diszkrét idejű rendszer lépéseit ugyanúgy t-vel jelöljük, mint a folytonos idejű rendszer időváltozóját.)

5.2. feladat. A fokozatos megközelítés módszere. Mutassuk meg, hogy *a)* a fokozatos megközelítés módszerének k-adik lépése az 5.1. példánál $x_0 \equiv 1$ mellett az $e^{\lambda t}$ függvény k-adfokú Taylor-polinomját adja:

$$x_k(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda t)^j}{j!},$$

b) amely tart az $e^{\lambda t}$ megoldáshoz! Az 5.4. ábrán a $k = 1$, 2 és 4 közelítést, valamint a pontos megoldást mutatjuk be! Figyeljük meg, hogy $\lambda > 0$ esetén minél távolabb kerülünk a kezdeti értéktől, annál nagyobb a hiba!

5.3. feladat. Nincs Lipschitz-tulajdonság. Mutassuk meg, hogy az 5.3. példában szereplő $f(x) = x^{2/3}$ függvény $x = 0$-ban nem Lipschitz-tulajdonságú!

Az általános tételek ismertetése után most bemutatjuk a két legegyszerűbb differenciálegyenlet-típus megoldását.

5.3. tétel. *Egyszerű integrálhatóság. Ha $f(t,x)$ független x-től: $\dot{x} = f(t)$, akkor az (5.1) differenciálegyenlet-rendszer egyszerűen integrálható:*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{5.4}$$

Bizonyítás. Az (5.2) integrálegyenletből következik. ∎

Megjegyzések. 1. A tétel látszólag n dimenzióra vonatkozik, valójában azonban n független skalár egyenletről van szó.

2. Ebben az esetben az 5.2. tételben leírt fokozatos megközelítés az első lépésben megadja a pontos eredményt, további lépésekre nincs szükség.

5.7. példa. Szabadesés. A fizikából Galilei óta ismeretes, hogy a homogén gravitációs térben szabadon eső test sebessége az időnek lineáris függvénye: $\dot{x} = \dot{x}_0 + gt$. Ekkor (5.4) miatt az út–idő függvény $x(t) = x_0 + \dot{x}_0 t + gt^2/2$.

A következő tétel az előzőnél jóval általánosabb.

5.4. tétel. *Szétválasztható változójú egyenlet. Legyen $n = 1$. Ha $f(t,x) = a(t)b(x)$ alakú, és nincs gyöke egy bizonyos téglalapon, akkor az (5.1) differenciálegyenlet megoldása a téglalapon fekvő $(0,x_0)$ kezdeti feltétel mellett a következőképp kapható meg:*

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{1}{b(\xi)}\,d\xi = \int_0^t a(\tau)\,d\tau. \tag{5.5}$$

Megjegyzés. $b(x) \equiv 1$ esetén visszakapjuk az 5.3. tételt.

Bizonyítás. Formálisan írjuk föl törtként az $\dot{x}$ deriváltat: dx/dt és vigyük a bal oldalra az x-es tényezőket, jobb oldalra pedig a t-s tényezőket: $dx/b(x) = a(t)dt$! Tegyük föl, hogy mindkét oldal integrálható 0 és t (azaz x_0 és $x(t)$) között! Elvégezve az integrálást, adódik az állítás. Differenciálással belátható, hogy a heurisztikusan kapott implicit egyenlet tartalmazza a megoldást. ∎

5.4. feladat. Az 5.4. tétel segítségével vezessük le az 5.1., az 5.3. és az 5.4. példa (már igazolt) megoldását!

Két közelítő módszer bemutatása után ismertetünk egy harmadikat is. Már a differenciálegyenletek elméletének úttörője, Newton is tudta, hogy egy analitikus jobb oldalú differenciálegyenlet megoldását célszerű hatványsor-alakban keresni. Ezt szemlélteti az

5.8. példa. Hatványsor. Az 5.1. feladat megoldását az $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ alakban keressük. $\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1} t^k$. Behelyettesítve az egyenlet két oldalába és a t^k együtthatóit egyenlővé téve: $(k+1)a_{k+1} = \lambda a_k$. Az $x(0) = a_0 = 1$ kezdeti feltétel mellett $a_k = \lambda^k/k!$

A differenciálegyenletek numerikus megoldása nem tárgya könyvünknek, csak utalunk például Ralston (1965) 5. fejezetére.

Stacionárius pont és stabilitás

Az egyszerűség kedvért a továbbiakban csak olyan rendszereket vizsgálunk, amelyek explicite nem függenek az időtől, *autonómak*:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x). \tag{5.6}$$

A dinamikus rendszerekben kitüntetett szerepet játszik a stacionárius (egyensúlyi, normál) pont.

Egy x^{o} pontot az f rendszer *stacionárius pontjá*nak nevezünk, ha belőle indítva a rendszert, az mindig ott is marad. Képletben:

$$\text{Ha} \qquad x_0 = x^{\mathrm{o}}, \qquad \text{akkor} \qquad x(t) = x^{\mathrm{o}}, \quad t \in \mathbf{T},$$

azaz

$$f(x^{\mathrm{o}}) = 0. \tag{5.7}$$

Megismételjük a stacionárius pont stabilitásáról szóló definíciókat, amelyeket az 1.1. alfejezetben ismertettünk.

1. Egy x^{o} stacionárius pontot *Ljapunov-stabil*nak nevezünk, ha hozzá elegendő közeli bármely x_0 kezdőállapotból induló pálya az x^{o}-hoz mindvégig közel marad. Képletben: tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$ szám, hogyha $||x_0 - x^{\mathrm{o}}|| < \delta$, akkor $||x(t) - x^{\mathrm{o}}|| < \varepsilon$ tetszőleges t-re.

2. Az (5.2) rendszer Ljapunov-stabil x^{o} stacionárius pontját *lokálisan (aszimptotikusan) stabil*nak nevezzük, ha x^{o}-hoz elegendő közeli bármely x_0 kezdőállapotból induló pálya az x^{o}-hoz tart.

3. *Globális stabilitás*ról beszélünk, ha majdnem minden x_0 induló állapot egy és ugyanazon stacionárius ponthoz tartó pályát származtat. (A rendszer többi stacionárius pontját természetesen ki kell zárni az induló állapotok közül, lásd 3.3. példa.)

4. Egy stacionárius pontot (aszimptotikusan vagy Ljapunov-értelemben) *instabil*nak nevezünk, ha nem (aszimptotikusan vagy Ljapunov)-stabil.

A következő példa megmutatja, hogy miért nem elegendő a konvergencia a Ljapunov-stabilitás nélkül az aszimptotikus stabilitás definíciójában.

5.9. példa. (Vö. 1.4. példa.) Konvergencia Ljapunov-stabilitás nélkül. Tekintünk egy polárkoordinátákkal megadott síkbeli rendszert: $\dot{r} = r(1-r)$, $\dot{\vartheta} = r\vartheta$, ahol $r > 0$, $0 \le \vartheta \le 2\pi$. Könnyen belátható, hogy az állandósult állapot $(1{,}0) = (1{,}2\pi)$, amelyhez minden pálya konvergál, de hiába van akármilyen közel a ϑ_0 kezdőállapot 0-hoz, $\dot{\vartheta} > 0$, tehát a rendszer egy teljes fordulatot tesz, mielőtt eljut az állandósult állapotba.

5.2. LINEÁRIS RENDSZEREK

Mielőtt érdemben folytatnánk az általános nemlineáris vizsgálatot, célszerű elemezni a legegyszerűbb – lineáris – dinamikus rendszereket.

Inhomogén egyenletrendszer

Az (5.6) rendszert *lineáris*nak nevezzük, ha az f függvény lineáris. Ekkor van olyan $n \times n$-es M mátrix és n-dimenziós w vektor, amelyre $f(x) = Mx + w$. Ekkor (5.6) a következő alakot ölti:

$$\dot{x} = Mx + w. \tag{5.8}$$

Röviden utalunk a differenciálegyenlet-rendszer koordinátás alakjára:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_j(t) + w_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.8′}$$

ahol $M = (m_{ij})$ az M transzformáció mátrixa a rögzített koordináta-rendszerben és $w = (w_i)$ a megfelelő koordinátázott vektor.

A stacionárius pont implicit egyenlete

$$0 = Mx^{\mathrm{o}} + w, \tag{5.8°}$$

azaz megfelelő regularitási feltételek mellett explicitté tehető:

$$x^{\mathrm{o}} = -M^{-1} w. \tag{5.9}$$

A differenciaegyenletekkel való párhuzam jobban kidomborodna, ha (5.8) helyett az

$$\dot{x} = (M - I)x + w. \tag{5.8*}$$

alakú egyenletet írnánk (vö. (5.9) és (1.3)). Ez azonban szokatlan lenne, és csak feleslegesen bonyolítaná a képleteket.

Homogén egyenletrendszer

Vezessük be az

$$x^{\mathrm{d}} = x - x^{\mathrm{o}} \tag{5.10}$$

eltérésváltozót, és vonjuk ki (5.8)-ból (5.8°)-t:

$$\dot{x}^{\mathrm{d}} = Mx^{\mathrm{d}}. \tag{5.11d}$$

Szóban: az eltérésváltozók kielégítik azt a homogén rendszert, amely az inhomogén (5.8) rendszerből az additív állandó elhagyásával keletkezik.

A továbbiakban a homogén rendszerrel foglalkozunk, s rövidség kedvéért elhagyjuk a $^{\mathrm{d}}$ felső indexet, (azt is mondhatjuk, hogy $w = 0$). A hivatkozások kedvéért új alakjában újra fölírjuk az (5.11$^{\mathrm{d}}$) egyenletet:

$$\dot{x} = Mx. \tag{5.11}$$

A skalár esetben ismert, hogy (5.11) megoldása $x(t) = e^{Mt}x(0)$ (vö. 5.1. példa). Kérdés: lehet-e ezt általánosítani tetszőleges M mátrixra? Válasz: lehet, de előbb definiálni kell egy tetszőleges kvadratikus mátrix exponenciális függvényét [(A.6)]:

$$e^{tM} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tM)^k}{k!}. \tag{5.12}$$

A mátrixértékű hatványsorok elmélete szerint a mátrixexponens az idő szerint differenciálható, és az összegzés és a deriválás sorrendjének felcseréléséből adódik a skalárokra ismert $d\{e^{tM}\}/dt = Me^{tM}$ összefüggés. Most már kimondható az

5.5. tétel. *A megoldás teljes folytathatósága. Az (5.11) autonóm homogén lineáris rendszer x_0 kezdeti feltételhez tartozó egyértelmű megoldása a teljes félegyenesen folytatható, s a következő alakú:*

$$x(t) = e^{Mt}x_0, \quad t \geq 0. \tag{5.13}$$

Most bemutatjuk a mátrixexponens kiszámításának a módszereit.

Sajátértékek és sajátvektorok

Akárcsak a differenciaegyenleteknél, a differenciálegyenleteknél is általában lehetetlen $x(t)$-t (5.12)–(5.13)-mal, mátrix-hatványozással kiszámítani. Lineáris algebrából azonban ismert, hogy M sajátértékei és sajátvektorai segítségével e^{tM} viszonylag egyszerűen fölírható. Szükségünk lesz az M mátrix karakterisztikus polinomjára:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M). \tag{5.14}$$

Ismert, hogy a $P(\lambda)$ polinomnak multiplicitással n (valós vagy komplex) gyöke van, melyek M sajátértékei.

$$P(\lambda_j) = 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{5.15}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy létezik n darab lineárisan független, n-dimenziós sajátvektor, s_j,

$$Ms_j = \lambda_j s_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.16}$$

azaz, hogy van sajátbázis, amelyben a kezdőállapot egyértelműen fölírható:

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j s_j. \tag{5.17}$$

Fölhasználva, hogy $M^t s_j = \lambda_j^t s_j$ és

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

(5.12), (5.13), (5.16) és (5.17) a következő összefüggést adja:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e^{\lambda_j t} s_j. \tag{5.18}$$

Ezzel igazoltuk a következő tételt.

5.6. tétel. *Ha létezik az M mátrix sajátbázisa, és az s_j sajátvektorok ($j = 1, \ldots, n$) segítségével a homogén megoldás kezdőértékét (5.17) szerint fölírjuk, akkor a λ_j sajátértékeket bevonva, (5.18) adja a homogén megoldás tetszőleges időpontbeli értékét.*

Megjegyzés*. Egy sajátvektorhoz tartozó r-szeres többszörös gyök esetén az $e^{\lambda t}$ tag mellé $t^j e^{\lambda t}$, $j = 1, 2, \ldots, r-1$ tagok lépnek.

Megemlítjük, hogy bizonyos értelemben a karakterisztikus polinom alkalmazása az n-változós elsőrendű rendszert n-edrenú egyváltozós rendszerre vezeti vissza, megfordítva a fejezet elején leírt eljárás irányát.

Komplex sajátértékek

Az (5.18) egyenlet közvetlenül hasznosítható, ha M összes sajártértéke valós. Mi történik azonban, ha vannak komplex sajátértékek? Mivel az M mátrix elemei valósak, a $P(\lambda)$ polinom együtthatói is valósak. Jól ismert elemi algebrai tétel szerint ekkor minden komplex sajátérték komplex konjugáltjával együtt fordul elő. Meglehetősen hosszadalmas érveléssel belátható, hogy ekkor minden s sajátvektor és ξ koordináta is konjugált párjával együtt van jelen, s végül is a komplex számok eltüntethetők.

$$x_0 = \xi s + \bar{\xi}\bar{s}. \tag{5.17*}$$

$$x(t) = e^{\lambda t}\xi s + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\xi}\bar{s}. \tag{5.18*}$$

Az Euler-képlet értelmében

$$e^{\lambda t} = e^{\mathbf{Re}\lambda t}(\cos\varphi t + i\sin\varphi t), \quad \varphi = \mathbf{Im}\lambda. \tag{5.19}$$

ahol $\mathbf{Re}z$ és $\mathbf{Im}z$ rendre egy komplex z szám valós és képzetes részét jelöli. (5.17*), (5.18*) és (5.19) implikálja az 1.3. tétel folytonos idejű megfelelőjét.

5.7. tétel. *Ha az M mátrixnak egyszerű komplex sajátértéke–sajátvektora van: λ és s, akkor a megfelelő blokk-megoldás (A. függelék)*

$$x(t) = 2e^{\mathbf{Re}\lambda t}(\mathbf{Re}s\cos\varphi t - \mathbf{Im}s\sin\varphi t).$$

A következő feladat az 5.7. tétel legegyszerűbb szemléltetése.

5.5. feladat. (Vö. 1.8. példa.) $\dot{x} = Mx$ ahol

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{és} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Igazoljuk, hogy $x_1(t) = \cos t$ és $x_2(t) = -\sin t$!

Nemcsak szemléltetésként, de gyakorlati alkalmazásokban is fontos az

5.10. példa. Másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Az $\ddot{y}+\alpha\dot{y}+\beta y = 0$ egyenlet kétféleképpen is megoldható.

a) Visszavezetés elsőrendű síkbeli rendszerre. Legyen $x_1 = y$ és $x_2 = \dot{y}$. Ekkor $\dot{x}_1 = \dot{y} = x_2$ és $\dot{x}_2 = \ddot{y} = -\alpha\dot{y} - \beta y = -\alpha x_2 - \beta x_1$. Ekkor $n = 2$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}.$$

b) Komplex amplitúdók módszere. Keressük a megoldást $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ alakban! Deriváljuk a feltételezett megoldást, helyettesítsük be a differenciálegyenletbe és osszunk le $y_0 e^{\lambda t}$-vel: a $\lambda^2+\alpha\lambda+\beta = 0$ másodfokú (karakterisztikus) egyenletet kapjuk. Komplex gyökök esetén a folytatást mindkét esetben az 5.7. feladatban ismertetett módon kell elvégezni. $\alpha = 0$, $\beta > 0$ esetén $y(t) = A\cos(\varphi t + \delta)$, ahol A, φ és δ valós állandók.

Stabilitás, instabilitás

Lineáris rendszerek esetén viszonylag egyszerűen megadhatók a stabilitás feltételei.

5.8. tétel. *Lineáris stabilitás. A folytonos idejű (5.11) lineáris rendszer akkor és csak akkor stabil, ha* $\mathbf{Re}\lambda_j < 0$ *teljesül,* $j = 1, \ldots, n$.

Bizonyítás. Egyszeres sajátértékek esetén (5.18) alkalmazható. Eszerint $x(t)$ akkor és csak akkor tart nullához, ha minden sajátérték-exponens nullához tart. Valós sajátértékekre ez azt jelenti, hogy $\lambda_j < 0$. Komplex sajátértékpárnál (5.19) szerint a sajátérték valós részének kell kisebbnek lennie, mint 0. Végül ha egy sajátvektorhoz egy sajátérték többszörösen tartozik, akkor a pótlólagos tagok is pontosan akkor tartanak nullához, ha $\mathbf{Re}\lambda_j < 0$ teljesül. ∎

Megjegyzések. 1. A globális és a lokális stabilitás a folytonos idejű lineáris rendszereknél is ekvivalens.

2. Ha $\mathbf{Re}\lambda_j \le 0$ és például $\mathbf{Re}\lambda_1 = 0$, akkor multiplicitás nélküli domináns gyökpár esetén Ljapunov-stabilitás igazolható, többszörös domináns gyök esetén instabilitás. Ha például $\mathbf{Re}\lambda_1 > 0$, akkor a rendszer robbanó, legalábbis majdnem minden kezdőállapotra.

3. Diszkrét idejű rendszereknél azokat a mátrixokat neveztük stabilaknak, melyek sajátértékei a nyílt egységkörbe esnek. Folytonos idejű rendszereknél azokat a mátrixokat nevezzük *stabilak*nak, melyek sajátértékei a nyílt bal félsíkba esnek. A következőkben vázoljuk, hogy mi a kapcsolat a két eredmény között. Általánosítva az 5.1. feladatot, az $\dot{x} = Mx$ differenciálegyenlet-rendszer közelíthető az $x_{(k+1)h} = (I + hM)x_{kh}$, $k = 0, 1, \ldots$ differenciaegyenlet-rendszerrel, ahol h egy megfelelően kicsiny pozitív valós szám. A folytonos idejű rendszer λ_j sajátértékének a diszkrét idejű rendszer $1 + h\lambda_j$ sajátértéke felel meg. Könnyen belátható, hogy ekkor $\mathbf{Re}\lambda_j < 0$ ekvivalens az $|1+h\lambda_j| < 1$ feltétellel.

Az 1.3. ábrához hasonlóan most az 5.5. ábrán szemléltetjük a sajátértékeken alapuló osztályozást.

Feladatként mondjuk ki az 1.12. példa megfelelőjét.

5.6. feladat. Stabilitás. Mutassuk meg, hogy az $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$ *másodrendű lineáris differenciálegyenlet* akkor és csak akkor stabil, ha $\alpha,\beta > 0$!

Mind a mechanikai, mind a közgazdasági alkalmazásoknál fontos szerepet játszanak a nyeregpontok. Itt csak a legegyszerűbb esetet mutatjuk be.

5.11. példa. Nyeregpont. Legyen $n = 2$ és M egyik sajátértéke negatív, a másik pozitív: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, s_1 és s_2 sajátvektorral! Ekkor az $x^o = 0$ stacionárius pont nyeregpont: az $x_0 = \xi_1 s_1$ kezdőállapotból induló rendszerek stabilak, az $x_0 = \xi_2 s_2$ kezdőállapotból induló rendszerek instabilak.

Globális stabilitás

Rátérünk a nemlineáris (differenciálegyenlet-)rendszerek elemzésére.

Mindenekelőtt mutatunk egy elemi példát.

5.12. példa. Lokálisan stabil, de globálisan instabil rendszer. $\dot{x} = -x + x^2$ egy nemlineáris differenciálegyenlet. Stacionárius pontok: $x = 0$ és $x = 1$. Mivel $x(t) < 0$ esetén $x(t)$ nő, $0 < x(t) < 1$ esetén pedig $x(t)$ csökken, az $x^o = 0$ stacionárius állapot lokálisan aszimptotikusan stabil az $-\infty < x_0 < 1$ indulóállapotokra. Hasonlóan belátható, hogy $1 < x_0 < \infty$ indulóállapotokra $x(t)$ nő, tehát a végtelenbe távozik, instabil.

Tárgyalásunkat most a globális stabilitás elemzésével kezdjük. Egy Ljapunovtól származó módszert ismertetünk. Föltesszük, hogy egyetlen stacionárius pont van: x^o. Először definiáljuk az (5.6) differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó *Ljapunov-függvényt*. Tegyük föl, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldása egy kompakt (korlátos és zárt) halmazban fekszik. Tegyük föl, hogy van egy olyan $V(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényünk, amely (i) egyetlen globális minimumát az x^o stacionárius pontban éri el és (ii) a stacionárius pálya kivételével minden pályán csökken: $dV[x(t)]/dt < 0$ minden $x(t) \neq x^o$-ra.

Megjegyzések. 1. Figyeljük meg, hogy $\dot{V}(x)$ egy sor- és egy oszlopvektor skalár szorzata: $\dot{V}(x) = V_x(x)\dot{x}$!

2. Általában nehéz Ljapunov-függvényt találni, de az 5.10. tételben és a 6.3. alfejezetben egyszerű kvadratikus alakokkal célhoz érünk.

5.9. tétel. *(Ljapunov-tétele a globális stabilitásról.) Az (5.6) nemlineáris rendszer globálisan stabil az $x^o = 0$ pontban, ha van Ljapunov-függvénye.*

Bizonyításvázlat. Indirekt módon bizonyítunk. Egy x_0 kezdőállapotból indított rendszer pályáját most a teljesebb $x(t,x_0)$ képlettel jelöljük. Mivel a megoldási pálya kompakt halmazban tartózkodik, kiválasztható az időpillanatoknak egy olyan $\{t_k\}$ sorozata, amelyben a pálya egy x^1 állapothoz tart: $\lim_{k\to\infty} x(t_k,x_0) = x^1 \neq x^o$. A monotonitás miatt $V[x(t_k,x_0)] > V[x(t_{k+1},x_0)]$, $k = 1, 2, \ldots$, a folytonosság miatt $\lim_{k\to\infty} V[x(t_k,x_0)] = V[x^1]$. Fennáll

$$V[x(t_k,x_0)] > V[x^1], \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.20}$$

Indítsuk el a rendszert x^1-ből és válasszunk ki egy másik konvergens $\{x(u_k,x^1)\}_k$ részsorozatot, amely x^2-höz konvergál: $\lim_{k\to\infty} x(u_k,x^1) = x^2 \neq x^1$. (5.20)-hoz hasonlóan

$$V(x^1) > V(x^2). \tag{5.21}$$

A dinamikus rendszerekre jellemző a következő azonosság: $x(t+u,x_0) = x[u,x(t,x_0)]$. Tekintsük az előző két sorozatból kombinált $\{x(t_k+u_k,x_0)\}_k$ vektorsorozatnak a V-képeként kapott

$$V[x(t_k+u_k,x_0)] = V[x(u_k,x(t_k,x_0))], \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{5.22}$$

számsorozatot. Minden k természetes számra van olyan K természetes szám, amelyre fennáll $t_k + u_k < t_K$, azaz $V[x(t_k + u_k, x_0)] > V[x(t_K, x_0)] > V(x^1)$. Ugyanakkor van olyan rész-részsorozat (nem jelöljük külön), amelyre $\lim_{k\to\infty} V[x(u_k, x(t_k, x_0))] = V(x^2)$.

Tehát megfelelően nagy k-ra (5.22) bal oldalán $V(x^1)$-nél nagyobb, bal oldalán $V(x^1)$-nél kisebb szám áll – ellentmondás. ∎

A következő példa ragyogóan szemlélteti a Ljapunov-függvény alkalmazását.

5.13. példa. (Hahn, 1967, 77. o.) Tekintsünk a következő síkbeli differenciál-egyenlet-rendszert:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \kappa x_1(x_1^2 + x_2^2) \qquad \text{és} \qquad \dot{x}_2 = -x_1 + \kappa x_2(x_1^2 + x_2^2).$$

A $V(x_1, x_2) = [x_1^2 + x_2^2]/2$ Ljapunov-függvény segítségével bebizonyítjuk, hogy a rendszer *a)* $\kappa < 0$-nál stabil és *b)* $\kappa > 0$-nál instabil. Valóban, $dV(x_1, x_2)/dt = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = x_1[x_2 + \kappa x_1(x_1^2 + x_2^2)] + x_2[-x_1 + \kappa x_2(x_1^2 + x_2^2)] = 2\kappa V(x_1, x_2)^2$ *a)* negatív és *b)* pozitív. $\kappa = 0$-nál visszakapjuk az 5.5. feladat egyszerű ciklusát.

Lokális stabilitás

Most rátérünk a lokális stabilitás tárgyalására. Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható függvény az $x^o = 0$ egyensúlyi pontban, azaz (5.7): $0 = f(0)$; és legyen

$$M = \mathbf{D}f(0), \tag{5.23}$$

ahol $\mathbf{D}$ a differenciál-operátor! Ekkor az $\dot{x} = Mx$ [(5.11)] rendszert az (5.6) rendszer *linearizált rész*ének nevezzük.

Most már kimondhatjuk az 5.8. tétel általánosítását:

5.10. tétel. *(Perron tétele a lokális stabilitásról.) Az (5.6) nemlineáris rendszer lokálisan (aszimptotikusan) stabil az $x^o = 0$ pontban, ha a linearizált rész (aszimptotikusan) stabil.*

Bizonyításvázlat. (Zalai, 1989, a 7. fejezet függeléke.) Két lépésben bizonyítunk. (i) Mivel az M mátrix stabil, van olyan V szimmetrikus pozitív definit mátrix, melyre $V(x) = x^{\mathbf{T}}Vx$ kvadratikus alak Ljapunov-függvény az (5.11) linearizált rendszerre. (ii) A 0 megfelelően kicsiny környezetére $V(x)$ Ljapunov-függvény az eredeti (5.6) nemlineáris rendszerre is.

Ad (i) Ismert az a lineáris algebrai tétel, hogy bármely M mátrix a koordinátarendszer megfelelő elforgatásával felsőháromszög-mátrixszá alakítható: $N = S^{-1}MS$, $y = S^{-1}x$ unitér transzformációval ($SS^{\mathbf{T}} = I$). (5.6) helyett

$$\dot{y} = Ny + b(y), \qquad \text{ahol} \qquad \lim_{y\to 0} \frac{|b(y)|}{|y|} = 0.$$

Sőt, tetszőleges $\varepsilon > 0$ számnál elérhető, hogy N főátlója fölötti elemei abszolút értékének összege kisebb legyen, mint ε. A továbbiakban tegyük föl, hogy M eleve ilyen alakú.

Ad (ii) Legyen $V(x) = x^{\mathbf{T}}x$ egy kvadratikus alak, amelyről belátjuk, hogy lokálisan Ljapunov-függvény. Deriváljuk $V(x)$-et idő szerint, helyettesítsük be az (5.6) differenciálegyenletet és rendezzük:

$$\frac{dV(x)}{dt} = \dot{x}^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}\dot{x} = [Mx + b(x)]^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}[Mx + b(x)] =$$
$$= x^{\mathbf{T}}M^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}Mx + b(x)^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}b(x).$$

A nemlineáris tagok könnyen becsülhetők: $|x^{\mathbf{T}}b(x)| < |x|\,|b(x)|$ tart nullához, ha x tart 0-hoz. A kvadratikus tagokat koordinátás alakba írjuk át.

$$x^{\mathbf{T}}M^{\mathbf{T}}x + x^{\mathbf{T}}Mx = \sum_i \sum_j (\bar{x}_i m_{ji} x_j + \bar{x}_i m_{ij} x_j) < \sum_i \bar{x}_i(\lambda_i + \bar{\lambda}_i)x_i + 2\varepsilon \sum_i \bar{x}_i x_i.$$

Az 5.8 tétel szerint $\lambda_i + \bar{\lambda}_i = 2\mathbf{Re}\lambda_i < 0$. Ezért $dV(x)/dx < 0$, még akkor is, ha figyelembe vesszük a nemlineáris tagokat. ∎

Megjegyzések. 1.* Figyeljük meg, hogy ezzel a módszerrel az 5.8. tétel a Jordan-alak nélkül is igazolható.

2. Ha az M mátrixnak legalább egy sajátértéke pozitív, akkor a rendszer instabil.

3. Az 5.13. példa megmutatta, hogy a határesetben, amikor a linearizált rész csak Ljapunov-stabil, a nemlineáris rendszer aszimptotikusan instabil is lehet ($\kappa > 0$-nál) és aszimptotikusan stabil is lehet ($\kappa < 0$-nál).

Ciklus és káosz

Eddig megelégedtünk a stacionárius pont stabilitásának vizsgálatával. Miért hallgatunk a 3. ikerfejezetben oly sokat taglalt ciklusokról és káoszról? Ez a hallgatás annál inkább furcsának tűnhet, mert mind a határciklus, mind a káosz kutatása eredetileg folytonos idejű differenciálegyenletek vizsgálatával kezdődött.

5.14. példa. Kis rezgések. Az 5.6. példában vizsgált ingaegyenlet kis kitérések mellett közelítőleg vizsgálható:

(5.24) $$\ddot{y} = -y, \quad y_0 = A, \quad \dot{y}_0 = 0.$$

Egyszerű behelyettesítéssel is igazolható, hogy a megoldás $y(t) = A\cos t$, a periódus pedig $P_0 = 2\pi$.

Galilei azt hitte, hogy a periódus állandó (Simonyi, 1981, 173. o.). Bonyolultabb meggondolásokkal igazolható (Arnold, 1984, 26.7.), hogy a periódus csak jó közelítéssel állandó: $P_A = 2\pi[1 + A^2/16 + O(A^4)]$, ahol $O(A^4)$ egy olyan mennyiség, amelyet A^4-nel osztva, a hányados korlátos marad. Például 30%-os kilengés esetén a periódus mindössze 2%-kal haladja meg az ideálizált periódust, P_0-t (5.10. példa).

A differenciálegyenletek elméletében jól ismert a *síkbeli* határciklus létezésének Poincaré-Bendixson elmélete (Pontrjágin, 1961). Mégsem időzünk el a témakörnél, mert közgazdasági alkalmazásait (lásd H.-W. Lorenz, 1989) vitathatónak tartjuk: nincs késleltetés a beruházási tevékenységben (lásd még Goodwin, 1951).

A káosz modern elmélete egy háromdimenziós differenciálegyenlet-rendszer meteorológiai alkalmazásával kezdődött. E. N. Lorenz (1963) azt vette észre, hogy amikor az eredetileg sokjegy pontossággal megadott kezdőértéket kerekítve vitte be a számítógépbe, a modell „elszállt”.

5.4. SZABÁLYOZÁS FOLYTONOS IDŐBEN

A további alkalmazások kedvéért röviden érintjük a folytonos idejű, differenciálegyenletekkel leírt szabályozásokat.

Szabályozási rendszer

Folytonos idejűre fogalmazzuk át a diszkrét idejű szabályozási rendszer fogalmát, de most nincs szükség az időben állandó szerkezetre. Alapfogalom az n-dimenziós *állapotvektor* és az m-dimenziós *szabályozási (vagy irányítás) vektor*, jelük rendre x és u, valamint az *állapotegyenlet*, amely az állapot változási sebességét az állapot és a szabályozás függvényeként határozza meg:

(5.25) $$\dot{x} = g(t,x,u),$$

ahol g egy $\mathbf{R}^{1+n+m} \to \mathbf{R}^n$ függvény. *Visszacsatolás*ról beszélünk, ha a szabályozás az időn kívül csak a pillanatnyi állapottól függ:

(5.26) $$u = h(t,x),$$

ahol h egy $\mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}^m$ függvény. Az így adódó $\dot{x} = f(t,x)$ egyenletet nevezzük *alapegyenlet*nek:

(5.27) $$\dot{x} = f(t,x) = g[t,x,h(t,x)].$$

Időben változatlan rendszernél a megfelelő egyenletek rendre

(5.25*) $$\dot{x} = g(x,u),$$

(5.26*), $$u = h(x),$$

(5.27*) $$\dot{x} = f(x) = g[x,h(x)].$$

*Stabilizálás*ról beszélünk, ha az (5.26*) visszacsatolás stabilizálja az (5.25*) állapotegyenletet, azaz ha az (5.27*) alapegyenlet stabil. Az alapegyenlet stacionárius megoldása, x^{o}, megadja a stacionárius szabályozást is:

(5.28) $$f(x^{\mathrm{o}}) = 0 \qquad \text{és} \qquad u^{\mathrm{o}} = h(x^{\mathrm{o}}).$$

*Teljesen decentralizált visszacsatolásos szabályozás*ról beszélünk, ha $m = n$ és a visszacsatolás szétesik n független skalár visszacsatolásra:

(5.29) $$u_i = h_i(x_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Elvileg szabályozási rendszernek tekinthetjük a következő rendszert is – megfelelő értelmezési tartományokkal: illetve decentralizált esetben

(5.25′) $$x = g(u),$$

(5.26′) $$\dot{u} = h(x,u);$$

(5.29′) $$\dot{u}_i = h_i(x_i,u_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ilyen rendszerekkel találkozunk a 6.3. alfejezetben.

Lineáris szabályozási rendszer

A továbbiakban szabályozási rendszerek lineáris osztályával foglalkozunk (vö. Martos, 1981). Először előállítjuk az

$$\dot{x} = Ax + Bu + p \tag{5.30}$$

állapotegyenlet megoldását, adott x_0 kezdeti állapot esetén.

A megoldó szorzók módszere most is segít. Szorozzuk be az (5.30) egyenlet mindkét oldalát e^{-At} függvénnyel:

$$e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}[Bu(t) + p]. \tag{5.31}$$

A bal oldal nem más, mint az $e^{-At}x(t)$ szorzat deriváltja, azaz az 5.3. tétel szerint

$$e^{-At}x - x_0 = \int_0^t e^{-A\tau}[Bu(\tau) + p]\, d\tau,$$

amiből rendezéssel adódik a végeredmény:

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}[Bu(\tau) + p]\, d\tau. \tag{5.32}$$

Érdemes megemlíteni, hogy az (5.32) jobb oldalán álló két tagnak szemléletes jelentése van: az első tag az x_0 kezdeti feltételhez tartozó homogén megoldás ($u = p = 0$), a második tag pedig az $x_0 = 0$ melletti inhomogén partikuláris megoldás.

*Lineáris visszacsatolás*ról beszélünk, ha a szabályozási vektor lineáris függvénye az állapotvektornak:

$$u = -Kx + q. \tag{5.33}$$

A 7. fejezetben diszkrét idejű rendszerben ugyan, de látni fogjuk, hogy a kvadratikus célfüggvényű optimális szabályozás (5.33) alakú.

6. FOLYTONOS IDEJŰ MODELLEK

Ebben a fejezetben rátérünk a *folytonos idejű* dinamikus gazdasági rendszerek vizsgálatára. Szemben a korábbi modellekkel, most olyan rendszereket vizsgálunk, ahol kényelmesebb és valóságosabb a folytonos idő feltételezése. Három területet érintünk. A 6.1. alfejezetben a klasszikus és neoklasszikus *növekedéselmélet* első modelljeit vezetjük be. A 6.2.* alfejezetben a lineáris *közgazdasági szabályozáselmélet* legegyszerűbb modelljeit tekintjük át. Végül a 6.3. alfejezetben a *walrasi árigazodás* modelljét elemezzük.

6.1. NÖVEKEDÉSI MODELLEK

Jól ismert, hogy a neoklasszikus elmélet 1870 körüli kialakulásától egészen a II. világháborúig nem sok figyelmet szentelt a növekedés kérdéseinek. Harrod (1939, 1948) diszkrét idejű modellje mellett Domar (1946, 1957) folytonos idejű modellje az első növekedési modellek között foglal helyet. Az imént említett modellek azonban klasszikusak lévén, alig kapcsolódtak a modern közgazdaságtan főáramát képező neoklasszikus közgazdaságtanhoz. Ezért okozott nagy örömöt, amikor Solow (1956) megalkotta a neoklasszikus növekedési modellt. Azóta a növekedéselmélet nagy utat tett meg, de mi csak a két úttörő modellosztállyal tudunk foglalkozni ebben az alfejezetben. A témakörből Szakolczai (1963) és (1967) szerkesztésében gazdag válogatás áll a magyar olvasó rendelkezésére, angol nyelven Sen (1970) ajánlható. A mostanában kialakuló endogén növekedés elméletéről gazdag ismertetést ad Valentinyi (1995).

Egy klasszikus növekedési modell

Domar modelljében végső soron három makrováltozó van: termelés (Y), beruházás (I) és fogyasztás (C). A modell egyenletei a következők.
GDP-azonosság

(6.1) $$Y = C + I;$$

Termelésnövelés

(6.2) $$\dot{Y} = AI, \quad A > 0;$$

Fogyasztási függvény

(6.3) $$C = (1 - s)Y, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Mind A, mind s időben változatlan paraméterek.

Megjegyzés. E modell diszkrét változatának egy módosításával már a 2.1. és a 4.1. alfejezetben találkoztunk.

A jobb megértés kedvéért ketté bontjuk a (6.2) egyenletet:
Állandó termelés–tőke hányados

$$Y = AK. \tag{6.2a}$$

Azonnali tőkeképződés

$$\dot{K} = I. \tag{6.2b}$$

Valóban, deriválva a (6.2a) egyenletet és behelyettesítve a (6.2b)-be, adódik (6.2).

Most csak egyensúlyi pálya létezik. Egyszerű behelyettesítéssel: $I = sY$, azaz a kibocsátás dinamikáját az alábbi állandó-együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet írja le.
Alap differenciálegyenlet

$$\dot{Y} = AsY. \tag{6.4}$$

Az 5.1. példa alapján adódik a

6.1. tétel. *(Domar, 1946.) A (6.4) differenciálegyenlettel leírt klasszikus növekedési modell pályája exponenciális:*

$$Y(t) = Y_0 e^{\Gamma t}, \tag{6.5}$$

ahol Γ *a növekedési ütem:*

$$\Gamma = As. \tag{6.6}$$

Az életben érvényesülő nagyságrendek érzékeltetésére megemlítjük a következő számhármast.

6.1. példa. Numerikus szemléltetés. $s = 0{,}2$; $A = 0{,}25$; $\Gamma = 0{,}05$.

Az összehasonlítás kedvéért oldjuk meg a következő feladatot!

6.1. feladat. Harrod modellje. Írjuk föl a diszkrét idejű késleltetés nélküli klasszikus növekedési feladatot!

Megjegyzés. Felfedezése óta a $\Gamma = As$ képletről nagyon sok közgazdasági vita folyt. Tegyük föl, hogy a munkaerő növekedési üteme ν, a termelékenységé η, ekkor teljes foglalkoztatás esetén a $\Gamma = \nu + \eta$ egyenlőségnek teljesülnie kell. Mi biztosítja ezt az egyenlőséget? A klasszikus elmélet szerint ez csak véletlenül teljesül, s semmi sem biztosítja az egyensúly stabilitását. Harrod (1939) kifejezése szerint az egyensúly borotvaélen táncol. Ezt a problémát oldja meg a neoklasszikus megközelítés.

Egy neoklasszikus növekedési modell

A neoklasszikus megközelítés lényege a termelési tényezők közti sima helyettesíthetőséget kimondó feltevésben rejlik. Tegyük föl, hogy a kibocsátás a tőkén kívül a munkától is függ, ahol $L(t) = L_0 e^{\nu t}$. (A műszaki haladástól eltekintünk.) Neoklasszikus – állandó skálahozadékú – termelési függvény szerint tetszőleges K és L kombinációval előállítható valamilyen kibocsátás: $Y = F(K,L)$. Célszerű az *egy főre jutó* kibocsátásra és tőkére áttérni:

$$y = \frac{Y}{L} \qquad \text{és} \qquad k = \frac{K}{L}. \tag{6.7}$$

Ekkor $Y = F(K,L)$ helyett

$$y = f(k) = F(k,1), \tag{6.8}$$

írható. Feltesszük, hogy

$$f'(\cdot) \quad \text{csökken, valamint} \quad f'(0) = \infty \quad \text{és} \quad f'(\infty) = 0. \tag{6.9}$$

Megtartva a (6.1), (6.2b), (6.3) összefüggéseket, valamint az állandó megtakarítási hányad feltevését, levezethető a következő
nemlineáris alap differenciálegyenlet:

$$\dot{k} = sf(k) - \nu k. \tag{6.10}$$

Valóban:

$$\dot{\left(\frac{K}{L}\right)} = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{I}{Y}\frac{Y}{L} - \frac{K}{L}\frac{\dot{L}}{L} = sy - \nu k.$$

Kimondható a

6.2. tétel. *(Solow, 1956.) A (6.10) differenciálegyenletű neoklasszikus növekedési modell egyetlen stacionárius pontját a következő egyenlet határozza meg:*

$$sf(k^{\mathrm{o}}) = \nu k^{\mathrm{o}}; \quad 0 < k^{\mathrm{o}} < \infty; \tag{6.11}$$

amely globálisan stabil.

Bizonyítás. (6.10)-be behelyettesítve $\dot{k} = 0$-t, adódik (6.11). A konkavitási feltétel miatt éppen egy ilyen pont létezik, mert (6.9) és a l'Hospital-szabály szerint

$$\lim_{k\to 0}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

(6.10) szerint $0 < k < k^{\mathrm{o}}$ esetén $\dot{k} > 0$, $k^{\mathrm{o}} < k < \infty$ esetén $\dot{k} < 0$, azaz k mindkét oldalról tart k^{o}-hoz. A bizonyítás szabatossá tehető a Ljapunov-módszer alkalmazásával. ∎

Bemutatjuk a legegyszerűbb termelésifüggvény-családot.

6.2. példa. Cobb–Douglas-féle termelési függvény. $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ esetén $y = Ak^\alpha$, azaz $k^o = (sA/\nu)^{1/(1-\alpha)}$.

A 6.2. tétel bizonyításának gondolatmenetét szemlélteti a 6.1. ábra az $A = 1$; $\alpha = 0{,}3$; $\nu = 0{,}05$; $s_1 = 0{,}2$ és $s_2 = 0{,}3$ esetben. Vegyük észre, hogy nagyobb beruházási hányadhoz nagyobb egyensúlyi tőkefelszereltség tartozik!

Mi történik, ha elszakadunk az egyensúlytól?

6.2. feladat. (Gandolfo, 1971, 195-196. o.) Számítsuk ki a 6.2. példa nemstacionárius megoldását a következő transzformáció segítségével: $z = k^{1-\alpha}$!

A Bevezetésben éppen a Solow-modellre vonatkozóan idéztük Azariadis (1993) elmarasztaló véleményét az optimális magatartás levezetésének hiányáról. Anélkül, hogy elfogadnánk ezt a bírálatot, megemlítjük, hogy a 8.2. alfejezetben visszatérünk az optimális felhalmozás kérdésére. Itt csak utalunk Phelps (1961)-re, amely *intertemporális* optimalizálás nélkül meghatározta az időben állandó, *aranyszabály* szerinti optimális felhalmozási hányadot.

6.3. tétel. *(Phelps, 1961.) Az egy főre jutó maximális stacionárius egyensúlyi fogyasztás olyan tőke/munka arány mellett valósul meg, ahol a határtermelékenység megegyezik a munkaerő növekedési ütemével:*

(6.12) $$f'(k^o) = \nu.$$

Bizonyítás. $C/L = [F(K,L) - \nu K]/L = f(k) - \nu k$. A maximum szükséges feltétele értelmében a k szerinti deriváltnak el kell tűnnie, azaz $f'(k) - \nu = 0$ adódik. ∎

A 6.3. tételt a legegyszerűbb termelésifüggvény-családon szemléltetjük.

6.3. példa. Cobb–Douglas-optimum. $y = Ak^\alpha$ esetén (6.12) az $\alpha Ak^{\alpha-1} = \nu$ egyenletre egyszerűsödik, ahonnan $k^o = (\alpha A/\nu)^{1/(1-\alpha)}$. A 6.2. példával összevetve: $s^o = \alpha$.

A 6.1. ábra adatain szemléltetjük az optimumot: 6.2. ábra.

Ha föltesszük, hogy a műszaki haladás *Solow-semleges*, azaz minden évben azonos ütemben nő egy adott tőke–munka párhoz tartozó kibocsátás, $\mathbf{F}[t,K(t),L(t)] = e^{\eta t}F[K(t),L(t)]$, akkor a $\Gamma = \nu + \eta$ jelöléssel a meg nem testesült műszaki haladás is modellezhető. Éppen ez volt Solow másik nagy teljesítménye.

6.2.* A KORMÁNYZATI STABILIZÁLÁS MODELLJE

Az előző alfejezetben figyelmen kívül hagytuk Keynes (1936) elméletének egyik híres, ma már erősen vitatott alapgondolatát: a kormányzat aktív politikával stabilizálhatja a magángazdaság viselkedéséből keletkező üzleti ingadozásokat. Most Gandolfo (1971, 5.1. alfejezete) nyomán ismertetjük Phillipsnek (1954) a kormányzati stabilizálásról szóló modelljét. Az egyszerűség kedvéért eltekintünk a növekedéstől, s az egyensúlyi értékeket nullának tekintjük.

A magángazdaság spontán működése

Először a magángazdaság spontán működését írjuk le. Két egyenletünk van: egy keresleti és egy kínálati.
Aggregált túlkereslet

$$D = (1-a)Y - u, \quad 0 < a \le 1, \tag{6.13}$$

ahol D a(z aggregált magán)túlkereslet, a a költési határhajlandóság és u egy egzogén zavar.
Termelési válasz a túlkeresletre

$$\dot{Y} = \alpha(D - Y), \quad \alpha > 0. \tag{6.14}$$

.

Némi számolással $u = 1$ és $Y(0) = 0$ mellett adódik a *magángazdaság spontán viselkedésének alapegyenlete*

$$Y(t) = \frac{e^{-\alpha a t} - 1}{a}. \tag{6.15}$$

(6.15) szerint $\lim_t Y(t) = -1/a$.

Kormányzati stabilizálás

Rátérünk a kormányzati stabilizálás elemzésére. A klasszikus műszaki szabályozáselméletet követve, Phillips három fajta stabilizálási politikát különböztetett meg.
Az arányos stabilizálási politika,
amelynél a kormányzati kiadás arányos és ellentétes előjelű a kibocsátási feszültséggel:

$$G^*_{\mathrm{p}} = -f_{\mathrm{p}} Y, \quad f_{\mathrm{p}} > 0. \tag{6.16}$$

A derivatív stabilizálási politika,
amelynél a kormányzati kiadás arányos és ellentétes előjelű a kibocsátási feszültség változási sebességével:

$$G^*_{\mathrm{d}} = -f_{\mathrm{d}} \dot{Y}, \quad f_{\mathrm{d}} > 0. \tag{6.17}$$

Az integráló stabilizálási politika,
amelynél a kormányzati kiadás arányos és ellentétes előjelű a kibocsátási feszültség integráljával:

$$G^*_{\mathrm{i}} = -f_{\mathrm{i}} \int Y\,dt, \quad f_i > 0. \tag{6.18}$$

Az eredő kormányzati politika a három típus összege:

$$G^* = G^*_{\mathrm{p}} + G^*_{\mathrm{d}} + G^*_{\mathrm{i}}. \tag{6.19}$$

A valóságban G^* a *kívánatos* kormányzati politika (erre utal a *), amelytől a *tényleges* kormányzati politika a β reakcióegyüttható szerint eltér:

$$\dot{G} = \beta(G^* - G), \qquad \beta > 0. \tag{6.20}$$

Természetesen most a magánszektor keresletéhez hozzáadódik a kormányzaté:

$$D = (1-a)Y + G - u, \quad 0 < a \le 1. \tag{6.13$'$}$$

S ezzel kifejtettük a stabilizálási modellt, amelyet (6.13′), (6.14), (6.19) és (6.20) alkot. Némi számolással levezethető az ún.
alap differenciálegyenlet

$$\ddot{Y} + (\alpha a + \beta)\dot{Y} + \alpha\beta a Y - \alpha\beta G^* = -\alpha\beta. \tag{6.21}$$

Behelyettesítve (6.16)–(6.18) megfelelő kombinációját, adódik a tényleges szabályozás alapegyenlete. Akárcsak a 2.5. tételnél az indítás–beruházás lineáris modelljében, most is szembe kerül a stabilizálás két célja: a stacionárius érték javítása és a hullámzások csillapítása.

6.4. tétel. *(Phillips, 1954.) a) A tiszta arányos stabilizálási politika képtelen teljesen eltüntetni a jövedelemcsökkenést, és (csillapított) oszcillációkat hoz létre.*

b) A derivatív stabilizálási politika javítja az arányos politikát.

c) Az integráló stabilizálási politika sikeres, ha szorzója nem túl nagy:

$$f_{\mathrm{i}} \le (\alpha a + \beta)a. \tag{6.22}$$

Bizonyításvázlat. Ha $G^* = G_{\mathrm{p}}$, akkor (6.16)-ot behelyettesítve (6.21)-be, a következő differenciálegyenlet adódik:

$$\ddot{Y} + (\alpha a + \beta)\dot{Y} + \alpha\beta(a + f_{\mathrm{p}})Y = -\alpha\beta. \tag{6.23}$$

A stacionárius állapot

$$Y^{\mathrm{o}} = \frac{-1}{a + f_{\mathrm{p}}}, \tag{6.24}$$

míg a homogén megoldás karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + (\alpha a + \beta)\lambda + \alpha\beta(a + f_{\mathrm{p}}) = 0. \tag{6.25}$$

∎

6.3. A VERSENYZŐI ÁRIGAZODÁS MODELLJE

Az előző két alfejezetben eléggé egyszerű skalár modelleket vizsgáltunk. Most rátérünk a versenyzői árigazodás sokdimenziós modelljére, ahol komolyabb nehézségekkel fogunk találkozni. Hivatkozási alapunk angolul Arrow és Hahn (1971) 9., 11. és 12. fejezet és magyarul Zalai (1989) 7. fejezet.

Az egyensúly

Legyen n egy természetes szám, és legyen $p = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathbf{T}}$ egy n-dimenziós *árvektor*. Ezen árvektor mellett a *piaci túlkereslet vektora* (röviden: túlkereslet) $z(p) = [z_1(p), \ldots, z_n(p)]^{\mathbf{T}}$. Föltesszük, hogy túlkeresleti függvény egyértelmű és a pénzillúziót kizárva, az áraknak (és a jövedelmeknek) nulladfokú homogén függvénye:

$$(6.26) \qquad z(\pi p) \equiv z(p) \qquad \text{minden} \qquad p \in \mathbf{R}_+^n \qquad \text{és} \qquad \pi > 0 \qquad \text{esetén.}$$

A homogenitási feltevés értelmében normálhatjuk az árakat, például az utolsó terméket *ármércének* vesszük: $p_n = 1$, vagy az árak összegét normalizáljuk: $\sum_i p_i = 1$, azaz $p^{\mathbf{T}}\mathbf{1} = 1$, szimbolikusan: $p \in S_n$ szimplex.

Az egyensúlyi szemléletnek megfelelően föltesszük, hogy a *túlkereslet aggregált értéke* azonosan nulla, *Walras törvénye* teljesül:

$$(6.27) \qquad p^{\mathbf{T}} z(p) = 0 \qquad \text{minden} \qquad p \in \mathbf{R}_+^n\text{–re.}$$

Technikai feltevés, hogy a $z(p)$ túlkeresleti függvény *folytonos.* Az általános egyensúlyelméletben nagy súlyt fektetnek arra, hogy a piaci túlkereslet függvényét egymással versengő fogyasztók és termelők optimalizálásából vezessék le (például Arrow és Debreu, 1954; Arrow és Hahn, 1971, 3. és 4. fejezet; Zalai, 1989, 7. fejezet). Debreu, Mantel és Sonnenschein eredményei szerint (lásd például Debreu, 1974 és Kirman, 1992) azonban tetszőleges n-változós piaci túlkeresleti függvény származtatható n fogyasztó optimalizálásából, amennyiben a túlkeresleti függvény kielégíti a fenti tulajdonságokat. Ebben az értelemben az egyéni optimalizálás nem szűkíti le a piaci túlkeresleti függvények osztályát. (Igaz, Hildenbrand (1983) és Grandmont (1992) hatásosan érvel, hogy az egyénileg nem optimalizáló szereplők megfelelő eloszlása esetén az aggregált viselkedés optimális, például az árigazodási folyamat globálisan stabil.) *Egyensúlyi árvektor*ról beszélünk és a p^{o} jelölést alkalmazzuk, ha a túlkeresleti vektor nempozitív:

$$(6.28\text{a}) \qquad z(p^{\mathrm{o}}) \le 0.$$

A Walras-törvény alapján könnyen belátható, hogy szabad jószágnak nincs (pozitív) ára:

$$(6.28\text{b}) \qquad \text{Ha} \qquad z_i(p^{\mathrm{o}}) < 0, \qquad \text{akkor} \qquad p_i = 0.$$

Először kimondjuk az egyensúlyi ár létezését.

6.5. tétel. *(Arrow és Hahn, 1971, 2.2. tétel.) Feltevéseinket némi technikai megszorításokkal kiegészítve a versenyzői gazdaságban létezik legalább egy egyensúlyi árvektor.*

Bizonyításvázlat. A további gondolatmenet miatt érdemes legalább a bizonyítás alapötletét vázolni. Egy olyan T leképezést keressünk, amely „javítja” a nemegyensúlyi árrendszer hibáit. Legyen d_i pozitív valós szám,

$$(6.29) \qquad M_i(p) = d_i z_i(p)_+, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

ahol x_+ az x valós szám pozitív része! Legyen p^* az új árvektor:

$$p^* = T(p) = \frac{p + M(p)}{[p + M(p)]^{\mathbf{T}}\mathbf{1}}. \tag{6.30}$$

Belátható, hogy T az S_n szimplexnek önmagára való folytonos leképezése, amelynek a Brouwer-féle fixpont tétel (3.1. tétel) szerint létezik fixpontja. Egyszerű számolással igazolható, hogy T bármely fixpontja egyensúly. ∎

Rátérünk az egyensúly egyértelműségére. A rövidség kedvéért két unicitási tételt ismertetünk, amelyekre a stabilitás bizonyításánál is szükségünk lesz. Sima túlkeresleti függvénnyel kell dolgoznunk, különben még a lokális egyértelműség sem biztosítható.

Azt mondjuk, hogy a $z(p)$ túlkeresleti függvény kielégíti a *kinyilvánított preferencia gyenge axiómáját*, ha tetszőleges $p \neq \pi p^{\mathrm{o}}$ $(\pi > 0)$ árvektor esetén $(p^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}} z(p) \geq 0$.

Könnyen belátható, hogy (i) egyetlen fogyasztó esetén a túlkeresleti függvény ilyen, és (ii) ekkor az egyensúlyi árvektor iránya egyértelműen meghatározott.

6.3. feladat. Bizonyítsuk be a fenti (i)–(ii) állításokat!

Differenciálható túlkeresleti függvénynél azt mondjuk, hogy különböző i és j esetén a két termék a p árvektornál *bruttó helyettesíthető*, ha p_j növelésekor z_i túlkereslet nő. (A bruttó jelző arra utal, hogy a túlkeresleti függvény a kompenzálatlan (marshalli), nem pedig a kompenzált (hicksi) keresletre vonatkozik.)

Szemléltetésül álljon a

6.4. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvények esetén a cseregazdaság bruttó helyettesíthető. Legyen $u_h(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{hj}}$, ahol $\alpha_{hj} > 0$, $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{hj} = 1$. Legyen a h-adik fogyasztó vagyonvektora a^h. Egyszerű számolással $z_j^h(p) = \alpha_{hj} p^{\mathbf{T}} a^h / p_j - a_j^h$, azaz $z_{jk}^{\mathrm{o}} = \partial z_j(p^{\mathrm{o}})/\partial p_k$ jelöléssel $z_{jk}^{\mathrm{o}} = \sum_h \alpha_{hj} a_j^h / p_k > 0$, ha $j \neq k$.

Lássuk az egyértelműségi tételt!

6.6. tétel. *(Arrow és Hahn, 1971, 9.7. tétel következménye.) Ha minden áru helyettesíthető minden áruval minden $p \in S_n$-nél, akkor a normált egyensúlyi ár egyértelmű.*

Bizonyítás. Legyen $p^{\mathrm{o}} = (p_1^{\mathrm{o}}, \ldots, p_n^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}}$ egy egyensúlyi ár és $p = (p_1, \ldots, p_n)^{\mathbf{T}} > 0$ egy másik árvektor. Legyen $v_i = p_i / p_i^{\mathrm{o}}$, legyen k a v_i sorozat maximum-helye és λ a maximum-érték: $v_k = \max_i(v_i) = \lambda$: $p \leq \lambda p^{\mathrm{o}}$ és a k-adik helyen egyenlőség áll. A homogenitási tulajdonság és az egyensúly értelmében $0 = z_k(p^{\mathrm{o}}) = z_k(\lambda p^{\mathrm{o}})$. Tekintsünk azt a csökkenő árvektor-sorozatot, melynek első tagja λp^{o}, utolsó tagja p, az i-adik vektornak csak az i-adik eleme változik. Ekkor az általános helyettesíthetőség miatt z_i minden lépésben nő, következésképpen $z_k(p) > 0$, tehát p nem egyensúly. ∎

A bizonyításból kiolvasható még egy érdekes tulajdonság:

6.7. tétel. *(Arrow és Hahn, 1971, 9.8. tétel.) Legyen p és p^{o} két különböző árvektor, $v_i = p_i^{\mathrm{o}} / p_i$, és legyen k a maximum-hely! Tegyük föl, hogy minden áru helyettesíthető minden áruval p-nél! Ekkor p-ről p^{o}-ra térve a k-adik áru túlkereslete nő.*

Ezzel befejeztük a statikus előzmények ismertetését.

Az árigazodási folyamat

Láttuk, hogy a statikus modellben létezik egyensúly és ez gyakran egyértelmű. Walras (1874, 1877) és korai követői azonban nem rendelkeztek a modern egyensúlyelmélet eszközeivel, hogy e két állítást bizonyítsák. Az egyenletek és változók számának naiv összehasonlítása mellett ezért megpróbálkoztak egy olyan heurisztikus bizonyítással, mely a piaci igazodás utánzásának fogható föl. Walras nyomán Samuelson (1941, 1947) a következő árigazodási szabályt írta föl. A t pillanatban az árverő kihirdeti az éppen érvényes árakat, $p(t)$-t. A piacon azonnal kialakul a megfelelő, előjeles túlkeresleti vektor, $z[p(t)]$. Ha a t időpillanatban az i-edik termék piacán túlkereslet van, akkor e túlkereslet arányában az árverő azonnal emeli e termék árát; ha túlkínálat van, akkor ugyanígy csökkenti. Az új ár segítségével megismétlődik a lépés. Ha a tapogatózási folyamat stabil, akkor az árrendszer nyilvánvalóan egyensúlyba jut. Képletben:

(6.31) $$\dot{p}_i = d_i z_i(p), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

ahol $d_i > 0$ az i-edik termék pozitív igazodási együtthatója kívülről adott nagyság. Vektoriális írásmódban:

(6.32) $$\dot{p} = \langle d \rangle z(p),$$

ahol $\langle d \rangle$ a d vektorból alkotott diagonális mátrix.

Vegyük észre a hasonlóságot a 6.5. tétel bizonyításában alkalmazott (6.29) és a mostani (6.31) összefüggés között! Lényeges megkötés, hogy e dinamikus igazodási folyamat során, az egyensúly elérése előtt (hamis árakon) tilos kereskedni, ezért is beszélünk tapogatózásról. Ellenkező esetben ugyanis idővel változna az egyes fogyasztók vagyona, a^h. (Másik lehetőség, hogy föltesszük, hogy az áruk romlandók, ezért nincs fölhalmozás.)

A (6.31) igazodási folyamat könnyen vezethet negatív árakhoz, ha valamilyen időpontban az i-edik jószág ára eléri a nullát, de az iránta megnyilvánuló túlkereslet még mindig negatív. Ezért a következő korlátozást kell bevezetni:

(6.33) $$\dot{p}_i = \begin{cases} d_i z_i(p), & \text{ha } p_i > 0 \text{ vagy } z_i(p) \geq 0; \\ 0, & \text{ha } p_i = 0 \text{ és } z_i(p) < 0; \end{cases} \qquad 1, \ldots, n.$$

Vegyük észre, hogy a (6.33) differenciálegyenlet-rendszer jobb oldala szakadásos, sőt esetleg nincs is értelmezve, ezért az 5. fejezetben ismertetett szokásos egzisztencia- és unicitási tételek nem alkalmazhatók. Mi egyszerűen föltesszük, hogy a rendszer jól viselkedik.

Lokális stabilitás

Az irodalomban meghonosodott szokással ellentétben először a lokális stabilitást vizsgáljuk. Ekkor természetesen elegendő a (6.31) vagy (6.32) változatra szorítkozni, de az n-edik árut *ármércének* tekintjük.

(6.31′) $$p_i = d_i z_i(p), \qquad i = 1, \ldots, n-1, \qquad \text{és} \qquad p_n = 1.$$

Az 5.8. tétel alapján kimondható a

6.8. tétel. *(Vö. Samuelson, 1947, IX. fejezet és Arrow és Hahn, 1971.) A (6.31′) árigazodási szabály lokálisan stabil egy p^o egyensúly körül, ha az $(n-1)\times(n-1)$-dimenziós csonkított $\langle d\rangle z'(p^o)$ mátrix stabil.*

A legegyszerűbb esetet vizsgálja a

6.4. feladat. (Arrow és Hahn, 1971, 12.1. tétel.) Bizonyítsuk be, hogy ha létezik egyensúly a kéttermékes gazdaságban, akkor az globálisan stabil!

A továbbiakban a 6.8. tételt egy Metzlertől származó tételre konkrétizáljuk.

6.9. tétel. *(Metzler, 1945.) Ha az általános helyettesíthetőség fennáll a p^{o} egyensúlyi pontban, akkor akármilyen d igazodási vektornál a (6.31′) árigazodási folyamat lokálisan stabil (teljes stabilitás).*

Bizonyításvázlat. Legyen megint $z_{ij}^{\mathrm{o}} = \partial z_i(p^{\mathrm{o}})/\partial p_j$. Az Euler-tételt a nulladfokú homogén $z_i(p)$ függvényre fölírva és rendezve: $\sum_{j=1}^{n-1} p_j^{\mathrm{o}} z_{ij}^{\mathrm{o}} = -z_{in}^{\mathrm{o}}$, $i = 1, \ldots, n-1$.

Feltevésünk alapján $z_{ij}^{\mathrm{o}} > 0$, $i{,}j = 1, \ldots, n-1$, azaz $\sum_{j=1}^{n-1} p_j^{\mathrm{o}} z_{ij}^{\mathrm{o}} < 0$, $i = 1, \ldots, n-1$. Ez egy jól ismert lemma szerint éppen a csonkított mátrix stabilitásával egyenértékű, vö. az A.10. tétellel. ∎

Globális stabilitás

A globális stabilitás vizsgálatát a korlátosság elemzésével kezdjük.

6.10. tétel. *(Arrow és Hahn, 1971, 12.2. tétel.) A (6.33) árigazodási folyamat pályája korlátos.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a p vektor a következő $(n-1)$-dimenziós ellipszoid-felületen mozog:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{d_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2(0)}{d_i}. \tag{6.34}$$

Valóban, képezzük a (6.34) egyenlet bal oldalán álló kifejezés idő szerinti teljes deriváltját, és helyettesítsük be a (6.33) feltételt és a Walras-törvényt:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2\dot{p}_i p_i^2}{d_i} = 2\sum_{i=1}^{n} p_i z_i = 0.$$

Vegyük észre, hogy látszólag csak a felső ágon haladtunk, de az alsó ágon haladva is ugyanezt kapjuk, mert ott $p_i = 0$! ∎

Rátérünk a globális stabilitás tanulmányozására. Elsőként egy gyengébb tételt mondunk ki.

6.11. tétel. *(Arrow, Block és Uzawa, 1959.) Ha a túlkeresleti függvény kielégíti a kinyilvánított gyenge preferencia axiómáját minden p pontban, akkor akármilyen d igazodási vektornál a (6.33) árigazodási folyamat globálisan stabil.*

6.5. feladat. Bizonyítsuk be a 6.11. tételt a Ljapunov-módszerrel!

Másodszor egy általánosabb tételt mondunk ki.

6.12. tétel. *(Arrow et al, 1959.) Ha az általános helyettesíthetőség fennáll minden p pontban, akkor akármilyen d igazodási vektornál a (6.33) árigazodási folyamat globálisan stabil.*

Bizonyítás. Legyen $V(p) = \max_i(p_i/p_i^o)$. A 6.7. tétel értelmében a maximális árú termék túlkereslete nő, ára tehát csökken, tehát V Ljapunov-függvény stb. ∎

Instabilitás

Az 1950-es években még nem tudták azt a fent említett tényt, hogy minden elképzelhető piaci túlkeresleti függvényrendszer előáll maximalizáló fogyasztók cserekapcsolatából. Azt sejtették, hogy az optimalizálásból származó piaci túlkeresleti függvényrendszerek szelídek, s az árigazodási folyamat stabil. Ezért volt meglepetés, amikor Scarf (1960), majd Gale (1963) egyszerű példákat hoztak instabilitásra.

6.5. (ellen)példa. (Scarf, 1960.) Legyen a jószágok (i) és a háztartások (h) száma három: $n = 3$ és $m = 3$. Legyen a h-adik háztartás vagyona $w^h = e_h$, (a h-adik egységvektor) és hasznosságfüggvénye $U^h(x) = \min\{x_h,x_{h+1}\}$, $h = 1,2,3$, ahol $x_4 = x_1$. Adott p árvektor mellett a h-adik fogyasztó optimális kereslete $x_i^h = p_h/(p_h + p_{h+1})$, ha $i = h,h+1$ és $x_{h-1}^h = 0$, ahol $x_0 = x_3$. Ekkor a piaci túlkeresleti függvény

$$z_i = \frac{p_i(p_{i-1} - p_{i+1})}{(p_i + p_{i-1})(p_i + p_{i+1})}.$$

Az egyensúlyi állapot: $p^o = \mathbf{1}$. Legyen az igazodási vektor $d = 3 \cdot \mathbf{1}$. Ekkor (6.34) szerint az árvektor a $\sqrt{3}$-sugarú háromdimenziós gömbön mozog. Tegyük föl, hogy az induló állapot olyan, hogy $p_1(0)^2 + p_2(0)^2 + p_3(0)^2 = 3$, de $p_1(0)p_2(0)p_3(0) \neq 1$. Márpedig számolással belátható, hogy $d[p_1p_2p_3]/dt = 0$, tehát nincs konvergencia. ∎

Diszkrét idejű árigazodás

Egy pillanatra visszatérünk a 4. fejezet *diszkrét idejű igazodásás*hoz (Arrow és Hahn, 1971, 12.8. alfejezet).

$$p_{i,t+1} = [p_{i,t} + d_i z_i(p_t)]_+, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6.35}$$

A 6.3a. és b. ábra a $dt = 0{,}1$ diszkrét közelítéssel időtartományban és a fázistérben szemlélteti a 6.4. példáról elmondottakat, $p_1(0) = p_2(0) = \sqrt{2}$ és $p_3(0) \equiv 1$. Figyeljük meg, hogy az 6.3a. ábra harmadik görbéje, az ún. $|p_t - p^o|$ euklideszi norma (vö. A.5. példa), Ljapunov-függvényhez illően tényleg csökken!

A 6.4. ábra a $dt = 0{,}1$ diszkrét közelítéssel szemlélteti a 6.5. példáról elmondottakat, $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = \sqrt{1/2}$.

Míg a folytonos idejű modellben csak az igazodási együtthatók aránya volt érdekes, most az abszolút nagyság is szerepet kap. Az előbbinél, ha év helyett hónapokban számolunk, akkor a túlkereslet intenzitása változatlan marad, de az igazodási együtthatót 12-szeresére kell/lehet növelni. Az utóbbinál a lépésváltásnál az eredeti túlkereslet 1/12-edére csökken, ezért az igazodási együtthatót 12-szeresére kell növelni. A 4.11. tétel alapján igazolható a 6.4. és a 6.9. tétel diszkrét idejű megfelelője:

6.13. tétel. *Ha diszkrét idejű árigazodásnál az általános helyettesíthetőség fennáll a* p° *egyensúlyi pontban, akkor akármilyen* $0 < d \leq \mathbf{1}$ *igazodási vektornál a (6.35) árigazodási folyamat lokálisan stabil.*

Újabb eredményeket Saari (1985) tartalmaz.

Kiegészítés

A szükségszerűen többváltozós elmélet közgazdasági alkalmazásairól alig beszélhetünk, ezért ezt a kérdéskört sem tárgyaljuk (kivétel: Medio, 1991).

II. RÉSZ

DINAMIKA OPTIMALIZÁLÁSSAL

Mint a Bevezetésben már elemeztük, a jelenleg uralkodó közgazdaságtani irányzatok szerint a gazdasági élet szereplőinek magatartási szabályait optimalizálásból kell (célszerű, illik) levezetni. Érdekességként megemlítjük, hogy a fizikában célszerűnek bizonyult az objektív mozgástörvényeket bizonyos célfüggvények maximalizálásából (vagy minimalizálásából) levezetni, bár senki sem gondol arra, hogy valaki tudatosan maximalizálná az egyébként „értelmetlen” célfüggvényeket. Ebben a részben egy, esetleg két személy (a reprezentatív fogyasztó) dinamikus optimalizálását tanulmányozzuk. A 7–8. fejezet diszkrét, a 9–10. fejezet folytonos idővel dolgozik.

A 7. fejezetben a *dinamikus programozás*t mutatjuk be, melyet a lineáris állapotegyenletű, kvadratikus veszteségfüggvényű és Gauss-féle zajokkal terhelt szabályozási rendszer optimalizálásával szemléltetünk.

A 8. fejezetben a dinamikus programozás néhány közgazdasági *alkalmazás*ával foglalkozunk.

A 9. fejezetben az *optimális folyamatok* elméletét ismertetjük, ahol a pályákat egy irányítható differenciálegyenlet-rendszer vezérli, s olyan irányítást keresünk, amelyik maximalizál valamilyen pályafüggő időbeli integrált.

A 10. fejezetben az optimális folyamatok elméletét alkalmazva, az *optimális fogyasztási pályák*at tanulmányozzuk egzogén és endogén munka- és tőkejövedelmek mellett.

7. DINAMIKUS PROGRAMOZÁS ÉS SZABÁLYOZÁSELMÉLET

Egy időre visszatérünk a *diszkrét idejű* módszerekhez és modellekhez. Ebben a fejezetben az dinamikus optimalizálás egyik változatát, a *dinamikus programozás*t vázoljuk. A fejezet felépítése a következő. A 7.1. és a 7.2. alfejezet rendre a determinisztikus, illetve a sztochasztikus optimumelvet ismerteti. A többi alfejezetben a dinamikus programozást alkalmazzuk a *szabályozáselméleti feladatok* egy eléggé tág körére. A 7.3. alfejezetben a teljes megfigyeléshez tartozó *optimális* szabályozást tanulmányozzuk. A 7.4.* alfejezetben a sztochasztikus zajjal (más szóval: zavarral) terhelt optimális megfigyelést, az ún. *Kalman-szűrő*t ismertetjük, majd szintetizáljuk az eddigi eredményeit: sztochasztikus zavarral terhelt rendszer optimális irányítását tanulmányozzuk. Végül egyéb szabályozáselméleti feladatokkal foglalkozik. A dinamikus programozásról részletes leírás található Ljunqvist és Sargent (2000), valamint Stokey és Lucas (1989) forrásokban. A szabályozáselméleti alkalmazásokból megemlítjük Bryson és Ho (1969) és Csáki (1973) monográfiáját. Ebben a fejezetben kevés feladat található, és a példák többsége is a következő, alkalmazási fejezetre marad. A korábbi fejezetekben az $x_t = g(x_{t-1},u_t)$ alakú egyenlettel dolgoztunk, de mostantól kezdve visszatérünk a szabályozáselméleti irodalomban megszokott $x_{t+1} = g(x_t,u_t)$ alakhoz. A két alak közti eltérés lényegtelen.

7.1. A DETERMINISZTIKUS OPTIMUMELV

Alapfeladat

A diszkrét-idejű dinamikus programozás alapfeladata a következő: adott egy időben additív *célfüggvény*, amelynek az állapottól és a szabályozástól függő értékét kell maximalizálni egy állapotegyenlet irányításával.

Szükségünk lesz a következő jelölésekre: $t = 0, 1, 2, \dots$ az idő, x_t a rendszer (n-vektor) *állapot*a a t-edik időszak elején, $x_{t+1} = g_t(x_t,u_t)$ az x_t állapotból az m-dimenziós u_t szabályozással egy időszak alatt elérhető *új állapot*, az $f_t(x_t,u_t)$ skalár a t-edik időszakban szerzett *hasznosság*, az $f_t : \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}$ függvény az *alapfüggvény*. Ekkor a *dinamikus programozás alapfeladata* a következőképpen fogalmazható meg:

$$f_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} f_t(x_t,u_t) \to \max \tag{7.1}$$

feltéve, hogy

$$x_{t+1} = g_t(x_t,u_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, T, \qquad x_0 \qquad \text{adott.} \tag{7.2}$$

Megjegyzések. 1. Gyakran fogunk a hasznosságfüggvény ellentettjével, a veszteségfüggvénnyel dolgozni, s ekkor a célfüggvényt minimalizáljuk.

2. A (7.1)-ben szereplő $f_{T+1}(x_{T+1})$ tag lehetővé teszi, hogy x_{T+1} szabad legyen. Ha x_{T+1} mégis rögzített, akkor f_{T+1} megfelelő módosításával ez a feladat is megoldható (lásd 7.2. feladat).

3. Általában föltesszük, hogy az alapfüggvény növekvő, ezért a feltételekben lényegtelen, hogy egyenlőtlenség vagy egyenlőség áll.

Akárcsak később, a variációszámításról szóló, folytonos idejű 9.2 alfejezetben, most is fontos szerepet játszik a *reducíbilis* eset, amikor (i) az állapot- és a szabályozási vektor dimenziója azonos: $n = m$, valamint (ii) az állapotegyenletből a szabályozási változó meghatározható: $u_t = \varphi_t(x_t,x_{t+1})$. Behelyettesítve a hasznosságfüggvénybe és az $u_t \in \mathcal{U} \subseteq \mathbf{R}^n$ korlátba, rendre $\psi_t(x_t,x_{t+1}) = f_t[x_t,\varphi(x_t,x_{t+1})]$ és $\varphi_t(x_t,x_{t+1}) \in \mathcal{U}$ összefüggéseket kapjuk. Ekkor a dinamikus programozás alapfeladata leírható a szabályozási változók nélkül. (Stokey és Lucas végig ezzel az esettel foglalkozik, hozzátéve még az időbeli változatlanságot). Legyen $\psi_t : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}$ az alapfüggvény, $\mathcal{X}$ halmaz egy $\mathbf{R}^n$-beli halmaz és Γ_t az $\mathbf{R}^n$ tér $\mathcal{X}$ halmazának egy önmagába való leképezése:

$$\sum_{t=0}^{T} \psi_t(x_t,x_{t+1}) \to \max \tag{7.1$'$}$$

feltéve, hogy

$$x_{t+1} \in \Gamma_t(x_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, T \qquad \text{és} \qquad x_0 \qquad \text{adott.} \tag{7.2$'$}$$

Mielőtt rátérnénk az általános feladatra, röviden foglalkozunk a következő állítással.

7.1. segédtétel. *Burkológörbe tétel. Legyen $F(x,a)$ egy sima $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ függvény egy alkalmas $I \times J$ téglalapon, ahol x a vektorváltozó és a a skalár paraméter. Tegyük föl, hogy minden a-ra az $F(x,a)$ függvénynek egyetlen lokális maximuma van, amelyet $x(a)$-val jelölünk. Ekkor a maximumérték, $M(a) = F[x(a),a]$ is sima függvény és a deriváltja $M'(a) = F_a[x(a),a]$.*

Megjegyzés. Az állítás azt mondja, hogy a maximumérték paraméter szerinti változása csak a maximálandó függvénynek a paraméter szerinti változásától függ.

Bizonyítás. Vegyük az $M(a)$ függvény a-szerinti teljes deriváltját: $M'(a) = F'_x[x(a),a]x'(a) + F_a[x(a),a]$. Mivel $x(a)$ lokális szélsőérték, $F'_x(x(a),a) = 0$, azaz igaz az állítás. ∎

Közvetlen optimalizálás

A dinamikus optimalizálási feladat megoldásánál ki akarjuk használni, hogy mind a célfüggvény, mind a korlátok időben majdnem additívak. Egyik lehetőség a hagyományos, közvetlen opimalizálás. Szükségünk lesz még a következő jelölésekre. Legyen $\{p_t\}_0^{T+1}$ egy n-dimenziós vektorsorozat, ahol $p_{T+1} = 0$ és a t-edik időszak *Hamilton-függvény*e:

$$H_t(x_t,u_t,p_t) = f_t(x_t,u_t) + p_t^{\mathbf{T}} g_t(x_t,u_t),$$

$f_{T+1}(x_{T+1},u_{T+1}) \equiv f_{T+1}(x_{T+1})$, valamint $\dfrac{\partial H}{\partial z}$ olyan q-dimenziós sorvektor, amelynek i-edik eleme $\dfrac{\partial H}{\partial z_i}$.

7.1. tétel. *Megfelelő simasági feltételek mellett a lokálisan optimális megoldás a (7.2) állapotegyenlet mellett kielégíti a következő, idő szerint megfordított multiplikátor differenciaegyenlet-rendszert:*

$$p_{t-1} = \frac{\partial H_t}{\partial x_t}(x_t,u_t,p_t), \qquad t = T+1,\ \ldots,\ 1$$

és az optimalitási feltételt:

$$\frac{\partial H_t}{\partial u_t}(x_t,u_t,p_t) = 0, \qquad t = T,\ \ldots,\ 0.$$

Bizonyítás. Felírjuk a feltételes szélsőértékfeladat Lagrange-függvényét.

$$L(x,u,p) = f_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T}\Big\{f_t(x_t,u_t) - p_t^{\mathbf{T}}[x_{t+1} - g_t(x_t,u_t)]\Big\}.$$

Kiszámítva az x_t és az u_t szerinti parciális deriváltakat, valamint alkalmazva a Hamilton-függvényt, adódik a két egyenletrendszer. ∎

7.1. példa. Lineáris-kvadratikus (LQ) szabályozás. Legyen A_t és B_t két skalár sorozat, x_t és u_t skalár állapot- és szabályozási változó. Ekkor az állapotegyenlet $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t$. Legyen az időszaki veszteségfüggvény kvadratikus: $f_t(x_t,u_t) = F_t x_t^2 + G_t u_t^2$, ahol F_t és G_t pozitív számsorozat.

A 7.1. tételt alkalmazva,

$$H_t(x_t,u_t,p_t) = F_t x_t^2 + G_t u_t^2 + p_t(x_{t+1} - A_t x_t - B_t u_t),$$

ezért $p_{t-1} = 2F_t x_t - A_t p_t$ és $2G_t u_t - p_t B_t = 0$ adódik. Az optimum feltétel szerint $u_t = [B_t/(2G_t)]p_t$. Behelyettesítve az optimális szabályozást az állapotegyenletbe, és megfordítva az időt, a következő egyenletet kapjuk.

$$x_t = \frac{1}{A_t}x_{t+1} + \frac{B_t^2}{2G_t A_t}p_t.$$

Valóban, próbálkozni kell, hogy a vegyes peremfeltételű differenciaegyenlet-rendszert megoldjuk. (Részletesebben: Ljungqvist és Sargent, 2000, 62–65. o.)

7.1. feladat. Legegyszerűbb dinamikus optimalizálási feladat.

$$\sum_{t=0}^{T} \psi(u_t) \to \max$$

feltéve, hogy

$$x_{t+1} = x_t + u_t, \qquad t = 0,\ \ldots .\ T, \qquad x_0, x_{T+1} \qquad \text{adott},$$

ahol x_t, u_t és ψ skalár, ahol ψ szigorúan konkáv függvény, megfelelő értelmezési tartománnyal.

a) Oldjuk meg a feladatot u_t-k kiküszöbölésével!

b) Oldjuk meg a feladatot x_t-k kiküszöbölésével!

A keletkező egyenletrendszer megoldása nagyon bonyolult lehet, s ez indokolhatja, hogy speciális eljárást keresünk.

Az optimumelv

Rátérünk a dinamikus programozás standard megoldására. Egyetlen egy feladat helyett mérlegeljünk egy egész sorozat feladatot ($t = 0, \ldots, T$):

$$f_{T+1}(x_{T+1}) + \sum_{\tau=t}^{T} f_\tau(x_\tau, u_\tau) \to \max \tag{7.3}$$

feltéve, hogy (7.2) teljesül, $\tau = t, \ldots, T$ és x_t adott.

Tegyük föl, hogy mindegyik feladatnak van optimális megoldása. Legyen a t-edik feladat maximuma az x_t pillanatnyi állapot függvényében $v_t(x_t)$, $t = 0,1,\ldots,T$, ez az *értékfüggvény*.

Könnyen belátható a következő rekurzív összefüggés: ha a $(t+1)$-edik feladat optimális megoldása tetszőleges x_{t+1} „kezdőállapot” mellett $u_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, u_T, x_{T+1}$ és értéke $v_{t+1}(x_{t+1})$, akkor a t-edik feladat optimális megoldása tetszőleges x_t kezdőállapot és $u_t, x_{t+1}, u_{t+1}, x_{t+2}, \ldots, u_T, x_{T+1}$ – alkalmas u_t, $x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)$ mellett; valamint az értékfüggvények között teljesül a következő függvényegyenlet:

$$v_t(x_t) = \max\{f_t(x_t, u_t) + v_{t+1}(x_{t+1}) |\ u_t, \qquad x_{t+1} = g_t(x_t, u_t)\}. \tag{7.4}$$

Valóban, ha x_t-ből u_t-vel eljutottunk x_{t+1}-be, akkor már az $(t+1)$-edik paraméteres feladat optimumán haladhatunk tovább.

Érdemesnek látszik egy hétköznapi példával szemléltetni az optimumelvet. Az egyszerűség kedvéért egy időoptimum feladatot választunk, de értelemszerűen választhatunk bármely más feladatot is. Tegyük föl, hogy Budapest és Miskolc között az időoptimális út Hatvanon és Gyöngyösön keresztül halad. Akkor a Hatvan és Gyöngyös közti időoptimum megegyezik a Budapest és Miskolc közti időoptimum megfelelő szakaszával.

A megoldásnál érdemes időben visszafelé haladni. Oldjuk meg először a (7.4) feladatot $t = T$-re:

$$v_T(x_T) = f_{T+1}(x_{T+1}) + f_T(x_T,u_T) \to \max\,, \quad x_{T+1} = g_T(x_T,u_T)!$$

Tetszőleges x_T paramétervektor mellett létezik az optimális $u_T = h_T(x_T)$ visszacsatolásos szabályozás, amely megadja az $x_{T+1} = g_T[x_T,h_T(x_T)]$ végállapotot és a $v_T(x_T)$ optimumértéket.

A $(T - t + 1)$-edik indukciós lépésben az optimális $u_t = h_t(x_t)$ szabályozást és a $v_t(x_t)$ értékfüggvényt határozzuk meg, kihasználva a korábbról ismert $v_{t+1}(x_{t+1})$ értékfüggvénnyel fennálló kapcsolatot: Az optimális $u_t^{\circ} = h_t(x_t^{\circ})$ szabályozás kielégíti

$$v_t(x_t^{\circ}) = f_t[x_t^{\circ},h_t(x_t^{\circ})] + v_{t+1}\{g_t[x_t^{\circ},h_t(x_t^{\circ})]\} \tag{7.5}$$

egyenletet és maximalizálja $f_t(x_t^{\circ},u_t) + v_{t+1}[g_t(x_t^{\circ},u_t)]$-t u_t szerint.

Végül az utolsó lépésben x_0 adott paramétervektorra meghatározzuk az optimális u_0 értéket, hiszen az utolsó előtti feladat szabad paramétere most $x_1 = g_0(x_0,u_0)$ szerint meg van határozva.

Ez adja a Bellman (1957)-től származó *optimumelv*et, melyet a következő tételben fogalmazunk meg.

7.2. tétel. *(Bellman, 1957.) A (7.1) feladat (7.2) melletti feltételes optimuma a következő rekurzióval számítható ki. Az egyszerű (7.4) feltételes maximumfeladatot időben visszafelé haladva* $t = T,T-1,\dots,0$*-ra megoldjuk:* $u_t = h_t(x_t)$ *az optimális (visszacsatolásos) szabályozás és* $x_{t+1} = g_t[x_t,h_t(x_t)] = \phi(x_t)$ *az optimális állapotátmenet.*

Figyeljük meg, hogy nem jelölhettük f-fel az optimális átmenetfüggvényt, mert az alapfüggvényt már f-fel jelöltük.

A fenti leírás elvi jellegű, és alkalmazásokban további konkretizálást igényel. Tegyük föl, hogy a célfüggvény és az átmeneti függvények folytonosan differenciálhatóak mind az állapot, mind a szabályozási vektorban és nincsenek sarokoptimumok. A hagyományos szélsőérték-feltétel alkalmazásával a következő eljárást kapjuk:

7.3. tétel. *Megfelelő simasági feltételek mellett az optimalitás szükséges feltételei a következők:*

$$\frac{\partial f_t}{\partial u_t}[x_t,h_t(x_t)] + \frac{\partial v_{t+1}}{\partial x_{t+1}}\{g_t[x_t,h_t(x_t)]\}\frac{\partial g_t}{\partial u_t}[x_t,h_t(x_t)] = 0. \tag{7.6}$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a h_t optimális válaszfüggvény differenciálható. (Benveniste és Scheinkman ezt a feltevést igazolja: Stokey és Lucas (1989, 84. o.)). Ekkor vegyük a (7.5) jobb oldalán álló kifejezés deriváltját, és adódik (7.6). ∎

Megjegyzés. Speciális esetekben a (7.6) egyenlet explicite megoldható. A megoldáshoz általában numerikus módszerekre van szükség. Először a legegyszerűbb eseteket mutatjuk be.

7.2. példa. Elemi determinisztikus példa. $T = 1$, $n = 1$, állapotegyenlet: $x_1 = x_0 + u_0$ és $x_2 = x_1 - u_1$; veszteségfüggvény: $x_1^2 + x_2^2$. Ekkor $v_1(x_1) = \min\{x_2^2 |\ u_1\} =$

$\min\{(x_1-u_1)^2|\ u_1\}=0$, ha $u_1=x_1$. $v_0(x_0)=\min\{x_1^2|\ u_0\}=\min\{(x_0+u_0)^2|\ u_0\}=0$, ha $u_0=-x_0$.

7.2. feladat. Elemi determinisztikus feladat. $T=1$, $n=1$, állapotegyenlet: $x_1=x_0+u_0$ és $x_2=x_1+u_1$; veszteségfüggvény: $x_0^2+u_0^2+x_1^2+u_1^2+x_2^2$. Határozzuk meg az optimális megoldást!

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy a 7.1. példát és a 7.1. feladatot dinamikus programozás nélkül is könnyen megoldhatjuk, hagyományos szélsőérték-számítással. Azonban $T\gg 2$ esetén már célszerű az optimumelvet alkalmazni.

7.1. példa. (folytatása). Belátható, hogy az optimális $u_t=-K_tx_t$ szabályozás K_t együtthatója kielégíti a következő egyenletet:

$$K_t=\frac{B_tS_{t+1}A_t}{G_t+B_t^2S_{t+1}},\quad S_t=\frac{G_tA_t^2S_{t+1}}{G_t+B_t^2S_{t+1}}+F_t,\quad S_{T+1}=F_{T+1},$$

s ez utóbbi differenciaegyenletet időben visszafelé kell megoldani.

A megoldást a 7.1. ábra szemlélteti állandó paraméterek ($A=2$, $B=1$, $F=1$, $G=5$) és $T=5$ esetén. Figyeljük meg, hogy a pálya nem stabil, az állapot nem tart a 0-hoz.

7.3. feladat. Bizonyítsuk be a) a 7.1. példa folytatása segítségével, hogy ha az $u_0,\dots u_{T-1}$ valós számok összege 1, akkor négyzetösszegük minimuma az $u_0=\cdots=u_{T-1}=1/T$-nél valósul meg. (Ha $x_T=0$, akkor $F_T=0$, $A_{T-1}-B_{T-1}K_{T-1}=0$.) Egyébként ezt a feladatot sokkal egyszerűbben megoldottuk (7.1. feladat, ahol $\psi(u)=u^2$), de mégis szemlélteti a dinamikus programozást!

Időben állandó paraméterek, leszámítolt alapfüggvények

Jelentősen egyszerűsödik a dinamikus programozási feladat, ha az alapfüggvények a leszámítolástól eltekintve állandók, az utolsó időszak alapfüggvénye nulla, az átmeneti egyenletek szintén időben állandók:

$$f_t(x_t,u_t)=\beta^t f(x_t,u_t),\qquad t=0,1,\dots,T;$$
$$x_{t+1}=g(x_t,u_t),\qquad t=0,1,\dots,T\qquad \text{és}\qquad x_0\qquad \text{adott};$$
$$\beta^{T+1}f_{\mathrm{o}}(x_{T+1})+\sum_{t=0}^{T}\beta^t f(x_t,u_t)\to\max.$$

A későbbi folytonos idejű modellekben (9–10. fejezet) az $e^{-\beta t}$, $\beta\ge 0$ kifejezéssel előre jelezzük majd, hogy a szorzó legfeljebb 1. A diszkrét idejű modellekben ez nem szokás! Ezért az a furcsa helyzet alakult ki, hogy az erősebb leszámítolást kisebb (nem pedig nagyobb) leszámítolási tényező képviseli.

A stacionaritási feltevéseket akkor tudjuk igazán kihasználni, ha bevezetjük a *jelenértékfüggvényt*:

$$V_t(x_t)=\beta^{-t}v_t(x_t).$$

Ekkor (7.4) egyszerűbben fölírható:

$$V_t(x_t)=\max\{f(x_t,u_t)+\beta V_{t+1}(x_{t+1})|\ u_t,\qquad x_{t+1}=g(x_t,u_t)\}. \tag{7.7}$$

Végtelen időtáv

Tovább egyszerűsödik a dinamikus programozási feladat, ha az időtáv végtelen ($T = \infty$):

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t f(x_t,u_t) \to \max\,, \qquad 0 < \beta < 1. \tag{7.8}$$

Némileg egyszerűsítjük (7.7)-ben a jelöléseket: az időindexet elhagyjuk, és az új állapotot x^*-gal különböztetjük meg a régi állapottól.

Megfelelő korlátossági feltételek mellett a (7.8) végtelen sor konvergens és az optimalizálási feladat értelmes.

7.4. tétel. *(vö. Stokey és Lucas, 1989.) Standard feltételek mellett létezik az időben változatlan $u = h(x)$ optimális válaszfüggvény, közte és $V(x)$ értékfüggvény között a következő kapcsolat teljesül:*

$$V(x) = \max\{f(x,u) + \beta V(x^*)|\ u, \quad x^* = g(x,u)\}. \tag{7.9}$$

Megjegyzések. 1. A végtelen időtávnál a véges időtávnál szereplő zárófeltétel helyére az ún. *transzverzalitási feltétel* lép: $\lim_{t\to\infty} \beta^t V(x_t) = 0$. Ennek szerepét legegyszerűbben (7.8) következő átalakításánál érthetjük meg:

$$V(x_0) = f(x_0,u_0) + \beta V(x_1) = \cdots = \sum_{t=0}^{T} \beta^t f(x_t,u_t) + \beta^{T+1} V(x_{T+1}).$$

A transzverzalitási feltétel ahhoz kell, hogy a fenti maradéktag eltűnjön (lásd 8.4. és 8.5. feladatot).

2. Hasonló a végtelen mértani sor összegképletének heurisztikus levezetése:

$$S(\beta) = x + x\beta + x\beta^2 + \cdots = x + xS(\beta), \qquad \text{azaz} \qquad S(\beta) = \frac{x}{1-\beta}.$$

Kitérő a függvényegyenletekre

(7.9)-ben a $V(x)$ függvény az ismeretlen. Ekkor *függvényegyenlet*ről beszélünk. (Tulajdonképpen az 5. fejezetben tárgyalt közönséges differenciálegyenletek is függvényegyenletek!) Ezen a ponton egy rövid kitérőt teszünk a függvényegyenletekre és bemutatjuk a legegyszerűbb függvényegyenletet:

7.3. példa. Cauchy-féle függvényegyenlet. Egyetlen egy folytonos (differenciálható) $v(x)$ függvény elégíti ki a $v(x + y) = v(x) + v(y)$ egyenletet minden valós x,y párra, a $v(1) = 1$ feltétel mellett: $v(x) = x$.

Bizonyítás. $v(0) = 2v(0) = 0$. *a)* Differenciálhatóság esetén a $[v(x+y)-v(x)]/y = v(y)/y = [v(y)-v(0)]/y$ differenciahányados $y \to 0$ esetén $v'(x) = v'(0)$-hez tart, stb. *b)* Folytonosság esetén legyen n egy természetes szám. Teljes indukcióval igazolható, hogy $v(nx) = nv(x)$. Most legyen m egy természetes szám. Az előző összefüggést alkalmazva: $1 = v(1) = mv(1/m)$, azaz $v(n/m) = nv(1/m) = n/m$. Folytonosság miatt tetszőleges x irracionális számra is teljesül $v(x) = x$. ∎

7.4. feladat. A logaritmus jellemzése. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen egy folytonos (differenciálható) $V(\xi)$ függvény elégíti ki a $V(\xi\eta) = V(\xi) + V(\eta)$ függvényegyenletet minden pozitív valós ξ,η párra a $V(e) = 1$ feltétel mellett: $V(\xi) = \log\xi$!

Fokozatos megközelítés*

Ha ismerjük az értékfüggvényt, akkor (7.9) segítségével kiszámíthatjuk az optimális politikát. Általában azonban nem ismerjük az értékfüggvényt sem. (7.9)-hez hasonló függvényegyenlettel már találkoztunk. Az n-dimenziós térre kimondott, de sokkal általánosabban is érvényes kontrakciós elvnél (3.4. tétel). A differenciálegyenletek fokozatos megközelítési megoldásánál (5.2. tétel) már erre az általános tételre hivatkoztunk. Most is ígéretesnek tűnik az ott alkalmazott *fokozatos megközelítési* módszer. Ismét induljunk ki egy tetszőleges V függvényből az egyenlet jobb oldalán és nézzük meg, hogy milyen függvényt kapunk a bal oldalon. Az így kapott leképezést jelöljük $\mathbf{M}$-mel: $V \to \mathbf{M}V$, azaz

$$\mathbf{M}V(x) = \max\{f(x,u) + \beta V(x^*) |\ u, \quad x^* = g(x,u)\}. \tag{7.10}$$

Megfelelő korlátossági feltételek mellett az $\mathbf{M}$ leképezés folytonos függvényeket folytonos függvényekbe képez. Vezessük be az $\mathbf{R}^n$-beli kompakt I intervallumon folytonos függvények lineáris terét, és értelmezzük rajta a maximumnormát: $||V|| = \max_{x\in I} |V(x)|$! Az A. függelék végén szerepel, hogy ez a tér teljes a maximumnormára nézve, ún. Banach-tér. Ha a folytonos függvényeknek egy $\{V_k\}$ sorozata *egyenletesen tart* V-hez (azaz a konvergencia küszöbindexe független x-től), akkor az eltérés normája nullához tart: $\lim_{k\to\infty} ||V_k - V|| = 0$, és fordítva. Ezért a leképezést tetszőleges sokszor megismételhetjük. Egy V_0 függvényből kiindulva a $V_k = \mathbf{M}V_{k-1}$ iterációval szeretnénk megközelíteni a V értékfüggvényt. Ezzel párhuzamosan megoldjuk a (7.10) maximumfeladatot, és megfelelő konkavitási feltételek mellett a kapott válaszfüggvényt h_k-val jelöljük.

7.5. tétel. *(Blackwell, 1965, Stokey és Lucas, 1989, 4.7. tétel.) Legyen V_0 egy tetszőleges folytonos $I \to \mathbf{R}$ függvény és $V_k = \mathbf{M}V_{k-1}$ a (7.10)-beli iteráció. Megfelelő korlátossági és konvexitási feltevések mellett a fokozatos megközelítés konvergens: $V_k \to V$ és $h_k \to h$.*

Blackwell (1965) éppen a (7.9) feladat megoldására dolgozott ki egy általános feltételt, amely a monotonitás és a diszkontálás segítségével adott elégséges feltételt a kontrakcióra. ∎

A 7.4. tétel analógiájára kimondható a

7.6. tétel. *Megfelelő simasági feltételek mellett az optimalitás szükséges feltételei a következők:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}[x,h(x)] + \beta \frac{\partial V}{\partial x}\{g[x,h(x)]\} \frac{\partial g}{\partial u}[x,h(x)] = 0. \tag{7.11}$$

Meghatározván az optimális visszacsatolást és átmenetet, a következő kérdések vetődnek föl: (i) Az optimális átmenetfüggvénynek létezik-e egyáltalán állandósult állapota: $x^\circ = \phi(x^\circ)$? (ii) Hány állandósult állapot létezik? (iii) Van-e lokálisan vagy globálisan stabil állandósult állapot?

Stokey és Lucas (1989, 6. fejezet) alaposan vizsgálja e nehéz kérdést.

7.2. A SZTOCHASZTIKUS OPTIMUMELV

Már a determinisztikus feladatnál is számos matematikai bonyodalom lépett fel, amelyet a rövidség és a könnyűség kedvéért elhanyagoltunk. A sztochasztikus tárgyalásnál e nehézségek csak fokozódnak. Jellemző, hogy a matematikailag szabatos tárgyaláshoz (9. fejezet) Stokey és Lucas két előkészítő (7. és 8.) fejezetet iktatott be.

A valószínűségszámítási nehézségek a következőképp szemléltethetők. A klasszikus valószínűségszámításban egy valószínűségi változó diszkrét vagy folytonos értékű lehet. Például a kockadobás értéke 1, ..., 6 lehet, a Budapesten lehulló évi csapadék mennyisége elvileg valós számmal jellemezhető véletlen mennyiség. Gyakorlatilag csak mm-ben számolhatunk, de ez a diszkrétizálás elméletileg elégtelen lenne. Például a kockadobás várható értéke sem egész szám (ti. 3,5), és általában a diszkrét eloszlások leggyakoribb határeloszlása folytonos.

Már ez a kettőség is zavaró, mint azt az egész könyvben megjelenő kettőség is mutatja. A diszkrét és folytonos eloszlás azonban keveredhet is (például a sivatagban pozitív valószínűséggel nulla csapadék esik egy egész év alatt). Sőt, a folytonos eloszláson belül kétféle folytonosság jelentkezik, amelyet szaknyelven rendre *abszolút folytonos* és *szinguláris* eloszlásnak nevezünk (Rényi, 1966, IV. fejezet).

További bonyodalom lép föl, ha nemfüggetlen valószínűségi változók időbeli sorozatával, ún. idősorokkal foglalkozunk. Az 1.7. tétel után már érintettük a legegyszerűbb nemfüggetlen elemű idősor típust, a Markov-láncokét, ahol az egyes időszak valószínűségi változója véges számú diszkrét értéket vehet föl. Az általános eset, az ún. *Markov-folyamatok* tárgyalása azonban meghaladná a könyv kereteit.

Egyszerűség kedvéért *időben független eloszlássorozatok*at vizsgálunk. Legyen rendre z_t és w_t a t-edik időszak k-dimenziós valós értékű valószínűségi változója, amely a célfüggvény, illetve a szabályozási változó értékét módosítja. (7.1)–(7.2) helyett:

$$\mathbf{E}\Big\{f_{T+1}(x_{T+1},z_{T+1})+\sum_{t=0}^{T}f_t(x_t,u_t,z_t)\Big\}\to\max \tag{7.12}$$

feltéve, hogy

$$x_{t+1}=g_t(x_t,u_t,w_t),\qquad t=0,1,\dots,T\qquad \text{és}\qquad x_0\qquad \text{adott.} \tag{7.13}$$

(7.4) helyére viszont a következő, általánosított értékegyenlet lép:

$$v_t(x_t)=\max\{f_t(x_t,u_t,z_t)+\mathbf{E}v_{t+1}(x_{t+1})|\ u_t,\ x_{t+1}=g_t(x_t,u_t,w_t)\}. \tag{7.14}$$

Szemléltetésként bemutatjuk a 7.1. példa sztochasztikus általánosítását.

7.4. példa. Elemi sztochasztikus példa. $T=1$, $n=1$, állapotegyenlet: $x_1=x_0+u_0$ és $x_2=x_1-u_1-w_1$; veszteségfüggvény: $\mathbf{E}\{x_0^2+x_2^2\}$. $v_1(x_1)=\min\{\mathbf{E}x_2^2|\ u_1\}=\min\{\mathbf{E}(x_1-u_1-w_1)^2|\ u_1\}=\mathbf{E}w_1^2$, ha $u_1=x_1$. $v_0(x_0)=\min\{x_1^2+\mathbf{E}w_1^2|\ u_0\}=\mathbf{E}w_1^2$ ha $u_0=-x_0$.

7.5. feladat. Elemi sztochasztikus feladat. $T=1$, $n=1$, állapotegyenlet: $x_1=x_0+u_0$ és $x_2=x_1+u_1+w_1$; veszteségfüggvény: $\mathbf{E}(x_0^2+u_0^2+x_1^2+u_1^2+x_2^2)$. Keressük meg az optimumot!

A 7.4. tétel sztochasztikus általánosítása a

7.7. tétel. *(Vö. Stokey és Lucas, 1989, 9. fejezet.) Megfelelő feltevések esetén (7.9) helyére az időtlen sztochasztikus Bellman-egyenlet lép:*

$$V(x) = \max\{f(x,u,z) + \beta \mathbf{E} V(x^*,w) |\ u, \quad x^* = g(x,u,w)\}, \tag{7.15}$$

ahol $u = h(x,w)$ az időben változatlan optimális válaszfüggvény.

Megjegyzések. 1. Ha a perturbációk időben nem függetlenek, akkor (7.12)–(7.15)-ben feltételes várható értékek lépnek a közönséges várható értékek helyére. Normális eloszlások esetén a feltételes valószínűségi változók is normális eloszlásúak, ezért a feltételes várható értékek viszonylag könnyen és rekurzíve kiszámíthatók.

2.* A determinisztikus esetre kidolgozott fokozatos közelítések módszere a sztochasztikus esetben is alkalmazható.

7.3. OPTIMÁLIS LQ-SZABÁLYOZÁS TELJES MEGFIGYELÉSNÉL

A most következő alfejezetekben az általános szabályozáselmélet legfontosabb speciális esetét vizsgáljuk: a rendszer *lineáris*, a célfüggvény *kvadratikus* és a sztochasztikus zavarok normális (*Gauss*) eloszlásúak, rövidítve: LQG-rendszer. Az 1.4. alfejezetben tárgyaltuk a lineáris rendszerek *szabályozhatóság*át és *megfigyelhetőség*ét. E két fogalom független az optimalizálástól, de az optimalizálás szigorúan ráépül az irányíthatóságra és a megfigyelhetőségre.

Legyen $x \in \mathbf{R}^n$ az *állapot*vektor és $u \in \mathbf{R}^m$ a *szabályozási* vektor. Egyelőre föltesszük, hogy az x_t állapot a t-edik időszak elején pontosan ismert. Legyen A_t és B_t rendre egy $n \times n$-es és $n \times m$-es mátrixsorozat, $t = 0, \ldots, T$. Egy diszkrét idejű, változó együtthatós lineáris rendszer a következő egyenlettel jellemezhető.
Állapotegyenlet:

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t, \qquad x_0 \quad \text{kezdő állapot adott.} \tag{7.16}$$

Szokás szerint időben additív veszteségfüggvényekkel dolgozunk:

$$f_T(x_{T+1}) + \sum_{t=0}^{T} f_t(x_t,u_t). \tag{7.1}$$

A legegyszerűbb célfüggvény, amely belső optimumot ad, *kvadratikus*:

$$f_t(x_t,u_t) = (x_t - x_t^*)^{\mathbf{T}} F_t (x_t - x_t^*) + (u_t - u_t^*)^{\mathbf{T}} G_t (u_t - u_t^*), \tag{7.17}$$

ahol $\{x_t^*,u_t^*\}$ az ún. *referenciapálya*, F_t és G_t rendre n- and m-dimenziós szimmetrikus pozitív definit mátrixok (kivétel: $G_{T+1} = 0$), amelyeknek az elemei azt a veszteséget mutatják, amelyet az egyes időszakokban az egyes állapotoknak és szabályozásoknak a referenciapályától való egységnyi eltérése okoz.

Az LQ-optimális szabályozás alapfeladata a következő: minimalizáljuk a (7.1) és (7.17) időben additív, kvadratikus veszteségfüggvényt a (7.16) lineáris állapotegyenlet mellett.

Megjegyzés. Ellentétben a fizikával, ahol a legtöbb mennyiség előjele tetszőleges, a közgazdaságtanban a legtöbb mennyiség előjele kötött. Esetünkben ugyanis nem mindegy, hogy a termelés több vagy kevesebb, mint a referenciaérték, stb. Ezért az értelmes gazdasági alkalmazásokban úgy szokás megválasztani a referenciapályát, hogy a megengedett pályák vagy mindig a referenciapálya alatt vagy mindig felette haladjanak, vagyis az előjel kérdése fel sem merül. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a referenciapálya azonosan nulla: $x^* = 0$ és $u^* = 0$.

7.8. tétel. *(Kalman; Bryson és Ho, 1969, 2.3. alfejezet.) Az LQ-feladat optimális megoldását egy olyan lineáris visszacsatolás adja.*
Optimális visszacsatolás

$$u_t^{\mathrm{o}} = -K_t x_t^{\mathrm{o}}. \tag{7.18}$$

Optimális visszacsatolási mátrix

$$K_t = (B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t)^{-1} B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} A_t, \tag{7.19}$$

ahol

$$S_t = A_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} A_t - K_t^{\mathbf{T}} (B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t) K_t + F_t, \quad S_{T+1} = F_{T+1}. \tag{7.20}$$

A szabályozás minimális maradék vesztesége t-től $(T+1)$*-ig az* x_t *pillanatnyi optimális állapot kvadratikus függvénye:*

$$v_t(x_t^{\mathrm{o}}) = x_t^{\mathrm{o}\mathbf{T}} S_t x_t^{\mathrm{o}}. \tag{7.21}$$

Megjegyzések. 1. Teljes indukcióval belátható, hogy a (7.19)-ben szereplő inverzmátrixok léteznek. Valóban, S_{T+1} pozitív definit, s ez öröklődik a (7.19)–(7.20) iterációknál. Az invertálandó $B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t$ mátrix egy nemnegatív és egy pozitív definit mátrix összege, tehát sajátértékei pozitívak, azaz a mátrix tényleg invertálható.

2. Figyeljük meg, hogy az optimális szabályozás visszacsatolási mátrixait időben előzetesen (off-line) ki kell/lehet számítanunk, mégpedig időben visszafelé haladva: S_{t+1}-ből K_t-t, majd S_t-t, stb. Ez a bonyolult, általában számítógépet igénylő számítás független az egyelőre ismeretlen kezdőállapottól. Ha viszont az előzetes számításokat elvégeztük, akkor a tényleges szabályozás alatt (on-line) az előzetesen ismeretlen kezdeti állapotból egyszerűen kiszámíthatók a következő állapotok, és így az időszerű optimális irányítás.

3. A feladatot megoldhatnánk a kvadratikus programozás módszereivel is, ekkor azonban a megoldás sokkal több időt követelne. A most ismertetett megoldás ugyanis kihasználja, hogy a feladat együtthatómátrixa kvázi-blokkdiagonális, a célfüggvénye pedig blokkdiagonális. Ha csak egyetlen megoldásról lenne szó, akkor a lépésszám $(nT)^3$ nagyságrendű lenne. A feladat speciális szerkezetét kihasználó iteratív megoldással a lépészám n^3T-nagyságrendűre csökken!

4. Fontos speciális eset az *aszimptotikus*, ahol $T \to \infty$. Ekkor a célfüggvényt normálni kell: $\lim_T(\sum_t f_t/T)$. Megfelelő feltételek esetén a K és az S mátrix kielégíti az időtlen algebrai mátrixegyenletet:

$$K = (B^{\mathbf{T}} SB + G)^{-1} B^{\mathbf{T}} SA, \tag{7.19*}$$

$$S = A^{\mathbf{T}} SA - K^{\mathbf{T}} (G + B^{\mathbf{T}} SB) K + F. \tag{7.20*}$$

Belátható, hogy ekkor a visszacsatolás stabil, azaz $\rho(A - BK) < 1$, és $\lim_t x_t = 0$.

A 7.1. ábra folytatásaként a 7.2. ábrán bemutatjuk a a 7.2. példa végtelen időtávú optimumát (T =10 közelítéssel).

Bizonyítás. A lineáris-kvadratikus feladatoknál szerzett tapasztalatok alapján megsejtjük, hogy a hátralévő veszteség a pillanatnyi állapot kvadratikus függvénye: (7.21). (7.16)-ot és (7.17)-et behelyettesítve a (7.5)–(7.6) összefüggéspárba, adódik, hogy

$$x_t^{\mathbf{T}} F_t x_t + u_t^{\mathbf{T}} G_t u_t + (A_t x_t + B_t u_t)^{\mathbf{T}} S_{t+1}(A_t x_t + B_t u_t), \tag{7.22}$$

és

$$(A_t x_t^{\mathrm{o}} + B_t u_t^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + u_t^{\mathrm{o}\,\mathbf{T}} G_t = 0.$$

A második egyenletet rendezve:

$$u_t^{\mathrm{o}} = -(B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} B_t + G_t)^{-1} B_t^{\mathbf{T}} S_{t+1} A_t x_t^{\mathrm{o}}. \tag{7.23}$$

Vegyük észre, hogy (7.23)-ban x_t^{o} szorzója éppen a (7.19)-beli $-K_t$ mátrix. Igazolni kell még a minimális maradék veszteség értékére kimondott sejtést is: (7.22)-be behelyettesítve (7.23)-at, adódik egy $x_t^{\mathrm{o}\,\mathbf{T}} S_t x_t^{\mathrm{o}}$ kvadratikus alak, (7.20) adja a rekurziót. ∎

7.4.* OPTIMÁLIS ÁLLAPOTBECSLÉS ÉS SZABÁLYOZÁS TÖKÉLETLEN MEGFIGYELÉSNÉL

Ebben az alfejezetben először az optimális állapotbecsléssel foglalkozunk, majd visszatérünk az optimális szabályozásra. Feltesszük, hogy minden véletlen vektor normális eloszlású, s a továbbiakban erről nem teszünk külön említést.

Optimális állapotbecslés

Mielőtt az állapotmegfigyeléssel foglalkoznánk, föltesszük a következő kérdést: mi történik, ha az állapotegyenletet additív zaj terheli? Ekkor

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \tag{7.24}$$

ahol w_t egy n-dimenziós, időben független valószínűségi változó, nulla várható értékkel és Q_t kovariancia-mátrixszal:

$$\mathbf{E} w_t = 0, \quad \mathbf{E}(w_t w_s^{\mathbf{T}}) = \delta_{ts} Q_t,$$

ahol δ_{ts} a Kronecker-szimbólum, értéke 1, ha $s = t$, és 0 egyébként.

Már az 1.4. alfejezetben foglalkoztunk a hiányos megfigyeléssel. Legyen az irányítási rendszer zajjal terhelt, de tegyük föl, hogy nincs irányítás: $u_t = 0$:

$$x_{t+1} = A_t x_t + w_t,$$

ahol az induló x_0 állapotról van valamilyen *a priori* eloszlásunk, x_0^{a} várható értékkel és M_0 kovariancia-mátrixszal:

$$\mathbf{E}(x_0 - x_0^{\mathrm{a}}) = 0, \quad \mathbf{E}[(x_0 - x_0^{\mathrm{a}})(x_0 - x_0^{\mathrm{a}})^{\mathbf{T}}] = M_0.$$

Föltesszük, hogy x_0 és w_t ugyancsak független valószínűségi változó, azaz $\mathbf{E}[(x_0 - x_0^{\mathrm{a}})w_t^{\mathbf{T}}] = 0$.

Rátérünk a tökéletlen megfigyelés kérdésére. Legyen $y_t \in \mathbf{R}^q$ a t-edik időszak megfigyelési vektora, amely lineáris függvénye az $x_t \in \mathbf{R}^n$ állapotnak és a z_t hibatagnak:

$$y_t = C_t x_t + z_t. \tag{7.25}$$

Föltesszük, hogy egy hibatag időben független valószínűségi vektor, nulla várható értékkel és R_t kovariancia mátrixszal:

$$\mathbf{E}z_t = 0, \quad \mathbf{E}(z_t z_s^{\mathbf{T}}) = \delta_{ts} R_t.$$

Föltesszük még, hogy z_t és (x_0, w_t) ugyancsak független valószínűségi változók, azaz

$$\mathbf{E}[(x_0 - x_0^{\mathrm{a}})z_t^{\mathbf{T}}] = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}(w_t z_t^{\mathbf{T}}) = 0.$$

Valószínűségszámításból ismert a súlyozott legkisebb négyzetek módszere. Optimális becslésünknél minimalizálni kell az $x_t^{\mathrm{e}} - x_t$ előzetes és az $y_t - C_t x_t$ utólagos hiba súlyozott várható szórását.

$$\begin{gathered} J_t = (x_t^{\mathrm{e}} - x_t)^{\mathbf{T}} M_t^{-1}(x_t^{\mathrm{e}} - x_t) + (y_t - C_t x_t)^{\mathbf{T}} R_t^{-1}(y_t - C_t x_t), \\ J = \sum_{t=0}^{T} J_t. \end{gathered} \tag{7.26}$$

A következő tétel meghatározza az optimális állapotbecslés képletét.

7.9. tétel. *(Kalman-szűrő, 1960; Bryson és Ho, 1969, 12.4. alfejezet.) Az optimális állapotbecslés a következő szekvenciális lépésekben végezhető.*
Előzetes várható érték

$$x_t^{\mathrm{a}} = A_{t-1} x_{t-1}^{\mathrm{e}}. \tag{7.27}$$

Utólagos várható érték

$$x_t^{\mathrm{e}} = x_t^{\mathrm{a}} + H_t(y_t - C_t x_t^{\mathrm{a}}). \tag{7.28}$$

Minimális előzetes hiba-kovariancia

$$H_t = P_t C_t^{\mathbf{T}} R_t^{-1}. \tag{7.29}$$

Minimális új hiba-kovariancia

$$P_t = (M_t^{-1} + C_t^{\mathbf{T}} R_t^{-1} C_t)^{-1} = M_t - M_t C_t^{\mathbf{T}}(C_t M_t C_t^{\mathbf{T}} + R_t)^{-1} C_t M_t. \tag{7.30}$$

Minimális teljes hiba-kovariancia

$$M_{t+1} = A_t P_t A_t^{\mathbf{T}} + B_t Q_t B_t^{\mathbf{T}}. \tag{7.31}$$

Megjegyzések. 1. Akárcsak az optimális szabályozásnál, az optimális állapotbecslésnél is a számítások egyik része előzetesen (off-line) elvégezhető: (7.29)–(7.31). Most időben előrehaladunk e számításoknál. A rendszer elindítása után adott $x_0^{\mathrm{a}} = 0$-ból indítva a becslést, $Y_{t-1} = \{y_0, \dots, y_{t-1}\}$ információvektor alapján (7.27) segítségével számítjuk ki az előzetes x_t^{a} állapotbecslést, majd a legújabb megfigyelés, y_t alapján (7.28) segítségével javítjuk a becslést.

2. Figyeljük meg a hasonlóságot az optimális szabályozás és az optimális becslés között! E hasonlóság miatt a levezetést sem kell megismételnünk.

7.5. példa. Súlyozott legkisebb négyzetek módszere. Legyen $T = 0$ és becsüljük meg x-et y megfigyelése alapján.

$$(x^{\mathrm{e}} - x)^{\mathbf{T}} M^{-1} (x^{\mathrm{e}} - x) + (y - Cx)^{\mathbf{T}} R^{-1} (y - Cx) \to \min\,, \tag{7.26$'$}$$

$$e = H(y - Cx^{\mathrm{a}}), \tag{7.28$'$}$$

$$H = PC^{\mathbf{T}} R^{-1} \tag{7.29$'$}$$

M a mérés előtti kovariancia-mátrix, P a mérés utáni kovariancia-mátrix.

Optimális LQG-szabályozás és becslés

A 7.3. alfejezetben tökéletes megfigyelés mellett optimalizáltuk a rendszer működését, a 7.4. alfejezet elején pedig kikapcsolt irányítás mellett optimalizáltuk a tökéletlenül megfigyelt rendszer állapotbecslését. Ebben az alfejezetben egyesítjük az előző két feladatot: tökéletlen megfigyelés mellett egyszerre optimalizáljuk a szabályozást és a megfigyelést. Azaz a sztochasztikus lineáris (7.24) állapotegyenletet az ugyancsak sztochasztikus lineáris (7.25) megfigyelési egyenlet alapján fogjuk optimalizálni.

7.10. tétel. *A bizonyossági ekvivalencia tétele (Kalman, 1960, Bryson és Ho, 1969, 14.7. alfejezet.) A kettős LQG-feladat optimális megoldását egy olyan becsléssorozat, s az arra épülő lineáris visszacsatolás adja, amelyek egymástól lényegében függetlenek;*
előzetes várható érték

$$x_t^{\mathrm{a}} = (A_{t-1} - B_{t-1} K_{t-1}) x_{t-1}^{\mathrm{e}}, \tag{7.27*}$$

utólagos várható érték

$$x_t^{\mathrm{e}} = x_t^{\mathrm{a}} + H_t (y_t - C_t x_t^{\mathrm{a}}), \tag{7.28*}$$

optimális irányítás

$$u_t^{\mathrm{o}} = -K_t x_t^{\mathrm{e}}, \tag{7.18*}$$

ahol a mátrixok továbbra is rekurzívan kiszámíthatók.

Megjegyzés. Érdekes, hogy e feladat megoldásában, legalábbis speciális esetben a közgazdászok megelőzték a műszakiakat, lásd Simon (1956) és Theil (1957) bizonyossági ekvivalencia tételét.

Bizonyítás. Lásd a 7.8. tétel bizonyítását, valamint Bryson és Ho idézett forrást. ∎

Egyéb szabályozási feladatok

A fenti feladatok csupán a legegyszerűbb feladatok. Itt csak felsorolunk néhány kérdéskört, a hozzátartozó forrás jelzésével.

a) Jóval nehezebb, de sokkal reálisabb a feladat, ha az additív zavarok helyett multiplikatív zavarok szerepelnek (vö. Wonham, 1967).

b) Az imént vizsgált *klasszikus* szabályozáselmélet teljesen centralizált és teljes emlékezetű rendszereket vizsgál. Witsenhausen (1968) ismertetendő ellenpéldája rámutatott arra, hogy nemklasszikus szabályozásnál az optimális szabályozás *nem* feltétlenül lineáris. Az ok meglehetősen egyszerű: decentralizált szabályozásnál a szabályozási változó jelzésül is szolgálhat. Köznapi példával élve: időben visszaugorva 1997 előttre, az OTP számlarendszerből gyakran nem derül ki, hogy kitől kapom pénzt. Megállapodhatok viszont egy üzletfelemmel, hogy átutalásnál mindig 9 Ft-ra „kerekíti" az átutalt összeget. Ezzel legfeljebb 5 Ft-ot nyerek vagy veszítek, én pedig szinte ingyen megtudhatom, hogy valószínűleg tőle származik a pénz. Igen ám, de elvileg kerekíthetünk 90 fillérre, sőt 99 fillérre is, s ekkor a veszteség legfeljebb 50, illetve 5 fillér, s az információ még pontosabb.

Módosítsuk a 7.2. példát! (Most a zaj nem az állapotegyenletben, hanem a megfigyelési egyenletben van, és a veszteségfüggvény is különböző.)

7.6. példa.* (Witsenhausen, 1968.) Nemklasszikus LQG-optimum nem lineáris. Állapotegyenletek

$$x_1 = x_0 + u_0 \qquad \text{és} \qquad x_2 = x_1 - u_1.$$

Megfigyelési egyenletek

$$y_0 = x_0 \qquad \text{és} \qquad y_1 = x_1 + z.$$

Veszteségfüggvény

$$qu_0^2 + x_2^2.$$

Megengedett szabályozás

$$u_0 = U_0(y_0) \qquad \text{és} \qquad u_1 = U_1(y_1).$$

A bizonyítás sok oldalnyi, inkább elhagyjuk.

c) Eddig föltettük, hogy a rendszer paramétereinek eloszlása egyszer s mindenkorra ismert. Mi történik akkor, ha a statisztikai vizsgálatok a szabályozással egyidőben kezdődnek? Az ún. *duális* vagy *adaptív* szabályozás foglalkozik a kérdéssel (Tse és Athans, 1967).

d) Eddig kizárólag olyan rendszereket vizsgáltunk, amelyekben a mozgásegyenlet lineáris és a veszteségfüggvény kvadratikus. Mi történik az általános, nemlineáris és nemkvadratikus esetben? Erre válaszolunk a következő fejezetben.

8. DINAMIKUS PROGRAMOZÁS ALKALMAZÁSAI

Az előző fejezetben a *dinamikus programozás* matematikai elméletét és szabályozás-elméleti alkalmazását vázoltuk, most néhány közgazdasági alkalmazást mutatunk be. A 8.1. alfejezetben az optimális megtakarítást (egzogén tényezőárak mellett), a 8.2. alfejezetben az optimális felhalmozást (endogén tényezőárak mellett) vizsgáljuk. A 8.3. alfejezetben röviden ismertetjük a dinamikus programozás egyik, Mirman és Levhari (1980)-tól származó játékelméleti alkalmazását. A dinamikus programozás alkalmazásának részletes leírása Sargent (1987), Manuelli és Sargent (1987), Stokey és Lucas (1989) 2. és 5. fejezetében, valamint Ljungqvist–Sargent (2000) található.

8.1. OPTIMÁLIS MEGTAKARÍTÁS

Először az optimális megtakarítás feladatát vizsgáljuk. Látni fogjuk, hogy a 7.1. tétel előtti említett reducíbilis dinamikus programozási feladattal állunk szemben.

Legyen $u(c)$ az *időszaki hasznosságfüggvény*, β a *leszámítolási tényező* és $U(c) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$ a c fogyasztási pálya *teljes hasznossága*. Legyen k_t a t-edik időszak eleji, tőkefelhalmozásból származó *vagyon*, w_t a t-edik időszak *munkajövedelme*, c_t a *fogyasztás* és r az időben változatlan *kamattényező* (=1+kamatláb). Definíció szerint teljesül a *vagyondinamikai egyenlet*

$$k_{t+1} = r(k_t + w_t - c_t).$$

Ezért a feladat a következő alakot ölti:

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u\left(k_t + w_t - \frac{k_{t+1}}{r}\right) \to \max,$$

ahol

$$rk_t + rw_t \geq k_{t+1}, \qquad t = 0, 1, \ldots, \quad k_0 \qquad \text{adott.}$$

Hasznos lesz lefordítani a 7. fejezet általános és a 8. fejezet speciális jelöléseit; állapot: $x \to k$, szabályozás: $u \to c$, hasznosságfüggvény: $u \to u$.

Véges időtáv

Ezt a feladatot a dinamikus programozás nélkül oldjuk meg.

8.1. tétel. *Ha $\Psi = \beta r < 1$ és a véges hosszúságú életpályán van fogyasztói hitel, akkor az optimális fogyasztás a korral csökkenő.*

Bizonyítás. Egyelőre megengedve átmeneti negatív pénzvagyont, a feladat egyetlen korlátra visszavezethető: a leszámítolt életpálya-fogyasztás egyenlő a vagyon és a leszámítolt életpálya-kereset összegével. A Lagrange-szorzós módszert alkalmazva, π-vel jelölve a pozitív szorzót, a Lagrange-függgvény a következő:

$$L(c_0, \cdots, c_T, \pi) = \sum_{t=0}^{T} [\beta^t u(c_t) + \pi r^{-t}(w_t - c_t)] + \pi k_0.$$

Innen adódik a feltételezett belsőoptimum-feltétel:

$$u'(c_t) = \pi \Psi^{-t}, \tag{8.1}$$

Mivel $\Psi < 1$ és u' pozitív értékű csökkenő függvény, c_t csökken a korral: $c_{t+1} < c_t$. ∎

Szemléltetésként következik a

8.1. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény $u(c) = \log c$, van fogyasztói hitel. (8.1)-ből $c_t = \Psi^t/\pi$. π is meghatározható: $k_0 + \sum_{t=0}^{T} r^{-t} w_t = \pi^{-1} \sum_{t=0}^{T} \beta^t$.

Az elmondottak jól szemléltethetők a következő adatoknál: $T = 15$, $w = 1$, $k_0 = 1$, $r = 1{,}03$ és $\beta = 0{,}95$. A 8.1. ábrán látható, hogy a 7. és a 15. év között az optimalizáló fogyasztó hitelt vesz föl.

Ha nem lehet kölcsönt fölvenni, akkor nem lehet kiküszöbölni az időszaki vagyonmérlegeket: $k_t \geq 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Ekkor a kezdeti vagyontól és a keresettől függ, hogy korlátozzák-e vagy sem a fenti korlátok az optimális pályát.

Ezen a ponton bevezetjük a CRRA hasznosságfüggvényt, amellyel a 10.1 alfejezetben, a B. és a C. függelékben még bővebben is foglalkozunk:

$$u(c) = \sigma^{-1} c^{\sigma} \qquad (\sigma \neq 0)$$

ahol $\zeta = 1 - \sigma > 0$ a *relatív kockázatkerülési* együttható, és $\varepsilon = 1/\zeta$ a helyettesítési rugalmasság. Reális esetben $0 < \varepsilon < 1$. (Figyeljük meg, hogy a σ^{-1} együttható tartja meg növekvőnek az $u(c)$ függvényt negatív σ-kra.)

8.1. feladat. Oldjuk meg 8.1. példát CRRA hasznosságfüggvényre!

Végtelen időtáv

Mi történik, ha $T \to \infty$?

Előkészítésként szolgál a

8.2. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény és állandó kereset. A végtelen időtáv miatt a 8.1. példa egyszerűsödik. Pozitív kamatláb esetén $w(1 - 1/r)$ véges és $\pi^{-1} = [k_0 + w(1 - 1/r)](1 - \beta)$.

Stokey és Lucas általános hasznosságfüggvényt mérlegelve és fogyasztói kölcsönt kizárva válaszolnak a kérdésre.

8.2. tétel. *(Stokey és Lucas, 1989, 5.17. alfejezet.) Végtelen időtáv, általános hasznosságfüggvény és állandó kereset esetén a fogyasztás a korral csökken, s a kezdővagyontól függően előbb vagy utóbb a folyó jövedelemre szorítkozik.*

Az értékfüggvény *találgatásával és ellenőrzésével* megoldható a következő példa.

8.3. példa. (Ljungqvist és Sargent, 2000, 33–34.) CRRA-hasznosságfüggvény és állandó kamattényező melletti optimális fogyasztási pálya.

$$V(k) = \max\{u(c) + \beta V(k^*) | \qquad k^* = r(k - c)\}.$$

Azt sejtjük, hogy $V(k) = \sigma^{-1}Ak^\sigma$, ahol A egy meghatározandó állandó. (A sejtés a példa végén leírt egyszerűbb módszerből levezethető!)

Először meghatározzuk a jobb oldalt maximalizáló $c(A,k)$ fogyasztást és $k^*(A,k)$ tőkét, majd az értékegyenletbe behelyettesítve, kiszámítjuk A-t és az adódó $c(k) = c(A,k)$-t.

$$c(A,k) = \frac{k}{1 + A^{1-\mu}\beta^{1-\mu}r^{-\mu}}, \qquad \text{ahol} \qquad A^{1-\mu} = \frac{1}{1 - \beta^{1-\mu}r^{-\mu}}, \qquad \beta r < 1,$$

azaz

$$c(A,k) = (1 - \beta^{1-\mu}r^{-\mu})k.$$

Megemlítjük, hogy ebben az esetben létezik egy sokkal egyszerűbb eljárás is: evidens, hogy az optimális fogyasztás arányos a tőkével: $c_t = \gamma k_t$. Számolással: $k^* = r(1-\gamma)k$, $k_t = r^t(1-\gamma)^t k_0$, $c_t = \gamma r^t(1-\gamma)^t k_0$. Behelyettesítve ezt az összefüggést az értékfüggvény (2.8) definíciójába, az optimális γ egyszerűen kiszámítható.

A most bevezetendő lineáris hasznosságfüggvényt a 10.3. alfejezetben bírálni fogjuk, a következő két feladatban csupán illusztrációként szerepel.

8.2. feladat. Lineáris hasznosságfüggvény hitelfelvétellel (Stokey és Lucas, 1989, 74. o.). Legyen a fogyasztó kezdeti gazdagsága k_0 és legyen az időszaki hasznosságfüggvénye lineáris, például $u(c) = c$. Tegyük föl, hogy korlátlanul megtakaríthat és kölcsönözhet $r = 1/\beta$ kamattényező mellett. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az értékfüggvény lehet ∞ és $V(k) = k$!

8.3. feladat. Lineáris hasznosságfüggvény hitelfelvétel nélkül (Stokey és Lucas, 1989, 76. o.). A 8.3. feladatot egyetlen ponton módosítjuk: nincs fogyasztói hitel. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az értékfüggvény $V(k) = k$, de az örök csak-felhalmozás stratégiája nem elégíti ki a transzverzalitási feltételt!

8.2. OPTIMÁLIS FELHALMOZÁS

A modell

Érintve az egzogén tényezőárak problémáját, most rátérünk az endogén tényezőárakra. Most a diszkrét idejű egyszektoros optimális növekedés modelljét vizsgáljuk, ahol a modell időtávja, T véges vagy ∞.

Legyen $u(c)$ az időszaki hasznosságfüggvény, β a leszámítolási tényező és $U(c) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$ a c fogyasztási pálya hasznossága. Föltesszük, hogy f^* a termelési függvény és a mindenkori tőkeállománynak egy adott, δ része semmisül meg egy időszak alatt. Ezért $c_t = (1-\delta)k_t + f^*(k_t) - k_{t+1}$. Bevezetve az $f(k) = (1-\delta)k + f^*(k)$ bővített termelési függvényt, $c_t = f(k_t) - k_{t+1}$. (Azt is mondhatnánk, hogy a tőke egy időszak alatt megsemmisül, azaz $\delta = 1$ és $f^* = f$.) Tehát a feladat a következő alakot ölti:

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u[f(k_t) - k_{t+1}], \to \max \tag{8.2}$$

ahol

$$0 \le k_{t+1} \le f(k_t), \qquad t = 0, 1, \ldots \qquad \text{és} \qquad k_0 \qquad \text{adott.} \tag{8.3}$$

Föltesszük, hogy mind az u hasznosságfüggvény, mind az f termelési függvény sima, növekvő és konkáv, kielégítik az Inada-feltételeket:

$$U'(0) = \infty, \qquad U'(\infty) = 0, \qquad f'(0) = \infty, \qquad f'(\infty) = 0;$$

továbbá $0 \le \beta \le 1$.

A (8.2)–(8.3) általános feladatnak nincs explicit megoldása, kvalitatíve azonban vizsgálható és numerikusan megoldható. A következő speciális esetnek mégis szép analitikus megoldása van (folytonos idejű változatát lásd 6.2. feladat).

A Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény és termelési függvény, $u(c) = \log c$ és $f(k) = k^\alpha$ esetén (8.2)–(8.3) a következő:

$$\sum_{t=0}^{T} \beta^t \log(k_t^\alpha - k_{t+1}) \to \max\,, \tag{8.4}$$

feltéve, hogy

$$0 \le k_{t+1} \le k_t^\alpha. \tag{8.5}$$

Véges időtáv

Visszatérve az általános (8.2)–(8.3) kerethez, először a véges időtávot vizsgáljuk: $T < \infty$. Ekkor az optimumelv nem más, mint egy közönséges feltételes szélsőérték-feladat elsőrendű feltételeinek együttese, amely f és u konkavitása miatt nemcsak szükséges, de elégséges is:

$$\beta f'(k_t)u'[f(k_t) - k_{t+1}] = u'[f(k_{t-1}) - k_t], \qquad t = 1, \ldots, T; \tag{8.6}$$

$$k_{T+1} = 0, \qquad k_0 \qquad \text{adott.} \tag{8.7}$$

Példákon és feladatokon keresztül vizsgáljuk a felvetődő kérdéseket.

8.4. példa. (Stokey és Lucas, 1989, 11–12. o.) A véges T időtávú feladatnál (8.6) a következő differenciaegyenletre egyszerűsödik:

$$\frac{\beta\alpha k_t^{\alpha-1}}{k_t^\alpha - k_{t+1}} = \frac{1}{k_{t-1}^\alpha - k_t}, \qquad t = 1, \ldots, T. \tag{8.8}$$

A $z_t = k_t/k_{t-1}^\alpha$ változó és a $\Psi = \alpha\beta$ paraméter bevezetésével a (8.7) zárófeltételhez tartozó megoldás kitalálható:

$$z_t = \Psi\frac{1 - \Psi^{T-t+1}}{1 - \Psi^{T-t+2}} \tag{8.9}$$

és teljes indukcióval igazolható. Visszahelyettesítve adódik a T időtávú optimális tőkefelhalmozás egyenlete:

$$k_{t+1} = \Psi\frac{1 - \Psi^{T-t}}{1 - \Psi^{T-t+1}}k_t^\alpha. \tag{8.10}$$

8.4. feladat. *a)* Igazoljuk, hogy a (8.8) másodrendű implicit differenciaegyenlet a $z_{t+1} = 1 + \Psi - \Psi/z_t$ elsőrendű explicit differenciaegyenletre egyszerűsödik! *b)* Hogyan lehet kitalálni (8.10)-et?

8.5. feladat. Igazoljuk, hogy (8.10) tényleg megoldása (8.8)-nak!

Végtelen időtáv

Rátérünk a végtelen időtávú feladatra. A (8.4)–(8.5) speciális feladaton szemléltetjük majd a dinamikus programozás különböző megoldási módszereit: a véges időtáv kiterjesztését, az értékfüggvény találgatásos és iteratív kiszámítását.

Általános tételekből remélhető, hogy a végtelen időtávú feladat megoldása a véges időtávú feladat megoldásának a határértéke. Ezt szemlélteti a

8.5. példa. A 8.4. példa $T = \infty$ melletti megoldása

$$k_{t+1} = \lim_{T\to\infty} \Psi\frac{1 - \Psi^{T-t}}{1 - \Psi^{T-t+1}}k_t^\alpha = \Psi k_t^\alpha, \tag{8.11}$$

és a transzverzalitási feltétel is teljesül.

Célszerű az állandósult állapotot kiszámítani: $x^\mathrm{o} = \Psi^{1/(1-\alpha)}$.

Tekintsük a 7.1. alfejezetben bevezetett időtlen értékfüggvény-egyenletet.

$$V(k) = \max\{u[f(k) - k^*] + \beta V(k^*) |\ 0 \le k^* \le f(k)\}. \tag{8.12}$$

A feladat a függvényegyenlet megoldása. Ezzel eljutottunk a következő megállapításhoz.

8.3. tétel. *(Stokey és Lucas, 1989, 2.1. és 5.1. alfejezet.) A hasznosságfüggvényre és a termelési függvényre tett megfelelő feltételek mellett a 7. fejezet megfelelő tételei alkalmazhatók.*
Optimumfeltétel:

$$u'[f(k) - h(k)] = \beta V'[h(k)], \tag{8.13}$$

Burkológörbe-feltétel:

$$V'(k) = f'(k)u'[f(k) - h(k)]. \tag{8.14}$$

A (8.13) egyenlet azt mondja ki, hogy a folyó kibocsátás fogyasztási határhasznossága egyenlő a felhalmozáséval. A (8.14) egyenlet pedig azt mondja ki, hogy a pillanatnyi tőke teljes leszámított hasznosságban kifejezett határértéke egyenlő annak határhasználval, hogy a tőkét a folyó termelésben használjuk és hozadékát a folyó fogyasztásba fektetjük (Stokey és Lucas, 1989, 14. o.).

Most a találgatásos módszert mutatjuk be.

8.6. példa. Az értékfüggvény találgatásos megoldása (Stokey és Lucas, 1989, 11–13. o.). Ellenőrizhető, hogy (8.11) tényleg megoldása (8.13)–(8.14) speciális változatának. Valóban, (8.11) értelmében $u(c_t) = \log(1 - \Psi)k_t^\alpha = \log[(1 - \Psi) + \alpha \log k_t]$. Logaritmizáljuk (8.11)-et: $\log k_t = \log \Psi + \alpha \log k_{t-1}$. 1.16 példa szerint a megoldás $\log k_t = \text{const} + \alpha^t \log k_0$, azaz $V(k_0) = \sum_t \beta^t u(c_t) = \text{const} + \alpha(1 - \Psi)^{-1} \log k_0$, $h(k) = k^\alpha$. Deriválva: $V'(k) = \alpha(1 - \Psi)^{-1}k^{-1}$, stb.

8.6. feladat. Határozzuk meg $\log k_t$ állandó tagját!

Most az optimális felhalmozás esetén mutatjuk be a találgatásos módszert.

8.7. feladat. Optimális felhalmozási pálya. a) Írjuk föl a függvényegyenletet a speciális Cobb–Douglas esetre, ahol $f(k) = k^\alpha$ és $u(c) = \log c$!

b) Számolással igazoljuk, hogy $V(k) = \xi \log k + \eta$ alakú, és határozzuk meg ξ értékét!

c) Határozzuk meg az optimális $c(k)$ visszacsatolást!

Valójában az értékfüggvényt csak ritkán tudjuk kitalálni. Helyesebb ezt az eljárást úgy tekinteni mint a numerikusan hatékony *értékfüggvény-iteráció* módszerének előkészítését. Tekintsük a következő iterációt!

$$V_{j+1}(k) = \max_c \left[\log c + \beta V_j(k^*)\right].$$

Ekkor $V_j(k) = \xi_j \log k + \eta_j$, $c_j = k^\alpha/(1 + \beta\xi_j)$, $\xi_{j+1} = \alpha + \beta\xi_j\alpha$, stb.

Most a 7.4. tételben leírt harmadik módszert szemléltetjük.

8.7. példa.* A speciális feladat megoldása a fokozatos megközelítés módszerével (Stokey és Lucas, 1989, 93–95. o.). Belátható, hogy

$$\log k_t \le \alpha^t \log k_0,$$

Vegyük elő az

$$\mathbf{M}V(k) = \max\{\log(k_t^\alpha - k) + \beta V(k^*)|\ 0 < k^* \le k_t^\alpha\}$$

transzformációt, és közvetlen számolással igazoljuk, hogy $V_0 = 0$ mellett

$$\mathbf{M}^t V_0(k) = \frac{1-\beta^{t+1}}{1-\beta}\log(1-\Psi) + \frac{\Psi\log\Psi}{1-\Psi} + \frac{\alpha\log k}{1-\Psi}.$$

Határátmenetben adódik a megoldás:

$$V(k) = \frac{1}{1-\beta}\log(1-\Psi) + \frac{\Psi\log\Psi}{1-\Psi} + \frac{\alpha\log k}{1-\Psi}.$$

A 7.4. tétel szerint az állandó megtakarítási hányadú $\phi(k) = \Psi k^\alpha$ átmenetfüggvény generálja az optimális tőkeállomány-pályát.

Sztochasztikus termelési függvény

Legyen $\{z_t\}$ az azonos és független eloszlású valószínűségi változók egy sorozata. Föltesszük, hogy a t-edik időszak elején a k_t tőkeállomány és a z_t multiplikatív zavar esetén a termelés $z_t f(k_t)$. A feladat a következő:

$$\mathbf{E}\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u[z_t f(k_t) - k_{t+1}] \to \max,$$

ahol

$$0 \le k_{t+1} \le z_t f(k_t), \qquad t = 0,\ 1,\ \ldots, \quad k_0 \qquad \text{adott.}$$

A (8.12) determinisztikus értékfüggvény-egyenlet helyére sztochasztikus általánosítása kerül:

(8.15) $$V(k,z) = \max\{u[zf(k) - k^*] + \beta\mathbf{E}V(k^*)|\ 0 \le k^* \le zf(k)\}.$$

(8.15) tanulmányozása elvezet az optimális tőkeállományhoz: $k^* = h(k,z)$. Belső optimum és differenciálhatóság esetén (8.15) helyére

$$V'[zf(k) - h(k,z)] = \beta\mathbf{E}V'[h(k,z)]$$

lép. Mit kapunk most a speciális esetben?

8.8. példa. Cobb–Douglas-hasznosság- és termelési függvény. Belátható, hogy az optimális felhalmozási átmenet (8.11)-beli általánosítása:

$$k_{t+1} = \Psi z_t k_t^\alpha.$$

Ismét a logaritmusokra térve:

$$\log k_{t+1} = \log\Psi + \log k_t^\alpha + \log z_t.$$

A 8.7. feladat levezetését általánosítva:

$$\log k_t = \log\Psi\frac{1-\alpha^t}{1-\alpha} + \alpha^t\log k_t + \sum_{i=1}^{t}\alpha^{i-1}\log z_{t-i}.$$

Ha például z_t a $(0,\sigma)$ paraméterű lognormális eloszlású valószínűségi változó, akkor meghatározható $\log k_t$ eloszlása. Kerek eredményt kapunk aszimptotikus esetben: a determinisztikus tag határértéke $(1-\alpha)^{-1}\log\Psi$, a sztochasztikus tag eloszlása tart valamilyen eloszláshoz. Lényeges, hogy a determinisztikus kezdőállapot hatása elenyészik, a rendszer sztochasztikusan stabil, *ergodikus*.

8.3. A NAGY HALHÁBORÚ

Ebben az alfejezetben a dinamikus programozás egyik játékelméleti alkalmazását mutatjuk be Levhari és Mirman (1980) alapján. A kiindulás Nagy-Britannia és Izland „tőkehalháborúja". A viszály tétje az volt, hogy mennyi halat foghatnak ki évente a brit halászok az izlandi vizekben, hogy az izlandi halászoknak is, no meg az utókornak is maradjon zsákmány. Míg az ötvenes években az állomány 2,5 millió tonna és az évi fogás 250 ezer tonna volt, ma e két érték 600 és 150 ezer tonnára süllyedt.

A modell

Legyen k_t a halállomány mértéke a t-edik időszak elején. Ha nem volnának halászok, akkor a halállomány a biológiai törvények szerint nőne:

$$k_{t+1} = k_t^\alpha, \qquad \text{ahol} \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{8.19}$$

Nyilvánvaló, hogy a biológiai egyensúlyi halállomány $k^* = 1$ (a számszerű mérték normálás kérdése).

Két ország is halászik azonban e vizeken, indexük $i = 1{,}2$. A t-edik időszakban az i-edik ország $c_{i,t}$ mennyiséget fog ki. Ekkor (8.19) értelemszerűen módosul:

$$k_{t+1} = (k_t - c_{1,t} - c_{2,t})^\alpha. \tag{8.20}$$

Mindkét országnak Cobb–Douglas időszaki hasznosságfüggvénye van, β_i leszámítolási tényezővel, T időtávval.

$$U_i = \sum_{t=0}^{T} \beta_i^t \log c_{i,t}, \qquad i = 1{,}2.$$

Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy mindkét ország adottnak veszi a másik ország stratégiáját, azaz Cournot–Nash-stratégiát játszik. Formálisan: ha az i-edik ország a másik, j-edik ország $c_{j,t}$ fogyasztási pályáját adottnak veszi, akkor a (8.20) feltétel mellett optimalizálhatja az U_i hasznosságfüggvényét. Ha van olyan $\{c_{1,t}\}$ és $\{c_{2,t}\}$ sorozat, amelynek mindkét tagja optimális a másikra nézve, akkor *Cournot–Nash-optimum*ról beszélünk.

Megoldás

Mielőtt megadjuk a T időtávú megoldást, a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\Psi_i = \alpha\beta_i, \quad S_{i,T} = \sum_{t=0}^{T} \Psi_i^t.$$

8.9. tétel. *(Levhari és Mirman, 1980.) T időtáv esetén az t-edik időszak optimális Cournot–Nash-politikája*

$$c_{i,t}^{\circ} = \frac{\Psi_j S_{i,T-1-t}}{S_{1,T-t} S_{2,T-t}} k_t^{\circ}, \qquad i = 1{,}2, \quad j \neq i. \tag{8.21}$$

Bizonyítás. T-szerinti teljes indukcióval. ∎

Eredményünk egyszerűsödik, ha végtelen horizontra térünk át.

8.10. tétel. *(Levhari és Mirman, 1980.) Végtelen időtáv esetén az optimális Cournot–Nash-fogáspolitikája független az időtől:*

$$c_{i,t}^{\mathrm{o}} = \frac{\Psi_j(1-\Psi_i)}{\Psi_1+\Psi_2-\Psi_1\Psi_2} k_t^{\mathrm{o}}, \qquad i = 1{,}2, \quad j \neq i, \tag{8.22}$$

míg a halállomány aszimptotikus egyensúlyi értéke

$$k^{\mathrm{o}} = \Big(\frac{1}{\Psi_1} + \frac{1}{\Psi_2} - 1\Big)^{\alpha/(\alpha-1)}. \tag{8.23}$$

Bizonyítás. (8.21) aszimptotikus értéke (8.22). Ekkor a halállomány t-edik időszaki értéke is könnyen kiszámítható:

$$k_t = \Big[\frac{\alpha\beta_1\beta_2}{\beta_1+\beta_2-\alpha\beta_1\beta_2}\Big]^{R_t} k_0^{\alpha t}, \qquad i = 1{,}2.$$

Határértékben adódik (8.23). ∎

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy minél gyengébb a leszámítolás (azaz minél nagyobb a leszámítolási tényező), annál nagyobb az egyensúlyi halállomány.

8.8. feladat. Ellenőrizzük a számításokat!

8.9. feladat.* *a)* Oldjuk meg a feladatot, ha a két ország összefog, optimálisan és egyenlő mértékben ($c_{1,t} = c_{2,t} = c_t$) és egyenlő türelemmel ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) halászik! *b)* Mutassuk meg, ebben az esetben adott halállományból kevesebbet fognak ki, de az egyensúlyi halállomány ($k^* > k^{\mathrm{o}}$) annyival nagyobb, mint a versengő esetben, hogy az egyensúlyi fogás ($c^* > c^{\mathrm{o}}$) mégis nagyobb!

8.9. példa. A halháború numerikus szemléltetése. Legyen $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}95$. Ekkor $k^{\mathrm{o}} = 0{,}29$; $c^{\mathrm{o}} = 0{,}103$ és $k^* = 0{,}45$; $c^* = 0{,}124$. A merítési hányados (c/k) állandósult értéke rendre 0,355 és 0,275. A dinamika szemléltetésére legyen $k_0 = 0{,}5k^{\mathrm{o}}$. A kooperációs és a harcos pályákat a 8.2. ábrán szemléltetjük. Érdekes, hogy az első néhány időszakban a harcos pálya fogása felülmúlja a kooperációsét.

A duopólium-elméletekben a szimmetrikus Cournot-Nash-egyensúlyon kívül vizsgálják az aszimmetrikus Stackelberg-egyensúlyt is. Itt először a vezető ország lép, s csak aztán lép a a követő ország. Ebben a játékban a vezető ország előnyben van a követő országgal szemben. E harmadik modell tanulmányozása helyett röviden utalunk egy fontosabb kérdéskörre.

Időbeni inkonzisztencia

Adott egy dinamikus rendszer, amelynek irányítási vektora két blokkból áll, mivel a rendszert két döntéshozó irányítja. A Cournot–Nash-megoldásnál az optimumelv érvényben marad, a Stackelberg-megoldásnál azonban nem: az 1. számú *követő* $u_{1,\tau}$ döntései $\tau \leq t$-nél is függnek a 2. számú *vezető* $u_{2,t}$ döntésétől, a vezetőre nem érvényes a Bellman-elv. Ezt hívják *időbeni vagy dinamikus inkonzisztenciá*nak.

A részletes kifejtés helyett pusztán egy köznapi példát hozunk (Kydland és Prescott, 1977). Tegyük föl, hogy a kezdő időszakban a hatóság megtiltja, hogy egy folyómenti terület lakosai árterületen építkezzenek, mert nem akar gátat építeni, amelynek költsége várhatóan felülmúlja az ártéri telkek olcsóságából fakadó megtakarítást. Az időbeni inkonzisztenciával tisztában lévő lakosok ennek ellenére megépítik a házakat. Ha a hatóság időben következetes, akkor a következő időszakban nem épít gátat, s hagyja, hogy az ártéri házak árvíz esetén elpusztuljanak. Ha azonban a hatóság figyelembe veszi a megváltozott helyzetet, akkor gyorsan megépíti a gátakat, mert a veszélyeztetett ártéri lakások összértéke nagyobb, mint a gátépítés költsége. (Thatcher asszony viszont időben konzisztensen viselkedett az argentín junta 1982-es falklandi kalandjánál, amikor a sziget értékét felülmúló költségeket vállalva, kiűzte az argentín kalandorokat a szigetről.)

Egyéb feladatok

Stokey és Lucas (1989) 5. fejezete alapján számos olyan közgazdasági feladatot említhetünk meg, amely a dinamikus pogramozás segítségével oldható meg. Itt csak felsorolunk néhányat közülük. A tortaevési feladat: $f(k) = k$. Növekedés technikai fejlődéssel. A fakivágási feladat. Dolgozva tanulás. Emberi tőke felhalmozása. Növekedés emberi tőkével. Beruházás konvex költségekkel. Beruházás állandó hozadékkal. Optimális fogyasztás rekurzív preferenciákkal. Az (s,S) készletpolitika. Az LQG-szabályozásra nehéz olyan közgazdasági példát találni, amely beilleszthető lenne néhány oldalra. Az olvasónak az irodalomjegyzékben található forrásokat ajánljuk: Athans (1972), (1975), Holly et al. (1977), Pitchford és Turnovsky (1977) és Chow (1981).

Más típusú, többszektoros optimális felhalmozási feladatok szerepelnek a könyv első kiadásának 8.3. fejezetében, amelyeket a jelen változatból kihagytunk.

9. AZ OPTIMÁLIS FOLYAMATOK (SZABÁLYOZÁS) ELMÉLETE

Az 5. fejezetben bevezetett folytonos idejű szabályozási modellek magva az *állapotegyenlet.* Ez az állapotvektorra vonatkozó paraméteres differenciálegyenlet-rendszer, ahol a paramétervektor a szabályozási vektor. Adott intervallumon értelmezett adott szabályozási pálya esetén az állapotegyenlet meghatároz egy állapotpályát. Az *optimális folyamatok elméleté*ben az egyenletek időfüggőek, s adva van még egy olyan valós értékű függvény, az *alapfüggvény*, amely az időtől, az állapotvektortól és a szabályozási vektortól függ. Azt a szabályozási pályát keressük, amelyre az alapfüggvény idő szerinti integrálja szélsőértéket (maximumot vagy minimumot) vesz föl. A 9.1. alfejezetben az alapfeladat megoldását vázoljuk. A 9.2. alfejezet az optimális folyamatok egyik fontos és történetileg jóval korábbi részterületét, a variációszámítást ismerteti. Az optimum elégséges feltétele és az általánosított peremérték-feladatok optimumfeltételei hasonlítanak a megfelelő programozási feltételekhez, ezeket a 9.3. alfejezet tartalmazza. Itt kapnak még helyet a közgazdaságtanban alapvető szerepet játszó jelenérték-feladatok. A fejezetben gyakran támaszkodunk Kamien és Schwartz (1981)-re, érdekes kiegészítést ad Chiang (1992), magasabb fokú tárgyalást ad például Pontrjágin et al. (1961) és Kósa (1973). Ez a fejezet a diszkrét idejű 7. fejezet folytonos idejű változatának is tekinthető.

9.1. ALAPFELADAT

Legyen $\mathbf{T} = [0,T]$ egy valós intervallum (a szemléletesség kedvéért nevezzük időintervallumnak), $f(t,x,u)$ pedig legyen egy a $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^{n+m}$ tartományon értelmezett valós-értékű sima (egyszer folytonosan differenciálható) függvény, ahol x és u az n-dimenziós állapot-, illetve m-dimenziós szabályozási vektor. Tekintsük a $\mathbf{T}$ intervallumon értelmezett, folytonosan differenciálható, $[x,u]$ függvénypárokat (szemléletesen: *pályák*at), amelyek minden pontban az $(n+m)$-dimenziós $\mathcal{X}$ megengedettségi tartományban fekszik, amelynek a belseje nem üres. Továbbá kezdőállapot rögzített: $x(0) = x_0$ és a végállapot szabad: $x(T)$ tetszőleges. A fenti feltételeket kielégítő pályákat *megengedett pályák*nak nevezzük.

A rendszer mozgástörvényét egy differenciálegyenlet-rendszer írja le.
Állapotegyenlet

$$\dot{x}(t) = g[t,x(t),u(t)], \qquad x(0) = x_0, \tag{9.1}$$

ahol $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{1+n+m}$.

Legyen a *célfüggvény*

$$I[x,u] = \int_0^T f[t,x(t),u(t)]\,dt. \tag{9.2}$$

Ezt a függvényt *funkcionál*nak nevezzük, mert nem egy $[x(t),u(t)]$ ponton, hanem az $[x,u]$ függvénypáron van értelmezve.

Ismert az $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényekre vonatkozó hagyományos differenciálszámításból, hogy kétféle szélsőérték lehetséges: (i) lokális és (ii) globális, valamint, hogy sokkal könnyebb az (i), mint a (ii) feladat. Ugyanez a helyzet a most bevezetett funkcionállal. Mindenekelőtt a (9.2) lokális, (9.1)-et kielégítő, u szerinti feltételes szélsőértékét, például feltételes maximumát keressük. Ezért feltesszük, hogy az optimális $[x,u]$ pálya az ún. *megengedett halmaz* belsejében fekszik.

Mivel az állapotegyenleten keresztül a szabályozás egyértelműen meghatározza az állapotváltozó pályáját (jele: $x[t,u(t)]$), a funkcionál egyszerűsíthető:

$$I[u] = \int_0^T f[t,x(t,u(t)),u(t)]\,dt. \tag{9.3}$$

A következő tételt bízvást nevezhetjük az optimális szabályozás alaptételének, mert hatékony megoldási módszert ad az alapfeladatra.

9.1. tétel. *(Vö. Pontrjágin et al., 1961.) Ha az I funkcionál a megengedett u függvényen belső szélsőértéket vesz föl, akkor az $[x,u,p] : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{1+n+m}$ függvényhármasnak ki kell elégítenie a következő szokványos és differenciálegyenleteket a $\mathbf{T}$ intervallumon;*

a) az állapotegyenletet a kezdeti feltétellel:

$$\dot{x}(t) = g[t,x(t),u(t)], \qquad x(0) = x_0; \tag{9.1}$$

b) a szorzóegyenletet, avagy az árnyékár mozgásegyenletét a transzverzalitási feltétellel:

$$\dot{p}(t)^{\mathbf{T}} = -f'_x[t,x(t),u(t)] - p(t)^{\mathbf{T}} g'_x[t,x(t),u(t)]; \qquad p(T) = 0; \tag{9.4}$$

c) az optimalitási feltételt:

$$f'_u[t,x(t),u(t)] + p(t)^{\mathbf{T}} g'_u[t,x(t),u(t)] = 0. \tag{9.5}$$

Megjegyzések. 1. Könnyebb megjegyezni az eredményeket, ha bevezetjük az ún. *Hamilton-függvény*t:

$$H[t,x,u,p] = f(t,x,u) + p^{\mathbf{T}} g(t,x,u). \tag{9.6}$$

Ekkor a következő tömörebb összefüggésekhez jutunk.
a) állapotegyenlet:

$$\dot{x} = H_p'^{\mathbf{T}}, \qquad x(0) = x_0; \tag{9.1H}$$

b) szorzóegyenlet:

$$\dot{p} = -H_x'^{\mathbf{T}}, \qquad p(T) = 0; \tag{9.4H}$$

c) optimalitási feltétel:

$$H_u' = 0, \tag{9.5H}$$

2. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a (9.1) állapotegyenlet mellett a (9.4) szorzóegyenlet is közönséges differenciálegyenlet-rendszer. Sőt, ez utóbbit a T-beli végfeltétel miatt időben visszafelé kell megoldani: T-től 0 felé haladva. Ez az időtükrözés nagyon gyakori az ilyen típusú feladatoknál, amint azt már láttuk a 7–8. fejezetben.

Bizonyításvázlat. Két bizonyítást adunk a tételre. Az egyik módszer Eulertől származik, amely egyszerű, de pontatlan; a másik Lagrange-tól, amely bonyolult, de szabatos. (Természetesen mindketten csak a később tárgyalandó speciális, variációszámítási feladatot oldották meg.)

Euler-féle diszkrét közelítés

A jelölési egyszerűség kedvéért most csak az egyváltozós esetre szorítkozunk: $n = m = 1$, de könnyen kiterjeszthető az eljárás tetszőleges véges számú változóra. Osszuk föl a $\mathbf{T}$ intervallumot k egyenlő részre: $h = T/k$ egy részintervallum hossza. Helyettesítsük folytonos idejű változóinkat és egyenleteinket diszkrét megfelelőikkel, mint azt már az 5.1. tétel bizonyításánál tettük. Legyen $t_i = ih$, $x_i = x(t_i)$, $u_i = u(t_i)$, $f_i(x_i,u_i) = f(t_i,x_i,u_i)$ és $g_i(x_i,u_i) = g(t_i,x_i,u_i)$. Ekkor a differenciálegyenletet és az integrált helyettesítő differenciaegyenlet, illetve összeg a következő:

$$x_{i+1} = x_i + hg_i(x_i,u_i), \qquad i = 0, \ldots, k-1, \tag{9.1D}$$

$$I = h\sum_{i=0}^{k-1} f_i(x_i,u_i) \to \max. \tag{9.2D}$$

Legyen $x = (x_0,\ldots,x_{k-1})^{\mathbf{T}}$, $u = (u_0,\ldots,u_{k-1})^{\mathbf{T}}$ és $p = (p_0,\ldots,p_{k-1})^{\mathbf{T}}$ k-dimenziós vektor. Bevezetve a $H_i(x_i,u_i,p_i) = f_i(x_i,u_i) + p_i g_i(x_i,u_i)$ Hamilton-függvényeket, s a Lagrange-szorzók módszerét alkalmazva a következő feltétel nélküli szélsőérték-feladathoz jutunk:

$$L(x,u,p) = \sum_{i=0}^{k-1}\Big\{hH_i(x_i,u_i) - p_i[x_{i+1} - x_i]\Big\}.$$

Fölírjuk a p_i, az x_i és az u_i szerinti parciális deriváltakat: (9.1) mellett

$$h\frac{\partial H_i}{\partial x_i} + p_i - p_{i-1} = 0, \qquad i = 0, \ldots, k-1,$$

$$h\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = 0, \qquad i = 0, \ldots, k-1.$$

Osszuk el az egyenleteket h-val és tartson k a végtelenhez. Visszatérve folytonos idejű folytonos függvényeinkhez, rendre adódik (9.1H), (9.4H) és (9.5H) egyenlet. A levezetés csak egy ponton sántít: nincs bizonyítva, hogy a határátmenet jogos, azaz, hogy az optimum létezik és határértéke a diszkrét közelítéseknek.

Lagrange-féle variációs módszer

Most mellőzzük a diszkrét idejű közelítést, és közvetlenül a folytonos idejű feladattal foglalkozunk. A közönséges feltételes szélsőérték-számításból ismert Lagrange-szorzós módszert követjük:

$$\int_0^T f[t,x(t,u(t)),u(t)]\,dt =$$
$$\int_0^T H[t,x(t,u(t)),u(t)]\,dt - \int_0^T p(t)^{\mathbf{T}}\dot{x}(t)\,dt.$$

Parciálisan integráljuk a harmadik tagot és az eredményt behelyettesítjük $I[u]$-ba:

$$I[u] = \int_0^T H\{t,x[t,u(t)],u(t)\}\,dt + \int_0^T \dot{p}(t)^{\mathbf{T}}x(t)\,dt - p(T)^{\mathbf{T}}x(T) + p(0)^{\mathbf{T}}x(0). \tag{9.7}$$

Most alkalmazzuk az ún. *variációs elv*et, amely a hagyományos szélsőérték-számításból ismert módszer általánosítása. Legyen u^{o} a lokális maximumot adó megengedett megoldás (időfüggvény), és legyen u^* egy másik megengedett megoldás (időfüggvény). Legyen $v = u^* - u^{\mathrm{o}}$ az optimumtól való eltérés (időfüggvény), és $y(t,a)$ az $u^{\mathrm{o}} + av$ szabályozáshoz tartozó pálya, ahol a egy skalár állandó. Legyen

$$G(a) = I[u^{\mathrm{o}} + av], \tag{9.8}$$

s a közönséges szélsőérték-számítás szerint $G(a)$-nak a szerint $a = 0$-ban van *lokális* maximuma, azaz $G'(0) = 0$. A paraméteres integrál és az összetett függvény deriválási szabályait alkalmazva, feltéve, hogy a függvények deriválhatók, némi számolással (9.7)–(9.8)-ból adódik

$$G'(0) = \int_0^T [(H_x' + \dot{p}^{\mathbf{T}})y_a + H_u'v]\,dt - p(T)^{\mathbf{T}}y_a(T) = 0. \tag{9.9}$$

Válasszuk úgy a $p(t)$ szorzót, hogy az y_a és speciálisan az $y_a(T)$ előtti kifejezés eltűnjön: adódik a (9.4) szorzóegyenlet a $p(T) = 0$ végfeltétellel. Emiatt a (9.9) feltételünk egyszerűsödik:

$$\int_0^T H_u'v\,dt = 0.$$

Azt akarjuk igazolni, hogy H_u' azonosan nulla, azaz teljesül a (9.5) optimalitási feltétel. Indirekt bizonyítunk. Legyen $H_u' > 0$ egy $J = (\delta,\varepsilon)$ részintervallumon. Mivel

v tetszőleges időfüggvény a $v(0) = v(T) = 0$ peremfeltételek mellett, legyen például $v(t) = (t - \delta)(\varepsilon - t)$, ha $\delta \le t \le \varepsilon$ és 0 egyébként. Ekkor $\int_0^T H'_u v\, dt > 0$, ellentmondás. ∎

Eddig kikötöttük, hogy a végállapot szabad és a végidőpont kötött. Mi történik azonban akkor, ha a végállapot kötött vagy a végidőpont szabad? A levezetés (9.7) egyenlete sugallja a választ (Chiang, 1992, 9.4. alfejezet), amelyet *transzverzalitási feltétel*nek nevez az irodalom: *a)* Ha mind a végidőpont, mind a végállapot adott, akkor (9.4)-ben $p(T) = 0$ helyére $x(T) = x_T$ lép. *b)* Ha a végidőpont szabad, de a végállapot rögzített, akkor (9.4)-ben $p(T) = 0$ helyére $H(T) = 0$ lép.

A következőkben talán a legegyszerűbb nemtriviális példát mutatjuk be a 9.1. tétel alkalmazására és a transzverzalitási feltételekre.

9.1. példa. Lineáris-kvadratikus skalár feladat. $f(t,x,u) = x^2 + u^2$, $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$ és $x(1) = 1$. *a)* $\dot{x} = u$, *b)* $\dot{p} = -2x$, c) $p = -2u$. Deriváljuk *a)*-t és *c)*-t: $\ddot{x} = \dot{u}$, $\dot{p} = -2\dot{u}$. Felhasználjuk *b)*-t: $-2x = \dot{p} = -2\ddot{x} \to \ddot{x} = x$. Sajátértékek: $\lambda_{1,2} = \pm 1$, pálya: $x(t) = \xi_1 e^t + \xi_2 e^{-t}$. Peremértékekből: $x(0) = \xi_1 + \xi_2$ és $x(1) = \xi_1 e + \xi_2 e^{-1}$, azaz $\xi_1 = 1/(e+1)$ és $\xi_2 = e/(e+1)$.

A következő feladat a Hamilton-függvény egy érdekes tulajdonságára mutat rá.

9.1. feladat. Mutassuk meg, hogy egy autonóm feladatnál, ahol mind f, mind g időtől explicite függetlenek, a Hamilton-függvény értéke az optimális pályán állandó!

Az alfejezet végére érve röviden rámutatunk a szorzó közgazdasági jelentésére, mely hasonlít a statikus problémák *dualitásá*hoz. Legyen $V(0,x_0)$ a $(0,x_0)$ kezdeti értékű feladat optimális (maximális) értéke. Az optimumfeltétel levezetésénél használt fogásokat alkalmazva megfelelő simasági feltételek mellett belátható, hogy $p(0) = V'^{\mathbf{T}}_x(0,x_0)$. Szavakban kifejezve: a szorzó értéke a kezdő időpontban egyenlő a célfüggvénynek a kezdeti állapot szerinti deriváltjával: *árnyékár*. Mivel célfüggvényünk időben additív, az azonosság bármely $t \in \mathbf{T}$ időpontra és x megengedett állapotra érvényes: $p(t) = V'^{\mathbf{T}}_x(t,x)$.

9.2. VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS

Történeti bevezetés

Míg az optimális folyamatok elmélete Pontrjágin és társai munkássága nyomán csak 1960 körül alakult ki, egy fontos speciális esete, a *variációszámítás*, már 1700 körül megjelent. Sőt, elemi variációszámítási feladatokat már az ókorban is meg tudtak oldani.

Az optimális folyamatok elmélete a variációszámításra egyszerűsödik, ha az állapot- és a szabályozási vektor dimenziója azonos: $m = n$, és az állapotegyenlet a lehető legegyszerűbb: $g(t,x,u) = u$, azaz $\dot{x} = u$. Ekkor az alapfüggvény $f(t,x,\dot{x})$ alakú. Erre a feladattípusra utaltunk a 7.1. alfejezetben.

Nagyon gyakran a független változó nem az idő, hanem például a vízszintes x koordináta (s ekkor x helyett y áll). De az egységes jelölés érdekében mindig a t szimbólumot használjuk.

Minden bizonnyal a legegyszerűbb variációszámítási feladat a következő: Két pont között melyik a legrövidebb út? Az egyenes. Homogén közegben a fény tehát a legrövidebb utat „választja”. Némileg bonyolultabb a tükröződés kérdése, ahol a tárgy és a kép közötti legrövidebb út két egyenes szakaszból áll, ahol a töréspont rajta van a tükrön és ott a fény beesési és visszaesési szöge egyenlő (9.1. ábra).

Jóval bonyolultabb a fénytörés kérdése, amikor a fény a levegőből a vízbe lépve, megváltoztatja haladási irányát. Mérések szerint (Snellius, 1620 és Descartes 1637) a jelenséget a következő összefüggés írja le: a beesési és a törési szög szinuszának az aránya megegyezik a fény vízbeni és levegőbeni sebességének arányával (9.2. ábra).

E feladat általánosítása Fermathoz (1650 körül) fűződik: hogyan terjed inhomogén közegben a fény? A legrövidebb idejű úton.

Számos közgazdasági feladat variációs módszerrel is megoldható (10. fejezet), ezért röviden ismertetjük e módszert. De bemelegítésül oldjuk meg a három, imént említett elemi feladatot!

9.2. feladat. *a)* Bizonyítsuk be elemi geometriai módszerrel, hogy két pont között a legrövidebb „út” az egyenes! *b)* Próbáljuk ki a 9.1. tétel analitikus módszerét!

9.3. feladat. Bizonyítsuk be elemi geometria módszerrel, hogy a T tárgypont és a síktükörben keletkező K képpontja között a fény a tükröt érintő legrövidebb úton halad (a beesési és a törési szög egyenlő)!

9.4. feladat. Bizonyítsuk be közönséges differenciálszámítással, hogy a vízben lévő T pont és a levegőben lévő S szem között a fény a legrövidebb idejű úton halad, ha a Snellius–Descartes-törvényt követi!

Megjegyzés. Simonyi (1981, 192–194. o.) egy meglehetősen bonyolult, de elemi geometria megoldással érzékelteti a kor nehézségeit, míg Pólya (1968, IX. fejezet) egy nagyon elegáns mechanikai analógiás megoldással remekel, megadva a 9.2. és a 9.3. feladat megoldását is. Ezekben a feladatokban az optimális megoldás egyenes vagy egyenes szakaszokból álló görbe, ezért e feladatok elemileg is megoldhatók. Általában azonban a megoldás igazi görbe, s elemi megoldások ritkán segítenek.

Az alapfeladat

Rátérünk a variációszámítás alapfeladatára. Legyen $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ függvény és legyen

$$I[x] = \int_0^T f[t,x(t),\dot{x}(t)]\,dt \tag{9.10}$$

a függvényhez tartozó *funkcionál*, amelynek valamilyen szélsőértékét, például maximumát keressük. Adott a kezdeti és a végállapot: x_0 és x_T.

9.2. tétel. *(Euler–Lagrange, 1744–1755.) Ha a (9.10)-beli I funkcionál a megengedett x függvényen szélsőértéket vesz föl, akkor a függvénynek ki kell elégítenie a következő, ún. Euler–Lagrange-differenciálegyenlet-rendszert:*

$$f'_x(t,x,\dot{x}) = \frac{d}{dt} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}), \tag{9.11}$$

ahol f'_x és $f'_{\dot{x}}$ az f függvény parciális deriváltjai.

Bizonyításvázlat. A 9.1. tétel szorzóegyenlete és optimumfeltétele az Euler–Lagrange-differenciálegyenletet adja, (9.4): $\dot{p}^{\mathbf{T}} = -f'_x$ és (9.5): $f'_{\dot{x}} + p^{\mathbf{T}} = 0$, ahonnan a másodikat deriválva adódik

$$0 = \frac{d}{dt}(f'_{\dot{x}} + p^{\mathbf{T}}) = \frac{d}{dt}f'_{\dot{x}} - f'_x.$$

∎

Megjegyzések. 1. Elvégezve a kijelölt differenciálásokat (9.11)-ben, a következő másodrendű differenciálegyenletet kapjuk:

$$f'_x(t,x,\dot{x}) - f''_{t\dot{x}}(t,x,\dot{x}) - f''_{x\dot{x}}(t,x,\dot{x})\dot{x} - f''_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x})\ddot{x} = 0.$$

2. Ellentétben a közönséges optimalizációval, a variációszámításban elég nehéz egzisztencia-tételeket bizonyítani. Például a következő egyszerűnek látszó feladatnak nincs megoldása: keressük meg a síkban a két pontot összekötő *leghosszabb* görbét!

3. Kósa (1973) monográfiája részletesen foglalkozik a kérdéskörrel, többek között konkrét variációs feladatok megoldásával. Ebben a könyvben csak néhány egyszerű feladatot számolunk végig. Érdekességként megemlítjük az első nemelemi feladatot.

9.2. példa. Az $\int_0^1 \dot{x}(t)\,dt$ integrált lehetetlen maximalizálni, függetlenül az $x(0)$, $x(1)$ peremfeltételektől. Valóban, a Newton–Leibniz-formula szerint minden pálya esetén azonos az integrál: $I = x(1) - x(0)$. ∎

9.5. feladat. Miért nincs maximuma az $\int_0^1 x(t)\,dt$ integrálnak az $x(0) = 0$, $x(1) = 2$ peremfeltételek mellett?

9.6. feladat. Számoljuk ki a 9.1. példát az Euler–Lagrange-differenciálegyenlet segítségével is!

9.3. példa.* Brachisztochron, (Johann Bernoulli, 1696). Adott egy függőleges sík, s benne két olyan pont, hogy az őket összekötő egyenes se nem vízszintes, se nem függőleges. Melyik az a síkbeli görbe, amelyen a magasabban fekvő pontból indított tömegpont a legkevesebb idő alatt legördül az alacsonyabban fekvő pontba?

Galilei 1630 tájékán tévesen oldotta meg a feladatot: azt hitte, hogy az optimális görbe egy körív (Simonyi, 1981, 172. o.). Johann Bernoulli 1696-ban adta meg a helyes megoldást (Pólya, 1968, IX. fejezet), ti. ciklois:

$$t = \xi + b(v - \sin v) \qquad \text{és} \qquad x = \alpha + b(1 - \cos v), \quad 0 \le v \le 2\pi, \quad b > 0.$$

Megoldása két zseniális ötleten alapult: (i) a folytonos probléma helyett egy közelítő diszkrét feladatsorozatot tekintett, (ii) melyet a 9.4. feladatban megfogalmazott Fermat-elvet általánosítva oldott meg. Visszatérve a folytonos feladatra, a szakaszonként folytonos közelítő megoldás kisimult (lásd a 9.1. tétel Euler-féle levezetését).

Annak idején a folyóiratok helyett szokás volt levélben kitűzni feladatokat. Bernoulliak kérdésére Newton postafordultával válaszolt, szintén helyesen. A tudományos világ innen tudta meg, hogy Newton felépült betegségéből. Kósa (1973, 48–50. o.) tartalmazza a feladat modern megoldását.

9.3. KIEGÉSZÍTÉSEK

Ebben az alfejezetben több kiegészítést teszünk.

Elégséges feltételek

Az optimumszámításhoz hasonlóan az optimális folyamatok elméletében is léteznek másodrendű elégséges feltételek (Kamien és Schwartz, 1981, 122–123. o.).

9.3. tétel. *Ha az alap- és az állapotfüggvény x-ben és u-ban konkáv, valamint $p(t) \geq 0$, akkor a szükséges feltétel egyben elegendő a maximumhoz.*

Megjegyzés. Arrow igazolta, hogy elegendő, ha adott p-re a *maximalizált Hamilton-függvény*, $H^o(t,x,p) = \max_u' H(t,x,u,p)$ konkáv x-ben: kvázikonkavitás (Kamien és Schwartz, 1981, 204–205. o.).

Bizonyításvázlat. Legyen $^{\mathrm{o}}$ az optimális pálya megkülönböztető jele és hagyjuk el az időváltozót. Mivel f konkáv függvénye (x,u)-nak, $f^{\mathrm{o}} - f \geq f_x'^{\mathrm{o}}(x^{\mathrm{o}} - x) + f_u'^{\mathrm{o}}(u^{\mathrm{o}} - u)$, azaz

$$\int_0^T (f^{\mathrm{o}} - f)\, dt \geq \int_0^T [f_x'^{\mathrm{o}}(x^{\mathrm{o}} - x) + f_u'^{\mathrm{o}}(u^{\mathrm{o}} - u)]\, dt.$$

A jobb oldalon felhasználjuk a (9.4) szorzóegyenletet és a (9.5) optimumfeltételt, s parciálisan integráljuk a $\dot{p}$-t tartalmazó tagot, s figyelembe vesszük a (9.1) állapotegyenletet:

$$\int_0^T p^{\mathbf{T}}[g^{\mathrm{o}} - g - g_x'^{\mathrm{o}}(x^{\mathrm{o}} - x) + g_u'^{\mathrm{o}}(u^{\mathrm{o}} - u)]\, dt,$$

s ez g konkavitása miatt nem negatív, azaz

$$\int_0^T (f^{\mathrm{o}} - f)\, dt \geq 0.$$

∎

Hiányos alapfüggvények

Akár az általános optimális folyamatokban, akár a speciális variációszámításban a megoldást nagyon megkönnyíti, ha az alapfüggvény *hiányos*, ha t, x és $u = \dot{x}$ közül az egyik változó nem szerepel f-ben. A variációszámításra szorítkozva sorbavesszük a három esetet (Kósa, 1973, 45–46. o.).

(i) Az alapfüggvény nem függ t-től: $f = f(x,\dot{x})$. Az Euler–Lagrange-féle egyenlet másodrendű alakja (9.12. tétel 1. megjegyzés) szerint van olyan c állandó, hogy az extremális megoldás kielégíti az $f(x,\dot{x}) - \dot{x}f_{\dot{x}}'(x,\dot{x}) = c$ implicit differenciálegyenletet. (Deriváljuk vissza az implicit differenciálegyenletet és emeljük ki $\dot{x}$-et, s ellenőrizhető az ekvivalencia!)

(ii) Az alapfüggvény nem függ x-től: $f = f(t,\dot{x})$. Ismét (9.11) szerint fennáll a $df_{\dot{x}}'(t,\dot{x})/dt = 0$ azonosság, tehát létezik egy olyan c állandó, amelyre $f_{\dot{x}}'(t,\dot{x}) = c$ implicit differenciálegyenlet adódik.

(iii) Az alapfüggvény nem függ $\dot{x}$-től: $f = f(t,x)$.

Ismét (9.11) szerint az $f'_x(t,x) = 0$ közönséges implicit függvényt kapjuk, amelynek a megoldása minden pontban maximalizálja az alapfüggvényt. Természetesen megoldás csak abban a kivételes esetben van, ha a kezdeti feltételek rajta vannak az így adódó görbén.

Eddig csak korlát nélküli feladatokat vizsgáltunk. Most röviden felsorolunk másfajta feltételes optimumfeladatokat is.

Izoperimetrikus feladat

Fontossága miatt szólunk egy sajátos variációszámítási feladatfajtáról, s mindenekelőtt a névadóról, az eredeti izoperimetrikus feladatról.

Célszerűbb azonban megint egy kvadratikus-lineáris feladatot tekinteni.

9.7. feladat. Maximalizálandó az $\int_0^1 x\,dt \to \max$ integrál a $x(0) = 1$ and $x(1) = 1$ peremfeltételek és az $\int_0^1 \dot{x}^2\,dt = 3$ izoperimetrikus feltétel mellett!

9.8. feladat.* Az eredeti izoperimetrikus feladat (Pólya 1968, X. fejezet). Bizonyítsuk be, hogy adott kerületű zárt síkgörbék között a kör területe a maximális!

Az általános izoperimetrikus feladat megfogalmazásához az $f : \mathbf{R}^{2n+1} \to \mathbf{R}$ alapfüggvény mellé be kell vezetnünk a $g : \mathbf{R}^{1+2n} \to \mathbf{R}$ *korlátfüggvényt*. Ismét fölírjuk a célfüggvényt, de hozzáveszünk egy integrálfeltételt.

$$I[x] = \int_0^T f[t,x(t),\dot{x}(t)]\,dt \to \max\,, \tag{9.10}$$

feltéve, hogy

$$J[x] = \int_0^T g[t,x(t),\dot{x}(t)]\,dt = \kappa. \tag{9.12}$$

Az általánosított izoperimetrikus feladat az alapfeladat következő változata: maximalizáljuk (9.10)-et a (9.12) korlát mellett. A megoldást a közönséges feltételes szélsőérték-számításból ismert Lagrange-szorzós módszer adja.

9.4. tétel. *Általánosított izoperimetrikus feladat. Ha a (9.10)-beli I funkcionál a (9.12)-beli funkcionálkorlát mellett a megengedett x függvényen szélsőértéket vesz föl, és a megoldás nem extrémuma a korlátnélküli (9.12) feladatnak, akkor van olyan p szám, amelyre x kielégíti a korlátozás nélküli Lagrange-szorzós $L = f + pg$ feladatot, azaz kielégíti az L-re vonatkozó Euler–Lagrange-differenciálegyenletet.*

Bizonyításvázlat. A (9.12) korlát miatt (9.10) feltételes extrémuma megegyezik az alábbi variációs-feladat feltétel nélküli extrémumával:

$$I^*[x] = \int_0^T \Big\{ f[t,x(t),\dot{x}(t)] + p^{\mathbf{T}} g[t,x(t),\dot{x}(t)] \Big\}\,dt - p\kappa. \tag{9.13}$$

Mindössze azt kell kikötnünk, hogy az x^{o} megoldás nem extrémuma a (9.12) célfüggvényű közönséges variációs feladatnak. ∎

A következő példában a 9.4. tételt alkalmazzuk a 9.5. feladatra.

9.4. példa.* Izoperimetrikus feladat (Kamien és Schwartz, 1981, I.9.2. feladat). Megoldjuk a 9.5. feladat (eredeti izoperimetrikus) változatát a 9.4. tétel segítségével a körívre (9.3. ábra).

Adott egy T hosszúságú szakasz és egy $\kappa > T$ hosszúságú kerítés. Kerítsük be az adott szakasz fölötti maximális területű tartományt! Legyen a (t,x) sík $(0,0)$ és $(0,T)$ pontja a szóban forgó szakasz két végpontja, és $(t,x(t))$ a kerítés tetszőleges pontja. Ekkor $f[t,x(t),\dot{x}(t)] = x$ (a terület integrandusa) és $g[t,x(t),\dot{x}(t)] = \sqrt{1+\dot{x}(t)^2}$ (a kerület integrandusa: hiszen Pithagorasz tétele szerint a $(t,x(t))$ és $(t+dt,x(t+dt))$ pontpár közti távolság $\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}\,dt$.

A Langrange-függvény $L = x - p\sqrt{1+\dot{x}^2}$, tehát a Lagrange-függvényre vonatkozó (9.11) egyenlet

$$1 = -\frac{d}{dt}\frac{p\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}.$$

Az 5.4. tételben tárgyalt szétválasztható differenciálegyenlet megoldását követve, (bevezetve a k integrációs állandót)

$$t = -\frac{p\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} + k.$$

Megoldjuk az egyenletet algebrailag $\dot{x}$-re:

$$\dot{x} = -\frac{t-k}{\sqrt{p^2-(t-k)^2}}.$$

Legyen $v = p^2 - (t-k)^2$, azaz $dv = -2(t-k)dt$. Ekkor (bevezetve a c integrációs állandót)

$$x(t) = \int_0^T \dot{x}(t)\,dt = -\int v^{-1/2}dv/2 + c = -\sqrt{v} + c,$$

azaz

$$(x-c)^2 + (t-k)^2 = p^2,$$

amely egy körív egyenlete. A befejezést az Olvasóra hagyjuk.

9.9. feladat.* Kötél (vagy lánc)görbe (17. század vége). Függesszünk fel egy κ hosszúságú, homogén anyagú kötelet végpontjainál fogva a $(-a,D)$, és az (a,D) pontban ($\kappa > 2a > 0$, $D > 0$). Fizikai meggondolásokból belátható, hogy a kialakuló görbe tömegközéppontja (régiesebben: súlypontja) a lehető legmélyebben lesz, vagy ekvivalens megfogalmazásban, a görbe helyzeti energiája minimális lesz. *a)* Igazoljuk, hogy a feladat alapfüggvénye, $f[x(t),\dot{x}(t)] = x\sqrt{1+\dot{x}(t)^2}$ és korlátja megegyezik az előző példáével: $g[x(t),\dot{x}(t)] = \sqrt{1+\dot{x}(t)^2}$, azaz a Lagrange-függvény (ii) alakban hiányos. *b)* Igazoljuk, hogy a kötélgörbe egyenlete $x(t) = \cosh(\delta t)/\delta + \gamma$, ahol δ és γ megfelelő állandók. Emlékeztető: $\sinh t = (e^{-t} - e^t)/2$ és $\cosh t = (e^{-t} + e^t)/2$. *c)* Milyen mélyen lóg be a görbe? A 9.4. ábra $a = 1$ és $\kappa = 3$ esetén mutatja be a kötélgörbét.

Érdekes, hogy ezt a feladatot is Galilei vetette fel és erre is hamis megoldást adott: a parabolára gondolt. A minimális felszínű forgásfelület klasszikus feladata is azonos (lásd Kamien és Schwartz (1981, 29. o.)

Későbbi (10. fejezetbeli) alkalmazások miatt érdekes a

9.5. példa. Tekintsük azt a majdnem elfajult izoperimetrikus feladatot, amikor mind az alapfüggvény, mind a korlátozó függvény független $\dot{x}$-től: $f = f(t,x)$ és $g = g(t,x)$. Ellentétben a korlátozás nélküli alapfeladattal, most általában van értelmes megoldás: a

$$f'_x(t,x) + pg'_x(t,x) = 0 \tag{9.14}$$

azonosságot parametrikusan megoldjuk: $x(t,p)$, s a kapott eredményt visszahelyettesítjük a (9.12) korlátba:

$$J[x] = \int_0^T g[t,x(t,p)]\,dt = \kappa. \tag{9.12$^{\mathrm{o}}$}$$

Ha a (9.12$^{\mathrm{o}}$) egyenletnek van megoldása p-re, jele: p^{o}, akkor az $x(t,p^{\mathrm{o}})$ egyváltozós függvény az eredeti feladat extremális megoldása.

Zárt tartomány esete

Pontrjágin és társai a lehető legáltalánosabb keretet vizsgálták: megengedték, hogy az u szabályozási változó egy zárt $\mathcal{U}$ tartományra legyen korlátozva, és az u szabályozási függvény csak szakaszonként legyen folytonos. Ilyen általánosságban igazolták az ún. Pontrjágin-féle *maximumelv*et, amely az optimumfeltétel helyére lép: az optimális $\{x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}}(t)\}$ pálya kielégíti a

$$H[t,x^{\mathrm{o}}(t),u,p(t)] \le H^{\mathrm{o}}[t,x^{\mathrm{o}}(t),u^{\mathrm{o}},p(t)], \quad u \in \mathcal{U}$$

egyenlőtlenséget; és a szorzóegyenlet nem érvényes a töréspontokra. További bonyodalom, hogy a Hamilton-függvény definíciójában az f alapfüggvény p_0 szorzója 1 mellett 0 is lehet. A szokásos simasági és konkavitási feltételeken túl az egzisztenciát például u-ban lineáris $g(t,x,u)$ függvényekre bizonyítják.

Az imént elmondottakat frappánsan szemlélteti a

9.6. példa. Speciális időoptimum-feladat. Tegyük föl, hogy egy tömegpontot kell egy vízszintes egyenes 0 pontjából az 1 pontjába eljuttatni, úgy hogy a gyorsítás maximális abszolút értéke 1, valamint a kezdő- és végsebesség 0. Az optimális szabályozás egyszerűen megadható: félútig maximális gyorsítás, aztán maximális lassítás. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az optimális pálya csak szakaszonként folytonos, s végig a megengedett irányítási tartomány határán halad. (Itt a 9.1. tétel nem alkalmazható.)

A 9.5. példát általánosítja a

9.7. példa. Általános időoptimum-feladat. Katonai alkalmazásokban nagyon fontos az ún. időoptimum (például az ellenséges rakéta megsemmisítéséhez szükséges idő minimalizálása). Ekkor T szabad változó, $f(t,x,u) = 1$, azaz $I[u] = T - 0$. Ekkor a belső optimumra a következő két egyenlet teljesül:
b) szorzóegyenlet

$$\dot{p}^{\mathbf{T}}(t) = -p(t)^{\mathbf{T}} g'_x[t,x(t),u(t)], \quad x(T) = 0; \tag{9.4$'$}$$

c) optimalitási feltétel

$$p(t)^{\mathbf{T}} g'_u[t,x(t),u(t)] = 0. \tag{9.5$'$}$$

Jelenérték-feladatok

A közgazdasági feladatokban nagyon gyakori, hogy a különböző időszakokra vonatkozó jutalmakat és ráfordításokat *leszámítoljuk* – diszkontáljuk (Kamien és Schwartz, 1981, 151–158. o.):

$$I[x,u] = \int_0^T e^{-\beta t} f(x,u)\, dt, \tag{9.1*}$$

ahol $\beta > 0$ a *leszámítolási ráta* és g időben változatlan.

Ebben az esetben a diszkontált Hamilton-függvény

$$H = e^{-\beta t} f(x,u) + p^{\mathbf{T}} g(x,u), \tag{9.6*}$$

amelynek segítségével az optimumfeltételek a következők:

$$H'_u = e^{-\beta t} f'_u + p^{\mathbf{T}} g'_u = 0 \qquad \text{és} \qquad \dot{p}^{\mathbf{T}} = -H'_x = -e^{-\beta t} f'_x - p^{\mathbf{T}} g'_x.$$

Ekkor gyakran kényelmes *folyóértéken* számolni a jelenérték helyett. Bevezetve a *folyóértékű szorzó*t:

$$\mathbf{p}(t) = e^{\beta t} p(t),$$

és a *folyóértékű* Hamilton-függvényt:

$$\mathbf{H} = e^{\beta t} H = f(x,u) + \mathbf{p}^{\mathbf{T}} g(x,u),$$

a következő feltételeket kapjuk:

$$\mathbf{H}'_u = 0 \qquad \text{és} \qquad \dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}} = \beta \mathbf{p}^{\mathbf{T}} - \mathbf{H}'_x.$$

Visszahelyettesítéssel adódik:

$$\dot{x} = g(x,u), \quad f'_u(x,u) + \mathbf{p}^{\mathbf{T}} g'_u(x,u) = 0, \quad \dot{\mathbf{p}}^{\mathbf{T}} = \beta \mathbf{p}^{\mathbf{T}} - f'_x(x,u) - \mathbf{p}^{\mathbf{T}} g'_x(x,u).$$

Ebből az alakból látszik az átalakítás előnye: autonóm (időtől független) differenciálegyenlet-rendszert kapunk.

Leszámítolási feladatoknál gyakran fordul elő, hogy az időtáv végtelen: $T = \infty$. Ekkor bonyodalmak támadnak a peremfeltételeknél, de ezzel már a diszkrét idejű változatnál (7.1. alfejezetben) foglalkoztunk.

10. OPTIMÁLIS FOGYASZTÁSI PÁLYÁK

Az optimális folyamatok elmélete (sőt, a variációszámítás) segítségével elvileg könnyen megoldhatók a folytonos idejű *optimális fogyasztási pályák*ra vonatkozó különféle feladatok (Koopmans, 1967). A 10.1. alfejezetben az optimális fogyasztási pályát adott munka- és tőkejövedelem mellett (Ramsey, 1928) keressük. Két alternatív feltevést mérlegelünk: (i) biztos és (ii) bizonytalan élettartam. A 10.2. és 10.3. alfejezetben az optimális fogyasztási pályát adott termelési függvényből származó munka- és tőkejövedelem mellett vizsgáljuk: az elsőben végtelen, a másodikban véges időtávot tekintve. A fejezetben fölhasználtuk Kamien és Schwartz (1981) és Simonovits (1995c) forrást.

10.1. EGZOGÉN BÉR ÉS KAMAT

A 8.1. alfejezetben már tárgyaltuk a diszkrét idejű optimális megtakarítás modelljét, ahol a bérek és a kamatok egzogének. Most a folytonos idejű feladatot tárgyaljuk, ezúttal a variációszámítás alkalmazásával. Ebben az alfejezetben külön tárgyaljuk a biztos és a bizonytalan élettartamot.

BIZTOS ÉLETTARTAM

Tegyük föl (Kamien és Schwartz, 1981, 25–27. o.), hogy a fogyasztó T évig él, ahol T egy tetszőleges pozitív valós szám, amelynek értéke már születéskor pontosan ismert. Legyen a t pillanatban a fogyasztó munkajövedelme $w(t)$, tőkéje $k(t)$, amely után az r kamatláb szerint $rk(t)$ tőkejövedelmet kap. A t időpontbeli fogyasztás $c(t)$, amely kielégíti a következő mérlegegyenletet.
Folyó költségvetési feltétel

$$c(t) + \dot{k}(t) = rk(t) + w(t). \tag{10.1}$$

Hasznosságfüggvények

Legyen u egy $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény, $u[c(t)]$ a $c(t)$ fogyasztás *pillanatnyi hasznossága*. A $[0,T]$ időszakra terjedő maximalizálandó összhasznosságról feltesszük, hogy a $\beta \geq 0$ *leszámítolási rátá*val leszámítolt $e^{-\beta t}u[c(t)]$ *függvény idő szerinti integrálja*:

$$I[c] = \int_0^T e^{-\beta t} u[c(t)]\, dt. \tag{10.2}$$

Gyakran szükségünk lesz a Neumann–Morgenstern-várható hasznosságnál alkalmazott *abszolút és a relatív kockázatkerülési együttható*ra, amelyet Pratt 1964-ben és Arrow 1965-ben vezetett be (lásd Arrow, 1970 és Varian, 1992, 177–201. o.):

$$(10.3) \qquad a = \frac{-u''}{u'} \qquad \text{és} \qquad \zeta = ac.$$

Talán nem felesleges utalni arra, hogy mi a kockázat szerepe az elnevezésben. A relatív kockázatkerülési együttható durván szólva azt mutatja, hogy a fogyasztó vagyonához képest mennyit hajlandó fizetni, hogy egy kis kockázatot elkerüljön. Esetünkben arról van szó, hogy a fogyasztó mennyivel hajlandó az életpálya-fogyasztását csökkenteni, hogy a fogyasztásingadozásokat elkerülje. Az u hasznosságfüggvény konkavitása miatt $a,\zeta > 0$.

10.1. példa. Állandó abszolút (CARA) és relatív (CRRA) kockázatkerülési együtthatójú hasznosságfüggvények:

$$(10.4) \qquad u(c) = a^{-1}e^{-ac}: \qquad \text{CARA},$$

$$(10.5a) \qquad u(c) = \sigma^{-1}c^{\sigma}, \quad \text{ha} \quad \sigma \neq 0: \qquad \text{CRRA};$$

$$(10.5b) \qquad u(c) = \log c, \quad \text{ha} \quad \sigma = 0: \qquad \text{Cobb-Douglas}.$$

A (10.5) hasznosságfüggvény esetén a relatív kockázatkerülési együttható a fogyasztástól függetlenül $1 - \sigma$.

Optimális fogyasztási pálya

Behelyettesítve $I[c]$-be a (10.1) mérlegegyenletet, a 9.2. alfejezetben vizsgált, közönséges variációszámítási feladathoz jutunk:

$$(10.6) \qquad I[k] = \int_0^T e^{-\beta t} u[rk(t) + w(t) - \dot{k}(t)]\, dt,$$

amelyhez a következő peremértékeket csatoljuk:

$$(10.7) \qquad k(0) = k_0 \qquad \text{és} \qquad k(T) = k_T.$$

Adott mind az induló, mind a záró tőkeállomány. Alternatív megfogalmazásnál a záró tőkeállomány szabaddá tehető és alkalmas függvénye hozzáadható a (10.6) célfüggvényhez.

Szükségünk lesz még a következő jelölésekre.
Az $e^{\xi t}$ függvény $[0,T]$-n vett integrálja:

$$(10.8) \qquad J(\xi) = \frac{e^{\xi T} - 1}{\xi}, \qquad \text{ha} \qquad \xi \neq 0; \qquad J(0) = T;$$

az életkereset jelenértéke:

$$(10.9) \qquad W = \int_0^T e^{-rt} w(t)\, dt,$$

és a különbségi kamatláb: $\delta = r - \beta$. Feltesszük, hogy az életkereset elegendő nagy ahhoz, hogy tőkefelhalmozás mellett fogyasztásra is jusson belőle:

$$(10.10) \qquad W > e^{-rT} k_T - k_0.$$

(10.10) triviálisan teljesül, ha $r = 0$, $k_T < k_0$ és $w(t) > 0$.

Kimondjuk az életciklus-elmélet alaptételét.

10.1. tétel. *a) Biztos élettartam mellett az optimális fogyasztás (relatív) növekedési üteme a különbségi kamatláb és a relatív kockázatkerülési együttható hányadosa:*

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\delta}{\zeta}. \tag{10.11}$$

b) Állandó relatív kockázatkerülési együttható esetén az optimális fogyasztás kezdőértéke

$$c_0 = \frac{k_0 - e^{-rT}k_T + W}{J(\delta/\zeta - r)}. \tag{10.12}$$

Megjegyzés. A modern irodalomban Modigliani és Brumberg (1954) *életciklus*-modelljükben vizsgálta először hasonló feladatot, diszkrét idő, nulla kamat és diszkontláb mellett.

Bizonyítás. *a)* Fölírva a feladat Euler–Lagrange-differenciálegyenletét [(9.11)], a következő összefüggéshez jutunk:

$$\frac{d}{dt}\Big[-e^{-\beta t}u'(c)\Big] = e^{-\beta t}u'(c)r. \tag{10.13}$$

Deriváljuk a bal oldali szorzatot: $\beta e^{-\beta t}u'(c) - e^{-\beta t}u''(c)\dot{c}$, majd használjuk fel a (10.3) jelöléseket: a (10.11) optimalitási feltételt kapjuk. Általában ζ függ c-től, s az adódó differenciálegyenletet nem tudjuk zárt alakban megoldani.

b) Fölhasználva a (10.5) CRRA-feltevést, integrálhatjuk a $\dot{c}/c = \delta/\zeta$ differenciálegyenletet: $c(t) = c_0e^{\delta t/\zeta}$.

Visszahelyettesítve a mérlegegyenletbe: $\dot{k} - rk = w - c_0e^{\delta t/\zeta}$.

Az 5.4. alfejezetben ismertetett megoldó szorzók módszerét alkalmazva, a legutolsó egyenletet beszorozzuk e^{-rt}-vel, hogy egy függvény deriváltját kapjuk a bal oldalon:

$$\frac{d}{dt}\Big[e^{-rt}k\Big] = e^{-rt}(\dot{k} - rk) = we^{-rt} - c_0e^{(\delta/\zeta - r)t}.$$

Integráljuk az új egyenlet mindkét oldalát a $[0,T]$ szakaszon és vegyük figyelembe W jelentését: $e^{-rT}k_T - k_0 = W - c_0J(\delta/\zeta - r)$, ahonnan (10.12) egyszerűen adódik. ∎

Az imént elmondottakat egy példán és egy feladaton szemléltetjük.

10.2. példa. Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény ($\zeta = 1$) esetén, ha nincs kereset ($w = 0$) és nincs örökség ($k_T = 0$), akkor $\delta/\zeta - r = r - \beta - r = -\beta$, azaz

$$c_0 = \frac{k_0}{J(-\beta)}. \tag{10.12$'$}$$

10.1. feladat. Gondoljunk $T = 20$ évre (a nyugdíjazás utáni várható életkorra), $w = 1$ egység/év nyugdíjra, $k_0 = 5$ kezdeti- és $k_T = 0$ zárómegtakarításra. Legyen nulla a leszámítolási- és a kamatláb ($\beta = r = 0$). Számítsuk ki az optimális kezdőfogyasztást CRRA hasznosságfüggvény esetén!

Yaari (1965) volt talán az első, aki Modigliani és Brumberg (1954) életciklus-elméletét kiterjesztette bizonytalan életkorú fogyasztóra. Őt követve tegyük föl, hogy a fogyasztó élettartama véletlen változó (jele: t), melynek értéke nem, de valószínűségi eloszlása már születéskor pontosan ismert. Legyen T a maximális lehetséges életkor, $Q(t)$ a túlélés valószínűsége, azaz annak a valószínűsége, hogy a fogyasztó legalább t ideig él. Azaz $Q(t)$ nemnövekvő függvény, $Q(0) = 1$ és $Q(T) = 0$. Két esetet vizsgálunk: *a)* teljes életjáradék vagy *b)* részleges életjáradék. Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy a zárótőke nulla: $k_T = 0$.
Először tegyük föl, hogy a fogyasztó olyan életjáradékot vehet, amelynek nincs biztosítási költsége. Megtakarítását kamatoztathatja, hitelezésért ugyanolyan kamatot fizet. A várható jelenérték alkalmazásával ez a probléma visszavezethető a 9.4. példában tárgyalt elfajult izoperimetrikus feladatra. Ugyanis az életpálya-fogyasztás várható jelenértéke egyenlő az életpálya-kereset várható jelenértéke és a kezdeti tőke összegével:

$$\int_0^T e^{-rt}Q(t)c(t)\,dt = \int_0^T e^{-rt}Q(t)[w(t) + k_0. \tag{10.14}$$

Általánosítjuk a (10.9) és a (10.8) képletet a sztochasztikus élettartamra:

$$\mathbf{E}W = \int_0^T e^{-rt}Q(t)w(t)\,dt, \tag{10.15}$$

$$\mathbf{E}J(\xi) = \int_0^T e^{-\xi t}Q(t)\,dt. \tag{10.16}$$

Ennek alapján bebizonyítható a

10.2. tétel. *a) Bizonytalan élettartam, nulla hagyaték és teljes életjáradék [(10.14)] mellett az optimális fogyasztási pályát a következő algebrai egyenlet szabályozza:*

$$c(t) = u'^{-1}[pe^{-\delta t}], \tag{10.17}$$

ahol u'^{-1} az u' határhaszonfüggvény inverze és a p skalár paraméterérték a (10.14) egyenletből határozható meg.

b) Állandó relatív kockázatkerülési együttható esetén az optimális fogyasztás növekedési üteme megegyezik a biztos élettartambeli értékkel és a kezdőértéke az ottani kezdőérték sztochasztikus általánosítása:

$$c_0 = \frac{k_0 + \mathbf{E}W}{\mathbf{E}J(\delta/\zeta - r)}. \tag{10.18}$$

Megjegyzés. A 10.1. és a 10.2. tétel összehasonlításából kiviláglik, hogy az élettartam okozta bizonytalanság teljes életjáradék esetén lényegében nem hat az optimális fogyasztási pályára.

Bizonyítás. *a)* Legyen

$$f(t,c)=e^{-\beta t}Q(t)u[c(t)],\quad g(t,c)=e^{-rt}Q(t)[c(t)-w(t)],\quad \kappa=k_0. \tag{10.19}$$

A 9.4. példát alkalmazva, (10.19)-et behelyettesítve az optimumfeltételbe, az $e^{-\beta t}u'[c(t)]=pe^{-rt}$ egyenleten keresztül adódik

$$u'[c(t)]=pe^{-\delta t}, \tag{10.20}$$

amely u' invertálásával tényleg a (10.17) közönséges egyenletet adja.

Ha meg tudjuk oldani a (10.17) paraméteres egyenletet $c(t)$-re, akkor visszahelyettesítve a (10.14) korlátba, adódik p, s így $c(t,p)$.

b) Helyettesítsük be az $u'(c)=c^{-\zeta}$ képletet (10.20)-ba: $c(t)^{\zeta}=pe^{\delta t}$, azaz

$$c(t)=p^{1/\zeta}e^{\delta t/\zeta}. \tag{10.21}$$

Legyen $c_0=p^{1/\zeta}$. Behelyettesítjük (10.21)-et (10.14)-be, és alkalmazva a (10.15)–(10.16) jelöléspárt, adódik (10.18). ∎

A nyugdíjrendszerek bevezetése drámai módon növelte az évjáradékosított jövedelemek arányát, mindazonáltal a folyó jövedelmek egy jelentős része továbbra sem ilyen. Yaari (1965) és mások úgy vélték, hogy ilyen körülmények közt is igaz marad, hogy az optimum belső, azaz a megtakarítások nem tűnnek el a halál előtt.

Az állapotokra vonatkozó feltételekkel kiegészített optimális szabályozáselmélet bonyolult eszköztárát alkalmazva, Leung (1994) megmutatta, hogy részleges életjáradék esetén nem lehet föltételezni belső optimumot. Bár elfogadom Leung matematikai érvelését, megkérdőjelezem az elemezése alapjául szolgáló egyik közgazdasági feltevés alkalmasságát. Szerintem az igazi közgazdasági probléma nem is a megtakarítások fölélése, hanem a nyugdíj alacsony szintje, s a korai és késoő fogyasztás ebből fakadó aránytalansága. Bizonyos évjáradék (nyugdíj) szint alatt a lehető legtöbb jövedelmet évjáradékosítani kell. Ha ez a lehetőség korlátozott, akkor nagyon óvatos, kockázatkerülő stratégiát kell választani, egyszerre elkerülve a megtakarítások korai felélését és az aránytalan fogyasztási pályát.

Ugyanakkor elsiklott afölött, hogy a célfüggvény várható értékkel számol, míg a költségvetési korlát nem, s emiatt az aszimmetria miatt feladat közgazdasági relevanciája kétséges.

10.2. ENDOGÉN BÉR ÉS KAMAT, VÉGTELEN IDŐTÁV

Az előző alfejezetben kívülről volt adva a munkabér és a kamatláb. Mostantól kezdve belülről, a termelési függvény segítségével magyarázzuk a munkabért és a kamatlábat.

Centralizált megoldás

Először föltesszük, hogy a „központi tervező” oldja meg az aggregált optimalizálási feladatot. Kamien és Schwartz (1981, 98–103. o.) nyomán először végtelen időhorizontnál vizsgáljuk a feladatot: $T=\infty$. Az egyszerűség kedvéért az egy főre jutó termelési függvénnyel indítjuk a tárgyalást és eltekintünk a halálozási kockázattól. Legyen rendre k, c és f az egy főre jutó tőke, fogyasztás és termelés mennyisége, ahol $f(k)$ az egy főre jutó *termelési függvény*, amelyet az elsőfokú homogén $F(K,L)$ eredeti termelési függvényből származtatunk. A neoklasszikus feltevések szerint $f'>0$ és $f''<0$. Az új mérlegegyenlet $\dot{k}=f(k)-c$, ahonnan az új variációszámítási feladat

$$I[k]=\int_0^\infty e^{-\beta t}u[f(k(t))-\dot{k}(t)]\,dt. \tag{10.22}$$

Fölírva a feladat (9.11) Euler–Lagrange-differenciálegyenletét, adódik az új optimumfeltétel:

10.3. tétel. *Endogén munka- és tőkejövedelem és végtelen időhorizont mellett az optimális fogyasztási pályát a következő differenciálegyenlet-rendszer adja:*

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{f'(k)-\beta}{\zeta(k)} \qquad \text{és} \qquad \dot{k}=f(k)-c, \tag{10.23}$$

ahol $\zeta(k)$ a hasznosságfüggvény relatív kockázatkerülési együtthatója az $f(k)-\dot{k}$ helyen.

A végtelenben vett *transzverzalitási feltétel* nem más mint

$$\lim_{T\to\infty} k_T u'[c(T)]e^{-\beta T}=0.$$

Megjegyzés. A határtermelékenységi feltétel szerint $r=f'(k)$, azaz (10.23a) (10.11)-nek felel meg.

Bizonyítás. Először az egyensúlyi pontot keressük meg: (k^o,c^o), amely pontban mind a $\dot{k}=0$, mind a $\dot{c}=0$ feltétel áll. Az optimumfeltétel szerint $f'(k^o)=\beta$, ahonnan $k^o=f'^{-1}(\beta)$, ahol f'^{-1} a deriváltfüggvény inverze. A mérlegegyenlet szerint $c^o=f(k^o)$. Az optimumfeltétel szerint, ha $k>k^o$, akkor $f'(k)-\beta<f'(k^o)-\beta=0$, azaz $\dot{c}<0$. Hasonlóan: ha $k>k^o$, akkor $\dot{c}>0$.

A fázissík-diagram segítségével a 10.1. ábrán grafikusan is vizsgálható a folyamat, (lásd Kamien és Schwartz (1981) 17.6. és 17.7. ábra).

A $\dot{c}=0$ feltételt kielégítő (k,c) pontok halmaza a fentiek szerint (k^o,c), c tetszőleges pozitív szám – azaz egy függőleges egyenes. Tőle balra a fogyasztás nő, tőle jobbra a fogyasztás csökken.

A $\dot{k}=0$ feltételt kielégítő (k,c) pontok halmaza a fentiek szerint a $c=f(k)$ görbe, ahol k tetszőleges pozitív szám. A termelési függvényre tett feltevések értelmében e görbe nő, de csökkenő mértékben (konkáv). Fölötte a tőkeállomány csökken, alatta nő (10.2. ábra).

A 10.2. ábrán négy lehetséges pályát vizsgáltunk. Az 1-jelű pálya a $k_0<k^o$ esetnek megfelelő optimális felhalmozási pálya fázisgörbéje. Ha ennél nagyobb fogyasztást választunk (2-jelű pálya), akkor előbb-utóbb megszűnik a felhalmozás, sőt föléljük a

tőkét. Ha ennél kisebb fogyasztást választunk (3-jelű pálya), akkor előbb-utóbb csökken a fogyasztás. Ilyenkor a fogyasztás ugrásszerű növelésével átugorhatunk a 4-jelzésű pályára, amely a $k_0 > k^{\mathrm{o}}$ esetnek megfelelő optimális felhalmozási pálya fázisgörbéje.

Először vizsgáljuk a *lineáris közelítés*t! Linearizáljuk a mérlegegyenletet:

$$\dot{k} = f'(k^{\mathrm{o}})(k - k^{\mathrm{o}}) - (c - c^{\mathrm{o}}) \tag{10.24}$$

és az optimumfeltételt:

$$\dot{c} = (a^{\mathrm{o}})^{-1} f''(k^{\mathrm{o}})(k - k^{\mathrm{o}}), \tag{10.25}$$

ahol a^{o} pozitív szám a fogyasztás abszolút kockázatkerülési együtthatója az egyensúlyban, hasonlóan a (10.11) képlethez a diszkontálás nélküli esetben ($\beta = 0$).

Deriválva a (10.24) egyenletet és behelyettesítve (10.25)-et, egy differenciálegyenletet kapunk:

$$\ddot{k} = f'(k^{\mathrm{o}})\dot{k} - \dot{c} = f'(k^{\mathrm{o}})\dot{k} - (a^{\mathrm{o}})^{-1} f''(k^{\mathrm{o}})(k - k^{\mathrm{o}}). \tag{10.26}$$

A (10.26) másodrendű differenciálegyenlet megoldását karakterisztikus egyenlete határozza meg (5.10. példa):

$$\lambda^2 - f'(k^{\mathrm{o}})\lambda + (a^{\mathrm{o}})^{-1} f''(k^{\mathrm{o}}) = 0.$$

$f'(k^{\mathrm{o}}) > 0$, $f''(k^{\mathrm{o}}) < 0$ és $a^{\mathrm{o}} > 0$, tehát a másodfokú egyenlet egyik gyöke (λ_1) pozitív, a másik (λ_2) meg negatív: nyeregpont. Az általános megoldás $k(t) = k^o + k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$.

A megoldás akkor és csak akkor konvergens, ha $k_1 = 0$, azaz $k(t) = k^{\mathrm{o}} + k_2 e^{\lambda_1 t}$. $k(0) = k_0$-ból $k_2 = k_0 - k^{\mathrm{o}}$.

Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

10.4. tétel. *Az optimális felhalmozás állandósult állapota lokálisan nyeregpont-stabil. Egy pálya stabil, ha a kezdeti feltételek kielégítik a $k_2 = k_0 - k^{\mathrm{o}}$ feltételt.*

A nemlineáris vizsgálat eredménye hasonló, de bonyolultabb: Blanchard és Fischer (1989) 2. fejezet, azonban az A. függelék bizonyítása hibás! Burmeister (1981) és Stokey és Lucas (1989) alapos áttekintést ad a diszkrét idejű változatról. ∎

Az elmondottakat példán és feladaton szemléltetjük.

10.2. feladat. Cobb–Douglas-féle termelési- és CRRA hasznosságfüggvény. Legyen $f(k) = Ak^{\alpha}$ és $u(c) = \sigma^{-1}c^{\sigma}$. Határozzuk meg k^{o}, c^{o}, r^{o} és λ_1 képletét!

10.3. feladat. Numerikus szemléltetés. Legyenek rendre $A = 10$, $\alpha = 0{,}3$ és $\sigma = -2$ a 10.2. feladat paraméterei. Határozzuk meg k^{o}, c^{o}, r^{o} és λ_1 értékét!

Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő fontos tételt.

10.5. tétel. *(Cass, 1965 és Koopmans, 1965.) A végtelen időhorizontú optimális felhalmozási feladat megoldása tart az aranyszabály-értékhez.*

10.4. feladat. Legyen $A = 10$, $\alpha = 0{,}3$, és $\sigma = -2$. Integráljuk numerikusan (éves lépésekkel) az optimális pályákat különböző c_0 kezdeti értékek mellett!

Decentralizált megoldás

Beláthatjuk még, hogy a fenti centralizált megoldás decentralizáltan is megvalósítható (Blanchard és Fischer, 1989, 2.2. alfejezet).

Két termelésitényező-piac létezik: egy a munkára, egy pedig a tőkére. A munkabér $w(t)$, a tőkebérlet (a kamat) $r(t)$.

Az egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy sok család van, azonos hasznosságfüggvénnyel. Mindegyik család egyénileg dönt, hogy mennyi munkát és tőkét kölcsönöz a vállalatoknak, mennyit takarít meg és mennyit fogyaszt. Sok vállalat létezik, azonos termelési függvénnyel. Bérelt tőke és munka segítségével terméket állítanak elő. Állandó hozadékot és tökéletes versenyt tételezünk föl, ezért a vállalatok száma lényegtelen.

Föltesszük, hogy mind a családok, mind a vállalatok tökéletesen előrelátják a jövőt. Azaz adott $\{w(t),r(t)\}$ pálya mellett mindegyik család maximalizálja a τ időponttól számított $I[c] = \int_\tau^\infty e^{-\beta t}u[c(t)]\,dt$ hasznosságfüggvényt, a következő költségvetési feltétel mellett:

$$c(t) + \dot{k}(t) = w(t) + r(t)k(t).$$

A vállalatok minden időpontban a profitjukat maximalizálják. Jól ismert feltételek szerint

$$f'[k(t)] = r(t) \qquad \text{és} \qquad f[k(t)] - r(t)f'[k(t)] = w(t).$$

Könnyen belátható, hogy a fogyasztó és a vállalat decentralizált optimumfeladata megegyezik a centralizált optimummal.

Megjegyzések. 1. Mi történik, ha a fogyasztó vagy a termelő hibásan becsli előre a kamatlábat vagy a bért? Eltér a centralizált optimumtól!

2. Eltérően Blanchard és Fischer (1989) 2.3. alfejezettől, mi kizártuk a (magán)adósságot. Ha azonban a kormányzatot is bekapcsoljuk, akkor célszerű mind a magán-, mind a közösségi adósságot szerepeltetni. Ekkor vizsgálhatók olyan kérdések, hogy különbözően hatnak-e az adóztatás különféle formái a család felhalmozási pályájára.

10.3. VÉGES IDŐTÁV, ÁLLANDÓ TERMELÉS-TŐKE HÁNYADOS

A régi feladat – új köntösben: véges időszak esetén sokkal bonyolultabb az elemzés, hacsak nem egyszerűsítjük a feladatot. Tinbergent követve állandó termelés-tőke hányadosú termelés mellett vizsgáljuk a véges időtávú optimális felhalmozási feladatot:

$$f(k) = Ak, \qquad A > 0,$$

ahol A a tőke-termelés hányados reciproka, röviden: tőkefajlagos.

A 10.1. alfejezet alapfeladatát átértelmezzük: $k(t)$ most nem felélendő pénzbeni megtakarítás, hanem produktív tőke. Nincs külső kereset, a kamatláb azonos a termelés-tőke hányadossal és a beruházás valamilyen időben változó függvénye a kibocsátásnak:

$$w(t) = 0, \quad r = A \qquad \text{és} \qquad I = sY.$$

A korábbi (10.11)–(10.12) képletek új értelemmel tölthetők meg:

10.6. tétel. *Feltéve, hogy teljesülnek a később részletezendő* $0 < s(t) < 1$ *működőképességi feltételek, az optimális növekedési pálya a következő:*

$$c(t) = c_0 e^{\gamma t},$$

ahol a fogyasztás (relatív) növekedési üteme

$$\gamma = \frac{A-\beta}{\zeta}, \tag{10.27}$$

és a fogyasztás kezdőértéke

$$c_0 = \frac{(A-\gamma)(e^{AT}k_0 - k_T)}{e^{AT} - e^{\gamma T}}. \tag{10.28}$$

Megjegyzések. 1. Látható, hogy a k_0 kezdőfeltétel mellett a k_T zárófeltétel is fontos szerepet játszik az optimális pálya meghatározásában. A puristákat ez zavarhatja, s inkább beolvasztják k_T-t a (10.22) célfüggvénybe:

$$I^*[k] = G(k_T) + \int_0^T e^{-\beta t} u[f(k(t)) - \dot{k}(t)]\, dt, \tag{10.22*}$$

ahol $G()$ valamilyen növekvő sima függvény. Mi megmaradunk az eredeti variációs feladatnál.

2. Tapasztalatilag a megtakarítási hányad kisebb, mint 1/2, de ezzel a körülménnyel nem foglalkozunk.

Működőképességi feltételek

Eddig nem elemeztük a $0 < s(t) < 1$ működőképességi feltételeket. A

$$s(t) = 1 - \frac{c(t)}{Ak(t)} \tag{10.29}$$

összefüggés értelmében a $k(t)/c(t)$ hányados alakulása a döntő. Lássuk először a tőkeállomány képletét!

$$k(t) = e^{At}k_0 - \frac{e^{At} - e^{\gamma t}}{e^{AT} - e^{\gamma T}}(e^{AT}k_0 - k_T). \tag{10.30}$$

A működőképesség biztosítására három feltevésre lesz szükségünk.

(i) A relatív kockázatkerülési együttható nagyobb, mint 1: $\zeta > 1$ ($\sigma < 0$).

(ii) A leszámítolási láb kisebb, mint a termelés/tőke hányados: $\beta < A$.

(iii) A záró tőkeállomány nagyobb, mint a kezdő tőkeállomány; de kisebb, mint a nulla fogyasztással elérhető maximális érték. Pontosabban:

$$0 < k_0 < \frac{(A-\gamma)e^{\gamma T}}{Ae^{AT} - \gamma e^{\gamma T}} e^{AT} k_0 < k_T < e^{AT} k_0. \tag{10.31}$$

Megjegyzés. Aláhúzzuk, hogy k_T (10.31)-beli alsó korlátjától eltekintve minden feltevésünk természetes. Az (i) feltevés azt mondja ki, hogy a fogyasztás időbeli helyettesítése korlátozott, például semmilyen optimális fogyasztási pálya nem tartalmazhat nulla fogyasztási pontot. (Figyelemre méltó, hogy Tinbergen Frisch 1931-es adataira hivatkozva éppen az ellenkező feltevést mondta ki, és nem tudta elfogadni saját paradox eredményét!) A (ii) feltevés empirikus jellegű: mivel β néhány század, A pedig néhány tized, $\beta < A$. A (iii) feltevésbeli felső korlát nem engedi, hogy az azonosan nulla fogyasztás mellett elérhető tőkefelhalmozást vagy annál többet tűzzünk ki célul. Az alsó korlát nehezen áttekinthető, a bizonyításból származik. A könnyebb érthetőség kedvéért megjegyezzük, hogy $\min k_T$ értéke k_0 és $k^* = k_0 e^{\gamma T}$ közé esik, k^* értéke függ γ-tól és T-től.

Megfogalmazható a 10.6. tétel kiegészítése.

10.7. tétel. *Tegyük föl, hogy az (i)–(iii) feltevéshármas teljesül.*

a) A klasszikus felhalmozási feladatnak van megengedett lokális optimuma, amely egyben globális optimum.

b) Az optimális fogyasztás időben nő.

c) Minél nagyobb a leszámítolási láb vagy a kockázatkerülés (azaz minél kisebb az időbeli helyettesítés rugalmassága), annál nagyobb a kezdőfogyasztás és annál kisebb a fogyasztás növekedési üteme.

d) Ha $k_T = k^*$, akkor az optimális beruházási hányad, $s(t)$ állandó. Ha $k_T > k^*$, akkor $s(t)$ nő; ha $k_T < k^*$, akkor $s(t)$ csökken.

Bizonyítás. *a)* Ha létezik lokális optimum, akkor azt a fenti levezetésből következően a megadott módon kell meghatározni. Igazolni kell viszont a pozitivitási feltételek teljesülését. A $0 < s(t) < 1$ feltételbe be kellene helyettesíteni (10.29)-et, de ez meglehetősen fáradságos lenne. Ehelyett más, ekvivalens feltételeket vizsgálunk.

c_0 pozitivitása: (10.28) jobb oldalán a tört mindig pozitív. c_0 pontosan akkor pozitív, ha $k_T < e^{AT} k_0$ teljesül.

$\dot{k}(t)$ pozitivitása: Deriváljuk (10.30)-at!

$$\dot{k}(t) = Ae^{At} k_0 - \frac{Ae^{At} - \gamma e^{\gamma t}}{e^{AT} - e^{\gamma T}} (e^{AT} k_0 - k_T).$$

Közös nevezőre hozzuk és összevonjuk a jobb oldalt, majd fölírjuk a $\dot{k}(t) > 0$ feltételt. A pozitív nevezőt elhagyva:

$$A(k_T - e^{\gamma T} k_0) e^{At} + \gamma (e^{AT} k_0 - k_T) e^{\gamma t} > 0.$$

Ha elégséges feltétellel beérjük, akkor az első tagot pozitívvá tevő $k_T > e^{\gamma T} k_0$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan megteszi, hiszen a második tag $k_T < e^{AT} k_0$ miatt pozitív.

Ha pontos feltételt keresünk, akkor tovább kell számolnunk. (10.31)-at átrendezve

$$(Ae^{At} - \gamma e^{\gamma t}) k_T > (Ae^{At + \gamma T} - \gamma e^{AT + \gamma t}) k_0 > 0,$$

azaz

$$k_T > \frac{Ae^{At + \gamma T} - \gamma e^{AT + \gamma t}}{Ae^{At} - \gamma e^{\gamma t}} k_0.$$

Jelölje $g(t)$ a k_0 szorzójaként szereplő törtet. $e^{\gamma t}$-vel egyszerűsítve:

$$g(t) = \frac{Ae^{(A-\gamma)t+\gamma T} - \gamma e^{AT}}{Ae^{(A-\gamma)t} - \gamma}.$$

A $g(t)$ függvény deriválásával belátható, hogy $\dot{g}(t) > 0$, azaz $g(t) < g(T)$, ha $0 < t < T$. Tehát a működőképesség szükséges és elégséges feltétele $k_T > g(T)k_0$. A $g(t)$ függvény alakját használva, a (10.31)-beli alsó korlátot kapjuk.

$k(t)$ pozitivitása: következik a $k_0 > 0$ és a $\dot{k}(t) > 0$ egyenlőtlenségpárból.

b) (10.27) és $\beta < A$ miatt $\gamma > 0$.

c) Minél nagyobb ζ vagy β, annál kisebb γ.

d) Következik a korábbi bizonyításokból. ∎

Numerikus számítások

Az elmondottakat viszonylag egyszerű számpéldákon szemléltetjük. Már Tinbergent is zavarta, hogy nehéz a modellt jól kalibrálni. Két elemi összefüggést tarthatunk szem előtt a modell számszerűsítésénél: a (6.4)-beli $\Gamma = sA$ és a (10.27)-beli $\gamma = (A - \beta)/\zeta$ képletet. Kiindulásul vegyünk évi 2%-os növekedést és 16 %-os beruházási hányadot: a keletkező $A = \Gamma/s = \gamma/s = 0{,}02/0{,}16 = 0{,}125$ zavaróan alacsony érték. Néhány százalékos diszkontrátával dolgozva a helyettesítési rugalmatlanság meglehetősen nagynak adódik: például kerek számokra törekedve: $\beta = 0{,}065$-höz $\zeta = 3$ érték tartozik. A $k_0 = 1/A = 8$ választás biztosítja, hogy a kezdeti nettó termelés egységnyi: $y_0 = 1$. Végül belőhetjük az állandó (0,16) beruházási hányadhoz tartozó zárótőke-állományt: $T = 10$ év mellett $k^* = e^{\Gamma T}k_0 = 9{,}77$.

A 10.1. táblázat tartalmazza a futások változó paramétereit és jellemzőit.

10.1. táblázat. Futási paraméterek és jellemzők

Futások	Diszkont-ráta β	Záró tőke k_T	növekedési ütem Γ	Fogyasztás nyitó c_0	Fogyasztás záró c_T	Beruházási ha nyitó s_0	Beruházási ha záró s_T
1.	0,065	09,77	0,02	0,840	1,026	0,160	0,160
2.	0,035	09,77	0,03	0,806	1,087	0,194	0,110
3.	0,065	10,75	0,02	0,795	0,971	0,205	0,277
4.	0,035	10,75	0,03	0,762	1,029	0,238	0,234

Az 1. futás a vízmérték, s ehhez viszonyítjuk a többi futást: $\beta_1 = 0{,}065$. A 2. futásnál majdnem felére csökkentjük a leszámítolási lábat: $\beta_2 = 0{,}035$, de megtartjuk a korábbi zárótőke-értéket: $k_T(2) = k^*$. Ekkor a fogyasztás növekedési üteme 3%-ra ugrik, a kezdő fogyasztás 3,4%-ponttal csökkent, a záró fogyasztás viszont 6%-ponttal nő. Zavaró ellenben, hogy a kezdeti ambiciózusabb beruházási hányad 19,4%-ról folyamatosan csökken, s az időszak végére a nyomorúságos 11%-ra süllyed.

A 3. futásban visszatérünk a magas leszámítolási lábhoz: $\beta_3 = 0{,}065$, s ezzel az alacsonyabb, 2%-os fogyasztásnövekedéshez. Ugyanakkor 10%-kal megemeljük a zárófeltételben szereplő tőkeértéket: $k_T(3) = 10{,}75$. Most a beruházási hányad még a 2. futásénál is magasabb értékről indul és folyamatosan nő 27,7%-ig, de közben a fogyasztás egyre fokozódó mértékben elmarad az előző két pályától.

A 4. futásban a 2. és a 3. futás javításait egyesítjük: csökkentjük a leszámítolási lábat és növeljük a záró tőkeállományt. Igaz, hogy most a kezdő fogyasztás további 3,3%-ponttal süllyed a 3. futáshoz képest, de a végső fogyasztás már eléri az 1. futásbeli értéket. Eközben a beruházási hányad a 3. futásbeli középértéken stabilizálódik.

Látható, hogy még a javított modell sem tökéletes. Ha mégis elfogadjuk a modellezés eddigi eredményeit, akkor megállapíthatjuk: mind a leszámítolás csökkentésére, mind a záró tőkeállomány emelésére szükség van. A modell alapján – kellő óvatossággal – a következő megállapítások tehetők a növekedéspolitikával kapcsolatban. 1. Ha sikerül csökkenteni a döntéshozók rövidlátóságát (ezt a modellben a leszámítolási láb fejezi ki), akkor a kezdeti fogyasztás csökkentése árán jelentősen növelhető a fogyasztás növekedési üteme. 2. Ha sikerül csökkenteni a jelenről a jövőre halasztott terheket (ezt a modellben a záró tőkeállomány emelése fejezi ki), akkor az optimális beruházási hányad időbeli csökkenése mérsékelhető, illetve növekedésbe fordítható. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a különböző optimális pályák összehasonlítására nincs matematikai módszer, továbbra is pusztán a józan eszünkre kell hagyatkoznunk.

Megjegyzések. 1. Frisch 1931-es megfigyelésére hivatkozva Tinbergen rugalmas helyettesítést tételezett föl (gyenge konkavitás). A továbbiak miatt érdekes, hogy bevezette a létfenntartási minimumot, amely alá a fogyasztás sohasem süllyedhet. Igazi közgazdászhoz méltóan végigelemezte az optimális megoldás nagyságrendjét, és elégedetlenül tette félre az eredményeket. Rugalmasabbnak tűnik Koopmans (1965) feltételezése, ti. a fogyasztás határhaszna a $-\infty$-hez tart, ha a fogyasztás nullához tart: erős konkavitás. Mint a táblázatból látható, ő és Cass (1965) konkáv termelési függvénnyel és végtelen időszakkal dolgoztak.

2. Mások kevésbé törődtek a hasznosságfüggvények megválasztásával. Számomra meglepő módon, az optimális növekedéselmélet egyik klasszikusa, Shell (1967a) cikkében lineáris hasznosságfüggvénnyel dolgozott. A nem sokkal korábban született optimális folyamatok elméletét (Pontrjágin et al, 1961) alkalmazva a következő eredményt kapta: az elemzési időszak első szakaszában érdemes maximálisan, a másodikban viszont minimálisan beruházni. Shell még azt a fáradságot sem vette magának, hogy a beruházási hányadot az elvileg lehetséges [0,1] intervallumnál szűkebbre, például [0,1;0,2]-re szabja. Csak nem azért választotta a lineáris célfüggvényt, mert ez az az eset, amikor a klasszikus variációszámítás már nem érvényes? A makrohasznossági függvény linearitása azonban még első közelítésként sem engedhető meg. (Kenyeret, energiát és más árukat-szolgáltatásokat mindennap fogyasztanunk kell!)

S ezzel elérkeztünk Magyarországra. A magyar szakirodalomban Virág (1969), Kovács és Virág (1981), valamint Banai és Lukács (1987) foglalkoztak az optimális növekedés kérdésével. Mindhárom forrás az irreális lineáris hasznosságfüggvénnyel dolgozott, s ezért közömbös, hogy lineáris, konkáv termelési függvényt vagy más, érdekes termelési szabályt tételezett föl. Virág (1969) és Kovács és Virág (1981) Shell (1967)-hez hasonló eredményt kapott; Banai és Lukács (1987) általánosabb eredményekhez is eljutott. A legfontosabb modellek sajátosságait a 10.2. táblázatban foglaljuk össze.

10.2. táblázat. Modellek és feltevések

Feltevések Modellek	Horizont	Termelési függvény	Hasznosság
Tinbergen (1960)	véges	lineáris	gyengén konk
Cass (1965) Koopmans (1965)	végtelen	nemlineáris	erősen konkáv
Shell (1967)	véges	lineáris	lineáris
Virág (1969) Kovács-Virág (1981)	véges	lineáris	lineáris
Banai-Lukács (1987)	véges	ad hoc	lineáris
Simonovits (1995c)	véges	lineáris	erősen konkáv

További eredmények

A 10.1. alfejezet eredményeinek diszkrét idejű változatára még szükségünk lesz a C. függelékben, az együttélő korosztályok (különösen a nyugdíjrendszerek) elemzésénél. A 10.2. alfejezet eredményeit alkalmazza Blanchard és Fischer (1989) a deficitfinanszírozás és a nyitott gazdaság elemzésére. Figyelemre méltó, hogy időben állandó leszámítolási láb esetén a megoldás *időben konzisztens*, azaz a feladatot egy 0 utáni T_0 időpontban az eredeti optimumnak megfelelő $k^o(T_0)$ kezdőállapot mellett újraszámolva, a $[T_0,T]$ időintervallumra leszűkített optimum megegyezik az eredeti optimummal. (Strotz (1955) megmutatta, hogy változó leszámítolási láb esetén nem mindig van így!) Vegyük észre, hogy a 10.1. alfejezetben vizsgált sztochasztikus optimalizálási feladatainkban szintén felvetődik ez a probléma. Például a (10.14) hasznossági függvényben szereplő $Q(t)$ feltételes túlélési függvényről már láttuk, hogy egyfajta implicit diszkonttényező, mégpedig nem exponenciális. Ezért, ha τ idő eltelte után újra megoldjuk a feladatot, dinamikus inkonzisztenciával találjuk szembe magunkat.

Az optimális szabályozáselmélet első magyar közgazdasági alkalmazására csak utalunk: Szepesi és Székely (1971).

FÜGGELÉKEK

Ez a rész a könyv zárórésze. Három függelékből áll.

Az A. függelék a lineáris algebra néhány olyan fogalmát és tételét ismerteti, amelyre a könyv egyes fejezeteiben szükségünk lesz és amelynek ismeretét nem tételezzük föl.

A B. és C. függelékben szereplő végtelen időtávú modelleknek az a megkülönböztető sajátosságuk, hogy minden időszakban véges számú fogyasztó jön a világra, akik bizonyos idő múlva meghalnak. Egy időszakban csak véges sok szereplő él együtt, együttműködésük érdekes és fontos problémákat vet föl.

A B. függelékben az *együttélő nemzedékek* modellcsaládját elemezzük, ahol mindenki pontosan két időszakig él. A 8. és a 10. fejezethez hasonlóan az optimális felhalmozási és fogyasztási pályákat vizsgáljuk, de a korábbi fejezettől eltérően itt nem igaz, hogy az egyensúly Pareto-optimális; s az egyensúlyi kamattényezők sem mindig konvergálnak az állandósult állapothoz.

A C. függelékben az *együttélő korosztályok* modellcsaládját elemezzük, ahol mindenki több, mint két időszakig él. A 8. fejezettől és a B. függeléktől eltérően most csak cseregazdaságokat vizsgálhatunk, s az egyensúly létezése, egyértelműsége és optimalitása bizonytalanná válik. Igazi dinamikát most csak lokálisan tudunk vizsgálni, s globális megközelítésnél be kell érnünk a 2-ciklusok sikertelen kizárásával.

A D. függelékben az optimális nyugdíjjáradék tervezését körvonalazzuk, ahol az egyén ismeri saját élettartamát, de a kormányzat nem. Ezért olyan (élettartam,szolgálati idő, járadék) hármasokat kell terveznie, amelyek mellett mindenki akkor maximalizálja saját életpálya-hasznosságát, ha saját típusát választja. A feladatot a diszkrét idejű optimális szabályozáselmélet segítségével, numerikusan oldjuk meg.

Az E. függelékben az átmenet és a foglalkoztatás dinamikáját modellezzük, megkülönböztetve a nagy- és a kistermelékenységű munkát. Kiderül, hogy az átmenet folyamán a nagytermelékenységű munka magánfoglalkoztatása gyorsabban nő, mint a a kicsi, és ezt az ollót óvatos bértámogatással lehet szűkíteni.

A. FÜGGELÉK. LINEÁRIS ALGEBRAI KIEGÉSZÍTÉS

Ebben a függelékben néhány fontos fogalmat és tételt mutatunk be a lineáris algebra köréből, amelyet gyakran alkalmazunk a könyvben, de a főszövegben való elhelyezése megbontaná a tárgyalás egységességét. Elemi fogalmakat és tételeket (mint lineáris függetlenség) nem tárgyalunk. Hasznos információ található magyar nyelven Young (1971), Rózsa (1974), Zalai (1989) és Puskás (1993) könyveiben.

Transzformációk és mátrixok

Az n-dimenziós $\mathbf{R}^n$ térnek egy önmagára való M leképezését, más szóval transzformációját *lineáris*nak nevezzük, ha bármely két x és y vektorra és bármely két α és β skalárra a lineáris kombináció képe a képek lineáris kombinációja. Képletben:

$$M(\alpha x + \beta y) = \alpha M x + \beta M y. \tag{A.1}$$

Adott koordináta-rendszerben létezik n db egységvektor: $e_i = (0,\dots,1,\dots,0)^{\mathbf{T}}$, $i = 1,\dots,n$. Ebben a koordináta-rendszerben az M transzformációt és az x vektort rendre egy $M = (m_{ij})$ négyzetes mátrix és egy $x = (x_1,\dots,x_n)^{\mathbf{T}}$ szám n-es képviseli. Nem kell megkülönböztetnünk a transzformációt a mátrixtól, illetve a koordinázatlan vektort a koordinázottól.

Blokk-szerkezetű mátrixok

Egy M mátrix blokk-szerkezete gyakran segít az elemzésben, mert egy nagyobb feladatot több kisebb feladatra bont fel. Tegyük föl, hogy az $\{1,2,\dots,n\}$ indexhalmazt P db diszjunkt nem-üres halmazba osztottuk: J_Q, $Q = 1,\dots,P$. Egyidejű sor- és oszlopcserével elérhető, hogy minden blokk egymás utáni indexekből álljon: $J'_Q = \{j_{Q-1},\dots,j_Q - 1\}$, $Q = 1,\dots,P$, ahol $j_0 = 1$ és $j_P = n+1$. Nyilvánvaló, hogy M-nek *blokk-szerkezet*e van:

$$M = (M_{QR}), \qquad \text{ahol} \qquad M_{QR} = (m_{i,j})_{i\in J_Q, j\in J_R}.$$

Például $n = 3$ és $P = 2$ esetén legyen $J_1 = \{1,3\}$ és $J_2 = 2$. Ekkor a sor- és oszlopcsere révén $J'_1 = \{1,2\}$ és $J'_2 = 3$. Legyen $M_{QR} = 0$, ha $R \neq Q$, azaz $M = \langle M_{QQ}\rangle$. Particionáljuk az x vektort is hasonlóan!

$$x = (x_Q), \qquad \text{ahol} \qquad x_Q = (x_i)_{i\in J_Q}.$$

Egy mátrixot *blokk-diagonális*nak nevezünk, ha $M_{QR} = 0$ minden $Q \neq R$ esetén. Triviálisan igaz az

A.1. tétel. *A blokk-diagonális lineáris M transzformáció P db független lineáris M_{QQ} transzformációra esik szét, amelyek mindegyike egy megfelelő $\mathbf{R}^{n_Q}$ invariáns altéren hat, $Q = 1,\dots,P$.*

Sajátértékek és sajátvektorok

Az M transzformáció *sajátértéké*nek és *(jobb oldali) sajátvektorá*nak nevezünk egy λ skalárt és egy $s \neq 0$ oszlopvektort, ha a transzformáció az s vektor irányát változatlanul hagyja, de a vektort λ-szorosára nagyítja. Képletben:

$$Ms = \lambda s, \qquad s \neq 0. \tag{A.2}$$

Nyilvánvaló, hogyha s sajátvektor, akkor bármely ($\alpha \neq 0$) skalárszorosa is az, méghozzá ugyanolyan sajátértékkel: $M(\alpha s) = \lambda(\alpha s)$. A homogén lineáris egyenletek elméletéből ismert, hogy λ szempontjából (A.2) ekvivalens $\det(\lambda I - M) = 0$-val, ahol det a determináns rövidítése. Bevezetjük az M transzformáció *karakterisztikus polinom*ját:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - M) \tag{A.3}$$

A következő tétel a karakterisztikus polinom fontos tulajdonságát mondja ki.

A.2. tétel. *Az n-edfokú $P(\lambda)$ polinomnak multiplicitással n (valós vagy komplex) gyöke van, amelyek éppen a mátrix (A.2)-beli sajátértékei; λ_j, $j = 1,\dots,n$.*

Teljes indukcióval igazolható, hogy ha mindegyik sajátérték különböző, akkor a megfelelő n sajátvektor lineárisan független. Előfordulhat azonban, hogy a λ sajátérték *algebrai multiplicitás*a $r > 1$: $P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(r-1)}(\lambda) = 0 \neq P^{(r)}(\lambda)$. Legyen r^* a λ-hoz tartozó lineárisan független sajátvektorok száma, ez a λ sajátérték *geometriai multiplicitás*a, nyilván $1 \leq r \leq r^*$.

Tipikusan $r^* = r = 1$, ezért „általában” létezik egy n független sajátvektorból álló bázis, az ún. *sajátbázis.*

Egy definícióhármast ismertetünk. Az M mátrix *spektrálsugar*a az n darab sajátértékek abszolút értékének maximuma; jele: $\rho(M)$, $\rho(M) = \max\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|\}$. Egy mátrix *domináns sajátértéke* egy olyan sajátérték, amelynek abszolút értéke maximális (több is lehet belőle, lásd ciklikus mátrixok, később). Domináns sajátértékhez tartozó sajátvektort *domináns sajátvektor*nak nevezünk, amelynek algebrai és geometriai multiplicitása egyaránt lehet 1-nél nagyobb. (Például az I transzformációnak minden vektor domináns sajátvektora, 1 sajátértékkel: $r = r^* = n$.)

A.1. példa. Több domináns sajátérték. Legyen α és β két negatív skalár. Ha

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix},$$

akkor $\rho(M) = \sqrt{\alpha\beta}$, s mind $\rho(M)$, mind $-\rho(M)$ domináns sajátérték.

Szükségünk lesz a *bal oldali sajátvektor* fogalmára:

$$p^{\mathbf{T}} M = \lambda p^{\mathbf{T}}, \quad p \neq 0, \tag{A.4}$$

azaz $M^{\mathbf{T}} p = \lambda p$, ahol $M^{\mathbf{T}}$ az M mátrix *transzponált*ja, komplex esetben *konjugált*ja: $m_{ij}^{\mathbf{T}} = \bar{m}_{ji}$, ahol a felülhúzás a komplex konjugált jele, $1 \leq i,j \leq n$. Mivel $M^{\mathbf{T}}$ karakterisztikus polinomja azonos M karakterisztikus polinomjával, a gyökök azonosak, nincs szükség bal és jobb oldali sajátértékek közti megkülönböztetésre.

A.3. tétel. *Különböző sajátértékekhez tartozó bal és jobb oldali sajátvektorok merőlegesek egymásra.*

Bizonyítás. $\mu p^{\mathbf{T}} = p^{\mathbf{T}}M$ és $\lambda s = Ms$, $p \neq 0 \neq s$, $\lambda \neq \mu$. Szorozzuk be az első egyenletet s-sel jobbról, a másodikat $p^{\mathbf{T}}$-vel balról: $\mu p^{\mathbf{T}}s = p^{\mathbf{T}}Ms = \lambda p^{\mathbf{T}}s$, azaz $p^{\mathbf{T}}s = 0$. ∎

Természetesen az azonos sajátértékhez tartozó bal és jobb oldali sajátvektorok *általában nem* merőlegesek egymásra.

Cayley és Hamilton tétele*

Nem nehéz belátni, hogy $\mathbf{R}^n$ lineáris transzformációi is lineáris teret alkotnak, melynek dimenziója n^2. Emiatt az $I,A,A^2,\ldots,A^{n^2-1}$ sorozat lineárisan összefüggő. Élesíthető azonban ez az elemi megfigyelés.

Szükségünk lesz a *mátrixpolinom* fogalmára. Legyen $A(z) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j z^j$ egy n-edfokú valós együtthatós komplex-változós polinom. Ekkor az $A(M) = \sum_{0\le j\le n} \alpha_j M^j$ mátrixot az M mátrix A-polinomjának nevezzük. Többször is szükségünk lesz a következő összefüggésre.

A.4.* tétel. *(Cayley–Hamilton-tétel, Halmos, 1958.) Minden négyzetes M mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét: $P(M) = 0$.*

Bizonyítás helyett. Az általános bizonyítás némileg bonyolult, a főszövegben vizsgált, sajátbázisú mátrixok esetén azonban szinte triviális: Legyen λ_j az M mátrix j-edik sajátértéke és s_j a hozzátartozó sajátvektor, $j = 1,\ldots,n$; a sajátvektorok bázist alkotnak. Ekkor $P(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, tehát $P(M) = (M-\lambda_1 I)\cdots(M-\lambda_n I)$; és az $M-\lambda_j I$ tényezők felcserélhetősége miatt $P(M)s_j = 0$ minden j-re, azaz $P(M) = 0$. ∎

Az A.4.* tétel alapján már viszonylag könnyen kiszámíthatjuk M különböző hatványait, csupán a $P(\lambda)$ karakterisztikus polinomot és M első $n-1$ db hatványát kell kiszámítanunk. Legyen a karakterisztikus egyenlet a következő alakú: $\lambda^n = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j \lambda^j$. Az A.4.* tétel alapján $M^n = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j M^j$. Ezzel M^n-t meghatároztuk. Szorozzuk be a mátrixegyenlet mindkét oldalát M-mel: $M^{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j M^{j+1}$, és M^n helyére írjuk be előző egyenletünket. Összevonással: $M^{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} (\pi_{j-1} + \pi_{n-1}\pi_j) M^j$, $(\pi_{-1} = 0)$ stb.

Jordan-féle normál alak*

Már említettük, hogy tipikus esetben létezik sajátbázis. Speciális struktúrájú feladatokban azonban előfordul, hogy nincs sajátbázis.

A.2. példa. Jordan-blokk. Az $r \times r$-es

$$N_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

mátrixnak minden sajátértéke 0, és (skalárszorosoktól eltekintve) csak egy sajátvektora van: $s = (1,0,\dots,0)^{\mathbf{T}}$.

A következő tétel azt mondja ki, hogy az átlóktól eltekintve, az (A.5) alak a lehető legegyszerűbb.

A.5. tétel. *(Jordan normál alak, Rózsa, 1974.) Megfelelő hasonlósági transzformációval bármely M transzformáció blokk-diagonális alakra hozható, ahol az egyes blokkok mérete r_Q, és egyetlen egy s_Q sajátvektorhoz tartozó λ_Q sajátérték algebrai multiplicitása r_Q: $M_Q^* = \lambda_Q I_{r_Q} + N_{r_Q}$ [(A.5)], $Q = 1,\dots,P$.*

Geometriai nyelven szólva, vizsgáljunk egy blokkot! Az s_j vektort a j-edik *fővektor*nak nevezzük: $s_{j-1} = (\lambda I - M)s_j$; $j = r,r-1,\dots,1$, ahol s_1 az egyetlen sajátvektor és $s_0 = 0$. E problémának kiterjedt irodalma van (vö. Jordan-féle normál alak, Halmos, 1958).

Mátrix-exponens

Az 5.3. alfejezetben felmerült az ötlet, milyen jó lenne definiálni egy mátrix exponenciális függvényét. Szerencsére e^z hatványsora minden komplex számra értelmezve van, ezért – legalábbis formálisan –, értelmezhető bármely M mátrixra is:

A.6. tétel. *Tetszőleges $n \times n$-es valós vagy komplex elemű M mátrixra értelmezve van az exponens:*

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}. \tag{A.6}$$

Ugyanúgy, mint a skalár (valós vagy komplex) esetben, (A.6) jobb oldala (akár elemenként, akár normában) abszolút konvergens.

Egy blokk-diagonális mátrix exponense egyenlő a blokk-exponensek mátrixával: $e^{\langle M_Q \rangle} = \langle e^{M_Q} \rangle$. Speciálisan egy diagonális mátrix exponense egyenlő a sajátérték-exponensek diagonális mátrixával: $M = \langle m \rangle = \langle m_j \rangle_j$ esetén $e^{\langle m \rangle} = \langle e^{m_j} \rangle_j$. Egy sajátbázisos M mátrixra e^M hasonló a diagonális $\langle e^{\lambda_j} \rangle_j$ mátrixhoz.

Megjegyzések. 1. A Jordan-alak segítségével $e^{(\lambda I + N)t}$ viszonylag egyszerűen leírható.

2. Az A.4. tétel környékén már láttuk, hogy bármely M^k kiszámítása visszavezethető az $I,M,M^2,\dots,M^{n-1}$ sorozat kiszámítására. Ezért egy mátrix exponenciális függvényét végtelen mátrix hatványsor nélkül is meghatározhatjuk. Sőt a redukció bármely analitikus függvényre is kiterjeszthető, feltéve, hogy a hatványsor konvergencia-sugara nagyobb, mint $\rho(M)$.

Nem-negatív, irreducíbilis és ciklikus mátrixok

Nyilvánvaló okok miatt a közgazdaságtanban nagyon fontosak a *nem-negatív (pozitív) elemű* mátrixok, ahol $m_{ij} \geq 0$ ($m_{ij} > 0$). (A legújabb magyar helyesírási szabályzat megalkotói nagy hibát követtek el, amikor bevezették a *nem* kezdetű jelzők különírását! Ugyanis a *nem negatív* elemű mátrixok nem azonosak a *nem-negatív* elemű mátrixokkal! Az előbbi osztályba olyan mátrixok tartoznak, melyeknek van legalább egy nem negatív elemük, míg az utóbbiba olyan mátrixok tartoznak, melyeknek minden eleme nem negatív!)

Néha blokk-diagonális mátrixokkal dolgozunk, mert azok kisebb méretű mátrixokhoz vezetnek. Máskor éppen ellentétes a célunk, el akarjuk kerülni, hogy a rendszer részeire bomoljék. Ekkor hasznos a következő fogalom.

Irreducíbilis (felbonthatatlan) mátrixokról beszélünk, ha az $\{1,2,\dots,n\}$ indexhalmaz nem bontható fel két olyan nem-triviális J és J^* indexhalmazra, amelyre a keletkező M_{J^*J} és M_{JJ^*} blokkok egyike nulla mátrix. Ahhoz, hogy kevésbé formális legyen a meghatározásunk, érdemes gráfokra lefordítani a definíciót. Képzeljük azt, hogy van egy n-csúcsú irányított gráfunk, amelyben az i-edik pont akkor és csak akkor van összekötve a j-edikkel, ha az (i,j) mátrixelem pozitív. (Természetesen elképzelhető, hogy az i-edik csúcs össze van kötve a j-edik csúccsal, de fordítva nem.) Ekkor a mátrix irreducibilitása azt jelenti, hogy a hozzátartozó gráf csúcspontjai nem oszthatók két olyan csoportba, hogy egyik csoport egyik csúcsa sincs összekötve a másik csoport semelyik csúcsával. Természetesen a mátrixot *reducíbilis*nek nevezzük, ha nem irreducíbilis. (Vegyük észre, hogy minden blokk-diagonális mátrix reducíbilis, hiszen ott egyik csoport sincs öszekötve a másikkal.)

A következő tételeket 1907 és 1912 között Perron (pozitív mátrixokra) és Frobenius (nem-negatív mátrixokra) fedezte föl, és az 1950-es évek óta alapvető szerepet játszanak a matematikai közgazdaságtanban.

A.7. tétel. *(Frobenius 1. tétele: 1908, Zalai, 1989, 2. fejezet, Rózsa, 1974.) Legyen a négyzetes M mátrix nem-negatív és irreducíbilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

a) M-nek van egy pozitív domináns sajátértéke.

b) Létezik (egy skalárszorzótól eltekintve) egyetlen pozitív sajátvektor, amely a pozitív domináns sajátértékhez tartozik.

c) A pozitív domináns sajátérték algebrai multiplicitása 1.

d) A pozitív domináns sajátérték növekvő függvénye bármely pozitív elemnek.

e) Ha a spektrálsugár kisebb, mint 1, akkor $(I-M)^{-1}$ létezik és pozitív.

A **bizonyítás**ból csak az alapgondolatot említjük meg: A

$$\rho(x)=\min\left[\frac{(Mx)_i}{x_i},\quad 1\le i\le n,\quad x_i\ne 0\right]$$

függvény jól definiált, és a maximumát az $s_1>0$ sajátvektornál veszi föl, értéke: $\rho(M)=\lambda_1$ pozitív domináns sajátérték.

A.1. feladat. Közvetlenül igazoljuk az A.7. tételt $n=2$-re!

Az A.1. és A2. péda mutatja, hogy az A.7. tétel nem érvényes nem-negatív, reducíbilis mátrixokra.

Élesíthetjük az eredményt, ha bevezetjük a következő speciális blokk-szerkezetű mátrixokat. Az M mátrixot *P-ciklikus*nak vagy *P–rendben imprimitív*nek nevezzük, ha $M_{QR}=0$, $R\ne Q+1$ esetén, azaz $M=(M_{Q,Q+1})$: részletesen lásd (1.51). Ismét a fenti gráf-hasonlatot alkalmazva, ekkor a csúcspontok P db csoportba oszthatók, hogy az 1. csoport csúcsai kizárólag a 2. csoportéval vannak összekötve, a 2. csoporté a 3. csoportéval,..., a $(P-1)$-ediké a P-edikével és az P-ediké az 1. csoportéval. Ekkor az M^P mátrix blokkdiagonális.

Ha egy mátrix semmilyen $P>1$ természetes számra sem ciklikus, akkor $P=1$-et írunk és a mátrixot *aciklikus*nak vagy *primitív*nek nevezzük.

A.3. példa. 2-ciklikus mátrix.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

ahol N_1 és N_2 $r \times (n-r)$-es és $(n-r) \times r$-es mátrix, $0 < r < n$.

A.8. tétel. *(Frobenius 2. tétele: 1912, Rózsa, 1974.) Legyen a négyzetes M mátrix nem-negatív és irreducíbilis. Ekkor igazak a következő állítások.*

a) Ha az M mátrix P-ciklikus, akkor pontosan P domináns sajátértéke van: $\rho\varepsilon^{Q-1}$, $Q = 1,\dots,P$, ahol ε a P-edik komplex egységgyök.

b) Ha az M mátrix aciklikus, akkor egyetlen domináns sajátértéke van, amely pozitív. A mátrix valamelyik hatványa pozitív: például $M^n > 0$.

Megjegyzések. 1. Ha $M > 0$, akkor nyilvánvalóan aciklikus, tehát a *b)* pont Perron tételére egyszerűsödik.

2. Az irodalomban általában a fordított utat követik: a domináns sajátértékek számát nevezik P-nek és ebből vezetik le a struktúratételt. Mi Varga (1962) szóhasználatát szemléletesebbnek tartjuk, s ezt követjük.

Következzék a szemléltetés!

A.4. példa. Aciklikus mátrix nulla elemmel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha,\beta > 0, \tag{A.8}$$

aciklikus, hiszen

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1+\alpha\beta & \alpha \\ \beta & \alpha\beta \end{pmatrix} > 0.$$

A.2. feladat. Az A.1. feladat segítségével közvetlenül igazoljuk az A.8. tételt $n = 2$-re!

Az A.7e. tételben láttuk, hogy a nem-negatív elemű (diszkrét időben) stabil mátrixoknak van egy szép tulajdonságuk. Most egy másik tulajdonságukat mutatjuk be, melyet *produktivitás*nak (termelékenységnek) nevezünk: létezik egy $x > 0$ oszlopvektor, amelyre

$$Mx < x. \tag{A.9}$$

A.9. tétel. *Ha egy nem-negatív M mátrix négyzetes és irreducíbilis, akkor a (diszkrét idejű) stabilitás ekvivalens a produktivitással.*

Bizonyítás. Legyen $\rho > 0$ és $s > 0$ az M mátrix domináns sajátértéke és sajátvektora: $Ms = \rho s$. *a)* Ha M stabil, akkor $\rho < 1$, tehát $Ms = \rho s < s$. *b)* Ha M instabil, akkor $\rho \ge 1$, tehát $Ms = \rho s \ge s$. ∎

További fogalmakat vezetünk be. Az M mátrixot *profitábilis*nak (nyereségesnek) nevezzük, ha létezik olyan $p > 0$ sorvektor, amelyre

$$pM < p. \tag{A.10}$$

Szükségünk lesz (A.10) speciális alakjára, amelyet kielégítő mátrixokat $m_{ii} = 1$ esetben *domináns diagonálisú* mátrixoknak neveznek.

$$\mathbf{1}^{\mathbf{T}} M^* < \mathbf{1}^{\mathbf{T}}, \qquad \text{ahol} \qquad \mathbf{1}^{\mathbf{T}} = (1, \ldots, 1). \tag{A.11}$$

Igazolható a

Következmény. *a) A produktivitás ekvivalens a profitábilitással. b) A mértékegységek megfelelő választásával a produktivitás ekvivalens (A.11)-gyel.*

Bizonyítás. *a)* M transzponáltját véve, adódik (A.10). *b)* Az A.9. tétel jelöléseit alkalmazva, legyen az M-hez hasonló $M^* = \langle p \rangle M \langle p \rangle^{-1}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{1}^{\mathbf{T}} M^*$ bal oldali domináns sajátvektora, ρ domináns sajátértékkel. ∎

Most a bemeneti mátrixok egy speciális osztályával foglalkozunk, amely mind a numerikus analízisben, mind a közgazdasági alkalmazásokban fontos (Young, 1971, 2.7. fejezet L-mátrixai, vagy a Metzler-mátrixok (Metzler, 1945) ellentettjei). A B mátrix átlós elemei egységnyiek és az átlón kívüli elemek nem pozitívak:

$$b_{ii} = 1 \qquad \text{és} \qquad b_{ij} \leq 0, \quad i \neq j. \tag{A.12}$$

Bevezetjük a *keresztthatások mátrixá*t:

$$N = I - B \geq 0, \tag{A.13}$$

és kikötjük, hogy N irreducíbilis és a sajáthatások dominálják a keresztthatásokat:

$$-\sum_{i \neq j} b_{i,j} < 1, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{A.14}$$

Most (A.14) azonos (A.11)-gyel. Ezeket a mátrixokat (normálás nélkül is) *M–mátrixok*nak nevezik (Young, 1971, 2.7. alfejezet).

A folytonos idejű rendszerek stabilitását vizsgálva, szükségünk van a következő állításra.

A.10. tétel. *Egy M-mátrix bármely sajátértékének pozitív valós része van.*

A.3. feladat. Tekintsünk egy 2×2-es mátrixot, amelynek esetleg egyes elemei negatívak. Legyen mindkét oszlopösszege ugyanaz a pozitív szám. Mikor igaz, hogy a domináns sajátvektor pozitív?

Vektor- és mátrixnorma

Pontosabb elemzéseknél jó szolgálatot tesz a vektor- és mátrixnorma matematikai fogalma (Rudin, 1976 és Young, 1971). Egy, az $\mathbf{R}^n$ lineáris téren értelmezett nem-negatív értékű függvényt *vektornormá*nak nevezünk (jele: $||.||$), ha teljesülnek a következő feltételek:
(i) $||x|| = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$;
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$: elsőfokú homogenitás;
(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$: háromszög-egyenlőtlenség.

A.5. példa. Ismertebb vektornormák. *a)* A legismertebb norma az euklideszi távolság: $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{(x^{\mathbf{T}}x)}$.
b) Különösen hasznos a következő két (l_1 és l_∞) norma:

$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{és} \qquad ||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|. \tag{A.15}$$

A.4. feladat. Ábrázoljuk az egységgömböt (kört) az l_1, l_2 és l_∞ norma esetén a síkban!

Már említettük, hogy a lineáris terek lineáris transzformációinak (mátrixainak) tere is lineáris tér. Célszerű a transzformáció (mátrix) *ún. indukált normá*ját a lineáris tér normájával összhangban megállapítani. A transzformáció (mátrix)-normája a képvektorok vektornormájának az egységgömbön vett maximuma:

$$||M|| = \max\{||Mx|| : ||x|| = 1\}. \tag{A.16}$$

A linearitás miatt tetszőleges x-re a képvektor normája legfeljebb akkora, mint a mátrixnorma és a tárgyvektornorma szorzata:

$$||Mx|| \leq ||M||\,||x||. \tag{A.17}$$

Könnyen igazolható az

A.10. tétel. *(Vö. Rudin, 1964, 9.7. tétel.) Ha M (és N) lineáris transzformáció, akkor az (A.16)-ban definiált függvény valóban norma, azaz egy vektornorma $\mathbf{R}^{n^2}$-en, és $||MN|| \leq ||M||\,||N||$.* ∎

Megjegyzés. Általában nem könnyű kiszámítani a mátrix normáját. Az világos, hogy az imént megismert spektrálsugár alsó becslést ad az indukált normára: $\rho(M) \leq ||M||$. (Valóban, ha $\lambda x = Mx$, akkor (A.17) és (ii) miatt $|\lambda|\,||x|| = |\lambda|\,||x|| \leq ||M||\,||x||$.)

Az A.5. példa b) pontjában [(A.15)] említett két normánál azonban könnyű dolgunk van, az indukált mátrixnorma rendre

$$||M||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |m_{ij}| \qquad \text{és} \qquad ||M||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |m_{ij}|. \tag{A.18}$$

A.5. feladat. Bizonyítsuk be az (A.18) egyenlőségeket!

Megjegyzés*. A modern matematikában központi szerepet játszik a *teljes normált lineáris tér* (az ún. Banach-tér), azaz egy olyan (általában végtelen dimenziós) tér, melyben *a)* két vektor távolságát a különbségük normája adja és *b)* minden Cauchy-sorozatnak van határértéke: azaz $\lim_{j,k}(x_j - x_k) = 0$-ból következik, hogy van olyan x_∞ vektor, amelyre $\lim_k x_k = x_\infty$. Egyik legfontosabb Banach-tér a kompakt $[a,b]$ intervallum fölötti folytonos skalár–skalár függvények tere, jele: $C[a,b]$, ahol a norma a függvény abszolút értékének a maximuma: $||f|| = \max\{|f(x)|, \quad a \leq x \leq b\}$. Az 5. és a 9. fejezetekben utalunk ezekre az absztrakt terekre.

B. FÜGGELÉK. EGYÜTTÉLŐ NEMZEDÉKEK

Ebben a függelékben két együttélő nemzedék (rövidítése az angol *Overlapping Generations* alapján OLG) kölcsönhatását vizsgáljuk: minden időszakban születik egy új korosztály, és kihal a két időszakkal korábban született korosztály. A mindenkori fiatalok és a mindenkori idősek dinamikus cserekapcsolatban vannak egymással. A B.1. alfejezetben vizsgálandó cseregazdaságban a rendszer paramétereitől függ, hogy az öregek adnak-e terméket a fiataloknak vagy fordítva. Látni fogjuk, hogy időben állandó paraméterű modellünkben az egyszektoros optimális növekedés elméletében megszokott állandósult állapotok mellett megjelennek a ciklusok, sőt a kaotikus dinamika is (Gale, 1973; Benhabib és Day, 1982 és Grandmont, 1985).

A B.2. alfejezetben megjelenik a *tőke* mint a felhalmozás eszköze. A fiatalok dolgoznak és pénzben megtakarítják termelésük egy részét, az öregek pedig felélik korábbi pénzmegtakarításukat. Az optimális növekedéselmélet számos eredménye mind a csere, mind a termelő OLG-gazdaságban érvényes: például egyensúlyban a kamatláb és a bér rendre a tőke és a munka határtermékével egyenlő. Az egyensúly Pareto-optimalitása most azonban csak akkor áll, ha a kamatláb nagyobb, mint a népesség növekedési üteme. A B.3. alfejezetben a társadalombiztosítási rendszerekre alkalmazzuk az alapmodellben nyert eredményeket. Kiderül, hogy a fenti feltétel szabja meg a *tőkefedezeti* és a *felosztó-kiróvó* rendszer viszonyát: az OLG-ben az első rendszer akkor és csak akkor jobb, mint a második, ha a kamatláb nagyobb, mint a népesség növekedési üteme (Aaron, 1966; magyar szakirodalomban Augusztinovics, 1993). A B.4. alfejezetben visszatérünk a cseregazdaságba, s bevezetjük a *pénz*t. Végül a B.5. alfejezetben összefoglaljuk a legfontosabb *tanulságokat.* Ez a fejezet közvetlenül Simonovits (1994b), közvetve Gale (1973) és Blanchard és Fischer (1989, 3–5. fejezet) forráson alapul.

B.1. EGY OLG-CSEREGAZDASÁG

Előkészítés

Modigliani és Brumberg (1954) *életciklus*-modelljét követően Samuelson (1958) viszonylag korán megkísérelte az *együttélő nemzedékek* (OLG) kölcsönhatását modellezni. A kérdéskör azonban csak Diamond (1965) óta vált a matematikai közgazdaság szerves részévé. Ma már a makroökonómiában az OLG szinte elmaradhatatlan. Ezt a térhódítást tükrözi a legtöbb emelt szintű makroökonómiai tankönyv (Blanchard és Fischer, 1989; Azariadis, 1993), amelyben az OLG-modellcsalád főszerepet játszik.

A gazdaság sok, többé-kevésbé egyforma termelőből és fogyasztóból áll, akiket egy-egy reprezentatív termelő és fogyasztó képvisel. Ezért a makroökonómiai folyamatok minden időszakban egy vagy két aktor optimalizálásából vezethetők le.

Minden időszakban az előző időszakban született egyéneknek fejenként ν utóda születik, s minden utód két időszakig él. („Természetesen" ν tetszőleges pozitív szám lehet. A valóságban persze egy családban csak egész értékű lehet az utódok száma, s csak a különböző gyerekszámú családok kombinációjából adódik tört értékű népességnövekedési tényező.)

A különböző modellek eltérnek egymástól abban, hogy adottnak veszik-e a jövedelmeket vagy sem (csere- vagy termelőgazdaság), romlandó-e a termék vagy sem. Ennek megfelelően az együttélő két nemzedék különféle cserekapcsolatban áll egymással.

Gale (1973) nyomán ebben az alfejezetben az OLG-modellcsalád segítségével egy *zárt cseregazdaság*ot vizsgálunk. Nem foglalkozunk a termeléssel, eltekintünk a termelékenység növekedésétől és adottnak vesszük a kereseteket. A t-edik időszakban „született" (munkába lépő) egyén jövedelme fiatal- és öregkorában rendre w_0 és w_1 (időben állandó), fogyasztása rendre $c_{0,t}$ és $c_{1,t+1}$. A kereseteket normálva: $w_0 + w_1 = 1$. A $\{c_{0,t},c_{1,t+1}\}$ fogyasztási pályák együttesét *program*nak nevezzük. Vezessük be a *megtakarítások*at: $s_{i,t} = w_i - c_{i,t}$.

A zárt cseregazdaságban a termékek romlandósága miatt nincs makroszintű megtakarítás. Ezért egy $\{c_{0,t},c_{1,t+1}\}$ programot *megengedett*nek nevezünk, ha az összfogyasztás minden időszakban egyenlő az összkeresettel, azaz, ha

$$\nu s_{0,t} + s_{1,t} = 0. \tag{B.1}$$

A neoklasszikus közgazdaságtanban megszokott módon a fogyasztást egy jól viselkedő (konkáv, nem-csökkenő és általában differenciálható) hasznosságfüggvény maximalizálásából vezetjük le. Az egyszerűség kedvéért legyen a hasznosságfüggvény additív:

$$U(c_{0,t},c_{1,t+1}) = u(c_{0,t}) + v(c_{1,t+1}). \tag{B.2}$$

Gyakran előfordul, különösen több korosztály esetén (például a 6. fejezetben és a C. függelékben), hogy az időszaki (pillanatnyi) hasznosságfüggvények csak egy skalárszorzóban, a *leszámítolási tényező*ben különböznek egymástól. Esetünkben

$$v(c) = \beta u(c), \qquad 0 < \beta \leq 1.$$

A 8. és a 10. fejezetben már találkoztunk a CRRA hasznosságfüggvénnyel. Esetünkben most $u(c) = \sigma^{-1}c^{\sigma}$, $\sigma \neq 0$ vagy speciálisan $u(c) = \log c$ ($\sigma = 0$) *Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény*. Nagyon egyszerű és sok esetben realisztikus a *Leontief-hasznosságfügvény*: $U(c_{0,t},c_{1,t+1}) = \min\{c_{0,t},c_{1,t+1}\}$. Ekkor a feltételes optimumot a $c_{0,t} = c_{1,t+1}$ egyenlőség határozza meg. Természetesen ez a hasznosságfüggvény időben nem additív, de $\sigma \to -\infty$ esetén a CRRA függvény megfelelő transzformáltjának a határesete.

Egyelőre adottnak vesszük a a t-edik időszak r_t *kamattényező*jét (=1+kamatláb). Föltesszük, hogy a megtakarítások és a tartozások a kamattényező szerint kamatoznak, és az életpálya-megtakarítás nulla:

$$r_{t+1}s_{0,t} + s_{1,t+1} = 0. \tag{B.3}$$

Egy programot *versenyzői program*nak nevezünk, ha alkalmas kamatlábpálya mentén minden szereplő optimális életpálya-megtakarítása nulla.

A megengedett versenyzői programokat *egyensúlyi programok*nak nevezzük.

A 10. fejezet folytonos idejű modelljében r kamatlábat jelölt, éves szintű értéke 0 körüli szám volt. Most visszatérünk a 8. fejezethez és r kamattényezőt jelent, éves szintű értéke 1 körüli szám lesz. A 6. fejezettel és a C. függelékkel szemben jelenérték helyett most gyakran egyszerűbb, ha jövőértékkel számolunk.

Lássuk, hogyan működik a modell. (B.3)-ból kifejezzük $s_{1,t+1}$-et és a keresetek hozzáadásával kapott fogyasztáspárt behelyettesítjük (B.2)-be. A belső maximum a következő elsőrendű feltételből határozható meg:

$$u'(c_{0,t}) = r_{t+1}v'(c_{1,t+1}). \tag{B.4}$$

Eztán w_i-k segítségével kifejezzük $s_{0,t}$-t és $s_{1,t+1}$-t mint r_{t+1} függvényét. Legyen $s_{0,t} = s(r_{t+1})$, ekkor $s_{1,t+1} = -r_{t+1}s(r_{t+1})$, ezek a *feltételes megtakarítási függvények*. Gale rövidre zárását alkalmazva, föltesszük, hogy e függvények időben változatanok. Behelyettesítve az $s_{0,t} = s_0(r_{t+1})$ és $s_{1,t}$ függvényeket a (B.1) megengedettségi feltételbe, adódik egy implicit egyenlet:

$$S(r_t,r_{t+1}) = \nu s(r_{t+1}) - r_t s(r_t) = 0. \tag{B.5}$$

Azért, hogy közelebb hozzuk az általános fogalmakat és tételeket, időnként megszakítjuk az okfejtést, és a legegyszerűbb hasznosságfüggvények esetén példákon és feladatokon szemléltetjük az elmondottakat.

B.1. példa. A Cobb–Douglas-esetben a feltételes fogyasztási és megtakarítási függvények

$$c(r) = \frac{w_0 + w_1 r^{-1}}{1+\beta} \qquad \text{és} \qquad s(r) = \frac{w_0\beta - w_1}{1+\beta}.$$

B.1. feladat. Igazoljuk, hogy a Leontief-esetben a feltételes fogyasztási függvények

$$c_0(r) = \frac{rw_0 + w_1}{1+r} = c_1(r)!$$

B.2. feladat. Igazoljuk, hogy a CRRA-hasznosságfüggvények esetén a feltételes fogyasztási és megtakarítási függvény a következők:

$$c_0(r) = \frac{w_0 + w_1 r^{-1}}{1+\Phi r^{-\mu}} \qquad \text{és} \qquad s(r) = \frac{w_0\Phi r^{-\mu} - w_1 r^{-1}}{1+\Phi r^{-\mu}},$$

ahol $\mu = \sigma/(\sigma-1)$, $1-\mu$ az *időszakközti (intertemporális) helyettesítési rugalmasság* és $\Phi = \beta^{1-\mu}$ *a korrigált leszámítolási tényező.*

A feltételes hasznosságfüggvényeket behelyettesítve a (B.1) megengedettségi feltételben, adódik a kamatláb-dinamika. Nem biztos azonban, hogy az implicit differenciaegyenletnek van megoldása, s ha van, akkor egyértelmű az állandósult állapottól távolabbi kezdeti értékekre.

B.2. példa. A Cobb–Douglas-hasznosságfüggvénynél ($\sigma = 0$, azaz $\mu = 0$) a (B.5) feltétel az $r_{t+1} = \nu w_1/(w_1 + \beta w_0 - \nu\beta w_0 r_t)$ differenciaegyenlethez vezet.

Állandósult állapotok

Különleges szerepet játszanak a *stacionárius megtakarítási pályák* másszóval, *állandósult állapotok*, ahol az egymást követő nemzedékek tagjainak megtakarítása pályája azonos, az $_{\mathrm{F}}$ alsó index a *megengedett* jelző angol megfelelőjére (*feasible*) utal:

$$s_{0,t} = s_{0,\mathrm{F}} \qquad \text{és} \qquad s_{1,t+1} = s_{1,\mathrm{F}}.$$

Találkozni fogunk egy speciális állandósult állapottal, ahol nincs csere, jelzője *autark*. A $_B$ alsó index a C. függelékben bevezetendő, általánosabb *kiegyensúlyozott* jelző angol megfelelőjére (*balanced*) utal:

$$s_{0,\mathrm{B}} = 0 \qquad \text{és} \qquad s_{1,\mathrm{B}} = 0.$$

Hamarosan látni fogjuk, hogy az optimális pálya nem feltétlenül stacionárius. Az optimális állandósult állapotot viszont *aranyszabálypályá*nak nevezzük, s angol megfelelőjével megegyezően (*golden rule*) $_{\mathrm{G}}$ alsó indexszel utalunk rá.

Behelyettesítéssel:

$$\text{(B.1}^\circ\text{)} \qquad \nu s_{0,\mathrm{F}} + s_{1,\mathrm{F}} = 0,$$

$$\text{(B.3}^\circ\text{)} \qquad r_{\mathrm{F}} s_{0,\mathrm{F}} + s_{1,\mathrm{F}} = 0$$

Összevonással adódik $(\nu - r_{\mathrm{F}})(c_{0,\mathrm{F}} - w_0) = 0$, azaz korábbi megállapodásunknak megfelelően a

B.1. tétel. *(Gale, 1973, 1. tétel.) Az OLG-cseregazdaságban kétféle állandósult állapot létezik: (i) az aranyszabály vagy (ii) az autarchia:*

$$r_{\mathrm{G}} = \nu \qquad \text{vagy} \qquad s_{0,\mathrm{B}} = 0, \quad r_{\mathrm{B}} = \frac{u'(w_0)}{v'(w_1)}.$$

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy az aranyszabály esetén a (B.3°) költségvetési feltétel egybeesik a (B.1°) megengedettségi feltétellel. Ezért optimális az aranyszabály! Bevezetjük a következő megkülönböztetést. Egy OLG-cseregazdaság aranyszabályát attól függően *adós*nak vagy *hitelező*nek vagy *szimmetrikus*nak nevezzük, hogy az aranyszabálynál a fiatalok túlköltekeznek vagy megtakarítanak vagy éppen egyensúlyban vannak:

$$s_{0,\mathrm{G}} < 0, \quad s_{0,\mathrm{G}} > 0, \quad s_{0,\mathrm{G}} = 0.$$

2.Az OLG irodalomban eléggé háttérbe szorul a termelékenység a népességhez képest, holott a valóságban az igazi növekedést az előző jelenti. Ebben és a következő függelékben mi is követjük e szokást, egy pillanatra azonban bekapcsoljuk a termelékenységet is vizsgálatunkba. Föltesszük, hogy mindkét kereset minden időszakban η tényezővel szorzódik. Mivel hasznosságfüggvényünk *homotetikus*, az optimális fogyasztási pálya is hasonlóan változik. Tehát az egyéni költségvetési korlát, (B.3°) általánosítható: $r_{\mathrm{F}} s_{0,\mathrm{F}} + \eta s_{1,\mathrm{F}} = 0$, ahonnan $(\eta\nu - r_{\mathrm{F}})s_{0,\mathrm{F}} = 0$. Más szóval az aranykori kamattényező a termeléknységi és a népességi növekedési tényező szorzata: $r_{\mathrm{G}} = \eta\nu$.

Visszatérve az állandó termelékenység világába, a következő megkülönböztetést tesszük. Gale (1973) klasszikus, samuelsoni és egybeeső modellről beszél, a magyar nyelvű irodalom korábban a *fiatalos*, az *érett* és a *szimmetrikus* jelzőt alkalmazta, azonban előnyben részesítjük Augusztinovics (1992) szemléletesebb elnevezéspárját. A továbbiakban a rövidség kedvéért gyakran eltekintünk a szimmetrikus esettől.

B.3. példa. Diszkontált Cobb–Douglas-hasznosságfüggvénynél az aranyszabály

$$c_{0,\mathrm{G}} = \frac{w_0 + w_1\nu^{-1}}{1+\beta}, \quad c_{1,\mathrm{G}} = \frac{\beta + (1-\nu^{-1})}{1+\beta}$$

és az autark kamattényező

$$r_\mathrm{B} = \frac{w_1}{\beta w_0}.$$

Az aranyszabály milyensége (hitelező vagy adós) az autark kamattényező és a népesedési tényező viszonyától függ.

B.2. tétel. *(Gale, 1973, 2. tétel.) Az OLG-cseregazdaság aranyszabálya akkor és csak akkor adós (hitelező), ha az autark kamattényező nagyobb (kisebb), mint a népesedésnövekedési tényező:*

$$r_\mathrm{B} > \nu \qquad (\text{vagy} \qquad r_\mathrm{B} < \nu). \tag{B.6}$$

Bizonyítás. Mivel $r_\mathrm{B} \neq \nu$, c_G nem elégíti ki (B.3°)-t, többe kerül annál: $r_\mathrm{B}s_{0,\mathrm{G}} + s_{1,\mathrm{G}} < 0$. (B.1°)-et kivonva, adódik $(r_\mathrm{B} - \nu)s_{0,\mathrm{G}} < 0$, amely a definíciókkal együtt (B.6)-ot adja. ∎

B.4. példa. Cobb–Douglas-illusztráció. A B.2. tétel igazsága könnyen látható a B.1. példa és a B.1. tétel segítségével. Valóban, $c_0(\nu) = (w_0 + w_1\nu^{-1})/(1+\beta) > w_0$ és $r_\mathrm{B} = w_1/(\beta w_0) > \nu$ ekvivalens.

Végül megfogalmazható a

B.3. tétel. *(Gale, 1973, 3. tétel.) Az OLG-cseregazdaságban az autark állapot akkor és csak akkor Pareto-optimális, ha az aranyszabály adós.*

Bizonyítás. *a)* Ha az aranyszabály hitelező, akkor $c_{0,\mathrm{G}} > w_0$. Ezért a $\{w_0,w_1\}$ program javítható, mert áttérhetünk a $\{c_\mathrm{G}\}$ programra.

b) Ha a modell adós, akkor tekintsünk egy olyan $\{c_{0,t},c_{1,t+1}\}$ programot, amely legalább olyan jó, mint $\{w\}$. Ekkor a B.2. tétel bizonyításában alkalmazott elv szerint $r_\mathrm{B}s_{0,t} + s_{1,t+1} < 0$. Behelyettesítve a (B.1) feltételt $(t+1)$-re, rendezéssel adódik, hogy $r_\mathrm{B}s_{0,t} < 0$. Ismételve $t = 0,1,2,\ldots,(T-1)$-re adódik $r_\mathrm{B}^T s_{0,0} < s_{0,T} \leq w_0$. (B.10) szerint $r_\mathrm{B} > 1$, és $s_{0,0} > 0$, azaz $T \to \infty$-nél ellentmondást kapunk. ∎

Emlékeztetünk arra, hogy a hagyományos általános egyensúlyelméletben (Arrow és Debreu, 1954) az egyensúly általában Pareto-optimális. Itt viszont azt látjuk, hogy az egyensúly nem mindig Pareto-optimális. A legkézenfekvőbb magyarázat az, hogy most végtelen sok termék és végtelen sok fogyasztó szerepel, s ez okozza a galibát. Mélyebbre tekintve azonban az igazi bonyodalom abból ered, hogy bizonyos piacok hiányoznak: például csak az együttélő nemzedékek kereskedhetnek egymással.

Lokális elemzés

Rátérünk a nem (feltétlenül) stacionárius egyensúlyi programok elemzésére.

B.4. tétel. *(Gale, 1973, 4. tétel.) Az adós OLG-cseregazdaságban az autarchia lokálisan instabil, a hitelezőben az autarchia lokálisan stabil.*

Bizonyítás. Linearizáljuk (B.3)-at az autarch állandósult állapot körül. Figyelembe véve, hogy ott mindkét megtakarítás nulla, adódik

$$s_{0,t+1} = \nu^{-1} r_{\mathrm{B}} s_{0,t}. \tag{B.7}$$

A 3.3. tétel skalár változatából következik a (lokális) stabilitás feltétele, hogy $r_{\mathrm{B}} < \nu$, azaz B.2. tétel szerint az aranyszabály hitelező. ∎

Megjegyzés. Gale (1973) a 4. tételben *bizonyítás nélkül* kimondja, hogy az aranyszabálynál éppen fordított a helyzet: adós gazdaságban az aranyszabály stabil, hitelezőben instabil. Ez a vélekedés azonban nem mindig igaz!

A következő feladat a B.1. ábra alapján egy speciális esetben egyszerű bizonyítást ad a vélekedésre.

B.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha az $r_{t+1} = \phi(r_t)$ függvény növekvő és szigorúan konvex (mint például a Cobb–Douglas-függvénynél), akkor a vélekedés igaz!

A 4. tétel megfelelőjének megtalálásához bevezetjük a következő feltevéseket és jelöléseket: A fiatalok feltételes megtakarítási függvénye $s(r)$, $r = \nu$-ben $\varepsilon = -s(\nu)/s'(\nu)$.

B.5. tétel. *Az aranyszabály állandósult állapot akkor és csak akkor lokálisan stabil, ha*

$$0 < \varepsilon < 2\nu. \tag{B.8}$$

Bizonyítás. $S(\nu,\nu) = 0$. Alkalmazva az implicit függvény tételét,

$$\frac{dr_{t+1}}{dr_t} = \frac{-\partial S/\partial r_t}{\partial S/\partial r_{t+1}} = \frac{s(\nu) + \nu s'(\nu)}{\nu s'(\nu)} = 1 - \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

∎

A könyvben több helyen foglalkoztunk a racionális várakozás alternatívájával, a naiv várakozással. Most is ezt tesszük, r_{t+1}-gyel helyettesítve r_t-t (B.4)-ben.

B.4. feladat. Gale (1974)-et követve, tegyük föl, hogy a fogyasztónak nem racionális, hanem naiv várakozásai vannak. Igazoljuk, hogy *a)* a fiatal feltételes optimuma változatlan, *b)* a módosult differenciaegyenlet $S(r_t,r_{t+1}) = \nu s(r_{t+1}) - r_{t+1} s(r_t) = 0$. *c)* A kiegyensúlyozott állapotnál a stabilitási feltétel változatlan, de az aranyszabálynál vagy $-\infty < \varepsilon < -2\nu$ vagy $0 < \varepsilon < \infty$.

Összevetve a B.4.c feladatot a (B.8) képlettel, látható, hogy Gale vélekedése általában nem igaz. A racionális várakozások stabilitása implikálja a naivét, de fordítva nem. A C.4. alfejezetben visszatérünk e kérdéshez.

Felvetődik a kérdés: összhangban vannak-e a paraméterek az optimalizálással? Ha egyetlen egy típusú fogyasztóra és a (B.2)-beli additív hasznosságfüggvényre szorítkozunk, akkor az érdekes esetben $\varepsilon > 0$, vagyis a negatív értékeket kizárhatjuk a stabilitási feltétel szempontjából. Ha azonban több fajta fogyasztónk van, vagy a hasznosságfüggvény nem additív, akkor valószínűleg minden lehetséges.

B.5. feladat. A B.2. feladatra támaszkodva igazoljuk, hogy CRRA hasznosságfüggvényre *a)* Gale vélekedése igaz, és *b)* a két várakozás egyszerre stabil.

A következőkben éppen a Gale által bevezetett kvadratikus hasznosságfüggvény módosításításával cáfoljuk meg a vélekedést.

Ekkor hasznát vesszük egy másik útnak. Kifejezve r_{t+1}-t (B.3)-ból és behelyettesítve (B.4)-be, adódik, hogy

$$s_{0,t}u'(c_{0,t}) + s_{1,t+1}v'(c_{1,t+1}) = 0. \tag{B.9}$$

A (B.9) implicit egyenlet leírja (nem feltétlenül egyértelműen) a fiatalok egymást követő optimális megtakarításokat. A (B.1) feltétellel kifejezhető az idősek megtakarítása is.

Globális elemzés

Már említettük, hogy ellentétben az egyszektoros növekedéselmélettel, az OLG-cseremodellben nem biztos, hogy az egyensúlyi pálya stacionárius. Sőt, az is előfordulhat, hogy ciklikus és bonyolultabb dinamikájú, ún. kaotikus pályák jelennek meg (vö. 3.3. alfejezet). Az irodalomban szokásos, általános érvényű, bonyolult fejtegetés (például Grandmont, 1985, vagy akár a B.4. alfejezet) helyett egyelőre megelégszünk a legegyszerűbb példákon való szemléltetéssel.

B.5. példa. Általános kvadratikus hasznosságfüggvény (vö. Gale, 1973, 3. példa). Legyen $u(c_0) = 2ac_0 - bc_0^2$, ahol a és b pozitív számok és $v(c_1) = 2c_1 - c_1^2$, ahol $0 \le c_0 \le b/a$, $0 \le c_1 \le 2$, $w_0 = 0$ és $w_1 = 1$. Nincs növekedés: $\nu = 1$.

(B.9)-be behelyettesítve u'-t és v'-t, rendezéssel

$$c_{0,t+1} = \sqrt{ac_{0,t} - bc_{0,t}^2}. \tag{B.10}$$

Ha a v függvény paramétereit nem így specifikáltuk volna, akkor a négyzetgyökvonás előtt egy olyan másodfokú egyenletet kaptunk volna, amelyben első fokú tag is lett volna. (B.10) egy nem-lineáris, elsőrendű skalár differenciaegyenlet. Figyelemre méltó, hogy a káoszelméletben alapvető szerepet játszó logisztikus függvény (3.3. példa) négyzetgyökével állunk szemben. Ismert, hogy a logisztikus függvényre vonatkozó eredmények megfelelő változtatásokkal minden egycsúcsú és sima függvényre átvihetők, azaz (B.10)-re is.

A rendszernek két állandósult állapota van: a triviális autark pálya ($c_{0,\mathrm{B}} = 0$ és $c_{1,\mathrm{B}} = 1$) és egy aranyszabály pálya ($c_{0,\mathrm{G}} = a/(1+b)$ és $c_{1,\mathrm{G}} = 1 - c_{0,\mathrm{G}}$).

A dinamikus rendszernek gyakran vannak azonban ciklikus pályái is, melyek véges időszak után visszatérnek induló állapotukba. A hosszabb periódusú ciklusokat elég nehéz megtalálni. Szerencsére a 3.6. példában és a 4.3. alfejezetben alkalmazott módszer most még egyszerűbben alkalmazható, mert a cseregazdaságban bizonyos esetekben egy 2-ciklus is létezik. Próbálkozzunk az $x_1 = c_{0,2k-1}$ és $x_2 = c_{1,2k}$ megoldással! Ekkor négyzetreemeléssel (B.10) a következő alakot ölti:

$$x_2^2 = ax_1 - bx_1^2 \qquad \text{és} \qquad x_1^2 = ax_2 - bx_2^2.$$

Behelyettesítve az első egyenletet a másodikba és négyzetre emelve a kapott egyenletet, egy negyedfokú algebrai egyenletet kapunk x_2-re. Mivel az állandósult állapotok is kielégítik a 2-ciklus egyenletét, leoszthatunk x_2-vel és $[x_2 - a/(1+b)]$-vel. Egy másodfokú egyenletet kapunk, melynek gyökei $x_{1,2} = a(1 \pm \sqrt{1 - 4/(1+b)})/[2(b-1)]$. (Szimmetria miatt x_2 „két” változata x_1 és x_2.) A kísérlet sikerült, a 2-ciklus a következő:

$$c_{0,2k-1} = x_1; \quad c_{1,2k-1} = 1 - x_1 \qquad \text{és} \qquad c_{1,2k} = x_2; \quad c_{1,2k} = 1 - x_2.$$

Eddig tulajdonképpen Gale példáját általánosítottuk $a = 5$-ről és $b = 4$-ről. Gale nem tért ki arra, hogy stabil-e a példájában szereplő optimális ciklus. (Nem volt stabil!) Egyelőre csak az állandósult állapot stabilitását vizsgáljuk. Az $x_{t+1} = \phi(x_t) = \sqrt{ax_t - bx_t^2}$ iterációnál az állandósult állapot stabilitásának szükséges és elégséges feltétele, hogy a derivált abszolút értéke kisebb legyen, mint 1 (3.3. tétel $n = 1$-re). $f'(x) = 0{,}5(a - 2bx)(ax - bx^2)^{-1/2}$, amely $x = 0$-ra ∞. $x = a/(1+b)$-ra $|f'(x)|$ lehet kisebb is és nagyobb is 1-nél, azaz a nem-triviális stacionárius pálya lehet stabil is és instabil is.

B.6. példa. A B.5. példa egyszerű általánosítása: legyen $w_1 = 1 - w_0$. Most a kamattényezőkkel számolunk.
A fiatalok feltételes fogyasztási és megtakarítási függvénye

$$c_0(r) = \frac{a - w_0 r + w_0 r^2}{b + r^2} \qquad \text{és} \qquad s(r) = \frac{bw_0 - a + w_0 r}{b + r^2}.$$

A (B.5)-be való behelyettesítéssel egy másodfokú egyenletet kapunk r_{t+1}^2-re, amelynek lehet, hogy nincs is pozitív megoldása, vagy ha van, akkor előfordulhat, hogy kettő is van.

A két állandósult állapot körüli lokális stabilitás általános feltételét már korábban vizsgáltuk. Most az olvasóra bízzuk a részletszámításokat, itt megelégszünk a következő számpéldával: $a = 4{,}8$; $b = 6$, $w_0 = 0{,}4$ ($r_{\mathrm{B}} = 6$), melyet a B.2. ábrán mutatunk be $r_0^1 = 1{,}04$ és $r_0^2 = 5{,}96$ kezdeti állapottal. (Olyan kezdőállapotokat választottunk, hogy viszonylag hamar beálljon a 2-ciklus.) Figyeljük meg, hogy mindkét állandósult állapot instabil, s kialakul egy 2-határciklus. Ez egyszerre cáfolja Gale vélekedését és teszi stabillá a ciklikus példát (B.2. ábra).

A káoszelmélet fegyvertárával fölszerelkezve, sorozatban gyárhatjuk a stabil ciklusokat. Egy pársoros BASIC program segítségével (a 3.6. feladat módosításával) olyan bifurkációs diagramot (B.3. ábra) készíthetünk, amely $b = a$ mellett a-k széles sávjában megvilágítja a rendszer stabil működését. A vízszintes tengelyen az $a \in [2{,}7; 4]$ szakaszt ábrázoljuk, 0,01-es lépésközzel; a függőlegesen pedig x_t értékét $t = 100$ és 200 között, $x_0 = 0{,}6$ kezdőállapot mellett. Látható, hogy a növelésekor először stabil állandósult állapotok, majd stabil 2-ciklus, 4-ciklus, végül egy „kaotikus” rendszer alakul ki. (Az eredeti logisztikus egyenlethez tartozó 3.6. bifurkációs diagrammal összevetve, látjuk, hogy a négyzetgyökvonás minőségileg nem változtat a bifurkáció természetén.)

B.6. feladat. Igazoljuk, hogy a (B.6) differenciaegyenlet a Leontief-hasznosságfüggvénynél (azaz $\mu = 1$), $w_0 \neq w_1$ esetben $r_{t+1} = 1/r_t$ egyszerűsődik! Figyeljük meg, hogy minden induló állapotból 2-ciklust kapunk!

B.7. feladat. (Aiyagari, 1989, 167. o. 4. lábjegyzet) *a)* Keressük meg a B.3. feladat aranyszabály 2-ciklusát, ahol $r_{t+1} = 1/r_t$! *b)* Źrjuk explicite föl a megoldást $\mu = 2/3$ esetén! Ellentétben a B.6. feladattal, most r_t lényegében egyértelmű.

B.2. TERMELŐ OLG-GAZDASÁG

Miután áttekintettük a cseregazdaságról szóló legfontosabb tételeket, rátérünk a termelő gazdaság vizsgálatára. Blanchard és Fischer (1989) 3.1. alfejezete alapján először a decentralizált egyensúlyt tanulmányozzuk, amelyet összehasonlítunk a centralizált egyensúllyal is. A fogyasztási oldal változatlan, a kereseteket azonban most a termelésből magyarázzuk. Föltesszük, hogy a fiatalok dolgoznak és megtakarítanak, az öregek pedig nyugdíjban vannak és felélik megtakarításaikat. Azaz az aranyszabály hitelező, és $w_{0,t} = w_t$ és $w_{1,t} = 0$. Érdemes lesz a fogyasztói oldalt az új jelölésekkel fölírni.

Decentralizált egyensúly

A piaci gazdaság azonos fogyasztókból és vállalatokból áll. Legyen r_t a t-edik időszak kamattényezője (=1+kamatláb). Egy t-edik időszakban született fogyasztó mérlegegyenletei a következők:

$$c_{0,t} + s_t = w_t \qquad \text{és} \qquad c_{1,t+1} = r_{t+1}s_t. \tag{B.11}$$

Az egyszerűség kedvéért most ismét föltesszük, hogy az egyes időszakok hasznosságfüggvényei csak a leszámítolás miatt különböznek egymástól:

$$U(c_{0,t},c_{1,t+1}) = u(c_{0,t}) + \beta u(c_{1,t+1}), \qquad \text{ahol} \qquad 0 \leq \beta \leq 1, \tag{B.2$'$}$$

Az optimumfeltétel most

$$u'(c_{0,t}) = r_{t+1}\beta u'(c_{1,t+1}). \tag{B.4$'$}$$

A (B.4′) feltételből adódik az optimális fogyasztás.

A t-edik időszak megtakarítása $s_t = w_t - c_{0,t}$. Helyettesítéssel levezethető a *megtakarítási függvény*: $s_t = s(w_t,r_{t+1})$, ahol $0 \leq s_w \leq 1$, s_w az s függvény w szerinti parciális deriváltja.

Tegyük föl, hogy a hagyományos termelési függvény elsőfokú homogén lineáris, a szokásos konkavitási feltételekkel. Legyen k az egy főre eső tőke és $f(k)$ az egy főre eső termelési függvény, $f'' < 0 < f'$. Elhanyagoljuk a technikai haladást, s föltesszük, hogy egy időszak alatt a tőke megsemmisül. A vállalatok viselkedését, nevezetesen $w(k_t)$ bért és $r(k_{t+1})$ kamattényezőt, a szokásos profitmaximalizálási feltétel határozza meg:

$$f(k_t) - k_t f'(k_t) = w_t, \tag{B.12}$$

$$f'(k_t) = r_t - 1. \tag{B.13}$$

Mivel a növekvő népességre eső tőke a nettó megtakarításból származik, az árupiaci egyensúly feltétele

$$k_{t+1} = \frac{s(w_t, r_{t+1})}{\nu}. \tag{B.14}$$

Ha nem tételeznénk föl, hogy a tőke egy időszak alatt megsemmisül, akkor $\nu k_{t+1} = (1-\delta)k_t + s_t$ egyenlettel dolgoznánk, ahol δ az egy időszakra eső tőkekopás. E furcsa feltevés ($\delta = 1$) vélhetőleg a képletek egyszerűsítését szolgálja.

Most már fölírhatjuk a modell dinamikáját:

$$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t), r(k_{t+1})]}{\nu},$$

azaz

$$k_{t+1} = \frac{s[f(k_t) - k_t\{f'(k_t)+1\}, f'(k_{t+1})+1]}{\nu}.$$

Az implicit függvény tétele szerint k_{t+1} a k_t függvényeként kifejezhető: $k_{t+1} = \phi(k_t)$. Az említett tétel szerint

$$\frac{dk_{t+1}}{dk_t} = \frac{-s_w(k_t)k_t f''(k_t)}{\nu - s_r(k_t)f''(k_t)}, \tag{B.15}$$

ahol s_r az s függvény r szerinti parciális deriváltja. $f'' < 0$ miatt a számláló pozitív. Ha $s_r \geq 0$, akkor a nevező is pozitív, azaz $dk_{t+1}/dk_t > 0$, ϕ növekvő. *Állandósult állapot*ról) beszélünk, ha $k_{t+1} = k_t = \cdots = k^{\mathrm{o}}$. Ekkor $c_{t+1} = c_t = \cdots = c^{\mathrm{o}}$.

Az elmondottakat foglalja össze a

B.5. tétel. *A termelő gazdaság OLG-modelljének dinamikáját a (B.15) egyenlet határozza meg. Az OLG-modellben létezhet egy, több vagy nulla állandósult állapot.*

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy egyetlen állandósult állapot létezik. A stabilitás még ilyenkor is bonyolult kérdés. Ismét szemléltetjük az elmondottakat.

B.8. feladat. Legyen $f(k) = Ak^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $w_t = A(1-\alpha)k_t^\alpha$ és $r_t - 1 = A\alpha k_t^{\alpha-1}$, valamint

$$k_{t+1} = \frac{\beta A(1-\alpha)}{(1+\beta)\nu} k_t^\alpha = \kappa k_t^\alpha,$$

azaz az állandósult állapot $k^{\mathrm{o}} = \kappa^{1/(1-\alpha)}$!

Centralizált optimum

Az általános egyensúlyelmélet alapgondolata szerint mégha el is vonatkoztatunk az érdekeltségi és információs problémáktól, a centralizált gazdaság sem képes jobb teljesítményre, mint a decentralizált gazdaság. Nézzük meg, hogy áll a kérdés esetünkben! Mielőtt rátérnénk a centralizált optimum kérdésére, érintjük az optimális növekedés irodalmából ismert (8. fejezet) és az előző alfejezetben már a cseregazdaság esetére taglalt aranyszabályt. Állandósult állapotban $c = f(k) - (\nu - 1)k$, ezért

$$0 = \frac{dc}{dk} = f'(k) - \nu + 1. \tag{B.16}$$

A 8.2. alfejezetben már láttuk, hogy az állandósult fogyasztás akkor maximális, ha $r^{\mathrm{o}} - 1 = f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu - 1$: a kamatláb azonos a népesség növekedési ütemével. Hasonlóan, $dc/dk > 0$, ha $f'(k) > \nu - 1$, azaz telítettség esetén tőkekivonással növelhető a fogyasztás.

Hogyan fest a centralizált optimum T egymást követő, de csak páronként együttélő nemzedék esetén? Legyen V egy társadalmi jóléti függvény:

$$V = \beta u(c_{1,0}) + \sum_{t=0}^{T-1} \rho^{-t-1} U(c_{0,t}, c_{1,t+1})$$

ahol ρ a társadalmi leszámítolási együttható. Ha a tervező kevésbé törődik a jövővel, mint a jelennel, akkor $\rho > 1$. Ha egyformán törődik minden nemzedékkel, akkor $\rho = 1$. Végül ha figyelembe veszi a nemzedékek méretét is, akkor $\rho = 1/\nu$. Az új, nemzedékek közti mérlegegyenlet

$$k_t + f(k_t) = \nu k_{t+1} + c_{0,t} + \nu^{-1} c_{1,t}.$$

Kiejtve $c_{0,t}$-ket, adódik a centralizált optimum elsőrendű feltétele:

$$\text{(B.17)} \qquad c_{1,t}: \quad \beta u'(c_{1,t}) - \rho^{-1}\nu^{-1}u'(c_{0,t}) = 0,$$

$$\text{(B.18)} \qquad k_t: \quad -\nu u'(c_{0,t-1}) + \rho^{-1}[1 + f'(k_t)]u'(c_{0,t}) = 0.$$

Kombinálva a két egyenletet:

$$\text{(B.19)} \qquad u'(c_{0,t-1}) = [1 + f'(k_t)]\beta u'(c_{1,t}).$$

Összehasonlítva a centralizált optimum (B.19) következményét a decentralizált optimum (B.4$'$) feltételével, adódik a jól ismert összefüggés, ti. a decentralizált és a centralizált optimum azonos, ha a kamatláb minden időszakban egyenlő a tőke határhozadékával: (B.13)

Vizsgáljuk meg az optimális állandósult állapotot, ahol c^{o} és k^{o} a megfelelő értékek. Behelyettesítve (B.17)–(B.18)-ba:

$$\text{(B.17}^{\mathrm{o}}\text{)} \qquad u(c_1^{\mathrm{o}}) = (r^{\mathrm{o}})^{-1}\nu^{-1}u'(c_0^{\mathrm{o}}),$$

$$\text{(B.18}^{\mathrm{o}}\text{)} \qquad 1 + f'(k^{\mathrm{o}}) = \nu r^{\mathrm{o}}.$$

(B.18$^{\mathrm{o}}$) és (B.13) együtt adja a következő megállapítást.

B.6. tétel. *(Módosított aranyszabály.) A centralizált OLG-optimumban a kamattényező egyenlő a népességnövekedési tényező és a leszámítolási tényező szorzatával:*

$$r^{\mathrm{o}} = \nu\rho.$$

Mielőtt megemlítenénk a következő tételünket, vegyük a következő helyzetet. Tegyük föl, hogy az A és B város elég távol fekszik egymástól és elég közel egy jó gyorsforgalmi úthoz. Az A-ból a B-be leggyorsabban úgy juthatunk el, ha minél hamarabb ráhajtunk a gyorsforgalmi útra és minél tovább maradunk rajta. (Magyar példával élve: Székesfehérvárról mehetnénk közvetlenül a 70-es úton Siófokra, de érdemes minél előbb rétérni az M7-re és minél később letérni róla.) Előkészítésünk után már kimondható a

B.7. tétel. *(Gyorsforgalmi út.) Adott k_0 kezdeti és k_T végállapot, valamint elegendő hosszú T időhorizont mellett az OLG-beni optimális $\{k_t\}$ pálya az idő nagy részében az állandósult k^o állapot közelében halad.*

Dinamikus inefficiencia

Figyelemre méltó, hogy bizonyos esetekben az OLG-modellben lehetséges a *dinamikus inefficiencia*, azaz legalább egy nemzedék jóléte növelhető úgy, hogy a többié nem csökken (vö. a B.3. tétel). Legyen $c_t = c_{0,t} + \nu^{-1} c_{1,t}$ az egy gyerekre és a rájutó félszülőre jutó fogyasztás, és c^o az állandósult állapotbeli érték. Ezzel visszavezettük a kérdést a (B.16)-ban említett klasszikus feladatra és beláttuk a cseregazdaságra vonatkozó B.3. tétel termelőgazdaságra vonatkozó megfelelőjét.

B.8. tétel. *Dinamikus inefficiencia. A termelő OLG-gazdaság állandósult fogyasztása növelhető tőkekivonással, ha az állandósult állapotbeli tőke nagyobb, mint az aranyszabály érték: $k > k_G$.*

A gyakorlatban nem szabad megfeledkezni a termelékenységnövekedésről sem. Jelenleg még nyitott kérdés, hogy a valóságban lehetséges-e ilyesfajta túlfelhalmozás.

B.3. NYUGDÍJRENDSZEREK ÉS TŐKEFELHALMOZÁS

Ebben az alfejezetben a társadalombiztosítási (röviden tb) kérdéseket tanulmányozzuk a termelő OLG-modell segítségével. Egyébként az OLG-nek ez az egyik leggyakoribb alkalmazása. Most Blanchard és Fischer (1989) 3.2. alfejezete szolgál az ismertetés alapjául. Szükségünk lesz a (B.4′) optimumfeltétel új alakjára, melyet a megtakarítás behelyettesítésével nyerünk:

$$u'(w_t - s_t) = r_{t+1}\beta u'(r_{t+1}s_t). \tag{B.20}$$

Eddigi jelöléseink mellé vezessük be a következőket: a_t és p_t egy fiatal személy tb-hozzájárulása, illetve egy idős személy nyugdíja a t-edik időszakban. A fejezet bevezetésében már említettük, hogy kétféle tb-rendszer létezik: (i) *tőkefedezeti* és (ii) *felosztó-kiróvó*. Angol nevük rövidítéseként a CR (*capital reserve*) és a PAYG (*pay as you go*) jelölés használatos. Az első rendszerben a fiatalok előre takarékoskodnak öregkorukra: $p_t = r_t a_{t-1}$, a másodikban az állam az öregek mindenkori nyugdíját a fiatalok megadóztatásából fedezi: $p_t = \nu a_t$. A CR-rendszer optimalitási feltételei a következők:

$$u'(w_t - s_t - a_t) = r_{t+1}\beta u'[r_{t+1}(s_t + a_t)], \tag{B.21}$$

$$s_t + a_t = \nu k_{t+1}. \tag{B.22}$$

(B.21)–(B.22)-t összevetve (B.20)–(B.14)-gyel, adódik a

B.9. tétel. *Ha a tb-hozzájárulás nem haladja meg a tb-nélküli rendszer megtakarításait ($a_t \le \nu k_{t+1}$), akkor a CR-rendszer bevezetésénél k_t változatlan marad, ezért ez a nyugdíj nincs hatással az OLG-beli teljes tőkefelhalmozásra.*

A PAYG-rendszer optimalitási feltételei a következők:

$$u'(w_t - s_t - a_t) = r_{t+1}\beta u'[r_{t+1}s_t + \nu a_t], \qquad \text{(B.23)}$$
$$s_t = \nu k_{t+1}.$$

Az egyén szempontjából a tb-megtakarítások hozama $r_t - 1$ helyett $\nu - 1$. *Csupasz modellünkben a PAYG akkor és csak akkor előnyösebb, mint a CR, ha a népesség növekedési tényezője nagyobb a reálkamat-tényezőnél (Aaron-elv).* További kérdés: hogyan hat a PAYG bevezetése a megtakarításokra? Válasz: kedvezőtlenül. Tegyük föl, hogy $a_t = a_{t+1}$ és differenciáljuk (B.23)-at:

$$\frac{ds_t}{da_t} = \frac{u_1 + \nu u_2''}{u_1 + r u_2''},$$

ahol u_1 és u_2 az u függvénynek a (B.23) egyenlet bal, illetve jobb oldalán szereplő helyen vett értéke. A megtakarítás tehát mindenképpen csökken. Az, hogy a relatív csökkenés, $|ds_t/da_t|$ kisebb-e, mint 1, attól függ, hogy $\nu < r$ teljesül-e. Hasonlóan igazolható a

B.10. tétel. *A PAYG bevezetése lassítja az OLG-beli tőkefelhalmozást, és csökkenti az állandósult tőkeállományt. Ha $r > \nu$, akkor a PAYG bevezetése kedvez az első nemzedéknek, a többi kárára. Ha azonban $r < \nu$, akkor mindenki nyer, mert csökken (esetleg megszűnik) a dinamikus inefficiencia. Ha $r = \nu$, akkor a PAYG ekvivalens a CR-rel, így bevezetése közömbös.*

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a PAYG-rendszer tárgyalásánál mindvégig föltettük, hogy minden nemzedék hajlandó az előző nemzedék tb-költségeit fedezni. Szó szerint véve ehhez (megszámlálhatóan) végtelen sok nemzedékre van szükség, ugyanis, ha lenne egy utolsó nemzedék, annak nem lenne érdeke fizetni az utolsó előtti nemzedék költségeit, stb, azaz a lánc megszakadna. Természetesen itt önző egyéneket feltételeztünk. s eltekintettünk a családon belüli kétirányú támogatásoktól. A kérdést részletesen tárgyalja Blanchard és Fischer (1989) 3. fejezete.

B.7. példa. A kolozsvári Caritas tevékenysége is a népesség végességén bukott meg 1994. közepén: negyedév alatt a pénz megnyolcszorozását ígérte, amely még az akkori évi 300 (negyedévi kb. 40)% infláció mellett – azonos nagyságú betétekkel számolva –, a résztvevők számának negyedévenkénti majdnem meghatodszorozódását igényelte: $8 = 1{,}4 \cdot 5{,}7$. Az 1997. elején dicstelenül véget érő albán pilótajáték egy egész nemzet gazdasági és társadalmi rendjét ásta alá.

Ez a gondolatmenet hasonlít ahhoz a matematikai paradoxonhoz, melyet a végtelen szobaszámú, teltházas szállodáról szoktak elmondani. Minden szoba egyágyas, minden szobában van vendég. Megérkezik egy új vendég, azt elszállásolják az 1. szobában, annak korábbi lakóját átküldik a 2. szobába stb. Ebben az értelemben egy ilyen szálloda sohasincs tele.

B.4. PÉNZ MINT CSEREESZKÖZ EGY OLG-MODELLBEN

Eddig nem modelleztük a nemzedékek közti csere pénzoldalát. Most Blanchard és Fischer (1989) 4.1. alfejezete alapján pótoljuk ezt a hiányt. Előre bocsátjuk, hogy nem foglalkozunk a pénz számos funkciójával (például csereeszköz), megelégszünk az értékálló pénz kincsképző szerepének vizsgálatával.

A nyugdíjrendszer OLG-beli elemzésénél láttuk, hogy egy növekvő népességű és termelékenységű gazdaságban, ha a fiatalok folyamatosan átadják javaik egy részét a náluk kisebb számú és szegényebb öregeknek, akkor mindenki jól jár. Ha viszont nincs egy társadalmilag szavatolt nyugdíjrendszer, akkor minden nemzedéknek be kell érnie saját javaival. Hacsak nem találjuk föl a pénzt! (Samuelson 1958-as cikkének címében is szerepel a monetizált és a monetizálatlan gazdaság szembeállítása).

Most eltekintünk a népesség növekedéstől: $\nu = 1$. Legyen M az időben változatlan pénzmennyiség, P_t a t-edik időszakbeli ár és a B.1. ponthoz visszatérve w_i, $i = 0{,}1$ az i-edik nemzedék jövedelme. Vezessük be a fiatalkori túlkínálatot és az öregkori túlkeresletet:

$$m_t = \frac{M}{P_t} = w_0 - c_{0,t} \qquad \text{és} \qquad z_t = \frac{M}{P_{t+1}} = c_{1,t} - w_1.$$

Ismét u-val és v-vel jelölve a fiatal, illetve időskori hasznosságfüggvényt, és $r_t = P_t/P_{t+1}$-gyel a megtérülési arányt, az optimum elsőrendű feltétele [(B.4′)] a következő:

$$u'(w_0 - m_t) - r_t v'(w_1 + m_t r_t) = 0.$$

A B.8. tétel újrafogalmazásaként adódik a

B.11. tétel. *Ha az OLG-gazdaság dinamikusan inefficiens* ($r < n$), *akkor a pénz bevezetése mindenkinek használ.*

Ciklusok és káosz az OLG monetáris modelljében

Egy speciális példát mérlegelve a B.1. alfejezetben már foglalkoztunk ciklusokkal és káosszal. A pénz bevezetése után most visszatérünk e kérdéskörre. Blanchard és Fischer (1989, 5.4. alfejezet) nyomán folytatjuk az elemzést. A $(c_{0,t},c_{1,t+1})$-sík mellett az (m_t,z_t)-síkban vizsgáljuk az optimális elosztást, s az azt képviselő *ajánlati görbét*.

A B.4. és a B.5. ábra (Blanchard és Fischer, 1989, 5.8. és 5.9. ábra) mutatja az áttérés előtti és utáni helyzetet.

Mivel $z_t/m_t = r_{t+1}$, az ajánlati görbét az origóval összekötő pont meredeksége r_{t+1}. Deriváljuk az optimumfeltételt, és fejezzük ki a dm_t/dr_{t+1} differenciálhányadost:

$$\frac{dm_t}{dr_{t+1}} = -\frac{r_{t+1}m_t v'' + v'}{u'' + r_{t+1}^2 v''}.$$

Felhasználva a $z_t = m_t r_{t+1}$ összefüggést, adódik

$$\frac{dz_t}{dr_{t+1}} = \frac{m_t u'' - v' r_{t+1}}{u'' + r_{t+1}^2 v''}.$$

Mivel $dz_t/dr_{t+1} > 0$, az ajánlati görbe akkor és csak akkor visszahajló, ha $dm_t/dr_{t+1} > 0$. Bevezetve a v hasznosságfüggvény relatív kockázatkerülési együtthatóját, $\zeta(c_{1,t+1})$-et, dm_t/dr_{t+1} számlálója a következő alakot ölti:

$$\left[\frac{z_t}{c_{1,t+1}}\zeta - 1\right]v'.$$

Mivel $z_t \leq c_{1,t+1}$, ζ-nak nagyobbnak kell lennie, mint 1. Ha $w_1 = 0$, akkor e feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is.

Egyensúlyban $z_t = m_{t+1}$, azaz az ajánlati görbe $m_t \to m_{t+1}$ dinamikát ad. A monetáris egyensúly létezésének feltétele $m_t = m_{t+1} > 0$. Esetünkben $u'(w_0) < v'(w_1)$, azaz a B.1. alfejezet szerint az autark kamattényező kisebb, mint 1 (hitelező aranyszabály).

A stabilitás feltétele $|dm_{t+1}/dm_t| < 1$, ahol $dz_t/dr_t = (dz_t/dr_t)/(dm_t/dr_t)$ és $r = 1$ szerint

$$\frac{dm_{t+1}}{dm_t} = \frac{v' - mu''}{m_t u'' + v'}.$$

A B.6. és a B.7. ábrán (Blanchard és Fischer, 1989, 5.10. és 5.11. ábra) látható a pókhálómodellből ismert fázisdiagram: az egyik instabil, a másik stabil monetáris egyensúly melletti igazodást mutat. Belátható, hogy a monotonitás hiánya miatt az $m_t \to m_{t+1}$ dinamika nem mindig egyértelmű (határozatlanság).

Geometriai meggondolásokból következik – B.8. ábra (Blanchard és Fischer, 1989, 5.12. ábra) –, hogy az egyensúly stabilitása esetén egy 2-ciklus is létezik. Grandmont (1985) észrevette, hogy a határozatlanság feloldásához meg kell fordítani a dinamikát: $m_{t+1} \to m_t$.

Megfelelően nagy ζ esetén a fordított leképezést adó φ-nek 3-ciklusa is van – B.9. ábra (Blanchard és Fischer, 1989, 5.11. ábra) –, Sárkovszkij tétele (3.7a. tétel) szerint tehát minden $P > 1$ természetes számra P-ciklusa is van. Nyilvánvalóan e ciklusok az eredeti irányban is ciklusok. A ciklusok stabilitása külön kérdés.

B.12. tétel. *(Grandmont, 1985.) Megfelelő feltételek mellett az OLG-gazdaságban időben visszafelé legfeljebb egy stabil ciklus létezik, azaz az előrehaladó időben legfeljebb egy instabil ciklus létezik. Tanulásnál a rendszer éppen ide tart. A káosz létezése bonyolultabb, de megfelelő feltételek mellett az is igazolható.*

Sokan kifogásolják, hogy a ciklusok létezéséhez túlságosan erős kvantitatív feltevésekre van szükség. Éppen ezért figyelemre méltó, hogy ha elejtjük a homotetikus hasznosságfüggvényeket, akkor enyhe elégséges feltételt kapunk:

B.13. tétel. *(Balasko és Ghiglino, 1995, 1. állítás.) Ha az egyenlő áraknál vett Engel-görbének van legalább egy pontja, ahol a görbe meredeksége kisebb, mint 1, akkor létezik a síkban a kereset-pároknak egy olyan nyílt halmaza, hogy a hozzátartozó OLG-cseregazdaságokban van 2-ciklus.*

B.5. TANULSÁGOK

A B. függelék végére érve célszerűnek látszik a tanulságok összefoglalása.

Az OLG- (együttélő nemzedékek) modellcsalád sikerrel magyarázza meg a dinamikus gazdaság olyan jelenségeit, amelyek az apák és fiúk (anyák és lányok) egymásra utaltságával kapcsolatosak. Az egyszektoros optimális növekedéselmélet egyes tételei (például az aranyszabály) érvényesek maradnak, mások (például a stabilitás) érvényüket vesztik. A megőrzött aranyszabály következményeként adódik, hogy a PAYG-nyugdíjrendszer mikor jobb a CR-rendszernél. Újdonság viszont, hogy a OLG-ben nem minden pálya stabil; ciklusokkal és kaotikus pályákkal is találkozhatunk. Az OLG-cseregazdaságban elméleti tisztaságukban tanulmányozhatók egyes jelenségek (adós vs. hitelező aranyszabály; ciklus és káosz). Az OLG-termelőgazdaságban pedig mind a tőkefelhalmozás, mind a kamatláb endogén. Ugyanakkor az OLG-modellcsaládban nagyon megszorító az a feltevés, hogy minden időszakban csak két korosztály-nemzedék (dolgozóké és nyugdíjasoké) él együtt. Emiatt az elemzési alapidőszak hossza eleve nagyon hosszú, mondjuk 30 év, az ezen belüli mozgások nem is értelmezhetőek. Csak felsorolunk néhány irreális következményt. 1. A munkában és a nyugdíjban töltött időszak egyforma hosszú. 2. Nem nőnek a szolgálati idővel a keresetek. 3. A legrövidebb (két időszakos) ciklus periódushossza 60 év (Sims, 1986)! Sajnos, az OLG-modellek hívei gyakran elfeledkeznek modellcsaládjuk megszorító feltevéseiről, és túlzott magabiztossággal vonnak le gyakorlati következtetéseket e modell segítségével.

A következő függelékben bemutatjuk, hogy az OLG-t bizonyos vonatkozásban általánosító OLC- (együttélő korosztályok) modellcsaládban hogyan módosulnak egyes feltevések és nyomukban egyes tételek.

C. FÜGGELÉK.* AZ EGYÜTTÉLŐ KOROSZTÁLYOK (társszerző: Molnár György)

A B. függelékben két együttélő nemzedék modellcsaládját vizsgáltuk, most *tetszőleges számú korosztály együttélését* tanulmányozzuk, ahol a korosztályokat az általuk fogyasztott termék(ek) romlandósága együttműködésre ítéli. A C.1. alfejezetben e gazdaság tetszőleges egyensúlyi kamattényező-sorozatát és a hozzátartozó optimális fogyasztási pályáját elemezzük. A C.2. alfejezetben stacionárius pályák, más néven: *állandósult állapot*ok létezésével és egyértelműségével foglalkozunk. A C.3. alfejezetben röviden összefoglaljuk a racionális várakozások melletti *endogén ciklusok*ra vonatkozó eredményeket. A C.4. és C.5. alfejezetben rendre a *racionális és a naiv várakozások* melletti általános (nem-stacionárius, nem-ciklikus) pályákat tanulmányozzuk. Végül a C.6. alfejezetben röviden szólunk a tb-rendszerről. Ez a függelék elsősorban Molnár és Simonovits (1996) cikken alapul, de figyelembe vettük az előzményeket is: Simonovits (1995a), (1995b), (1995d) és (1999a). A B. és a C. függelék megvilágítja az aggregált és a dezaggregált modell közti különbséget.

C.1. EGY OLC-CSEREGAZDASÁG

Együttélő korosztályok

Anélkül, hogy szőrszálhasogató lennék, fel kell hívnom a figyelmet egy terminológiai csúsztatásra: a tanulmányok többsége összemossa a nemzedék és a korosztály fogalmát. Például Balasko et al. (1980) tetszőleges számú együttélő nemzedékről beszél, márpedig köznapi értelemben csak két-három-négy nemzedék élhet együtt. (Igaz, az angolban a *generation* jelenthet korosztályt is, bár a kifejezés fő jelentése ott is a nemzedék!) További problémát jelent, hogy a legtöbb tanulmány ún. kétnemzedékes modellt vizsgál (nincsenek gyerekek), s eltekint a nemzedéken belüli különbségektől (homogén nemzedék). A helyes megoldás nyilvánvalóan az, hogy annyi korosztályra (ideálisan évjáratra) osztjuk föl a népességet, amennyit az elemzés indokol. Erre klasszikus példát nyújt folytonos időben Yaari (1965), Tobin (1967), Arthur és McNicoll (1978), Elbers és Weddepohl (1986), Peters (1988); diszkrét időben Ando és Modigliani (1963) (röviden, AM), Aaron (1966), Gale (1973), Auerbach és Kotlikoff (1987), Augusztinovics (1989) és (1992). Saját és társszerzős írásaimra a bevezetésben már utaltam. Ekkor *együttélő korosztályok*ról beszélünk, s az angol megfelelő rövidítéseként az OLC betűhármast (Overlapping Cohorts) javasolom. További zavar forrása, hogy Balasko et al. (1980)

nevezetes tétele szerint minden többkorosztályos modell kétkorosztályosra redukálható, vagyis elegendőnek tűnhet az OLG vizsgálata. Csakhogy a tétel alkalmazói gyakran elfelejtik, hogy a redukálásnál a fogyasztási cikkek halmaza megfelelően kibővül és a fogyasztók száma nő (erre figyelmeztet Kehoe és Levine (1984, 91. o.) és Reichlin (1992)).

Már utaltunk a B.5. alfejezetben arra, hogy a kétnemzedékes (valójában kétkorosztályos) OLG-feltevés közel sem olyan ártalmatlan, mint ahogy alkalmazóik gondolják.

Az *együttélő korosztályok* kutatói általában hangsúlyozzák az állandó ütemű termelékenység-növekedést és a halálozási kockázatot. Igaz, ezekért az általánosításokért cserébe gyakran lemondanak a termelés leírásáról és az általános hasznosságfüggvények alkalmazásáról. Ekkor a kamatláb kívülről van meghatározva.

További megszorítás, hogy állandó szerkezetű pályákat (más szóval: *állandósult állapotok*at) vizsgálnak. Mi igyekszünk a kamattényezőket a modellből meghatározni, s az időben állandó szerkezetű pályák mellett ciklikus és egyéb pályákat is vizsgálunk. Technikai egyszerűsítés, hogy lemondunk a növekedés (lásd B. függelék) és a halálozási kockázat ((8.1. és 10.1. alfejezet) szerepeltetéséről.

A t-edik időszakban a népesség három nemzedékből áll: gyerekekből, dolgozókból és nyugdíjasokból. Mindegyik nemzedék több korosztályból állhat: L gyerekkorosztály ($i = 0,1,2,\ldots,L-1$), $M-L+1$ dolgozó korosztály ($i = L,\ldots,M$), és $D-M$ nyugdíjas korosztály ($i = M+1,\ldots,D$), összesen $D+1$ korosztály. Ha a hagyományos keretek között maradunk, és nem akarjuk a gyerekeket önálló fogyasztóként modellezni, akkor legyen $L = 0$. A t-edik időszakban egységnyi „csecsemő" születik (hagyományosan: kezdő munkás áll munkába), és mindegyik megéri a $(t+D)$-edik időszak végét. A teljes népesség létszáma $D+1$.

Miután definiáltuk a népességi viszonyokat, a gazdasági összefüggéseket tisztázzuk. Jól ismert, hogy a korosztályi keresetek jelentősen változnak az életkorral. Legyen w_i az i-edik korosztály átlagkeresete tetszőleges t-edik időszakban. Kényelmi okokból a gyerekeknek és a nyugdíjasoknak néha *zéró* keresetet tulajdonítunk: $w_i = 0$, $i = 0,\ldots,L-1$ és $M+1,\ldots,D$. A képletek egyszerűsítése érdekében a következő *normalizálás*sal élünk: $\sum_{i=0}^{D} w_i = 1$. Jelölje rendre $c_{i,t}$ és $s_{i,t} = w_i - c_{i,t}$ a t-edik időszak i-edik korosztálya egy tagjának átlagos fogyasztását és megtakarítását.

Azt az egyszerűsítő feltevést alkalmazzuk, hogy létezik egy tökéletes évjáradékpiac, amelyen minden ember eladhatja egy biztosítónak várható keresetáramát, és ennek fejében egy várható fogyasztási pályát vásárolhat. Élete során mindenkinek van vagyona, amely időnként lehet pozitív, negatív vagy nulla. Ezt a vagyont a már említett biztosító kezeli, amely minden időszakban kamatot fizet vagy számít fel, egy $\{r_t\}$ kamattényező-sorozatnak a $(t,t+i]$ időszakra *halmozott értéke* szerint:

$$R_{t,t+i} = r_{t+1}\cdots r_{t+i}, \qquad (R_{t,t} = 1). \tag{C.1}$$

Mivel egy csecsemő a valóságban nem vehet föl kölcsönt, föltesszük, hogy egészen addig a szülei kezelik az adósságát, amíg nagykorú nem lesz. Szükségünk lesz az i-edik korú fogyasztó t-edik időszak végi *megtakarítási állományá*ra:

$$a_{i,t} = r_t a_{i-1,t-1} + w_i - c_{i,t}, \qquad a_{-1,t} = 0; \tag{C.2}$$

avagy zárt alakban:

$$(C.3) \qquad a_{i,t} = \sum_{j=0}^{i} R_{t-i+j,t}\ s_{j,t-i+j}.$$

Tekintsük a t-edik időszakban született korosztályt. Az $\{s_{i,t+i}\}_{i=0}^{D}$ megtakarítási pálya *nulla örökség*et hagy, ha $a_{D,t+D} = 0$. Másképp:

$$(C.4) \qquad \sum_{i=0}^{D} R_{t,t+i}^{-1}\ s_{i,t+i} = 0.$$

Legyen S_t a társadalom teljes megtakarítása a t-edik időszakban:

$$S_t = \sum_{i=0}^{D} s_{i,t}.$$

Az $\{s_{i,t}\}_{i=0}^{D}$ megtakarítási profil *megengedett*, ha a társadalom összmegtakarítása nulla:

$$(C.5) \qquad S_t = 0.$$

Mindig feltesszük, hogy (C.4) és (C.5) teljesül. Vegyük észre, hogy stacionárius nulla kamatlábak ($r_t \equiv 1$) és stacionárius megtakarítási pályák ($s_{i,t} = s_{i,0}$) esetén a (C.4) hosszmetszeti feltétel ekvivalens a (C.5) keresztmetszeti feltétellel.

Legyen a népesség teljes megtakarítási állománya A_t:

$$A_t = \sum_{j=0}^{D} a_{j,t}.$$

(C.5) és $a_{D,t+D} = 0$ folytán $A_t = r_t A_{t-1}$.

Várakozások

A várakozások most is kulcsszerepet játszanak az elemzésben. A 4.6. alfejezetben bevezetett jelölést használva, legyen ${}_t r_\tau$ a t-edik időszaki előrejelzés a $\tau(> t)$ időszak kamattényezőjére vonatkozóan. A következő várakozási típusokkal foglalkozunk.

Racionális várakozások

Minden várt kamattényező megegyezik a *megfelelő* időszak modellbeli tényleges értékével:

$$(C.6) \qquad {}_t r_{t+i} = r_{t+i}; \qquad i = 1, \ldots, D.$$

Naiv várakozások
Minden várt kamattényező megegyezik a *jelenlegi* tényleges értékkel:

(C.7) $$_t r_{t+i} = r_t; \qquad i = 1,\dots,D.$$

Vegyes várakozások
A közös tárgyalás kedvéért bevezetünk egy általánosabb várakozási sémát, az *vegyes várakozások*ét. Legyen d egy egész szám: $0 \le d \le D$.

A vegyes várakozásokat a következő tulajdonságok határozzák meg.

(i) A közeljövő $r_{t+1},\dots,r_{t+d}$ kamattényezőire vonatkozó vérakozások pontosak:

$$_t r_{t+i} = r_{t+i}, \qquad i = 1,\dots,d.$$

(ii) A távoli $r_{t+d+1},\dots,r_{t+D}$ kamattényezők várt értékei a jelen és a közeljövő kamattényezőitől függnek:

(C.8) $$_t r_{t+i} = h_i(r_t,\dots,r_{t+d}), \qquad h_i : \mathbf{R}^{d+1} \to \mathbf{R}, \qquad i = d+1,\dots,D.$$

(iii) A (C.8) várakozási séma *konzisztens* a következő értelemben:

(C.9) $$r = h_i(r,\dots,r); \qquad i = d+1,\dots,D, \qquad r > 0.$$

Megjegyzések. 1. A legegyszerűbb választás h_i-re

$$_t r_{t+i} = r_{t+d}, \quad i = d+1,\dots,D.$$

2. A vegyes várakozások fogalma valóban általánosítja a racionális és a naiv várakozásokat, hiszen a $d = D$ és a $d = 0$ esetben – az 1. megjegyzés mellett – rendre (C.6) és (C.7) adódik. Ilyenkor D-várakozásokról és 0-várakozásokról beszélhetnénk. Egyébként naiv várakozásunk tartalmazza a racionalitás némi elemét, mivel a közvetlen előrejelzés pontos. E feltevés nélkül nem tudnánk biztosítani, hogy az összmegtakarítás nulla legyen.

3. Igazi tanulási függvényeknél (vö. Grandmont (1985, 3. pont) és Grandmont és Laroque (1990)) (C.8) nem függhet az $r_{t+1},\dots,r_{t+D}$ jövőbeli értékektől: $d = 0$, viszont annál inkább függ a múltbeli értéktől, azaz

(C.8*) $$_t r_{t+i} = h_i(r_{t-b},\dots,r_t), \qquad i = 1,\dots,D.$$

Mi nem foglalkozunk ezzel az esettel.

A t-edik időszakban az i korú fogyasztó a következő *várható költségvetési feltétellel* találkozik:

(C.10) $$r_t a_{i-1,t-1} + \sum_{j=0}^{D-i} {}_t R^{-1}_{t,t+j}\ {}_t s_{i+j,t+j} = 0.$$

Figyelembe véve feltevéseinket,

$$_t R_{t,t+j} = R_{t,t+j}, \quad (j \le d); \quad {}_t R_{t,t+j} = R_{t,t+d}\ {}_t R_{t+d,t+j}, \quad (j > d).$$

A tervezett korspecifikus fogyasztás a legfrissebb megtakarítási állománytól ($a_{i-1,t-1}$) és a várható kamattényezőktől (${}_t r_\tau$ függ):

(C.11) $$_t c_{i,t} = c_i(a_{i-1,t-1}, r_t,\dots, {}_t r_{t+D-i}),$$

ahol (C.10) teljesül.

Dinamika

Bevezetjük az $a_t = (a_{0,t},\dots,a_{D-1,t})^{\mathbf{T}}$, ${}_t r = (r_t,\dots,{}_t r_{t+d-1})^{\mathbf{T}}$ és $x_t = (a_t, {}_t r)^{\mathbf{T}}$ jelöléseket. (Ha $d = 0$, akkor az üres ${}_t r$ változót nem szerepeltetjük.) Megfelelő feltevések mellett az r_{t+d} paraméter függvényében (C.8) meghatározza az új ${}_t r_{d+1},\dots,{}_t r_D$ előrejelzéseket, (C.11) eldönti az új fogyasztási becsléseket, és végül (C.5) megadja az új kamattényezőt: r_{t+d}.

Egyenleteink egy $(D + d)$-dimenziós $x_t = f(x_{t-1})$ differenciaegyenlet-rendszert definiálnak. Az algoritmust a következőképpen képzelhetjük el. Minden időszakban a fogyasztók meghatározzák időszerű optimális fogyasztásukat, melyet közölnek a walrasi kikiáltóval, aki összegzi e mennyiségeket és iterációval kiszámítja a d időszakkal későbbi egyensúlyi kamattényezőt.

A rendszer a $t = 0$ időszakban kezdi meg működését és az $x_{-1} = (a_{-1}; {}_{-1} r)$ vektor a rendszer *kezdeti feltétele*.

Nyilvánvaló, hogy az időben állandó megoldások (állandósult állapotok) komoly szerepet játszanak a dinamikus rendszerek elemzésében. Egy $(D + d)$-dimenziós x_{F} vektort *állandósult állapot*nak nevezünk, ha a definiáló leképezésnél egy helyben marad: $x_{\mathrm{F}} = f(x_{\mathrm{F}})$. A rövidség kedvéért gyakran a_{F} vagy r_{F} állandósult állapotról fogunk beszélni. Értelemszerűen használjuk az A_{F} jelölést is.

Gale (1973, II. rész) nyomán néhány észrevételt teszünk. Állandósult állapotban $A_{\mathrm{F}} = r_{\mathrm{F}} A_{\mathrm{F}}$, s ez a következő osztályozást sugallja. Ha r_{F} különbözik 1-től, akkor *kiegyensúlyozott* (vagy másképp: *nem-monetáris*) állapotról beszélünk, melynek jele: r_{B} és $A_{\mathrm{B}} = 0$. Ha $r_{\mathrm{F}} = 1$, akkor *aranyszabály* állapotról beszélünk, melynek jele: r_{G} és A_{G}. (Rövidség kedvéért az *állandósult* jelzőt ilyenkor néha elhagyjuk.) Ekkor három alosztályt vezetünk be, *adós* (klasszikus): $A_{\mathrm{G}} < 0$, *hitelező* (Samuelson): $A_{\mathrm{G}} > 0$ (vagy másképp: *monetáris*) és *szimmetrikus* (egybeeső): $A_{\mathrm{G}} = 0$. (Igazolható, hogy ez a definícióegyüttes összhangban van a B. függelék megfelelő helyeivel.)

Mindenekelőtt ismertetünk egy elemi megfigyelést, amelyet Samuelson (1958) és Gale (1973, 28–29. o.) tett az OLG-modellekre és a racionális várakozásokra szorítkozva:

C.1. tétel. *Vegyes várakozások. a) Ha egy aranyszabály állapot stabil, akkor az $A_{-1} \le 0$ és az $A_{-1} \ge 0$ egyenlőtlenségeket kielégítő kezdeti feltételek instabil pályát származtatnak $A_{\mathrm{G}} > 0$, illetve $A_{\mathrm{G}} < 0$ esetén. b) Ha egy kiegyensúlyozott állapot aszimptotikusan stabil, akkor $r_{\mathrm{B}} \le 1$.*

Megjegyzés. Látható, hogy a globális stabilitás ki van zárva, ezért a továbbiakban mindig *lokális* stabilitást vizsgálunk.

Bizonyítás. Mérlegeljük az $A_t = r_t A_{t-1} = \dots = R_{-1,t} A_{-1}$ összefüggést!

a) $A_{-1} \le 0$ miatt $A_t \le 0$, tehát a pálya nem tarthat $A_{\mathrm{G}} > 0$-hoz. Hasonló a másik eset igazolása.

b) Ha r_{B} stabil és a tétellel ellentétben $r_{\mathrm{B}} > 1$, akkor van olyan pozitív állandó, α, amelyre $R_{-1,t} > \alpha r_{\mathrm{B}}^{t+1}$, azaz 0-tól különböző A_{-1} esetén $|A_t| > \alpha r_{\mathrm{B}}^{t+1} |A_{-1}|$, azaz $\{A_t\}$ divergens, ellentmondás. ∎

Megjegyzés. Vélhetően az $r_{\mathrm{B}} = 1$ esetben legfeljebb féloldali stabilitásról van szó.

Optimalizálás

A *reprezentatív fogyasztó* fogyasztási pályáját úgy vezetjük le, hogy egy hasznosságfüggvényt maximalizálunk egy megfelelő költségvetési korlát mellett. Kiindulásként bevezetjük az 1-nél nem nagyobb *leszámítolási tényezőt* (vö. B. függelék) és az időben-korban változatlan $u(c)$ *időszaki hasznosságfüggvényt*. (A B. függelékben csupán két együttélő korosztályt mérlegeltünk, ott megtehettük, hogy a két időszaki hasznosságfüggvény tetszőleges legyen. Tetszőleges számú együttélő korosztályt vizsgálva, szinte elkerülhetetlen a fenti feltevés.) Additív célfüggvénnyel dolgozunk.
Teljes hasznosságfüggvény

$$\text{(C.12)} \qquad U(c_0,\ldots,c_D) = \sum_{i=0}^{D} \beta^i u(c_i), \qquad 0 < \beta \le 1.$$

Most a 10. fejezetben bevezetett folytonos idejű CRRA-hasznosságfüggvények diszkrét megfelelőire szorítkozunk. Legyen σ egy valós szám, $-\infty < 1-\sigma$ a *relatív kockázatkerülési együttható.*
Időszaki hasznosságfüggvények

$$\text{(C.13)} \qquad u(c) = \sigma^{-1} c^{\sigma}, \qquad \text{ha} \qquad \sigma \neq 0.$$

Emlékeztetünk arra, hogy (C.13)-ban azért kell σ^{-1}-gyel beszorozni c^{σ}-t, hogy az u időszaki hasznosság a c fogyasztás növekvő függvénye legyen $\sigma < 0$ esetén is.

(C.13)-at behelyettesítve (C.12)-be, adódik a
CRRA-hasznosságfüggvény

$$\text{(C.14)} \qquad U(c_0,\ldots,c_D) = \sigma^{-1} \sum_{i=0}^{D} \beta^i c_i^{\sigma}, \qquad \text{ha} \qquad \sigma \neq 0.$$

Most vezetjük be a két speciális hasznosságfüggvényt:
Cobb–Douglas-hasznosságfüggvény

$$U(c_0,\ldots,c_D) = \sum_{i=0}^{D} \beta^i \log c_i;$$

Leontief-hasznosságfüggvény

$$U(c_0,\ldots,c_D) = \min_{0 \le i \le D} c_i.$$

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy e két függvény a (C.14)-beli U függvénnyel ekvivalens $\left(\sigma U / \sum_{i=0}^{D} \beta^i\right)^{1/\sigma}$ függvénynek vagy annak növekvő függvényének megfelelő határértéke $\sigma = 0$ vagy $-\infty$ esetén. Míg a Cobb–Douglas-hasznosságfüggvényt számos kutató alkalmazta, a Leontief-hasznosságfüggvényt csupán AM (IV. feltevés) és Augusztinovics (1992) mérlegelte. Szükségünk lesz σ következő transzformáltjára: $\mu = \sigma/(\sigma - 1)$, ahol $1-\mu$ az *időszakközti (intertemporális) helyettesítési rugalmasság.*

A mikroökonómiából jól ismert, hogy gyökeresen másképp viselkednek a *gyengén* ($\sigma > 0$, azaz $\mu < 0$) és az *erősen kockázatkerülő* fogyasztók ($\sigma \le 0$, azaz $\mu \ge 0$). Az első esetben egy időszaki nulla fogyasztásnál a hasznosság véges, a másodikban minusz végtelen. Ez a választóvonal általános hasznosságfüggvénynél is létezik és definíciónak is alkalmas (lásd: 10. fejezet, Cass (1965) és Koopmans (1965)). Logika és tapasztalat szerint a fogyasztók *erősen kockázatkerülő*k, de ez esetenként nem akadályozza meg a legkiválóbb elméket sem, hogy ellentétes feltevésben keressenek menedéket, ha egy tételt kell megmenteniük: lásd a későbbi C.5. tételt.

Versenyzői fogyasztási pálya

*Feltételesen optimális pályá*nak azt a fogyasztási pályát nevezzük, mely maximalizálja a (C.12) hasznosságfüggvény értékét adott kamattényezők és a (C.10) költségvetési korlát mellett.

Rátérünk a dinamika vizsgálatára. Szükségünk lesz a következő fogalmakra.
A hátralévő életpálya hasznosságfüggvénye

$$U_i({}_tc_{i,t},\ldots,{}_tc_{D,t-i+D}) = \sigma^{-1}\sum_{i=0}^{D-i}\beta^j\ {}_tc^{\sigma}_{i+j,t+j}. \tag{C.15}$$

A hátralévő életkereset várható jelenértéke

$$W_{i,t} = \sum_{i=0}^{D-i} w_{i+j}\ {}_tR^{-1}_{t,t+j}. \tag{C.16}$$

A korrigált leszámítolás várható jelenértéke

$$V_{i,t} = \sum_{i=0}^{D-i}\Phi^j\ {}_tR^{-\mu}_{t,t+j}, \qquad \textit{ahol} \qquad \Phi = \beta^{1-\mu}. \tag{C.17}$$

C.2. tétel. *Vegyes várakozások. CRRA-hasznosságfüggvény esetén a t-ben született i korú egyén (általában nem-megengedett) feltételes optimális fogyasztása*

$$c_{i,t} = \frac{r_t a_{i-1,t-1} + W_{i,t}}{V_{i,t}}. \tag{C.18}$$

Bizonyítás. Vegyük az i korú fogyasztó csonkított hasznosságfüggvényének és költségvetési korlátjának a Lagrange-függvényét a ζ_i szorzóval:

$$L_i({}_tc_{i,t},\ldots,\ {}_tc_{D,t+D-i}) =$$
$$\sigma^{-1}\sum_{j=0}^{D-i}\beta^j\ {}_tc^{\sigma}_{i+j,t+j} + \zeta_i\Big(r_t a_{i-1,t-1} + \sum_{j=0}^{D-i}(w_{i+j} -\ {}_tc_{i+j,t+j})\ {}_tR^{-1}_{t,t+j}\Big).$$

Tegyük L_i ${}_tc_{i+j,t+j}$ szerinti parciális deriváltját nullává:

$${}_tc^{\sigma-1}_{i+j,t+j} = \zeta_i\beta^{-j}\ {}_tR^{-1}_{t,t+j}.$$

Figyelembe véve, hogy $\sigma = -\mu/(1-\mu)$, $1-\sigma = 1/(1-\mu)$, $1/(1-\sigma) = 1-\mu$,

$$ {}_tc_{i+j,t+j} = \Phi^j \zeta_i^{\mu-1}\ {}_tR_{t,t+j}^{1-\mu} $$

adódik.

Visszahelyettesítve e kifejezést (C.10)-be, adódik a Lagrange-szorzó hatványának az értéke:

$$ \zeta_i^{\mu-1} = \frac{r_t a_{i-1,t-1} + \sum_{j=0}^{D-i} w_{i+j} R_{t,t+j}^{-1}}{\sum_{j=0}^{D-i} \Phi^j\ {}_tR_{t,t+j}^{-\mu}}. $$

Felhasználva a (C.16)–(C.17) jelöléseket, következik

$$ {}_tc_{i+j,t+j} = \Phi^j\ {}_tR_{t,t+j}^{1-\mu} \frac{r_t a_{i-1,t-1} + W_{i,t}}{V_{i,t}}. \tag{C.19} $$

$j = 0$-nál (C.19) (C.18)-ra egyszerűsődik. ∎

Megjegyzés. Már a Bevezetésben hangsúlyoztuk, mennyire megszorító lehet a reprezentatív fogyasztó feltevése (Kirman, 1992). Most röviden vázoljuk, hogy minden fogyasztó esetében azonos hasznosságfüggvényt feltételezve, tetszőleges számú fogyasztót tudunk egyszerűen aggregálni. Valóban, legyen $w_i(k)$ a k-adik típusú fogyasztó keresete az i-edik korban, és g_k e típus súlya a népességen belül, $k = 1, \ldots, K$: $\sum_{k=1}^K g_k = 1$. Legyen $w_i = \sum_{k=1}^K g_k w_i(k)$ a reprezentatív fogyasztó keresete az i korában. $V_{i,t}(k)$ független k-tól, ekkor (C.16) és (C.18) értelmében a reprezentatív fogyasztó optimális fogyasztása megegyezik a heterogén fogyasztók átlagos optimális fogyasztásával. Ha nem minden fogyasztónak azonos a hasznosságfüggvénye, akkor a fenti aggregálás lehetetlen, de egyes közgazdászok szerint ez az eset közel sem olyan fontos, mint az előző.

A feltételes optimum meghatározása után a megengedettségi feltételt vizsgáljuk. Behelyettesítve (C.18)-at S_t definíciójába és (C.5)-be, adódik

$$ S_t = 1 - \sum_{i=0}^{D} \frac{r_t a_{i-1,t-1} + W_{i,t}}{V_{i,t}}, \tag{C.20} $$

$$ \sum_{i=0}^{D} \frac{r_t a_{i-1,t-1} + W_{i,t}}{V_{i,t}} = 1. \tag{C.21} $$

Kimondható a

C.3. tétel. *Vegyes várakozások. CRRA-hasznosságfüggvény esetén a $(t+d)$-edik időszak versenyzői kamattényezőjét (feltéve, hogy létezik) a t-edik időszakra vonatkozó (C.21) implicit differenciaegyenlet határozza meg.*

Megjegyzések. 1. Nyilvánvaló, hogy nem minden megtakarítási állomány vektor határoz meg pozitív kamattényezőt. De bármely állandósult állapot környezetében a 0-tól különböző $\dfrac{\partial S}{\partial r_{t+d}}$ mellett az implicit függvény tétele szavatolja a megoldás létezését és unicitását. Látni fogjuk azonban, hogy még az állandósult állapotban is globálisan több kamattényező is létezhet. Mi egyszerűen az állandósult állapothoz legközelebb eső kamattényezővel fogunk dolgozni.

2. Nyilvánvaló, hogy különböző kezdeti feltételek különböző állandósult állapotokhoz vezethetnek. Figyeljük meg, hogy az állandósult állapotok függetlenek a várakozásoktól, azaz a két várakozásnál az állandósult állapotok azonosak. A ciklusok viszont már függnek a várakozási sémától.

Egyszerűsített racionális várakozások

Egyelőre föltesszük, hogy a fogyasztók már születésükkor tökéletesen ismerik a számukra releváns kamattényező-sorozatot. Ez a feltevés a jelenleg uralkodó *racionális várakozás hipotézis* determinisztikus megfelelője. Sokkorosztályos modellünkben még furcsább e feltevés, mint a kétkorosztályos ősmodellben, de hogy beilleszkedjünk a közgazdaságtan főáramába, most mégis ezzel élünk. A C.5. alfejezetben ismét elkerülhetetlenné válik a változó horizont szerinti optimalizálás vizsgálata, most és a következő két alfejezetben még rövidre zárjuk a feladatot. Tegyük föl, hogy a rendszer nem a 0-ban, hanem a $-\infty$-ben kezdett optimálisan működni. Ekkor igaz a

C.4. tétel. *Egyszerűsített racionális várakozások. CRRA-hasznosságfüggvény esetén a t-ben j korú egyén (általában nem-megengedett) fogyasztása*

$$ {}_tc_{j,t} = \Phi^j R_{t-j,t}^{1-\mu} H_{t-j}, \tag{C.22}$$

ahol

$$ H_t = \frac{W_{t,0}}{V_{t,0}}. \tag{C.23}$$

Bizonyítás. Racionális várakozások esetén nem kell az optimális pályát minden alkalommal újraszámolni. (C.19) a (C.22)–(C.23) párra egyszerűsödik, $c_{0,t} = H_t$. ∎

Megjegyzés. Figyelemre méltóan egyszerű az optimális pálya szerkezete. Egyrészt minden új időszak a korrigált leszámítolási tényező szerint csökkenti, másrészt a korrigált kamattényező szerint növeli a fogyasztást. A kezdőfogyasztás értékét a H_t hányados adja.

Behelyettesítve a feltételes optimumot a megengedettségi feltételbe, egy implicit differenciaegyenlet-rendszert kapunk. A teljes megoldás a $2D$-dimenziós vegyes $x_t = f(x_{t-1})$ rendszert adná, ahol $x_t = (a_t, {}_tr)$, de az egyszerűsítés miatt megússzuk egy D-vel eltolt $(2D-1)$-dimenziós tiszta rendszerrel: $r_{t+D} = g(r_{t-D+1}, \ldots, r_{t+D-1})$. Ez utóbbit könnyebb tanulmányozni és ábrázolni. Mostantól fogva a teljes és az egyszerűsített megoldás különbségét nem hangsúlyozzuk. Behelyettesítve a feltételes optimumot a összmegtakarítás (C.20) képletébe, adódik a
t-edik időszak makromegtakarítási függvénye:

$$ S_t = 1 - \sum_{i=0}^{D} \Phi^i R_{t-j,t}^{1-\mu} H_{t-i}. \tag{C.24}$$

Ennek segítségével konkrétizálhatjuk a C.3. tételt. Az $S_t = 0$ implicit differenciaegyenlet-rendszer elemzése általában bonyolult, s ezt elhalasztjuk a C.4. alfejezetre.

Előtte két speciális esetet vizsgálunk, az állandósult állapotot a C.2. alfejezetben és a 2–ciklikus pályákat a C.3. alfejezetben.

Deaton (1992) áttekinti a fogyasztás elméleti és tapasztalati irodalmát. Többek között rámutat a gyerekkori fogyasztás jelentőségére, és kétségbe vonja az itt vázolt elmélet empirikus relevanciáját, hiszen a valóságban a fogyasztás sokkal szorosabban követi a folyó jövedelmet, mint azt a hagyományos életciklus-elmélet jósolja (61-63. o.).

C.2. ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTOK

Bár az állandósult állapotok függetlenek a C.1. alfejezetben elemzett konzisztens várakozások milyenségétől, elemzésüket elhalasztottuk az egyszerűsített racionális várakozások kifejtéséig.

Létezés és egyértelműség

A C.1. alfejezet végén bevezetett erősen és gyengén kockázatkerülő fogyasztó megkülönböztetésére most lesz igazán szükség. Mindenekelőtt bevezetünk egy Kim (1983)-tól származó, a *keresetek regularitását* biztosító feltevést: a dolgozó az utolsó $[D]$ időszak előtt munkába áll és a második [1] időszak előtt nem megy nyugdíjba. Képletben: $L < D$ és $M > 0$.

Egyszerűsített racionális várakozások esetén nincs szükségünk $\{W_{i,t}, V_{i,t}\}$ sorozatra, csak a kezdőtagjukra. Ezért célszerű lesz a $W_t = W_{0,t}$ és $V_t = V_{0,t}$ rövidített írásmóddal élni. Most a (C.22) képlet és az előkészítő képletek az időtlen r kamattényező segítségével egyszerűsíthetők:

(C.16°) $$W(r) = \sum_{i=0}^{D} w_i r^{-i},$$

(C.17°) $$V(r) = \sum_{i=0}^{D} \Phi^i r^{-\mu i},$$

(C.23°) $$H(r) = \frac{W(r)}{V(r)},$$

(C.22°) $$c_j(r) = \Phi^j r^{(1-\mu)j} H(r).$$

A továbbiakban fontos szerephez jut (C.24) időtlenített alakja, a stacionárius makromegtakarítási függvény:

(C.25) $$S(r) = 1 - \sum_{i=0}^{D} \Phi^j r^{(1-\mu)j} H(r).$$

C.5. tétel. *(Gale, 1973, Lemma és 7. tétel.) Ha a kereseti pálya reguláris, a fogyasztó gyengén kockázatkerülő és hasznosságfüggvénye növekvő, akkor mindig létezik legalább egy kiegyensúlyozott kamattényező.*

Megjegyzés. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a tétel nemcsak CRRA-hasznosságfüggvényre érvényes.

Bizonyításvázlat. A regularitási feltétel és a gyenge kockázatkerülés miatt $c_0(0) = \infty$ és $c_D(\infty) = \infty$, azaz $S(0) = -\infty$ és $S(\infty) = -\infty$. Mivel $S(1) = 0$, a Bolzano-tétel alapján az S függvénynek van legalább egy nem-triviális gyöke: r_B. ∎

C.1. feladat. A kiegyensúlyozott állandósult állapot egyértelműsége. Igazoljuk Gale (1973, 35. o.) következő tételét: *Cobb–Douglas-hasznosságfüggvények esetén pontosan egy kiegyensúlyozott állandósult állapot létezik.*

Itt említhető meg a

C.1. sejtés. *(Gale, 1973, 34. o.) A C.5. tétel feltételei esetén pontosan egy kiegyensúlyozott állandósult állapot létezik.*

Kim (1983) nyomán kiterjesztjük a C.5. tételt az erősen kockázatkerülő fogyasztóra is; igaz, ismét CRRA-függvényekre szorítkozva. Ehhez szükség lesz a következő jelölésekre:

$$\mu_1 = \min\left(\frac{M}{D}, 1 - \frac{L}{D}\right) \qquad \text{és} \qquad \mu_2 = \max\left(\frac{M}{D}, 1 - \frac{L}{D}\right). \tag{C.26}$$

C.6. tétel. *(Kim, 1983 és Simonovits, 1995a, 9. tétel.) Legyen a kereseti pálya reguláris, a fogyasztó CRRA-hasznosságfüggvényű, és erősen kockázatkerülő ($\mu \geq 0$).*

a) Ha $0 \leq \mu < \mu_1$, akkor mindig létezik legalább egy kiegyensúlyozott kamattényező: $r_\mathrm{B} > 1$ az adós esetre, $r_\mathrm{B} < 1$ a hitelező esetre és $r_\mathrm{B} = 1$ a szimmetrikus esetre.

b) Ha $\mu_2 < \mu < 1$, akkor mindig létezik legalább egy kiegyensúlyozott kamattényező: $r_\mathrm{B} < 1$ az adós esetre, $r_\mathrm{B} > 1$ a hitelező esetre és $r_\mathrm{B} = 1$ a szimmetrikus esetre.

c) Ha $\mu_1 < \mu < \mu_2$ (ablak), akkor vagy nem létezik kiegyensúlyozott kamattényező, vagy több is létezik.

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy az ablak definíciójában két mennyiség minimuma és maximuma szerepel: a (gyerekkor+munkáskor)/élettartam és (munkáskor+nyugdíjaskor)/élettartam. Kim hangsúlyozta, hogy a korábbi irodalom csak az *a)* esetet vizsgálta, ahol a hitelező eset nem Pareto-optimális. A *b)* eset azonban szintén fontos, s itt az adós eset nem Pareto-optimális.

2. A B.1. tételben mindkét kereset pozitív volt, s az egyetlen kiegyensúlyozott állapot az autarchia volt.

Bizonyitásvázlat. (C.25) jelölés mellé még további jelöléseket vezetünk be:

$$B(r) = \sum_{i=0}^{D} \Phi^j r^{(1-\mu)j}, \tag{C.27}$$

$$F(r) = V(r)S(r), \tag{C.28}$$

$$F(r) = V(r) - B(r)W(r). \tag{C.29}$$

Ekkor igaz, hogy

$$\begin{aligned}
&\text{(C.30)} & \mu D < M &\Rightarrow F(0) = -\infty,\\
&\text{(C.31)} & (1-\mu)D > L &\Rightarrow F(\infty) = -\infty,\\
&\text{(C.32)} & \mu D > M &\Rightarrow F(0) > 0,\\
&\text{(C.33)} & (1-\mu)D < L &\Rightarrow F(\infty) > 0.
\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy Gale-nek (a Bolzano-tételen alapuló) bizonyítása a (C.30)–(C.31) párról szól, de érvényben marad a (C.32)–(C.33) párra is. Gond van viszont a „vegyes párosoknál”: a (C.31)–(C.32) és a (C.30)–(C.33) párnál, mert a Bolzano-tétel nem alkalmazható. ∎

Kim egy-egy szellemes 3-korosztályos CRRA-példát ad, ahol a kiegyensúlyozott állandósult állapot nem létezik, illetve több kiegyensúlyozott állandósult állapot létezik.

C.1. példa. (Kim, 1983, 1. példa.) Nincs kiegyensúlyozott állandósult állapot, ha $\sigma \le -1$, $\beta = 1$, $D = 2$, $L = 0$, $M = 1$, $w_0 > w_1 > 0$.

C.2. példa. (Kim, 1983, 2. példa.) Legalább két kiegyensúlyozott állandósult állapot létezik, ha $\sigma \le -1$, $\beta = 1$, $D = 2$, $M = 1$, $w_1 > w_2 > (1 + 2D)/(D - 1)$.

A Leontief-esetben külön tétel érvényes:

C.2. feladat. (Augusztinovics, 1992, 5. pont.) Tegyük föl, hogy van olyan L^* és M^* természetes szám ($1 \le L^* < M^* \le M$), hogy $w_i \le 1/(D+1)$), ha $0 \le i \le L^* - 1$ vagy $M^* \le i \le D$, és $w_i > 1/(D+1)$, ha $L^* \le i \le M^* - 1$! Igazoljuk, hogy ekkor a Leontief-esetben pontosan egy kiegyensúlyozott kamattényező van!

A szemléltetés kedvéért bemutatjuk az $S(r)$ függvényt négy különböző μ esetén. Éves számolásnál $D = 71$ évvel fogunk dolgozni. A C.1. ábrán az egyik alapeset, $L = 20$, $M = 57$ és $\beta = 0{,}99$ látható.

C.3. feladat. Számítógépes számítással igazoljuk, hogy $\mu = 0{,}73$-ra nincs kiegyensúlyozott állandósult állapot, míg $\mu = 0{,}75$-re kettő is van: $r_{\mathrm{B}_1} = 0{,}7375$ és $r_{\mathrm{B}_2} = 0{,}8691$. (Kérdés, hogy van-e olyan *reális* gazdaság, amelyben legalább két kiegyensúlyozott állandósult állapot van 1 közelében.)

Végül a C.1. táblázat szemlélteti a kiegyensúlyozott állapot függését néhány kulcsparamétertől – reális esetekben. Rögzítettük $D = 71$, $L = 18$ értékpárt, és kombináltuk a következő hármasokat: $M = 53$, 55, 57; $\mu = 0{,}5$, 0,75, 1; $\beta = 0{,}98$, 0,99 és 1 összesen 28 esetet kapván: (M,μ,β). Az utolsó oszlopra csak a C.4. alfejezet végén lesz szükségünk. Az egyszerűség kedvéért egyenes kereseti profilokat feltételeztünk, a C.14. tételtől eltekintve: $w_i = 1/(M - L + 1)$, ha $i = L,\ldots,M$ és $w_i = 0$ egyébként (vö. AM, IV. feltevés).

Néha be kell érnünk egy olyan együttélő korosztályú modellel, ahol a korosztályok száma jóval kisebb. Ekkor azonban módosítani kell bizonyos nagyságokat, mégpedig a fizikában bevált *skálainvariancia* alapján. Ha az emberek $T+1$ évet élnek és $D+1$ korosztályt különböztetünk meg, akkor a korosztályi kamattényezőt *évi kamattényező*ként is ki kell fejezni: $r = \mathbf{r}^{(T+1)/(D+1)}$. Hasonló összefüggés áll a leszámítolási tényezőre is: $\beta = \beta(T)^{(T+1)/(D+1)}$, ahol $\beta(T)$ az időszaki leszámítolási tényező.

Sok együttélő korosztály

Aiyagari (1988) volt talán az első kutató, aki kiküszöbölte a hagyományos zárt OLG-modelleknek azt a hibáját, hogy a szereplők aktív élettartama két elemzési időegységgel egyenlő. Sajnos, a korosztályok számának növelésével párhuzamosan nem az elemi időszak hosszát csökkentette, hanem a szereplők élettartamát növelte.

Többletfeltevésként kimondta, hogy az életkori keresetek egyenletesen pozitívak, tehát $L = 0$ és $M = D$. Ebben a furcsa világban sikerült igazolnia, hogy a nem optimális kiegyensúlyozott állandósult állapotok aszimptotikusan (a korosztályszám korlátlan növelésével) kihalnak, és az összes kiegyensúlyozott állandósult kamattényező a leszámítolási tényező reciprokához tart. Bár Aiyagari aszimptotikus eredményei logikailag helyesek, közgazdaságilag értelmetlenek.

A következő feladat jól szemlélteti az $r_{\mathrm{B}} = 1/\beta$ eset különleges szerepét az életciklus-modellekben.

C.4. feladat. Vízszintes CW-profil gyermek- és nyugdíjas-korosztályok nélkül. Bizonyítsuk be, hogy $w_i = 1/(D+1)$, $i = 0,\ldots,D$ esetén $r_{\mathrm{B}} = 1/\beta$ és $c_j = 1/(D+1)$, $j = 0,\ldots,D$ (autarchia)!

Figyeljük meg, hogy a keresetek egyenletes pozitivitását kimondó Aiyagari-feltétel milyen szigorú: nemcsak a már Gale által is hangsúlyozott nulla kereseteket zárja ki, de a normálás miatt még az autark egyensúlyt biztosító következő pozitív kereseti vektorsorozatot is.

C.3. példa. Aranyszabály. Kövesse a keresetsorozat a korrigált leszámítolási tényező mértani sorozatát:

$$w_j = \frac{\Phi^j}{\sum_{i=0}^{D} \Phi^i}, \qquad j = 0,1,\ldots,D.$$

Ekkor (C.22°) szerint $c_j(r) = w_j D r^{(1-\mu)j}$, $j = 0,1,\ldots,D$, ahol $r > 1$ esetén az összmegtakarítás negatív, $r < 1$ esetén pozitív, tehát autark optimum valósul meg, azaz $r_{\mathrm{B}} = 1$, függetlenül D-től (vö. Ghiglino és Tvede, 1995b).

C.3. ENDOGÉN CIKLUSOK RACIONÁLIS VÁRAKOZÁSOKKAL

A C.2. alfejezetben kizárólag állandósult állapotokkal foglalkoztunk. Ebben az alfejezetben kisérletet teszünk a ciklusok leírására is, mintegy áthidalva a stacionárius és nem-stacionárius pályák közti szakadékot. Ismét racionális várakozásokra szorítkozunk: (C.6).

C.1. táblázat.
A kiegyensúlyozott állandósult állapotok jellemzői

$L = 18$, $D = 71$

Nyugdíjba vonulási kor M	Ellen-rugal-masság μ	Leszá-míto-lási tényező β	Kiegyen-súlyozott kamat-tényező r_B	Nevező gyöke $r_D - r_B$
51	0,50	0,98	1,066654	–0,000083
51	*0,50*	*0,99*	*1,024094*	*–0,000218*
51	0,50	1,00	0,979354	**0**0,000180
51	0,75	0,98	0,980520	–0,000158
51	0,75	0,99	0,998997	–0,001649
51	0,75	1,00	1,017036	**0**0,000269
51	1,00		1,005986	**0**0,000236
53	0,50	0,98	1,079089	–0,000057
53	0,50	0,99	1,040291	–0,000113
53	0,50	1,00		
53	0,75	0,98	0,959637	–0,000053
53	0,75	0,99	0,980015	–0,000141
53	0,75	1,00	1	**0**0
53	1,00		1	**0**0
55	0,50	0,98	1,089795	–0,000043
55	0,50	0,99	1,053719	–0,000072
55	0,50	1,00	1,016825	–0,000190
55	*0,75*	*0,98*	*0,928033*	*–0,000016*
55	0,75	0,99	0,954918	–0,000043
55	0,75	1,00	0,978895	–0,000128
55	1,00		0,993590	–0,000150
57	0,50	0,98	1,099172	–0,000033
57	0,50	0,99	1,065132	–0,000052
57	0,50	1,00	1,030850	–0,000094
57	0,75	0,98		
57	0,75	0,99	0,903770	–0,000007
57	0,75	1,00	0,945988	–0,000029
57	*1,00*		*0,986561*	*–0,000058*

Megjegyzések. 1. Kizárólag a $(0{,}85; 0{,}999)$ és az $(1{,}001; 1{,}15)$ intervallumba eső pontokat tüntettük föl. 2. A dőlt sorok példákat mutatnak be. r_D a (C.52) nevezőjének 1 körüli gyöke.

Megengedett 2-ciklus

Egyszerűség kedvéért a P-ciklusok helyett a 2-ciklusokat elemezzük, ahol $r_{t+2} = r_t$, $t = 0,1,2,\ldots$. Ekkor (C.16)–(C.18) szerint a többi sorozat is 2-ciklikus. Szintén egyszerűsítést szolgáló feltevés, hogy a gyerekkor, az aktív kor és a teljes élet rendre páros időszakból áll:

$$L = 2L_1, \qquad M = 2M_1 + 1 \qquad \text{és} \qquad D = 2D_1 + 1, \tag{C.34}$$

ahol L_1, M_1 és D_1 természetes számok (esetleg $L_1 = 0$).

Szükségünk lesz a *2-ciklusra számított halmozott kamattényezőre*:

$$R_2 = R_{t-2,t} = r_{t-1}r_t. \tag{C.35}$$

Már korábban bevezettük a gazdaság összes vagyonát, a t-edik időszak záróvagyonállományát: A_t. Tegyük föl, hogy $\{A_t\}$ szintén 2-ciklikus, azaz $A_2 = A_0$. Definíció szerint $A_{t+1} = r_{t+1}A_t$, $t = 0;1$, ezért $A_2 = R_2A_0$, azaz $(1 - R_2)A_0 = 0$: vagy $R_2 = 1$ vagy $A_0 = 0$. E dichotómia alapján – a kettős gyöktől eltekintve –, *kiegyensúlyozott 2-ciklus*ról beszélünk, ha $R_2 \neq 1$ és *aranyszabályi 2-ciklus*ról beszélünk, ha $R_2 = 1$.

Szükségünk lesz a következő jelölésre:

$$I(x) = \frac{x^{D_1+1} - 1}{x - 1}.$$

Páros és páratlan időszakokat megkülönböztetve, $i = 2k + Q$, ahol $Q = 0$ vagy 1, nagyon leegyszerűsödnek a képletek, hiszen

$$R_{t-i,t} = r_{t-Q}R_2^k.$$

A 2-ciklusok a következőképpen határozhatók meg.

C.7. tétel. *Racionális várakozások. Ha van megengedett 2-ciklus, akkor a következő egyenletrendszernek van megoldása:*

$$W_t = \sum_{k=0}^{D_1}(w_{2k} + w_{2k+1}r_{t+1}^{-1})R_2^{-k}, \qquad t = 0,1; \tag{C.36}$$

$$\frac{I(\Phi^2 R_2^{1-\mu})}{I(\Phi^2 R_2^{\mu})}\left(\frac{W_t}{1+\Phi r_{t+1}^{\mu}} + \frac{W_{t-1}}{1+\Phi r_t^{\mu}}\right) = 1, \qquad t = 0,1. \tag{C.37}$$

Aranyszabályi 2-ciklus

A kutatók zömét követve, először az aranyszabályi 2-ciklust vizsgáljuk. Szükségünk lesz a páros és páratlan időszakok keresetének összegére:

$$\Omega = \sum_{k=0}^{D_1} w_{2k} \qquad \text{és} \qquad 1 - \Omega = \sum_{k=0}^{D_1} w_{2k+1}.$$

C.1. segédtétel. *Racionális várakozások. Az $\{r_1,1/r_1\}$ kamattényezőpár pontosan akkor aranyszabályi 2-ciklus, ha $r = r_1$-re teljesül*

$$F(r) = (1 - \Omega + \Phi^2\Omega)(r - 1) + \Phi(r^{1-\mu} - r^{\mu}) = 0. \tag{C.38}$$

Megjegyzés. A C.1. segédtételnek önálló közgazdasági jelentése nincs, de hasznos ugródeszka lesz a C.8. tételhez.

Bizonyítás. $r_{t+1} = 1/r_t$-t behelyettesítve (C.36)-ba, adódik $W_t = \Omega + (1-\Omega)r_{t+1}^{-1}$, $W_{t+1} = \Omega + (1-\Omega)r_t^{-1}$, s újabb képleteinket behelyettesítve (C.37)-be, adódik

$$\frac{\Omega + (1-\Omega)r_1}{1+\Phi r_1^{\mu}} + \frac{\Omega + (1-\Omega)r_1^{-1}}{1+\Phi r_1^{-\mu}} = 1 \tag{C.39}$$

Innen számolással kapjuk (C.38)-at. Figyeljük meg, hogy $F(r^{-1}) = r^{-1}F(r)$, azaz r mellett $1/r$ is megoldás! ∎

Mikor van (C.38)-nak megoldása? E kérdés megválaszolására vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mu_{\min} = \frac{1}{2} + \sqrt{\Omega(1-\Omega)}, \tag{C.40}$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{2\mu - 1 \pm \sqrt{(2\mu-1)^2 - 4\Omega(1-\Omega)}}{2\Omega}, \tag{C.41}$$

$$\beta_1 = \Phi_1^{1/(1-\mu)} \qquad \text{és} \qquad \beta_2 = \Phi_2^{1/(1-\mu)}. \tag{C.42}$$

Közgazdaságilag értelmezhető feltételt ad a

C.8. tétel. *Racionális várakozások. Akkor és csak akkor létezik aranyszabályi 2-ciklus, ha teljesül a következő feltételrendszer.*

A páros időszakok keresetösszege nagyobb, mint a páratlanoké:

$$\Omega > 1/2. \tag{C.43}$$

A helyettesítés időbeli rugalmassága megfelelően kicsiny:

$$\mu_{\min} < \mu < 1. \tag{C.44}$$

A leszámítolási együttható két (szűk) korlát közé esik:

$$\beta_1 < \beta < \beta_2. \tag{C.45}$$

Megjegyzés. Stacionárius modellünkben nyugodtan föltehetnénk, hogy a keresetek az életkorral növekednek, azaz $\Omega < 1/2$, tehát nincs aranyszabályi 2-ciklus. Növekvő termelékenységű gazdaságot ábrázoló modellben viszont w_i helyére w_i/η^i lépne (ahol η az időszaki termelékenységnövekedési tényező), s ez már nem szükségképpen volna növekvő sorozat.

Bizonyítás. F vagy konvex, vagy konkáv a [0,1] szakaszon, $F(0) < 0$ és $F(1) = 0$. $F(r) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $F'(1) < 0$. (C.38) szerint $F'(1) = (1-\Omega+\Phi^2\Omega) + \Phi[(1-\mu)r^{-\mu} - \mu r^{\mu-1}]$, ahonnan számolással adódik (C.43)–(C.45). ∎

A B.7. feladat triviális általánosítása a

C.4. példa. A 2-ciklus explicit megoldása. Ha $\mu = 2/3$, akkor a probléma nagyon leegyszerűsödik. A $\xi = r^{1/3}$ jelöléssel $F(\xi^3) = (1 - \Omega + \Phi^2\Omega)(\xi^3 - 1) + \Phi(\xi - \xi^2) = 0$, ahonnan $\xi - 1$ (C.38) szerint kiemelhető, majd másodfokú egyenletté alakítható:

$$(1 - \Omega + \Phi^2\Omega)\xi^2 + (1 - \Omega + \Phi^2\Omega - \Phi)\xi + (1 - \Omega + \Phi^2\Omega) = 0$$

A (C.40)–(C.45) feltételek látszólag függetlenek a korosztályok számától, illetve a munkábalépési és a nyugdíjbamenési kortól. Megfelelő Ω, μ és β esetén tetszőleges $D = 2D_1 + 1$-re van aranyszabályi 2-ciklus. Ez pedig cáfolni látszik Aiyagari (1989) mondanivalóját (nem a tételét!), hogy sok korosztály együttélésekor nem lehetnek ciklusok.

Mégis kiderül, hogy lehetetlen életszerű adatokkal kitölteni a képleteket. Ahhoz, hogy ciklusokat kapjunk, hihetetlen erős leszámítolást és kockázatkerülést kell feltételezni, s ekkor még nem is szóltunk a páros időszakok összekeresetének mesterségesen magas voltáról. Ebben az értelemben Aiyagarinak igaza van és Reichlin (1992) téved:

Következmény. *Racionális várakozások. Reálisan kalibrált OLC-gazdaságban nincsenek aranyszabályi 2-ciklusok.*

Gyakorlatilag elegendő a következő észrevétel: $1/2 < \Omega < 2/3$ esetén $\mu_{\min} > 0{,}97$; tehát normális kereseti ingadozásoknál nagyon erős kockázatkerülés (és leszámítolás) szükséges az aranyszabályi 2-ciklus létrejöttéhez.

Kivételt képez a teljes kockázatkerülés esete:

C.9. tétel. *Racionális várakozások. Leontief-hasznosságfüggvény* ($\mu = 1$) *esetén az* $\{r,1/r\}$ *pár tetszőleges* r*-re aranyszabályi 2-ciklus.*

Bizonyítás. (C.38)-ba behelyettesítve $\mu = 1$ és $\Phi = 1$-et azonosságot kapunk. ∎

Kiegyensúlyozott 2-ciklusok

Aiyagari (1989)-t tanulmányozva rájöttem, hogy cikke 167. o., 4. lábjegyzetének 4–korosztályos, kiegyensúlyozott 2-ciklusra adott példája számítási hibán alapul. Levelezésünk során Aiyagari elküldte javított példáját, azonban a szereplő adatok teljesen irreálisak voltak.

Bizonyítás nélkül megemlítünk egy idevágó pozitív és egy negatív eredményt.

Legyen b_k a pozitív keresetek növekedési szorzója a páros időszakról a páratlanra:

(C.46) $$w_{2k+1} = b_k w_{2k}, \qquad L_1 \le k < M_1, \qquad \text{ahol} \qquad b_k > 0.$$

Vezessük be a következő jelölést:

(C.47) $$\mu = \min_{L_1 \le k < M_1} \frac{4\sqrt{b_k}}{[1 + \sqrt{b_k}]^2}.$$

C.10. tétel. *Racionális várakozások. Nem túl nagy kockázatkerülés* ($0 < \mu < \mu_m$) *esetén nincs kiegyensúlyozott 2-ciklus.*

Megjegyzés. Ha a pozitív keresetek korosztályonkénti változása –50 és 100% között marad ($1/2 \le b_k \le 2$), akkor $\mu_m = 0{,}97$, azaz a (C.34) feltevés esetén gyakorlatilag kizárt, hogy létezzék kiegyensúlyozott 2-ciklus. Viszont igaz a

C.11. tétel. *Racionális várakozások. Tegyük föl, hogy a fogyasztó Leontief-hasznosságfüggvényt maximalizál, minden páratlan időszak keresete megegyezik a megelőző páros időszak keresetével:* $w_{2k+1} = w_{2k}$, $L_1 \le k < M_1$, *és létezik kiegyensúlyozott állandósult állapot:* r_B. *Ekkor minden* $\{r_1, r_\mathrm{B}^2/r_1\}$ *pár egy kiegyensúlyozott 2-ciklus.*

Az alfejezet végére érve megjegyezzük, hogy több, egymástól eltérő típusú fogyasztó feltételezésével sem lehet reális 2-ciklust kapni. Figyeljük meg, hogy indexelve a kereseteket és a hasznosságfüggvényeket, (C.36) helyére egy általánosított képlet lép, ahonnan a többi képlet és a módosított bizonyítás már levezethető. Ghiglino és Tvede (1995a) vizsgálta a több típusú fogyasztó egymásrahatását, de 2-korosztályos soktermékes OLG-modellben.

Már említettünk egy másik lehetőséget, amikor a 2-nél hosszabb periódusú ciklusokat vizsgáljuk. Ez azonban eddig csak szélsőséges (Cobb–Douglas- és Leontief-) hasznosságfüggvények esetén sikerült: az első esetben sikerült kizárni a ciklusokat, a második esetben sikerült végtelen sok ciklust kapnunk.

Ezen a ponton ismét kitérünk a két- és többkorosztályos modellek közti különbségre. (i) Kétkorosztályos skalár modellben Sárkovszkij tétele (3.7a. tétel) szerint, ha nincs 2-ciklus, akkor P-ciklus sincs. Többkorosztályos modellben Sárkovszkij tétele nem érvényes. (ii) A többkorosztályos modellnek a C.1. alfejezetben leírt kétkorosztályos modellre való egyszerűsítésénél ciklikus pályák stacionárius ponttá alakulhatnak (vö. 3.5. tétel), tehát ciklusvizsgálatnál a redukció elfogadhatatlan.

C.4. DINAMIKA RACIONÁLIS VÁRAKOZÁSOKKAL

Dinamika

Hosszúra nyúlt előkészítés után rátérünk az igazi dinamika elemzésére. Ebben az alfejezetben fenntartjuk a racionális várakozások feltevését: (C.6), méghozzá a C.2. alfejezet végén taglalt egyszerűsített változatban. Az r_{t+D} kamattényezőt a korábbi $r_{t-D+1}, \dots, r_{t+D-1}$ kamattényezők függvényében fogjuk kifejezni. Ahhoz, hogy a (C.16), (C.17) ($i = 0$) és a (C.24) kifejezések tömörek maradjanak, az r_{t+D}-t tartalmazó W_t, V_t és S_t-beli tagok összegére újabb (vastag) jelöléseket vezetünk be (és a nulla korindexet ismét elhagyjuk).

$$\mathbf{W}_t = \sum_{i=0}^{D-1} w_i R_{t,t+i}^{-1}, \tag{C.48}$$

$$\mathbf{V}_t = \sum_{i=0}^{D-1} \Phi^i R_{t,t+i}^{-\mu}, \tag{C.49}$$

$$\mathbf{S}_t = 1 - \sum_{j=1}^{D} \Phi^j R_{t-j,t}^{1-\mu} H_{t-j}. \tag{C.50}$$

A (C.21) megengedettségi feltételből egyszerű számolással kapjuk az

$$\mathbf{S}_t = H_t = \frac{\mathbf{W}_t + w_D R_{t,t+D-1}^{-1} r_{t+D}^{-1}}{\mathbf{V}_t + \Phi^D R_{t,t+D-1}^{-\mu} r_{t+D}^{-\mu}}$$

egyenlőséget, melyből adódik a

C.12. tétel. *Racionális várakozások. (i) A* $(t+D)$*-edik optimális kamattényezőt (ha egyáltalán létezik) a következő* $(2D-1)$*-rendű implicit differenciaegyenlet határozza meg:*

$$w_D R_{t,t+D-1}^{-1} r_{t+D}^{-1} - \mathbf{S}_t \Phi^D R_{t,t+D-1}^{-\mu} r_{t+D}^{-\mu} - \mathbf{S}_t \mathbf{V}_t + \mathbf{W}_t = 0. \tag{C.51}$$

(ii) Ha $0 < \mu \leq 1$, $w_D = 0$ *és az alábbi* (C.52) *kifejezés értelmezve van, akkor* (C.51) *egy* $(2D-1)$*-rendű explicit differenciaegyenletre egyszerűsödik:*

$$r_{t+D} = \left(\frac{\mathbf{S}_t \Phi^D}{\mathbf{W}_t - \mathbf{S}_t \mathbf{V}_t}\right)^{1/\mu} \frac{1}{R_{t,t+D-1}}. \tag{C.52}$$

Megjegyzések. 1. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a t-edik időszak egyensúlyi feltétele a $(t+D)$-edik időszak optimális kamattényezőjét határozza meg. Ez éves kalkulációnál és normális életkornál azt jelenti, hogy a mindenkori kamattényezőt több évtizeddel előre meghatározták! Ebből látszik, hogy esetünkben milyen szigorú és irreális feltevés a racionális várakozás feltevése. (Kehoe és Levin (1990) *meghatározatlanság*ról beszél.)

3. Az implicit függvény tétele garantálja r_{t+D} létezését, ha $\dfrac{\partial S}{\partial r_{t+D}}$ különböző nullától:

$$\frac{\partial S}{\partial r_{t+D}} = -\frac{\partial H}{\partial r_{t+D}} = \frac{w_D R_{t,t+D-1}^{-1} r_{t+D}^{-2} V_t - \mu W_t \Phi^D R_{t,t+D-1}^{-\mu} r_{t+D}^{-\mu-1}}{V_t^2}.$$

Ha $r_t \equiv 1$ és $\beta = 1$, akkor $\dfrac{\partial S}{\partial r_{t+D}} = [w_D(D+1) - \mu]/(D+1)^2$. Realista modellekben a $w_D(D+1)$ szorzat 0 és 1 között fekszik, ezért létezik egy $\mu_o = w_D(D+1)$ *szinguláris érték*, melyre $\dfrac{\partial S}{\partial r_{t+D}} = 0$. Vegyük észre, hogy $\dfrac{\partial S}{\partial r_{t+D}}$ μ csökkenő lineáris függvénye, de μ együtthatója $-1/(D+1)^2$, a parciális derivált nagyságrendje szintén $1/(D+1)^2$. Ilyen mennyiségek értékeléséhez a C.4. példában említett skála-invariancia elvét kell alkalmazni. Éves mennyiségekre áttérve és az $r = \mathbf{r}^{(T+1)/(D+1)}$ jelöléssel élve:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_{t+D}} = \frac{\partial S}{\partial r_{t+D}} \frac{dr_{t+D}}{d\mathbf{r}_{t+D}} \approx \frac{T+1}{(D+1)^3}.$$

Megfelelően finom felbontás (például $D = 36$, vagy 72) esetén $(T+1)/(D+1)^3$ alig különbözik 0-tól. Ezért legalábbis a leszámítolás nélküli, aranyszabály állapot esetén (C.51) túlzottan érzékeny a számítási hibákra. Ezzel ellentétben, a B. függelékben vizsgált népszerű esetben $D = 1$, $w_1 = 0$, csupán a Cobb–Douglas-eset szinguláris, a $\dfrac{\partial S}{\partial r_{t+1}} = -\mu/4$ együttható meglehetősen nagy, még nagyobb az éves szinten számított $\dfrac{\partial S}{\partial \mathbf{r}_{t+1}} = -9\mu$.

Emlékeztetünk a B.6. példabeli megjegyzésre: a megoldás nem mindig folytatható, ha a (C.51) implicit differenciaegyenletnek nincs megoldása, vagy ami ugyanaz, a

(C.52) explicit differenciaegyenlet jobb oldala nincs értelmezve. Ekkor a rendszer *működésképtelenné* válik. Természetesen az állandósult állapotú pályákkal nincs ilyen gond, legalábbis elméletben.

Az áttekinthetőség kedvéért külön példában ismertetjük a B.1. alfejezetben vizsgált 2-korosztályos eset teljes leírását.

C.5. példa. Racionális várakozások, 2 korosztály. $D = 1$. *Teljes leírás*: a feltételes optimum

$$c_{0,t} = \frac{w_0 + w_1 r_{t+1}^{-1}}{1 + \Phi r_{t+1}^{-\mu}} \qquad \text{és} \qquad c_{1,t} = r_t a_{0,t-1} + w_1$$

az (a_t, r_{t+1}) párra egy 2-dimenziós implicit differenciaegyenlet-rendszerhez vezet:

$$a_{0,t} = r_t a_{0,t-1} \qquad \text{és} \qquad \frac{w_0 + w_1 r_{t+1}^{-1}}{1 + \Phi r_{t+1}^{-\mu}} + r_t a_{0,t-1} + w_1 = 1.$$

A B.5. példában szereplő egyszerűsített leírásra a C.1. tétel megfordítása is igaz (vö. B.4. tétel). Ez vezetett Gale (1973, 12. és 16. o. előadott) *vélekedés*éhez, amelyet a Gale és mások által elhanyagolt $\mu > \mu_2$ esetre tekintettel célszerű a következőképpen átfogalmazni: *racionális várakozásoknál a kisebb kamatlábú állandósult állapot aszimptotikusan stabil.* Gale vélekedésével ellentétben nincs okunk azt várni, hogy ez az egyszerű eredmény általánosan igaz legyen, akár racionális várakozások esetében. Valóban, hamarosan látni fogjuk, hogy racionális várakozásokra – gyenge feltevések mellett – mindkét állandósult állapot instabil. Viszont furcsa módon, a naiv várakozásokra Gale mondanivalója *tipikusan* (de nem mindig) igaznak tűnik (C.5. alfejezet).

Az alfejezet végéig mindig föltesszük, hogy vannak kereset nélküli gyermek és nyugdíjas-korosztályok: $L > 0$ és $M < D$. Pontosabban, csak azt fogjuk kikötni, hogy legalább egy-egy gyermek- és nyugdíjas-korosztály létezik. További feltevés: $\mu > 0$.

Lokális instabilitás

A dinamikus $r_{t+D} = g(r_{t-D+1}, \ldots, r_{t+D-1})$ rendszer viselkedéséről az állandósult állapotok (in)stabilitása adja a legegyszerűbb tájékoztatást.

Lokális elemzésnél elvben egyszerű a helyzet (3. fejezet). Bevezetjük az r_F állandósult állapottól való eltérést: $r_t^\mathrm{d} = r_t - r_\mathrm{F}$, s az $r_{t+D} = g(r_{t-D+1}, \ldots, r_{t+D-1})$ függvény parciális deriválásával eljutunk a linearizált $r_{t+D}^\mathrm{d} = \sum_{i=-D+1}^{D-1} \gamma_{i,\mathrm{F}} r_{t+i}^\mathrm{d}$ rendszerhez. Bevezetve a $p(\lambda) = \sum_{i=-D+1}^{D-1} \gamma_{i,\mathrm{F}} \lambda^{D-1+i}$ polinomot, adódik a $(2D-1)$-ed fokú $q(\lambda) = \lambda^{2D-1} - p(\lambda)$ karakterisztikus polinom. A 3.2. tétel szerint csupán azt kellene eldönteni, hogy hol helyezkednek el e polinom gyökei: az egységkörön belül (aszimptotikus stabilitás), vagy vannak rajta kívül is gyökök (instabilitás). Ha már a függvényérték numerikus meghatározása is nehézségekbe ütközött, milyen nehéz lehet a $2D - 1$ darab parciális derivált meghatározása! Szerencsénkre nem így van, legalábbis az esetek egy jó részében nem. A következő segédtétel egy nagyon hasznos összefüggést ígér:

C.2. segédtétel. *Racionális várakozások. Ha $w_0 = 0 = w_D$ és r_F egy megengedett állandósult állapot, akkor*

$$\gamma_{-D+1,\mathrm{F}} = r_\mathrm{F}^D. \tag{C.53}$$

Bizonyítás. Az alapötlet egyszerű. Tekintsük a $t = 0$ időszakot és határozzuk meg az r_D változó r_{-D+1} szerinti parciális deriváltját. Mivel $w_D = 0$, $\mathbf{W}_t = W_t$. Vegyük észre, hogy r_{-D+1} nem szerepel sem W_0-ban, sem V_0-ban, sem $R_{0,D-1}^{-1}$-ben. Mostantól kezdve a bizonyításban az időindexet általában elhagyjuk.

Az $r_{-D+2} = \cdots = r_{D-1} = r_{\mathrm{F}}$ feltevés miatt a szereplő függvények mindegyike egyváltozóssá válik. A rövidség kedvéért az $r = r_{-D+1}$ jelölést és a normális deriváltat használjuk.

(C.54) $$G(r) = Q(r)^{1/\mu} r_{\mathrm{F}}^{1-D},$$

ahol

(C.55) $$Q(r) = \frac{\mathbf{S}(r)\Phi^D}{\mathbf{W} - \mathbf{S}(r)\mathbf{V}}.$$

Legyen $v(r) = \mathbf{W} - \mathbf{S}(r)\mathbf{V}$ és F-fel indexszeljük a megengedett egyensúlyi kamattényező, r_{F} helyén felvett értékeket: például $Q_{\mathrm{F}} = Q(r_{\mathrm{F}})$. (C.54)–(C.55) szerint

(C.56) $$G'_{\mathrm{F}} = \mu^{-1} Q_{\mathrm{F}}^{1/\mu-1} Q'_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{F}}^{1-D}$$

és

(C.57) $$Q'_{\mathrm{F}} = \Phi^D \frac{\mathbf{S}'_{\mathrm{F}}}{v_{\mathrm{F}}^2}.$$

Az állandósult állapot definíciója szerint $r_{\mathrm{F}} = Q_{\mathrm{F}}^{1/\mu} r_{\mathrm{F}}^{1-D}$, azaz $Q_{\mathrm{F}}^{1/\mu} = r_{\mathrm{F}}^D$, $Q_{\mathrm{F}}^{1/\mu-1} = r_{\mathrm{F}}^{(1-\mu)D}$. $Q_{\mathrm{F}} = \Phi^D \mathbf{S}_{\mathrm{F}}/v_{\mathrm{F}}$ miatt $v_{\mathrm{F}} = \Phi^D \mathbf{S}_{\mathrm{F}}/r_{\mathrm{F}}^{\mu D}$. Már láttuk a (C.50)-et követő képletben, hogy $\mathbf{S}_{\mathrm{F}} = H_{\mathrm{F}}$. (C.57) és (C.56) szerint

$$Q'_{\mathrm{F}} = \frac{W_{\mathrm{F}} r_{\mathrm{F}}^{2\mu D}}{\Phi^D H_{\mathrm{F}}^2} \mathbf{S}'_{\mathrm{F}}$$

és kihasználva, hogy r_{F} kitevőinek összege $(D - D\mu) + 2\mu D + (1 - D) = \mu D + 1$,

(C.58) $$G'_{\mathrm{F}} = \mu^{-1} r_{\mathrm{F}}^{\mu D+1} \Phi^{-D} W_{\mathrm{F}} H_{\mathrm{F}}^{-2} \mathbf{S}'_{\mathrm{F}}.$$

$\mathbf{S}'_{\mathrm{F}}$ kiszámítása következik. Vegyük észre, hogy $r = r_{-D+1}$-től csak $\mathbf{S}$ (vö. (C.50)) függ: $\Phi^D r^{1-\mu} r_{\mathrm{F}}^{(1-\mu)(D-1)} H_{-D}(r)$. Elhagyva a $-D$ időindexet is, adódik

(C.59) $$\mathbf{S}'_{\mathrm{F}} = -\Phi^D (1-\mu) r_{\mathrm{F}}^{-\mu} r_{\mathrm{F}}^{(1-\mu)(D-1)} H_{\mathrm{F}} - \Phi^D r_{\mathrm{F}}^{(1-\mu)D} H'_{\mathrm{F}},$$

ahol

(C.60) $$H'_{\mathrm{F}} = \frac{W'_{\mathrm{F}} V_{\mathrm{F}} - W_{\mathrm{F}} V'_{\mathrm{F}}}{V_{\mathrm{F}}^2}.$$

Természetesen (C.48)–(C.49) szerint ($w_0 = 0$ miatt)

$$W'_\mathrm{F} = -\sum_{i=1}^{D} w_i r_\mathrm{F}^{-2} r_\mathrm{F}^{-i+1} = -r_\mathrm{F}^{-1} W_\mathrm{F},$$
$$V'_\mathrm{F} = -\mu \sum_{1 \le i \le D} \Phi^i r_\mathrm{F}^{-\mu-1} r_\mathrm{F}^{(1-i)\mu} = -\mu r_\mathrm{F}^{-1}(V_\mathrm{F} - 1).$$

A behelyettesítéseket elvégezve, H'_F számlálója egyszerűsödik: $r_\mathrm{F}^{-1}(\mu - 1)W_\mathrm{F}V_\mathrm{F} - r_\mathrm{F}^{-1}\mu W_\mathrm{F}$. Mivel $H = W/V$, (C.60) maga után vonja, hogy

$$H'_\mathrm{F} = r_\mathrm{F}^{-1}(\mu - 1)H_\mathrm{F} - \frac{r_\mathrm{F}^{-1}\mu H_\mathrm{F}}{V_\mathrm{F}}. \tag{C.61}$$

Mielőtt (C.59)-be behelyettesítenénk a kapott számlálót, vegyük figyelembe, hogy r_F (C.59)-beli mindkét kitevője $D - 1 - \mu D$. Azaz

$$\mathbf{S}'_\mathrm{F} = -\Phi^D r_\mathrm{F}^{(1-\mu)D-1}[(1-\mu)H_\mathrm{F} + H'_\mathrm{F}] = \frac{\mu\Phi^D r_\mathrm{F}^{(1-\mu)D-1} W_\mathrm{F}}{V_\mathrm{F}^2}. \tag{C.62}$$

(C.62)-t beírva (C.58)-ba, adódik (C.53). ∎

A 4.12.a tétel rokon eseteként adódik a

C.13. tétel. *Racionális várakozások. Tegyük föl, hogy $w_0 = 0 = w_D$ és a $q(\lambda)$ karakterisztikus polinom legalább egyik gyökének az abszolút értéke különbözik 1-től. Ekkor az aranyszabály állandósult állapot nyeregpont-instabil.*

Bizonyítás. A polinomok gyökei és együtthatói közti összefüggés szerint $2D - 1$ darab sajátérték szorzata $\gamma_{2D-1,\mathrm{F}}$-fel, azaz 1-gyel egyenlő. Ha legalább egyikük abszolút értéke különbözik 1-től, akkor kell lennie egy olyan gyöknek is, amelyiknek az abszolút értéke nagyobb, mint 1, (és egy másiknak, amely kisebb, mint 1). ∎

Megjegyzések. 1. Mint a nemsokára bemutatandó C.6.* példa szemlélteti, $D = 2$ és $\mu = 1$ esetén bekövetkezik a C.13. tételben kizárt teljesen valószínűtlen eset: mindegyik gyök abszolút értéke 1. (Ezt a kellemetlen esetet más tanulmányok, például Grandmont és Laroque (1991) szintén kizárják.) Egyébként a kizárt esetben elképzelhető a stabilitás, de a kialakuló dinamika mindenképpen nagyon bonyolult lenne. Többszörös gyökök esetén az instabilitás is következne. Szép volna, ha bizonyítani tudnánk az abszolút értékre vonatkozó feltevést $\mu < 1$ esetén.

2. A C.1. táblázatban már bemutattuk a kiegyensúlyozott állapotok elhelyezkedését. Láttuk, hogy a bemutatott esetek mintegy felében $r_\mathrm{B} > 1$. Az esetek másik felében pedig $r_\mathrm{B} < 1$, de 1-hez közeli érték, éppen a realitás miatt. Ha $\gamma_{2D-1,\mathrm{F}} < 1$, de D nagy és r_B közel van 1-hez, akkor a sajátértékek mértani közepe $|\gamma_{2D-1,\mathrm{F}}|^{1/(2D-2)} = r_\mathrm{B}^{D/(2D-2)} \approx \sqrt{r_\mathrm{B}}$. Ezért valószínűsíthető, hogy legalább egy gyök abszolút értékben nagyobb, mint 1.

C.6. példa.* Racionális várakozások. 3 korosztály, CRRA. $D = 2$, $L = 1 = M$, $w_1 = 1$, $0 < \mu \le 1$. Könnyű megmutatni, hogy $r_{\mathrm{B}} = \beta^{(2-2\mu)/(2\mu-1)}$. Ezért $r_{\mathrm{B}} < 1$, ha $\mu > 1/2$ (adós); $r_{\mathrm{B}} > 1$, ha $\mu < 1/2$ (hitelező). $\mu = 1/2$ esetén nem létezik kiegyensúlyozott gyök, eltekintve a leszámítolás nélküli esettől. Túlságosan hosszadalmasak a számítások, de a számítógéppel ellenőrizhető, hogy $\mu < 1/2$ esetén az aranyszabály állapot is instabil. Viszont $1/2 < \mu < 1$ esetén a kiegyensúlyozott állapot még stabil! Egyébként $\mu = 1$ esetén előáll a valószínűtlen eset: $q(\lambda) = \lambda^3 - 1$, azaz mindhárom gyök abszolút értéke 1, a C.13. tétel nem alkalmazható. Számítógépes futással meggyőződhetünk arról, hogy a rendszer instabil, bár a divergencia nagyon lassú.

C.7. példa. Racionális várakozások, 4 korosztály, Leontief-hasznosság. $D = 3$, $L = 1$, $M = 2$, $0 < w_1 < 1/2$, $w_2 = 1 - w_1$, $\mu = 1$. Könnyű belátni, hogy $r_{\mathrm{B}} < 1$. Ennek ellenére r_{B} is instabil, bár működőképes.

Ezen a ponton bevezetünk egy hasznos módszert. Ahelyett, hogy a $(2D-1)$-változós g leképezést vizsgálnánk, beérjük a leképezésnek az átlóra való leszűkítésével, az *aggregátor függvénnyel*: $\Gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ahol $r_{-2D+1} = \cdots = r_{-1}$: azaz $r_0 = \Gamma(r_{-1}) = g(r_{-1}, \ldots, r_{-1})$.

Számítógépes futtatásaink azt mutatják, hogy annyira instabil mindkét állandósult állapot, hogy már maguknak az állandósult állapotoknak a numerikus rekonstruálása is gondot okoz: $r_{-2D+1} = \cdots = r_{-1} = r_{\mathrm{F}}$ esetén $r_0 = r_{\mathrm{F}}$ csak rossz közelítéssel teljesül, már $D > 3$-ra. Természetesen különböző számítógépes programok, valamint különböző algoritmusok némileg különböző számszerű eredményeket adnak.

C.8. példa. Racionális várakozások, CRRA. $\mu = 0{,}5$; $\beta = 0{,}99$; $M = 51$: $r_{\mathrm{B}} = 1{,}024094$. A számítógéppel rajzolt C.2. ábráról látható, hogy az $r_{-141} = \cdots = r_{-1} = r_{\mathrm{F}}$ aranyszabályból vagy kiegyensúlyozott állapotból induló pálya berezeg. Az áttekinthetőség kedvéért 141 helyett csupán 20 kezdőértéket tüntetünk föl.

C.5. feladat. Leontief-hasznosság. $\mu = 1$, $M = 57$: $r_{\mathrm{B}} = 0{,}98657$. Igazoljuk számítógéppel, hogy az $r_{-141} = \cdots = r_{-1} = r_{\mathrm{F}}$ aranyszabályból vagy kiegyensúlyozott állapotból indítva a rendszert, a kerekítési hibák és az instabilitás miatt a rendszer bár simán, de azonnal letér az egyensúlyról!

A változatosság kedvéért bemutatjuk a C.5. feladat Γ görbéjét az állandósult állapotoknál. Figyeljük meg, hogy a legtöbb pontban nincs is értelmezve a függvény! (A C.8. példára nem is tudtuk megrajzolni a görbét!)

A nem-lineáris dinamikában gyakran előfordul, hogy instabil állandósult állapotot ciklusok vesznek körbe. Az állandósult állapot instabilitásából általában nem következik a ciklus instabilitása. Esetünkben azonban a ciklusok is instabilak.

Működőképesség

Eddig csupán az állandósult állapotok instabilitását igazoltuk, illetve valószínűsítettük. Ettől még működhetne a rendszer. A továbbiakban úgy érvelünk, hogy nemcsak a stabilitás, de a működőképessség is valószínűtlen. Ugyanis azt sejtjük, hogy a számláló, de különösen a (C.52) jobb oldalán álló nevező nagyon kis abszolút hibája nagyon eltorzítja a hányadost. Például a leszámítolás nélküli esetben ($\beta = 1$, $\Phi = 1$) az aranyszabálynál a számláló és a nevező értéke, $u_1 = v_1 = 1/(D+1)$. De amíg $\mathbf{W}(r)$ lassan változik r-rel, $\mathbf{S}_t\mathbf{V}_t$ gyorsan változik, lévén $1/(D+1)$ és D nagyságrendű kifejezések szorzata. Például $D = 71$ esetén szerencsétlen számításnál még $u_1/v_1 = 0{,}9995$-be is ütközhetünk.

Néhány valóságszagú paraméterértékre kiszámítottuk a nevező 1-hez közeli gyökeit. Az eredményeket az C.1 és a C.2. táblázat utolsó oszlopa mutatja. Egyedül a szimmetrikus $M = 53$, $\beta = 1$ esetben marad a nevező mindvégig pozitív. Ez azonban mitsem változtat a működésképtelenségen! (Az utolsó előtti oszlopra a naiv várakozások vizsgálatánál lesz szükségünk.)

Azoknak, akik jobban hisznek az analitikus módszereknek, mint a gépi számolásnak, bemutatunk két speciális példát.

C.9. példa. A C.6. példa folytatása, racionális várakozások, kis nevező, 3-korosztályos esetben, Leontief. $L = 1 = M$, $D = 2$, $w_1 = 1$ és $\mu = 1$. A $\xi = 1/r$ jelölést bevezetve $W = \xi$, $\mathbf{V} = 1 + \xi$, $V = 1 + \xi + \xi^2$, $H = \xi/(1 + \xi + \xi^2)$, $S = (1 - \xi + \xi^2)/(1 + \xi + \xi^2)$. Mind a számlálót, mind a nevezőt bővítve az $1 + \xi + \xi^2$ kifejezéssel, $Q = (1 - \xi + \xi^2)/(-1 + \xi + \xi^2)$. Kiváncsiak vagyunk, hol válik a nevező nullává, azaz a racionális várakozás definiálhatatlanná. A kapott másodfokú egyenletet megoldva: $\xi_{\mathrm{D}} = (-1 + \sqrt{5})/2$, azaz $r_{\mathrm{D}} = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$. Ez a szám első pillantásra messze esik 1-től, ha azonban éves szintre térünk át, akkor a 24. gyökvonás után a meglehetősen reális 1,02 körüli érték adódik. Tehát már a 3-nemzedékes modellben évi 2%-os kamatláb mellett a racionális várakozás meghatározhatatlan!

C.6. feladat. Ezen a ponton visszatérünk a diszkontálatlan ($\beta = 1$) Cobb–Douglas-függvényhez ($\mu = 0$) és a pozitív keresetekhez: $D = 2$, $L = 0$, $M = 2$, $w_i \equiv 1/3$. Igazoljuk, hogy (C.52) nevezőjére teljesül $v(r) = -(2/3)r^{-1} + 2 - 2r/3 - r^2/3$, s kalkulátorral vagy számítógéppel ellenőrizzük, hogy a nevezőnek van gyöke 1,355 (azaz éves szinten 1,0135) közelében!

Ilyen rossz nevezők mellett kimondható a

C.2. sejtés. *Racionális várakozások. Minden realista OLC-modellben az állandósult állapotok körüli pályák nemcsak instabilak, de működésképtelenek is.*

Sajnos, nagyon keveset tudunk a 2-nél nagyobb periódusú ciklusokról, legalább is a $0 < \mu < 1$ esetben (C.3. alfejezet). Ha tudnánk határciklusokról, akkor azok környezetében lennének aciklikus működőképes pályák. A $\mu = 1$ eset 2-ciklusai a kísérletek szerint nem határciklusok.

C.7. feladat. Igazoljuk (C.52) számítógépes programja segítségével, hogy a C.4. példában szereplő CRRA-féle 2-ciklus $D = 1$ esetén számítógépen fennmarad, míg $D = 71$ esetén nem!

C.8. feladat. Igazoljuk (C.52) segítségével, hogy a C.8. és C.9. tételben szereplő Leontief-féle 2-ciklus $D = 1$ esetben jól, $D = 71$ esetén rosszul reprodukálható!

Azt hihetnénk, hogy a racionális várakozások határozatlansága és instabilitása aláássa vagy legalábbis meggyengíti a fogalom népszerűségét. Erről szó sincs. A ma divatos közgazdaságtan képviselői azért ragaszkodnak a racionális várakozáshoz, mert ez az egyetlen várakozás, amely igazán konzisztens az egyensúlyi gondolkodással.

C.5. DINAMIKA NAIV VÁRAKOZÁSOKKAL

A C.3. és C.4. alfejezetben föltettük, hogy a fogyasztóknak tökéletes előrelátásuk van. A Bevezetésben azonban már utaltunk arra, hogy ez a feltevés empirikusan eléggé ingatag alapokon áll és elméleti buktatói is vannak. Racionális várakozáson alapuló modellünkben pedig – reális körülmények között –, instabil és működésképtelen pályákkal találtuk magunkat szemben, ezért a sokat bírált naiv várakozások feltevéséhez folyamodunk: (C.7). Ezt a feltevést már AM 57. o. 5. lábjegyzet is mérlegelte egy nyílt modellben. Zárt modellekben Gale (1974) elfelejtett cikkében alkalmazta a három időszakot élő és diszkontálatlan Cobb–Douglas-hasznosságfüggvényű fogyasztóra. Kehoe és Levine (1985) dolgozatában egy 2-korosztályos, soktermékes és általános hasznosságfüggvényű modellben a racionális várakozások mellett a naiv várakozást is vizsgálta. Sajnos, ezek az ígéretes kezdeményezések eddig nem találtak követőkre. Pedig a gyakorlat ismeri a naiv várakozásokat! Vegyük figyelembe, hogy a jelzálogkölcsönök gyakorlati kiszámításánál a bankárok szintén fölteszik, hogy a jelenlegi kamatláb a kölcsön lejáratáig érvényben marad, hogy aztán egy időszakkal később újra számolják a kölcsönt (Simonovits, 1992)!

C.2. táblázat.
Az aranyszabály állandósult állapotok jellemzői

$L = 18$, $D = 71$

Nyugdíjba-vonulási kor M	Ellen-rugalmasság μ	Leszámítolási tényező β	Spektrálsugár $\rho(K_G)$	Gyökök eltérése $r_{\mathrm{D}} - r_{\mathrm{G}}$
51	0,50	0,98	0,9720	**0**0,0001
51	*0,50*	*0,99*	*0,9838*	**0***0,0002*
51	0,50	1,00	1,0322	–0,0004
51	0,75	0,98	1,0333	**0**0,0002
51	0,75	0,99	1,0015*	**0**0,0012
51	0,75	1,00	0,9871	**0**0,0002
51	1,00		0,9946	0,0002
53	0,50	0,98	0,9707	**0**0,0001
53	0,50	0,99	0,9782	**0**0,0001
53	0,50	1,00	1	**0**0
53	0,75	0,98	1,0429*	**0**0,0001
53	0,75	0,99	1,0339	**0**0,0002
53	0,75	1,00	1	**0**0,0004
53	1,00		1	**0**0,0011
55	0,50	0,98	**0**0,96990	
55	0,50	0,99	0,9752	**0**0,0001
55	0,50	1,00	0,9876	**0**0
55	*0,75*	*0,98*	*0,9931*****	**0***0,0001*
55	0,75	0,99	1,0334*	**0**0,0001
55	0,75	1,00	1,0361	**0**0
55	1,00		1,0073	**0**0,0002
57	0,50	0,98	0,9695	**0**0
57	0,50	0,99	0,9734	**0**0,0001
57	0,50	1,00	0,9815	**0**0
57	0,75	0,98	0,9756*	**0**0,0001
57	0,75	0,99	0,9894**	**0**0,0001
57	0,75	1,00	1,0224*	**0**0
57	*1,00*		*1,0182*	**0***0,0001*

Megjegyzések. 1. A számok négy jegyre kerekítve vannak. 2. Egy csillag komplex domináns gyököt jelez instabil kiegyensúlyozott állapot mellett (naiv várakozások). 3. Két csillag komplex domináns gyököt jelez stabil kiegyensúlyozott állapot mellett (naiv várakozások). 4. A dőlt sorok példákat mutatnak be. 5. r_{D} a (C.52) nevezőjének 1 körüli gyöke.

Dinamika

Nyilvánvaló, hogy tökéletlen előrelátás esetén minden fogyasztónak minden időszakban fölül kell vizsgálnia fogyasztási terveit. Tekintsük a $(t-i)$-edik időszakban született fogyasztót, amikor $i-1$ korú, azaz a $(t-1)$-edik időszak végén! A (C.16)–(C.17) jelöléseket a (C.6) naiv várakozásokra specifikáljuk. Elhagyva az időindexet:

$$W_i(r) = \sum_{j=0}^{D-i} w_{i+j} r^{-j}, \tag{C.63}$$

$$V_i(r) = \sum_{j=0}^{D-i} \Phi^j r^{-\mu j}. \tag{C.64}$$

Behelyettesítve a (C.63)–(C.64) párt (C.18)-ba, adódik

$$c_i(a_{i-1},r) = \frac{ra_{i-1} + W_i(r)}{V_i(r)}. \tag{C.65}$$

Megjegyzés. A következő iterációk jelentősen meggyorsítják a számolást:

$$W_i(r) = w_i + \frac{W_{i+1}}{r}, \quad V_i(r) = (\Phi r^\mu)^{D-i} + V_{i+1}(r), \quad i = D,\dots,0,$$
$$W_{D+1}(r) = 0 \qquad \text{és} \qquad V_{D+1}(r) = 0.$$

Vegyük figyelembe, hogy az első és a második iteráció időben visszafelé megy, akárcsak a korábbi optimalizálási fejezetekben.

3. Az a tény, hogy minden fogyasztó minden időszakban optimalizál, lehetővé teszi, hogy a fogyasztók minden időszakban módosítsák keresetükre vonatkozó előrejelzésüket, s ezáltal javítsák döntéseiket. Ezzel a nagyon fontos körülménnyel azonban nem foglalkozunk továbbiakban (lásd Deaton, 1992).

4. Ellentétben a racionális várakozásokkal, naiv várakozásoknál nem kell semmilyen feltevést sem tennünk w_0, w_D és μ paraméterekre nézve, mert csak nagyon speciális feltevések tennék implicit differenciaegyenletünket explicitté.

Most bemutatjuk a legegyszerűbb 3-korosztályos példát.

C.10. példa. Gale (1974) példája, naiv várakozások, 3 korosztály, leszámítolás nélküli Cobb–Douglas-hasznosság. $D = 2$, $w_1 = 1$, $\mu = 0$, $\beta = 1$: (C.65) szerint $c_{0,t} = 1/(3r_t)$, $c_{1,t} = (r_t a_{0,t-1} + 1)/2$, $c_{2,t} = r_t a_{1,t-1}$. (C.21) értelmében $3(a_{0,t-1} + 2a_{1,t-1})r_t^2 - 3r_t + 2 = 0$. Megoldjuk a másodfokú egyenletet r_t-re és az aranyszabály-gyököt választjuk: $r_t = 1$, azaz $c_{i,t} \equiv 1/3$, $a_{0,t-1} = -1/3$, $a_{1,t-1} = 1/3$.

Először föltesszük, hogy $A_{-1} = a_{0,-1} + a_{1,-1} = 0$, azaz $a_{0,t} + a_{1,t} = A_t = R_{-1,t}A_{-1} = 0$. Ekkor a kétdimenziós differenciaegyenlet-rendszer egydimenziósra egyszerűsödik: $a_{1,t} = [3 + \sqrt{9 - 24a_{1,t-1}}]/12$, $t = 0,1,\dots$. Egyszerű számolással igazolható, hogy a rendszer növekvő amplitúdóval oszcillál.

Figyelemre méltó, hogy a fentitől eltérő kezdeti értékek stabil és instabil pályákat származtatnak (valószínűleg $A_{-1} < 0$ és $A_{-1} > 0$ esetén). Tehát állandósult állapotunk féloldalról stabil.

Megjegyzés. Választhattuk volna az $r_t = 2$ megoldást is, de nem tudtuk volna folytatni.

Stabilitás

Miután belekóstoltunk a globális dinamikába, rátérünk a lokális dinamika elemzésére. A 3.2. tétel szerint meghatározzuk az $a_t = f(a_{t-1})$ leképezés $K_{\mathrm{F}} = (k_{ij,\mathrm{F}})$ Jacobi-mátrixát egy a_{F} állandósult állapotban és megvizsgáljuk, hogy spektrálsugara, $\rho(K_{\mathrm{F}})$, kisebb-e vagy sem, mint 1. A konvergenciatényező $1/\rho(K_{\mathrm{F}})$. Szükségünk lesz egy egész sor jelölésre. Az áttekinthetőség kedvéért a képletszám a forrásra utal.

$$W_{i,\mathrm{F}} = \sum_{j=0}^{D-i} w_{i+j} r_{\mathrm{F}}^{-j}, \tag{C.63a}$$

$$W'_{i,\mathrm{F}} = -\sum_{j=0}^{D-i} j w_{i+j} r_{\mathrm{F}}^{-j-1}, \tag{C.63b}$$

$$V_{i,\mathrm{F}} = \sum_{j=0}^{D-i} \Phi^j r_{\mathrm{F}}^{-\mu j}, \tag{C.64a}$$

$$V'_{i,\mathrm{F}} = -\mu \sum_{j=0}^{D-i} j \Phi^j r_{\mathrm{F}}^{-\mu j-1}, \tag{C.64b}$$

$$c_{i,\mathrm{F}} = \Phi^i r_{\mathrm{F}}^{(1-\mu)i} \frac{W_{0,\mathrm{F}}}{V_{0,\mathrm{F}}}, \tag{C.19a}$$

$$a_{i,\mathrm{F}} = r_{\mathrm{F}} a_{i-1,\mathrm{F}} + w_i - c_{i,\mathrm{F}}, \quad a_{-1,\mathrm{F}} = 0, \tag{C.2a}$$

$$c'_{i,\mathrm{F}} = \frac{(a_{i-1,\mathrm{F}} + W'_{i,\mathrm{F}})V_{i,\mathrm{F}} - (r_{\mathrm{F}} a_{i-1,\mathrm{F}} + W_{i,\mathrm{F}})V'_{i,\mathrm{F}}}{V_{i,\mathrm{F}}^2}, \tag{C.65b}$$

$$S'_{\mathrm{F}} = -\sum_{i=0}^{D} c'_{i,\mathrm{F}}, \tag{C.20b}$$

$$k_{ij,\mathrm{F}} = r_{\mathrm{F}} \delta_{i-1,j} \left(1 - \frac{1}{V_{j+1,\mathrm{F}}}\right) + r_{\mathrm{F}} \frac{a_{i-1,\mathrm{F}} - c_{i,\mathrm{F}}}{V_{j+1,\mathrm{F}} S'_{\mathrm{F}}}, \tag{C.66}$$

ahol δ_{ij} a Kronecker-szimbólum: 1, ha $i = j$ és 0 egyébként.

Figyelem: (C.65b) a (C.65)-beli kifejezés parciális deriváltja, nem pedig (C.22) teljes deriváltja.

C.3. segédtétel. *Naiv várakozások. Az f leképezés Jacobi-mátrixa az a_{F} állandósult állapotban $K_{\mathrm{F}} = (k_{ij,\mathrm{F}})$.*

Bizonyítás. Linearizáljuk a (C.2) egyenletet a_{F} körül, ahol $r(a)$ a (C.65) és (C.20) által meghatározott függvény.

$$k_{ij} = \frac{\partial r}{\partial a_{i-1}} + r\delta_{i-1,j} - \frac{\partial c_i}{\partial a_j}.$$

Az első parciális deriváltat a szóban forgó $\mathbf{R}^{D+1} \to \mathbf{R}$ implicit függvényből határozhatjuk meg. Ismét felhasználva a (C.65) összefüggést, $S(a,r) = 1 - \sum_{i=0}^{D} c_i(a_{i-1},r)$ folytán

$$\frac{\partial r}{\partial a_j} = -\frac{\partial S/\partial a_j}{\partial S/\partial r} = -\frac{r}{V_{j+1}S'}.$$

A második parciális derivált

$$\frac{\partial c_i}{\partial a_j} = \delta_{i-1,j}\frac{r}{V_{j+1}} + c_i'\frac{\partial r}{\partial a_j}.$$

Behelyettesítéssel adódik (C.66). ∎

Ezen a ponton egy hasznos megfigyelés kínálkozik a naiv várakozásokhoz tartozó $S_{\rm F}' = 0$ *szingularitási feltétel*re. Legyen $\beta = 1$ és $r_{\rm G} = 1$, ekkor $V_{i,{\rm G}}$, $V_{i,{\rm G}}'/\mu$, $c_{i,{\rm G}}$, $a_{i,{\rm G}}$ egyaránt függetlenek μ-től. Ezért (C.20) az $S_{\rm G}' = \pi - \pi_\mu\mu$ alakot ölti, ahol π és π_μ egy-egy paraméter. $S_{\rm G}' = 0$ ekvivalens a $\mu_{\rm o} = \pi/\pi_\mu$ feltétellel. Ha $\mu_{\rm o} < 0$ vagy $\mu_{\rm o} > 1$, akkor nincs szingularitás, legalábbis $\beta = 1$, $r_{\rm G} = 1$ mellett. Ha azonban $0 \le \mu^o \le 1$, akkor az implicit egyenletnek tipikusan nincs megoldása. Például számítássorozatunkban $M = 51$, $\mu_{\rm o} = 0{,}636$ és $M = 57$, $\mu_{\rm o} = 0{,}800$.

Mit mondhatunk a szingularitás környékéről? Mivel a teljes jövedelem egységnyire van normálva, az érzékenység π_μ-től függ. Számítással igazolható, hogy $\pi_\mu = D/4$, azaz visszatérve a skála-invarianciához: $\Pi_\mu = \pi_\mu(d\mathbf{r}_t/dr_t) = (D/4)\cdot 72/(D+1) = 18D/(D+1)$. Naiv várakozásoknál a korosztályszám növelése nem rontja, hanem némileg javítja a helyzetet.

Mit mondhatunk $\rho(K_{\rm F})$-ről? Általában nem sokat, azonban ügyesen választott speciális esetekben lehetséges a stabilitás igazolása. De mindenekelőtt egy segédtételre lesz szükségünk.

C.4. segédtétel. *a) Ha $0 < -A_{\rm G} < S_{\rm G}'$, akkor a $K_{\rm G}$ mátrix maximális oszlopösszege $K_{n-1,{\rm G}} = 1 + A_{\rm G}/S_{\rm G}'$. b) A $K_{\rm B}$ mátrix minden oszlopösszege $r_{\rm B}$.*

Bizonyítás. Először egy megengedett állandósult állapotot tekintünk. (C.2a) és (C.65b) szerint $c_{D,{\rm F}}' = a_{D-1,{\rm F}}$, (C.20$b$) felhasználásával $S_{\rm F}' = -\sum_{i=0}^{D-1} c_{j,{\rm F}}' - a_{D-1,{\rm F}}$ és definíció szerint $A_{\rm F} = \sum_{i=0}^{D-1} a_{j-1,{\rm F}} + a_{D-1,{\rm F}}$. Tehát $K_{j,{\rm F}} = r_{\rm F}[1 + A_{\rm F}/(V_{j+1,{\rm F}}S_{\rm F}')]$.

a) $\{V_{j+1,{\rm G}}\}$ csökkenő sorozat, ezért feltételünk esetén az aranyszabálynál $0 < K_{j,{\rm G}} < K_{D-1,{\rm G}} = 1 + A_{\rm G}/S_{\rm G}'$. *b)* Kiegyensúlyozott állapotra $A_{\rm B} = 0$, tehát $K_{j,{\rm B}} = r_{\rm B}$. ∎

A C.4 segédtétel egy klasszikus feladatnál és két fontos példánál is hasznunkra lesz.

C.11. példa. A C.6. példa folytatása, naiv várakozások, 3 korosztály, CRRA-hasznosság. $D = 2$, $w_1 = 1$, $0 < \mu < 1$. Kezdjük az elemzést az egyszerűbb esettel, amikor nincs leszámítolás: $\beta = 1$. Ekkor $r_{\rm B} = 1$, $\pi = 1/6$, $\pi_\mu = 1/2$, azaz $\mu_{\rm o} = 1/3$. Itt a rendszer nincs is definiálva. Meglehetősen aprólékos számítások azt mutatják, hogy megfelelően nagy, de még értelmes diszkontálásra például $\beta = 0{,}95^{24}$-re $r_{\rm G}$ gyakorlatilag a teljes $0 < \mu < 1/2$ intervallumon stabil. Megfelelő türelemmel $1/2 < \mu < 1$ esetén $r_{\rm B}(< 1)$ stabilitása is igazolható, bár $\mu \approx 1/2$-re $\rho(K_{\rm B}) > r_{\rm B}$. (Hasznát vehetjük az A.3. feladatnak.)

C.12. példa. Naiv várakozások, $D+1$ korosztály, autarchia. $L = 0$, $M = D$, $\beta = 1$, $w_i = 1/(D+1) = c_{i,{\rm G}}$. Ekkor szimmetrikus az aranyszabály: $r_{\rm B} = 1$ és $a_{i,{\rm G}} = 0$, $c_{i,{\rm G}}' = (1-\mu)(i-D)/[2(D+1)]$. Tehát a szingularitási érték $\mu_{\rm o} = 1$, $0 \le \mu < 1$ esetén $k_{ij,{\rm G}} > 0$.

Sajnos, $K_{j,{\rm G}} = 1$ minden j-re, azaz az A.7b. tétel szerint $\rho(K_{\rm B}) = 1$, ahol a 3.2. tétel nem használható. Ennek ellenére a C.12. példa jó kiindulási pont.

C.14. tétel. *Naiv várakozások. Legyen $\mu < 1$, legyen $\beta < 1$ és w_i rendre olyan közel 1-hez és 1/(D+1)-hez, hogy $K_\mathrm{F} > 0$. a) Ha $r_\mathrm{B} > 1$, akkor az adós aranyszabály stabil. b) Ha $r_\mathrm{B} < 1$, akkor a kiegyensúlyozott állandósult állapot stabil.*

Megjegyzések. 1. Érdekes lenne tudni, hogy mekkora a C.14. tétel érvényességi köre. A C.9. feladat szerint $D = 1$ esetén maximális. Számítógépes kísérletek arra utalnak, hogy $D > 1$ esetén is nagy, hiszen $0{,}98 \le \beta \le 1$ és $w_i = w_0\Omega^i$, $0{,}99 \le \Omega \le 1{,}01$ esetén mind $K_\mathrm{G} > 0$, mind $0 < -A_\mathrm{G} < S'_\mathrm{G}$ fennáll. A C.10. példában viszont K_G-nek pozitív és negatív elemei is vannak, azaz az érvényességi kör már $D = 2$-nél sem teljes.

2. Ghiglino és Tvede (1995b) racionális várakozások és 2-korosztályos modellben vizsgálta az autarchia közeli dinamikát.

3. A C.14. tétel fényében a C.12. példa szimmetrikus állandósult állapotában féloldali stabilitás lép föl.

Bizonyítás. *a)* A keresetek pozitivitása miatt a C.6. tételben $\mu_1 = 1$, tehát az *a)* pont szerint $A_\mathrm{G} < 0$. Folytonosság miatt $0 < -A_\mathrm{G} < S'_\mathrm{G}$ is teljesül, tehát a C.4a. segédtétel szerint $0 < K_{j,\mathrm{G}} < 1$. *b)* $K_{j,\mathrm{B}} = r_\mathrm{B}$. Mindkét esetben az A.7. tétel szerint $\rho(K_\mathrm{F}) < 1$, tehát a megfelelő állandósult állapot stabil. ∎

Egyelőre az általános és realista elemzés számítógépet kíván. Folytatva a C.1. és a C.2. táblázat oszlopaiban bemutatott számításokat, a következő eredményeket kaptuk: $\rho(K_\mathrm{B}) = r_\mathrm{B}$ (D-dimenziós $\mathbf{1}^\mathbf{T}$ bal oldali sajátvektorral), annak ellenére, hogy K_B-nek pozitív és negatív elemei is vannak. Azonban $\rho(K_\mathrm{G})$ nem becsülhető a maximális oszlopösszegekkel. A spektrálsugarakat a C.2. táblázat utolsó előtti oszlopában szerepeltettük. A C.1. és C.2. táblázat megfelelő sorainak összehasonlításából meggyőződhetünk arról, hogy a vizsgált esetekben legalább az egyik állandósult állapot stabil. Néhány esetben mindkét állandósult állapot stabil (lásd a C.14. példát később).

A C.11. példán gondolkozva a következő kérdés vetődik föl: lehetséges-e, hogy reális modellben valamilyen szinguláris értéknek egy instabil kiegyensúlyozott állapot felel meg? Ismét csak a diszkontálatlan hasznosságfüggvényre szorítkozva, azt tapasztaljuk, hogy lehetséges, mert $M = 53$ esetén szimmetrikus állandósult állapotot kapunk. Azonban $\pi_\mu = 17{,}75$ miatt a $\mu_0 = 0{,}688$ szingularitástól nagyon hamar eltávolodunk. Megkockáztatható a

C.3. sejtés. *Naiv várakozások. Tipikus realista OLC-modellben legalább az egyik állandósult állapot stabil.*

Megjegyzés. Érdemes megemlíteni Grandmont és Laroque (1990) 1.2. következményét: megfelelő feltételek esetén (például, ha a tanulószabály fölismeri a 2-ciklusokat), a tanulási szabály melletti stabilitásból következik a racionális várakozások melletti instabilitás. (Mivel a naiv várakozások nem ismerik föl a 2-ciklusokat, a szóban forgó eredmény nem alkalmazható modellünkre.)

Működőképesség

A stabilitási eredmények nagyon hasznosak, de keveset árulnak el az állandósult állapotok vonzáskörzetéről. Hasonlóan homályban maradnak az átmeneti viselkedés jellemzői, azaz a rendszer működőképessége. A racionális várakozásokkal ellentétben, a naiv várakozásoknál az állandósult állapotok minden gond nélkül „újratermelik önmagukat”. Mi történik azonban, ha a rendszert megzavarjuk, például a kezdő kamattényezők közös értéke eltért az állandósult állapotokétól:

$$r_t = r, \quad t = -D, \dots, -1?$$

A kísérletek tanúsága szerint egy-két százalékos eltérítésnél a rendszer simán konvergál a kisebbik egyensúlyi értékhez.

C.13. példa. A C.8. példa folytatása, naiv várakozások, CRRA. $r = 0{,}99$; 1,02 és 1,025 kezdőértékekre két stabil és egy instabil pálya alakul ki. A C.2. ábrával való összehasonlításnál vigyázzunk arra, hogy most a C.4. ábrán sokkal kisebb részletet ábrázoltunk és 71 kezdőérték helyett csak 10-et rajzoltuk be!) A jobb áttekintés kedvéért megrajzoltuk a naiv várakozás aggregátor leképezését is: C.5. ábra. Figyeljük meg, hogy az aggregátor leképezés növekvő, alulról metszi az átlót $r = 1$-nél és fölülről $r = 1{,}0241$-nél, stabil aranyszabályt és instabil kiegyensúlyozott állapotot sugallva.

C.9. feladat. Végezzük el a C.13. példa számításait Leontief-hasznosság-függvényre!

Végül választ keresünk arra, hogy mi történik a C.5c. tétel ablakában.

C.14. példa. Naiv várakozások, kettős stabilitás. $M = 55$, $\mu = 0{,}75$, $\beta = 0{,}98$: $r_{\mathrm{B}} = 0{,}928033$. Vegyük észre, hogy ekkor van egy második kiegyensúlyozott állapot is, $r = 0{,}3$ körül. A C.6. ábra három pályát mutat: a 0,92 és 0,94-ből induló pályák konvergálnak r_{B}-hez, míg a 0,995-ből induló pálya 1-hez tart. Figyeljük, meg, hogy most az aggregátor leképezésnek két reális ágát mutatja a C.7. ábra, az első két pálya az alsón, a harmadik a felső ágon halad. Nyitott kérdés: mi történik, ha felváltva ugrándozik a kamattényező a két ágon?

C.6. KÉT TB-RENDSZER ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Az együttélő korosztályok modelljének egyik legfontosabb alkalmazása a nyugdíjrendszerek elemzése. Most egészen röviden utalunk arra, hogy a fentebb elmondottak hogyan hasznosíthatók.

Nyugdíjrendszereket általában stacionárius pályák szerint értékelnek. Eddig belülről meghatározottnak tekintettük a kamattényezőt, és megköveteltük a fogyasztás és a jövedelmek keresztmetszeti egyensúlyát. Ez nagy zárt gazdaság esetén megengedhető feltevés, de nyitott kis gazdaság esetén már nem. A valósághoz közeledve, érdemes szerepeltetetni mind a termelékenység, mind a népesség növekedését, valamint a halálozási kockázatot. Ez utóbbi arra utal, hogy az egy időszakban született emberek közül csak egy egyre csökkenő hányad éli meg a következő időszak végét. Föltesszük, hogy az egy fogyasztóra jutó átlagkereset párhuzamosan nő az egy fogyasztóra jutó termeléssel (a termelékenységgel). Föltesszük azonban, hogy a *keresetprofil* időben állandó.

A két tb-rendszer

A tb-rendszerek két tiszta formájával foglalkozunk: a tőkefedezeti és a felosztó–kiróvó rendszerrel, angol rövidítésük alapján CR és PAYG rendszerrel (Simonovits, 1995d).

Tulajdonképpen a tőkefedezeti rendszert vizsgáltuk a C.2. alfejezetben, ezért erről nem kell külön szólnunk. A felosztó–kiróvó rendszer tanulmányozása hasonló, de bonyolultabb, mint a tőkefedezeti rendszeré.

Két felosztó–kiróvó rendszert kellene megkülönböztetünk. 1. A PAYG1 rendszert, ahol a be- és kifizetések kívülről vannak megadva, és magánmegtakarítások/kölcsönök meg vannak engedve. 2. A PAYG2 rendszert, ahol a be- és kifizetéseket optimalizálják, és magánmegtakarítások/kölcsönök nincsenek megengedve. A valóságban a kettő kombinálódik, de ezt egyelőre nem tudjuk modellezni.

Míg a fejlett országokban az 1950–1960-as évek környékén a B. függelékben tárgyalt Aaron-feltétel teljesült, az 1970-es évektől kezdve nem teljesül. Számos szakértő ezzel indokolja, hogy vissza kell térni a CR-hez. Ez az érvelés általában sántít, mert eltekint a gyereknevelési költségeknek a gyerekszám-csökkenéssel járó jelentős csökkenésétől és a termelékenységnövekedés csökkenését kísérő fokozott aktivitási rátától! (Samuelson (1975) elhanyagolhatónak nevezte e gyereknevelési költségeket.) Egyelőre eltekintünk ezektől a körülményektől, s ekkor *szűken vett* transzferrendszerről beszélünk. Ekkor érvényes a B.10. tétel általánosítása.

C.15. tétel. *Tetszőleges nyitott OLC-modellben, a szűken vett felosztó–kiróvó transzferrendszer akkor biztosít nagyobb életkereset jelenértéket, azaz jólétet, mint a tőkevárományosi rendszer, ha teljesül az Aaron-feltétel, a növekedési ütem nagyobb, mint a kamatláb:*

$$\Gamma > r.$$

Míg a nyugdíjtranszfereket a fiataloktól az idősek felé irányulnak, a gyereknevelési és lakástámogatási transzferek az idősektől a fiatalok felé irányulnak. Ilyenkor *kiterjesztett* transzferrendszerekről beszélünk. Az egyenleget a nettó transzferek átlagos kora (δ) fejezi ki, azaz a fogyasztó átlagos kora, ahol a súlyozásban szerepel a korosztály népességi és részesedési súlya. A C.6. tételhez hasonóan igazolható a

C.16. tétel. *Tetszőleges nyitott OLC-modellben, a kiterjesztett PAYG1 felosztó–kiróvó transzferrendszer akkor biztosít nagyobb életkereset jelenértéket, azaz jólétet, mint a tőkevárományosi rendszer, ha teljesül a kiterjesztett Aaron-feltétel: pozitív δ esetén a növekedési ütem nagyobb, mint a kamatláb, negatív δ esetén a növekedési ütem kisebb, mint a kamatláb:*

$$\delta(\Gamma - r) > 0.$$

Felvetődik a kérdés: mi korlátozza a program méretét? Sajnos, a legtöbb forrás hallgat erről a nehézségről. Aaron (1966) úgy próbált kiutat találni, hogy modelljében korfüggetlen fogyasztást tételezett föl. (Az már csak apróság, hogy a nyugdíjakat a nettó kereset helyett a bruttó keresettel azonosította. Szerencsére ez a hanyagság nem változtat a tétel érvényén.) De ekkor már PAYG2-höz jutunk.

Kitérő a PAYG2-re

Simonovits (1995a)-ban általános hasznosságfüggvény mellett tanulmányoztam a PAYG2 rendszert, most megelégszünk a legegyszerűbb esettel, a Leontief-hasznosságfüggvénnyel, amely egyszerűen visszavezethető a PAYG1-re. Mivel nincs magánmegtakarítás, érvényes a transzfer=fogyasztás–kereset. Mivel nincs időbeli helyettesítés, az optimális fogyasztás kor szerinti arányai függetlenek a költségvetési korláttól, ahol a kamattényező helyett helyett növekedési tényező áll.

C.17. tétel. *Leontief-hasznosságfüggvény esetén a kiterjesztett PAYG1 és PAYG2-transzferrendszer egyszerre jobb vagy rosszabb, mint a CR-rendszer.*

D. FÜGGELÉK. OPTIMÁLIS NYUGDÍJJÁRADÉK TERVEZÉSE (Társszerző: Eső Péter)

A 8. fejezetben a dinamikus programozás alkalmazásait mutattuk be, most a diszkrét idejű optimális szabályozáselmélet alkalmazásait mutatjuk be. Kiemeljük, hogy analitikus megoldás helyett egy hatékony numerikus algoritmussal dolgozunk.

A modell

Ebben a függelékben a következő feladatot vizsgáljuk. Létezik az egyéneknek egy (stacionárius) népessége, amelynek tagjai egyoldalúan ismerik saját várható élettartamukat. Minden egyén 0 évesen lép be a munkapiacra, és egységnyi terméket termel évente. Feltesszük, hogy a dolgozók nem takaríthatnak meg. A nyugdíjrendszer első összetevője a $\tau < 1$ járulékkulcs, amelyet a dolgozók fizetnek (más adóktól eltekintünk). Amikor a dolgozó nyugdíjba megy, mondjuk R évesen, abbahagyja a termelést, nem fizet többé járulékot, viszont $b > 0$ nagyságú éves életjáradékot kap. A kormányzat alakítja ki a τ járulékkulcsot, és a $b(R)$ járadékfüggvényt. Megköveteljük, hogy a rendszer pénzügyi egyensúlyban legyen, (azaz a várható járadékok nem lehetnek nagyobbak a várható járulékoknál).

Egy egyén v életpálya-hasznosságfüggvénye a dolgozói és nyugdíjas szakasz összege. Ha a t-típusú egyén R évet dolgozik, akkor $\bar{U} = u(1-\tau)$ hasznossághoz jut R éven keresztül és $w(b)$ hasznossághoz $t - R$ éven keresztül, tehát az életpálya-hasznosságfüggvény

$$v = R\bar{u} + (t - R)w(b). \tag{D.1}$$

Az egyén szabadidő-preferenciáját $u(\cdot)$ és $w(\cdot)$ éves hasznosságfüggvények különbözősége tükrözi. Egyszerűség kedvéért föltesszük, hogy $u(x) = w(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ahol ε a munka határáldozata. Egyetlenegy megszorítást teszünk u-ra és v-re:

$$w(0) - w'(0)\tau < u(1 - \tau) < w(1) - w'(1)(\tau + 1). \tag{D.2}$$

A kormányzat egy optimális $\langle b(R)\rangle$ nyugdíjrendszert tervez, amely maximalizál egy additív konkáv társadalmi jóléti függvényt: $\sum_t \psi(v_t)f_t$, ahol f_t a t várható élettartamú egyének relatív gyakorisága. (Vegyük észre, hogy különböző élettartamú egyének életpálya-hasznosságát összeadva vagy egy korosztály életpálya jólétét vagy a stacionárius népesség egyéves jólétét mérjük. Ugyanez elmondható a későbbiekben bevezetendő egyéni és aggregált egyenlegekre is.)

Ebben a függelékben a kormányzat adott τ járulékkulcs esetén optimalizálja a társadalmi jóléti függvényt a $b(R)$ járadékfüggvény szerint. Nem foglalkozunk, csak utalunk a további feladatra, amikor a tervező a parametrikus maximális társadalmi jóléti függvényt optimalizálja τ szerint. Modellünkben a tb-járulékkulcs független az életkortól, ezért teljesen a járadékfüggvényre hárul, hogy az egyéneket élettartamuk szerint osztályozza. Mivel a kormányzat nem figyeli meg az egyének magáninformációit, a nyugdíjrendszernek (bayesi) ösztönzési kompatíbilisnek kell lennie. Nincs szükség viszont a részvételi korlátra, hiszen a részvétel kötelező. (Ehelyett egy keresztmetszeti költségvetési korlátunk van, akárcsak az optimális jövedelemadóztatásban.)

Az első legjobb megoldás

Ebben a pontban a következő feltevés esetén elemezzük a mechanizmustervezési feladat megoldását: az egyéneknek *nincs* magáninformációjuk saját élettartamukról. Csak azt tesszük föl, hogy minden dolgozó várható élettartama mindenki által megfigyelhető. Ez a megoldás mérceként szolgál a következő pontban vizsgálandó második legjobb megoldás esetén.

A teljes informáltság miatt a társadalmi tervező (a mechanizmusszerkesztő) képes első legjobb nyugdíjtervet készíteni, a t-típusú dolgozóknak R_t szolgálati időt és b_t éves nyugdíjat rendelve. Feltehetjük, hogy $R_t \leq t$. Legyen v_t a t várható élettartamú egyén életpálya-hasznosságfüggvénye: $v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t$. A típusok S-től T-ig terjednek, mindkét érték egész szám. Mivel első lépésben τ adott, legyen $\bar{u} = u(1-\tau)$.

Ekkor a kormányzat az egyéni hasznosságok növekvő és konkáv ψ függvényének súlyozott összegét maximalizálja, azaz

$$\max_{(b_t,R_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t,$$

feltéve, hogy teljesül

$$v_t = [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t,$$
$$0 \leq \sum_{t=S}^{T} [(\tau + b_t)R_t - tb_t] f_t.$$

Ezt a feladatot hívjuk az *első legjobb optimum feladatá*nak. Rendeljük λ-t az aggregált költségvetési korláthoz szorzónak, és írjuk föl a megfelelő Lagrange-függvényt:

$$L^* = \sum_{t=S}^{T} \psi \left\{ [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t \right\} f_t + \lambda \sum_{t=S}^{T} \left\{ (\tau + b_t)R_t - tb_t \right\} f_t.$$

Az elsőrendű feltételek a következők:

$$L'^*_{b_t} = \psi'(v_t)w'(b_t)(t - R_t) + \lambda(R_t - t) = 0 \Leftrightarrow \psi'(v_t)w'(b_t) = \lambda,$$
$$L'^*_{R_t} = \psi'(v_t)[\bar{u} - w(b_t)] + \lambda(\tau + b_t) = 0.$$

Az elsőrendű szükséges feltételekből következik a

D.1. tétel. *Az első legjobb megoldásban, $(b_t^*, R_t^*)_{t=S}^T$, a nyugdíj független a várható élettartamtól: $b_t^* \equiv b^*$, és kielégíti az*

$$\bar{u} - w(b^*) + w'(b^*)(\tau + b^*) = 0 \tag{D.3}$$

egyenletet.

A (D.2) feltevés miatt a (D.3) egyenletnek van megoldása. Vegyük észre, hogy $\bar{u} < w(b^*)$, s a megoldás egyértelmű, hiszen a bal oldali kifejezés deriváltja negatív.

Ha $\psi' \equiv 1$ (utilitarizmus), akkor sok olyan R_t^* megoldás lehetséges, amely kielégíti az aggregált költségvetési korlátot, feltéve, hogy $b_t^* \equiv b^*$. Egy különleges első legjobb megoldás az *autarkia*, amelyben a költségvetési feltétel minden típusra egyenként teljesül, azaz

$$R_t^A = \frac{b^*}{\tau + b^*} t, \qquad t = S, \ldots, T.$$

Ha ψ szigorúan konkáv, akkor $b_t^* \equiv b^*$, és R_t^* minden $t = S, \ldots, T$ értékre meghatározható az elsőrendű feltételekből:

$$\psi'(v_t) = \frac{\lambda}{w'(b^*)} = \psi'(v_s), \qquad v_t = [\bar{u} - w(b^*)]R_t + w(b^*)t, \qquad s,t \in \{S, \ldots, T\}$$

és az aggregált korlátból. Nyilvánvalóan $s < t$ akkor és csak akkor áll, ha $R_s^* < R_t^*$ is áll. Tipikusan az első legjobb megoldás különbözik az autarktól (az optimumban van újraelosztás).

Figyeljük meg, hogy sem az autarkia, sem az első legjobb megoldás nem elégíti ki az érdekeltségi feltételt, ha ψ szigorúan konkáv. Másképp, a társadalmi tervező képtelen megvalósítani ezeket a nyugdíjazási szabályokat, tudakolván az egyének várható élettartamát és ennek megfelelően különböző szolgálati időt írva elő számukra. Ez azért van így, mert R_t^A (vagy R_t^*) szigorúan nő t-vel, míg b_t^* állandó. Formálisan: R_t^* csak akkor elégíti ki az érdekeltségi feltételt állandó b_t^*-nál, ha R_t^* is állandó.

Milyen megszorításokkal járnak általában az érdekeltségi feltételek a megvalósítható mechanizmusokra? A következő pontban a második legjobb (optimális *és* ösztönzéssel kompatíbilis) nyugdíjmechanizmusokkal foglalkozunk.

Optimális nyugdíjmechanizmus aszimmetrikus információ esetén

Ebben a pontban elejtjük azt a feltevést, hogy a kormányzat ismeri a várható egyéni élettartamokat. Ekkor a második legjobb megoldást keresve, bevezetjük az érdekeltségi feltételeket, és levezetjük a társadalmilag optimális, érdekeltségi feltételt kielégítő járadékfüggvényt.

A $(b_t, R_t)_{t=S}^T$ szabály érdekeltségi feltétele azt jelenti, hogy a t-típus (b_t, R_t)-t választja a lehetőségekből. A szomszédos érdekeltségi feltételek a következők: $t = S, \ldots, T-1$,

$$v_t \geq [\bar{u} - w(b_{t+1})]R_{t+1} + w(b_{t+1})t = v_{t+1} - w(b_{t+1}),$$
$$v_{t+1} \geq [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)(t+1) = v_t + w(b_t),$$

azaz

$$v_t + w(b_t) \leq v_{t+1} \leq v_t + w(b_{t+1}), \tag{D.4}$$

ahol $t = S, \dots, T-1$. A $w(\cdot)$ monotonitásából következik $b_t \le b_{t+1}$ (ahonnan következik $R_t \le R_{t+1}$). Belátható, hogy a nem szomszédos korlátok elhagyhatók. Megmutatható, hogy a felfelé mutató korlátok elhagyhatók, a lefelé mutató érdekeltségi korlátok egyenlőséggel teljesülnek!

A társadalmi tervező feladata a következő:

$$\max_{(b_t, R_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t$$

feltéve, hogy

$$\begin{aligned} v_t &= [\bar{u} - w(b_t)]R_t + w(b_t)t, \qquad t = S, \dots, T \\ 0 &\le \sum_{t=S}^{T} [(\tau + b_t)R_t - tb_t] f_t, \\ v_{t+1} &= v_t + w(b_t), \qquad t = S, \dots, T-1. \end{aligned}$$

A várható t élettartamok ismeretlenek a kormányzat előtt. Ezt a feladatot a társadalmi tervező *második legjobb megoldás feladatá*nak nevezzük, és ezt elemezzük a továbbiakban. Mivel a kvalitatív eredmények markánsan különböznek az *utilitarista* és a *szigorúan konkáv* esetben, két alpontra bontjuk az elemzést.

Tegyük még föl, hogy

$$R_T < S, \tag{D.5}$$

azaz a leghosszabb élettartamú dolgozó szolgálati ideje rövidebb, mint a legrövidebb várható élettartam. (Ez egy ésszerű feltevés az öregségi nyugdíjrendszerben.)

Utilitarista megoldás

Tegyük föl, hogy a társadalmi jóléti függvény utilitarista: $\psi' \equiv 1$. Ekkor egy meglepő eredményt kapunk:

D.2. tétel. *Ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, és (D.5) érvényes, akkor a társadalmilag optimális járadékszabály teljesen merev:*

$$b(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } R < R^*; \\ b^* & \text{ha } R \ge R^* \end{cases} \tag{D.6}$$

Sőt a második legjobb szabály megvalósítja az első legjobb kimenetelt.

Bizonyítás. A (D.6) járadékszabály megfelel a $b_t^* \equiv b^*$ és $R_t^* \equiv R^*$ azonosságnak. Ez a szabály kielégíti az érdekeltségi feltételeket, mert állandó (a dolgozó elosztása független a típusától). De első legjobb megoldás is, mert a megoldás kielégíti az optimumfeltételt, és a mechanizmus kielégíti a költségvetési szabályt. Emellett (D.5) miatt $R^* \le t$ minden t-re. ∎

Paradox módon a rugalmas nyugdíjazásra kapott második legjobb megoldás meglehetősen merev: mindenki ugyanannyi ideig dolgozik. Ez a paradox az utilitarista társadalmi jóléti függvény következménye, ezért a továbbiakban elvetjük ezt az esetet.

Optimális szabály szigorúan konkáv ψ esetén

Legyen ψ szigorúan konkáv. Az optimális utilitarista szabály továbbra is megengedett és kielégíti az érdekeltségi feltételeket, de már társadalmilag nem optimális. Akármilyen szigorúan konkáv társadalmi jóléti függvényt mérlegelünk, az utilitarista optimum túlságosan sokat csoportosít át a várhatóan rövid életűektől a hosszú életűeknek. Másképpp kifejezve: az az elosztás, amelyik minden munkást ugyanannyi szolgálati idővel és ugyanannyi nyugdíjjal küld nyugdíjba, méltánytalannak tűnik egy olyan társadalomban, ahol a szerencsétlenebb (rosszabb génekkel született, s miatt várhatóan rövidebb életű) egyének haszna nagyobb súlyt kap.

A második legjobb feladat megoldása céljából újrafogalmazzuk a feladatot Mirrlees (1986, Section 6) változócsere-módszerével. Legyen a szolgálati idő

$$R(v_t,b_t,t) = \frac{w(b_t)t - v_t}{w(b_t) - \bar{u}},$$

és az életpálya nettó járuléka vagy egyenlege

$$z(v_t,b_t,t) = (\tau + b_t)R(v_t,b_t,t) - tb_t.$$

Az átalakított feladat

$$\max_{(b_t,v_t)_t} \sum_{t=S}^{T} \psi(v_t) f_t$$

feltéve, hogy

$$\sum_{t=S}^{T} z(v_t,b_t,t)\, f_t \geq 0,$$

$$v_{t+1} - v_t - w(b_t) = 0, \qquad t = S,\ \ldots, T-1.$$

Rendeljük λ-t az első korláthoz, és $(\mu_t)_t$-t a korlátok második csoportjához. Ekkor az új Lagrange-függvény a következő:

$$L = \sum_{t=S}^{T} [\psi(v_t) + \lambda z(v_t,b_t,t)]\, f_t + \sum_{t=S}^{T-1} \mu_t[v_{t+1} - v_t - w(b_t)].$$

Szokásos meggondolással adódik a

D.3. tétel. *A második legjobb feladat elsőrendű szükséges feltételei $t = S, \ldots T$ esetén,*

(D.7) $$L'_{b_t} = \lambda z'_{b_t}(v_t,b_t,t)\, f_t - \mu_t w'(b_t) = 0,$$

(D.8) $$L'_{v_t} = \left[\psi'(v_t) + \lambda z'_{v_t}(v_t,b_t,t)\right] f_t - \mu_t + \mu_{t-1} = 0, \qquad t < T$$

(D.9) $$L'_{\mu_t} = v_{t+1} - v_t - w(b_t) = 0,$$

(D.10) $$L'_{\lambda} = \sum_{t=S}^{T} z(v_t,b_t,t) f_t \geq 0,$$

ahol $\mu_{S-1} = 0$ és $\mu_T = 0$.

A $z(v_t,b_t,t)$ definíciója szerint az elsőrendű feltételekben megjelenő parciális deriváltak

$$z'_{v_t}(v_t,b_t,t) = -\frac{\tau + b_t}{w(b_t) - \bar{u}},$$

$$z'_{b_t}(v_t,b_t,t) = \frac{v_t - t\bar{u}}{[w(b_t) - \bar{u}]^2} \left\{(\tau + b_t)w'(b_t) - [w(b_t) - \bar{u}]\right\}.$$

A valószínűtlen sarokmegoldásoktól eltekintve, a D.3. tételből adódik a

Következmény. *A második legjobb optimumban a leghosszabb várható élettartamú egyének járadéka első legjobb:* $b_T = b^*$. *Ha* ψ *szigorúan konkáv, akkor* $b_t < b^*$ *minden* $t < T$*-re, azaz a leghosszabb várható élettartamú egyénektől eltekintve mindenki kevesebbet kap, mint amekkora az első legjobb járadék.*

Megjegyzések. 1. Diszkrét idejű modellt választottunk, s így nem várható sima járadékfüggvény. A folytonos idejű modell a (D.7)–(D.10) egyenletek folytonos változatát adná, és a járadékfüggvény folytonos lenne. Mégis a diszkrét időt választottuk, mert a szimulációban mindenképpen diszkrét időre leszünk utalva.

2. Normális körülmények esetén $\mu_t > 0$, tehát (D.9)-ben egyenlőség áll: $v_{t+1} = v_t + w(b_t)$. Figyelembe véve, hogy $b_t \le b_{t+1}$, teljesül az érdekeltségi feltételek elhanyagolt csoportja is: $v_{t+1} \le v_t + w(b_{t+1})$.

3. Azt sejtjük, hogy az egyéni egyenleg a várható élettartam csökkenő függvénye: $z_t \ge z_{t+1}$.

A második legjobb megoldás numerikus meghatározása

Mivel a D.3. tétel nemlineáris egyenletrendszerének megoldása meglehetősen nehéz (gyakran lehetetlen), természetes numerikus szimulációval próbálkozni. A valósághű paraméterértékek esetén kapott numerikus eredmények fényt deríthetnek az optimális járadékfüggvény kvantitatív tulajdonságaira is, és többféle kérdésre (például az endogén változók nagysága, érzékenységük a paraméterváltozásokra stb.) választ nyerhetünk.

Ebben a pontban körvonalazunk egy alkalmas algoritmust a D.3. tétel nemlineáris egyenletrendszerének megoldására. A következő pontban pedig beszámolunk az algoritmuson alapuló szimuláció eredményeiről.

Rekurzív módszert alkalmazunk. Tegyük föl, hogy az $\bar{u}$, τ és $(f_t)_{t=S}^T$ paraméter adott.

1. Vegyünk egy alkalmas λ értéket, úgy próbálkozzunk, hogy az eljárás végén (10) teljesüljön.

2. Kezdjük a számítást v_T alkalmas értékével (például a statikus optimalizálásból adódóval), és vegyük $\mu_T = 0$-t! (D.7)-ből $b_T = b^*$.

3. Ciklus: minden t-re, ha $(v_{t+1},b_{t+1},\mu_{t+1})$ adott, akkor (v_t,b_t,μ_t) a következőképpen számítható ki. Számítsuk ki μ_t-t (D.8)-ból $(t+1)$-re. Ekkor (b_t,v_t) kiszámítható (D.7)-ből és (D.9)-ből.

4. Most megvan a $(v_T,b_T,\mu_T),\ldots,(v_S,b_S,\mu_S)$ sorozat és μ_{S-1} (8)-ból $t = S$-nél. Válasszuk v_T-t úgy, és ismételjük a 3. lépést addig, amíg nem teljesül $\mu_{S-1} = 0$.

5. Végül válasszuk λ-t és ismételjük a 2–4. lépéseket addig, ameddig a (D.10) költségvetési feltétel nem teljesül.

A gyakorlatban célszerűbb v_T-t rendelni (D.10)-hez és λ-t $\mu_{S-1} = 0$-hoz.

A τ változtatásával és az optimális pálya újraszámolásával meghatározhatjuk az optimális járulékkulcsot is. Intuitíve nyilvánvaló, hogyha τ kicsiny, akkor b_t szintén kicsi, és R_t nagy; másrészt ha τ nagy, akkor b_t elfogadható, de R_t kicsi.

Szimuláció

Rátérünk a szimulációk leírására. Legyen a nyugdíjas pillanatnyi hasznosságfüggvény CRRA-alakú, $w(x) = \theta - x^\sigma/\sigma$, $1 - \sigma$ lévén a relatív kockázatkerülési együttható és ε a munkaáldozat.

Definiáljuk a társadalmi jóléti függvények CRRA-típusú családját: $\psi(v) = v^\rho/\rho$, $\rho \leq 1$, és ρ-t a *társadalmi jólét egyenlőtlenségi indexének* nevezzük. Minél kisebb az index, annál nagyobb súlyt kapnak a kisebb hasznosságok, azaz annál egyenlősítőbb a rendszer.

A jobb érthetőség kedvéért az eredeti additív jóléti függvényt

$$V = \sum_{t=S}^{T} \rho^{-1} v_t^\rho f_t$$

hatványközepes transzformációjával helyettesítjük.

$$W = \left(\sum_{t=S}^{T} v_t^\rho f_t\right)^{1/\rho} = (\rho V)^{1/\rho}.$$

Három futást mutatunk be.

• **1. futás.** Legyen $S = 49$ és $T = 59$. Föltesszük, hogy a kormányzat szempontjából az egyének várható élettartama 49 és 59 év között egyenletesen oszlik el: $f_t \equiv 1$. Vegyük a következő paraméterértékeket: $\theta = 4{,}1$; $\sigma = -0{,}5$ és $\varepsilon = 1{,}398$. Az első legjobb esetben az optimális járulékkulcsnál a dolgozó fogyasztása azonos a nyugdíjaséval. (Ez annak a feltevésünknek a nem kívánt mellékhatása, hogy a dolgozó pillanatnyi hasznosságfüggvénye csupán egy additív állandóban különbözik a nyugdíjasétól.) Legyen $\tau = 0{,}2$. Ekkor $\bar{u} = 4{,}1 - 0{,}8^{-0{,}5} - 1{,}398 = 0{,}466$, és az első legjobb nyugdíj $b^* = 0{,}8$. Kiszámítható, hogy 0,8 dolgozói fogyasztás hasznossága megegyezik 0,303 nyugdíjéval. A különbség a nyugdíjas megnövekedett szabadidejéből fakad. Figyeljük meg, hogy a leghosszabb élettartamú egyénnek $R_T = Tb^*/(\tau + b^*) = 47{,}2$ évet kell dolgoznia.

Amint a D.2. tételben igazoltuk, ha a társadalmi jóléti függvény utilitarista, akkor az optimális érdekeltségi rendszer mindenkit 43,2 év szolgálat után küld nyugdíjba – egyforma első legjobb nyugdíjakkal. Ezt még az egyéni élettartamra vonatkozó teljes kormányzati információ esetén sem lehet felülmúlni, és csak abban tér el az autark optimumtól, hogy a várhatóan hosszabb élettartamú egyéneket támogatják a rövidebb élettartamúak.

• **2. futás.** Most $\psi(v) = v^\rho/\rho$ társadalmi jóléti index esetét mérlegeljük, $\rho = -1$ egyenlőtlenségi indexszel, és az *D.1 ábrán* ábrázoljuk az optimális járadékfüggvényt, a nyugdíjösztönzési irodalom központi kategóriáját. A különböző típusokat negjelöltük. Látható, hogy az első négy típus optimális szerződése egybeesik: 42,4 éves szolgálati idő 72,8%-os bruttó helyettesítési rátával, ez az egybeesés eléggé gyakori az optimális mechanizmustervezésben. 1 évi többletmunka 80%-os nyugdíjat ad. A maximális egyenleg $z_S = 3{,}6$, a minimális pedig $z_T = -3{,}7$.

(D.1. ábra)

• **3. futás.** Az eredeti Eső–Simonovits (2003)-as cikkben azonban más kezdeti rtéket választottunk az optimális feltételek megoldásában, és egy meglehetősen eltérő „optimumot” kaptunk. Az a megoldás némileg kisebb társadalmi optimumot adott, azaz $W_2 = 39{,}42$ helyett csak $W_3 = 39{,}38$-ot. Javára írható viszont, hogy minden típus más szerződést kap, és sokkal rugalmasabb. A szolgálati idő hossza 41,2 évtől 43,7-ig terjed, a megfelelő járadékok pedig 64,3%-tól 80-ig. Az életpálya egyenlegek is szűkebb körben mozognak: $z_S = 3{,}2$ és $z_T = -3{,}5$ között.

(D.2. ábra)

Részletes magyarázat nélkül közöljük a naiv megoldást, amelyet számos országban (Svédország, Lengyelország) alkalmaznak, és más oszágokban is ajánlják. Legyen $m = \sum_{t=S}^{T} tf_t$ az várható élettartam eloszlásának várható értéke. Ha feltesszük, hogy az egyének sem tudnak sokat saját várható élettartamukról, akkor célszerű az R éves szolgálati idő után azt az éves nyugdíjat fizetni, amely éppen az életpálya-befizetés és a hátralévő várható élettartam hányadosa:

$$b^F(R) = \frac{\tau R}{m-R}, \qquad R < m.$$

Ekkor a t-típusú egyén olyan R_t^F szolgálati idő után megy nyugdíjba, amely maximalizálja az életpálya hasznosságát:

$$v_t^F(R) = \bar{u}R + w(b^F(R))(t-R).$$

Belátható, hogy ez a rendszer negatív várható egyenlegű, ezért a befizetésnél szereplő τ-nál kisebb $\bar{\tau}$ kulcsot kell jóváírni a kifizetésben. Szimulációnkban $\bar{\tau} = 0{,}187$.

A szimulációból látható, hogy ez a megoldás sokkal nagyobb szórású, de értelemszerűen kisebb jólétű, mint az előzőek: $W = 38.96$.

(D.3. ábra)

E. FÜGGELÉK. ÁTMENET ÉS FOGLALKOZTATÁS
(Társszerző: Balla Katalin és Köllő János)

E.1. Bevezetés.

Ez a függelék a folytonos idejű közgazdasági modellek (6. fejezet) kiegészítése. Elsősorban Aghion–Blanchard (1994) (röviden: A–B) modelljét körvonalazzuk, amely azt kérdezte: mi a kapcsolat a szocialista gazdaság privatizálása és a magángazdaság kiépítése között homogén munkaerő esetén? Emellett kitérünk a Balla et al. (2006) cikkre, ábrázolva a heterogén munkaerő-piacon fellépő bonyodalmakat: a kisebb termelékenységű dolgozók foglalkoztatása messze elmarad a nagyobb termelékenységűekétől az átmenet során. E függelék írása folyamán felhasználtam a közös munka eredményeit, ezért köszönet illeti néha Balla Katalint és Köllő Jánost, valamint Kertesi Gábort.

E.2. Homogén munkaerő esete

Ebben a pontban az A–B-modellt körvonalazzuk, amely az átmenet foglalkoztatási dinamikáját a homogén munkaerő-piac feltevése mellett modellezte.

A modell

A szocialista gazdaságot évtizedekig a teljes foglalkoztatás jellemezte. Az átalakulás megindulásakor azonban egyszeri munkahely-megszüntetés miatt az *állami munkahelyek állománya* 1-ről hirtelen $e^0 < 1$-re csökkent. Legyen s pozitív valós szám az állami munkahelyek bontási üteme. Ekkor

$$\dot{e} = -s, \qquad e^0 \qquad \text{adott.} \tag{E.1}$$

Az államtalanítás a $T = E^0/s$ időpontban fejeződik be. Ettől kezdve $e = 0$. Tegyük föl, hogy x az állami szektorban dolgozók termelékenysége, α az állami szektorban a dolgozók által elsajátított többlet, és $v = (1 + \alpha)x - z$ az állami szektorban fizetett nettóbér.

A magángazdaságban foglalkoztatott munkaerő termelékenysége egy egyszerűsítő feltevés szerint időben szintén állandó, és nagyobb, mint az állami szektoré: $y > x$. A magánszektorban dolgozók w nettó keresete endogén módon változik (lásd a későbbi (E.4) egyenletet). Az egyszerűség kedvéért egyelőre tegyük föl, hogy az állam minden dolgozó után z *fejadót* vet ki, amelynek változó nagyságát a későbbi (E.5) makroköltségvetési egyenlet határozza meg. A magánszektor csak akkor alkalmaz új dolgozókat, ha az egy dolgozóra eső nettó profitja pozitív: $\pi = y - w - z > 0$.

Rátérünk a (magán)munkahely-teremtés leírására. Legyen a magánszektorban foglalkoztatott munka létszáma n. Ekkor feltesszük, hogy n növelési sebesége arányos egy dolgozóra jutó nettó profitjával:

$$\dot{n} = a(y - w - z). \tag{E.2}$$

Feltesszük, hogy a magánfoglalkoztatás az átmenet során nem tud lépést tartani az állami munkahelyek csökkenésével: átmenetileg kialakul a munkanélküliség:

$$u = 1 - e - n = \Delta e - n, \tag{E.3}$$

ahol $\Delta e = 1 - e$ a megszüntetett állami munkahelyállomány. A munkanélküliek $b > 0$ nagyságú *munkanélküli segély*t kapnak.

Az A–B-modell béregyenlete a következő. Legyen r a kamatláb, c a munkának a munkanélküliséghez viszonyított többletértéke, ekkor

$$w = b + c\left(r + \frac{\dot{n}}{u}\right). \tag{E.4}$$

Felírjuk az adók és a segélyek egyenlegét:

$$ub = (1 - u)z. \tag{E.5}$$

Vegyük észre, hogy szimultán egyenletrendszerrel van dolgunk: a kereset függ a foglalkoztatástól, a foglalkoztatás viszont a profiton keresztül függ a keresettől. Behelyettesítve (E.4)-et (E.2)-be, és felhasználva (E.5)-öt, könnyen levezethető, hogy

$$\dot{n} = a\frac{u}{u + ca}\left(y - cr - \frac{bn}{1 - u}\right), \qquad n^0 = 0. \tag{E.6}$$

Behelyettesítve (E.3)-at (E.6)-ba és bevezetve az $\bar{y} = y - cr$ jelölést a *redukált termelékenység*re, adódik a teljes egyenletrendszer redukált alakja, egy skalár differenciálegyenlet:

$$\dot{n} = a\frac{\Delta e - n}{\Delta e - n + ca}\left(\bar{y} - \frac{b}{e + n}\right), \qquad n_H^0 = 0. \tag{E.7}$$

*Működőképes*nek nevezzük a rendszert, ha összes változója nemnegatív, nevezetesen $\pi > 0$, (azaz $\dot{n} \geq 0$) és $0 \leq n \leq \Delta e$.

Elméleti elemzés

Feltesszük, hogy a munka redukált termelékenysége és a kezdeti foglalkoztatási hányad szorzata nagyobb, mint a munkanélküliségi segély: $\bar{y}(1-u^0) > b$, vagy más alakban $n^0 > b/\bar{y}$.

Az átmeneti szakasz elemzését későbbre halasztva, az érett szakaszt vizsgáljuk. (E.1) helyére $e = 0$ lép, ezért (E.7) egyszerűsödik, időfüggetlenné (autonómmá) válik:

$$\text{(E.8)} \qquad \dot{n} = a\frac{1-n}{1-n+ca}\left(\bar{y}-\frac{b}{n}\right), \qquad n(T) = n^T$$

Nyilvánvaló, hogy a teljes foglalkoztatottság állandósult állapot: $n^{\circ} = 1$, hiszen (E.8) jobb oldala az első tényező miatt ekkor 0. A teljes foglalkoztatottsági helyzeten kívül még egy állandósult állapot is létezik ($n^* = b/\bar{y}$), azonban ebben az állapotban munka foglalkoztatása veszteséges.

Rátérünk a következő kérdésre: aszimptotikusan stabil-e az érett rendszerben a teljes foglalkoztottság állapota? A válasz igen, ha az átmenetvégi foglalkoztatás megfelelően nagy.

E.1. tétel. *Az érett rendszerben a teljes foglalkoztatottsági állapot (lokálisan) aszimptotikusan stabil és működőképes, ha az az átmenetvégi foglalkoztatásra is teljesül* $n(T) > b/\bar{y}$.

Bizonyítás. Mivel egy működőképes rendszerben a profitnak mindig nemnegatívnak kell lennie, a magánfoglalkoztatásnak mindig nőnie kell. ∎

Az *átmenet működőképességé*hez még szigorúbb feltételekre van szükségünk, ezeket azonban analitikusan nem tudjuk megadni. A–B ötletét követve, a foglalkoztatási hányadok helyett a munkanélküliségi hányadokkal dolgozunk. Ekkor a transzfermentes gazdaságban az átmeneti szakasz folyamatait is egy időben invariáns (autonóm) differenciálegyenlet írja le:

$$\dot{u} = s - F(u),$$

ahol $F(u) = f(1-e-u)$ az (E.7) jobb oldali függvénye.

A munkanélküli egyensúlyt a következő egyenlet határozza meg:

$$F(u^{\circ}) = s.$$

Belátható, hogy megfelelően lassú bontás esetén két munkanélküliségi egyensúly létezik: u_1° és u_2°, $0 < u_1^{\circ} < u_2^{\circ}$, és a $0 < u_0 < u_2^{\circ}$ állapotokból induló pályák az egész átmenet idején konvergálnak u_1°-hoz. Gyors bontás esetén viszont nincs munkanélküliségi egyensúly, és ebben az esetben az egész gazdaságot maga alá temetheti az ármenet elsietése.

Szimulációval azonban belátható, hogy a munkanélküli egyensúlyok szavatolásához a numerikus modellben gyakran irreálisan lassú átmenetet kellene feltételezni, ezért a továbbiakban lemondunk e megközelítésről. Az átmeneti stabilitás helyett csak az átmeneti és az érett szakasz működőképességét mérlegeljük.

E.1. sejtés. *Minden* $0 < s < s_M$ *bontási sebességhez tartozik egy* $0 < e^0(s) < 1$ *minimális induló (állami) foglalkoztatási hányad, amely mellett még működőképes a rendszer. Nagyobb bontási sebességhez nagyobb minimális induló foglalkoztatási hányad tartozik.*

E.3. Heterogén munkaerő esete

Eddig homogén munkaerőt feltételeztünk. Balla et al. (2006) azonban erőteljesen érvel amellett, hogy érdemes ettől a feltevéstől megszabadulni, hiszen a posztszocialista valóságban a kisebb termelékenységű dolgozók foglalkoztatása messze elmarad a nagyobb termelékenységűekétől. Azt szeretnénk igazolni, hogy a kisebb termelékenységű dolgozók foglalkoztatási támogatása jelentősen javít foglalkoztatásukon, anélkül hogy észrevehetően rontana a képzettek foglalkoztatottságán.

A modell

Az egyszerűség kedvéért a magánszektorban kétféle munkaerőt különböztetünk meg: a jól képzettet (jele: H) és a rosszul képzettet (jele: L). Feltesszük, hogy a két szegmens viszonylag elkülön egymástól, egyedüli kapcsolatot a gazdaság közös adórendszere jelent. Az egy képzetlem dolgozóra jutó támogatás nagysága k. Feltesszük, hogy az állami szektorban ez a különbségtevés nem létezett, de megkülönböztetjük az E_L^*, E_H^* dolgozói létszámot, amely együtt kiadja a teljes munkaképes lakosságot: $E_L^* + E_H^* = 1$. Ekkor némi, találékonysággal a korábbi egyenleteket megkettőzhetjük. Csupán kisbetűs arányaink mellett nagybetűs létszámadatokat is be kell vezetnünk: $i = L,H$ esetén $n_i = N_i/E_i^*$, $u_i = U_i/E_i^*$, $E_H + E_L = E$, $U_H + U_L = U$.

A későbbiekre való tekintettel bevezetünk egy támogatást is, amelyet az L-szegmensben dolgozók kapnak, lásd (E.2–L).

Következnek a BKS-modell egyenletei.

Munkahelyrombolás

$$(\text{E.1} - H) \qquad \dot{e}_H = -s, \qquad e_H^0 = e^0 \qquad \text{adott}$$

és

$$(\text{E.1} - L) \qquad \dot{e}_L = -s, \qquad e_L^0 = e^0 \qquad \text{adott.}$$

Munkahelyteremtés

$$(\text{E.2} - H) \qquad \dot{n}_H = a(y_H - w_H - z), \qquad \text{ahol} \qquad n_H = \frac{N_H}{E_H^*}$$

és

$$(\text{E.2} - L) \qquad \dot{n}_L = a(y_L - w_L - z + k), \qquad \text{ahol} \qquad n_L = \frac{n_L}{E_L^*}.$$

Munkanélküliség

$$(\text{E.3} - H) \qquad u_H = 1 - e - n_H = \Delta e - n_H, \qquad U_H = u_H E_H^*$$

és

$$(\text{E.3} - L) \qquad u_L = 1 - e - n_L = \Delta e - n_L, \qquad U_L = u_L E_L^*,$$

ahol $\Delta e = 1 - e$ a kétfajta megszüntetett állami munkahelyállomány-aránynak az eredeti állományarányhoz viszonyított közös értékét jelöli.
Béregyenletek

$$(\mathrm{E}.4 - H) \qquad w_H = b + c\left(r + \frac{\dot{n}_H}{u_H}\right)$$

és

$$(\mathrm{E}.4 - L) \qquad w_L = b + c\left(r + \frac{\dot{n}_L}{u_L}\right).$$

Adó és támogatás
Felírjuk az adók, a segélyek és támogatások egyenlegét: $Ub + N_L k = (1 - U)z$, azaz

$$(\mathrm{E}.5^*) \qquad (E_H^* u_H + E_L^* u_L)b + E_L^* n_L k = (1 - E_H^* u_H - E_L^* u_L)z.$$

Rendezéssel adódik a differenciálegyenlet-rendszer

$$(\mathrm{E}.6 - H) \qquad \dot{n}_H = a\frac{u_H}{u_H + ca}\left(y_H - cr - \frac{b + kE_L^* n_L}{1 - E_H^* u_H - E_L^* u_L}\right), \qquad n_H^0 = 0$$

és

$$(\mathrm{E}.6 - L) \qquad \dot{n}_L = a\frac{u_L}{u_L + ca}\left(y_L - cr - \frac{b - k(e + E_H^* n_H)}{1 - E_H^* u_H - E_L^* u_L}\right), \qquad n_L^0 = 0.$$

További rendezéssel a munkanélküliségi változók kiküszöbölhetők (E.6)-ból:

$$(\mathrm{E}.7 - H) \qquad \dot{n}_H = a\frac{\Delta e - n_H}{\Delta e - n_H + ca}\left(\bar{y}_H - \frac{b + kE_L^* n_L}{e + E_H^* n_H + E_L^* n_L}\right), \qquad n_H^0 = 0$$

és

$$(\mathrm{E}.7 - L) \qquad \dot{n}_L = a\frac{\Delta e - n_L}{\Delta e - n_L + ca}\left(\bar{y}_L - \frac{b - k(e + E_H^* n_H)}{e + E_H^* n_H + E_L^* n_L}\right), \qquad n_L^0 = 0.$$

A (H-L) párból álló (E.8) egyenletrendszert nem írjuk fel.

Elméleti elemzés

A továbbiakban három természetes feltevéssel élünk.

F1. A nagy és kis termelékenységű dolgozók aránya viszonylag kiegyensúlyozott, mondjuk $1/2 < E_H^*/E_L^* < 2$.

F2. A támogatás kisebb, mint a két munkatermelékenység különbsége, azaz $0 \le k < y_H - y_L$.

F3. A képzetlen munka redukált termelékenysége és a kezdeti foglalkoztatási hányad szorzata nagyobb, mint a munkanélküliségi segély: $\bar{y}_L(1 - u^0) > b$.

Egyszerűsége miatt érdemes az *átmeneti folyamat kezdetével* folytatni az elemzést.

A kétfajta munka magánfoglalkoztatási növekedése induláskor

$$\dot{n}_H(0) = \frac{au^0}{ca+u^0}\left(\bar{y}_H - \frac{b}{1-u^0}\right) \qquad \text{és} \qquad \dot{n}_L(0) = \frac{au^0}{ca+u^0}\left(\bar{y}_L + k - \frac{b}{1-u^0}\right).$$

Az induló keresetek

$$w_H(0) = b + c\left(r + \frac{\dot{n}_H(0)}{u^0}\right) \qquad \text{és} \qquad w_L(0) = b + c\left(r + \frac{\dot{n}_L(0)}{u^0}\right).$$

Valóban, az (E.5*)-ből adódik

$$z(0) = \frac{u^0}{1-u^0}b.$$

(E.6)-ból adódik $\dot{n}_i(0)$, és (E.4)-ből adódik $\dot{w}_i(0)$.

Láthatjuk, hogy az F3 feltevés egyenértékű az $\dot{n}_L(0) > 0$ egyenlőtlenséggel, és az F2 feltevés mellett $\dot{n}_H(0) > \dot{n}_L(0)$, azaz $w_H(0) > w_L(0)$.

Közgazdaságilag megengedhetetlen lenne, hogy a H-dolgozó keresete kisebb legyen, mint az L-é. De nem olyan nagy a különbség, hogy a kumulált H-profit kisebb lenne az L-énél, azaz a H-foglalkoztatása kisebb lenne, mint az L-é.

E.2. tétel. *Az F2 feltevés mellett (a kezdést leszámítva) a képzettek foglalkoztatási hányada és keresete nagyobb, mint a képzetleneké:* $n_H > n_L$ *és* $w_H > w_L$.

A szigorú bizonyítás elött *heurisztikusan érvelünk*: Mivel az i-fajta keresetek függnek a megfelelő foglalkoztatástól és viszont, (E.2–H) és (E.2–L), illetve (E.4–H) és (E.4–L) összehasonlítása nem elegendő. Az $n_H > n_L$ egyenlőtlenség bizonyításának a lényege azonban viszonylag egyszerűen megadható: (E.7)-ben a második tényező a meghatározó, márpedig $\bar{y}_H > \bar{y}_L + k$ miatt a második tényezőkre áll az egyenlőtlenség. A béregyenletekből és $n_H > n_L$-ből már viszonylag egyszerűen következik $w_H > w_L$.

Bizonyítás. a) Először a foglalkoztatási egyenlőtlenséget igazoljuk. Az (E.7) rendszert általánosabb alakban írjuk föl:

$$(\mathrm{E}.9-H) \qquad \dot{n}_H = g(t,n_H)h_H(t,n_H,n_L), \qquad n_H^0 = 0$$

és

$$(\mathrm{E}.9-L) \qquad \dot{n}_L = g(t,n_L)h_L(t,n_H,n_L), \qquad n_L^0 = 0.$$

Igazolható, hogy a 0-ról induló H-foglalkoztatás kezdetben gyorsabban nő, mint az L-foglalkoztatás.

Most tehát tetszőleges $t > 0$-re igazoljuk az egyenlőtlenséget, mégpedig indirekt módon. Tegyük föl, hogy $t^\circ > 0$ időpontban sérül először a kezdeti egyenlőtlenség: $n_H(t)$ felülről metszi $n_L(t)$-t. Behelyettesítve (E.9)-be $n_H(t^\circ) = n_L(t^\circ) = n^\circ$-t, az első tényezők megint azonosak, a második tényezőkre pedig $h_H(t^\circ,n^\circ,n^\circ) \geq h_L(t^\circ,n^\circ,n^\circ)$, tehát (E.9) szerint $\dot{n}_H(t^\circ) \geq \dot{n}_L(t^\circ)$, s ez ellentmond a metszési feltételnek.

b) Most már bizonyíthatjuk a H- és az L-kereset közti egyenlőtlenséget. Indirekt bizonyítunk: tegyük föl, hogy van olyan t^{o} időpont, amelyben $w_H(t^{o}) \leq w_L(t^{o})$. Mivel $w_H(0) > w_L(0)$ és a kereset–idő-függvények folytonosak, van olyan $\bar{t} \leq t^{o}$ időpont, amelyben $w_H(\bar{t}) = w_L(\bar{t})$. Tekintsük az (E.2–H) és az (E.2–L) differenciálegyenlet különbségét ebben az időpontban: $\dot{n}_H(\bar{t}) - \dot{n}_L(\bar{t}) = a(y_H - y_L - k)$. Az F2 feltevés miatt $\dot{n}_H(\bar{t}) > \dot{n}_L(\bar{t})$. A foglalkoztatási egyenlőtlenség miatt $u_H(\bar{t}) < u_L(\bar{t})$. Az (E.4–H)-t és az (E.4–L)-t összehasonlítva: $w_H(\bar{t}) > w_L(\bar{t})$, ellentmondás. ∎

Az A–B-modellhez hasonlóan igazolható, hogy a teljes foglalkoztatás lokálisan stabil és működőképes állapot. Nehezebb alkalmazni a(z átmeneti) munkanélküliség egyensúlyt. Egyelőre nem tudunk szigorú bizonyítást adni arra a sejtésünkre, hogy megfelelően kicsiny támogatás esetén a foglalkoztatás javítható. Csupán a kezdőállapotra adott, már bemutatott explicit eredmények adnak szilárd támpontot.

Numerikus eredmények

Elemzési képességünk határához érve, szimulációhoz folyamodunk. Az elemzési stratégiánkat követve, szimulációnkat is két részre osztjuk: először a modell általános tulajdonságaival foglalkozunk, majd a támogatás és a munkanélküli segély foglalkoztatási hatását tanulmányozzuk.

A magánszektor kettébontásától eltekintve, követjük az A–B paraméterértékeket. Ezen a ponton be kell még vezetnünk az állami szektor paramétereit: $x = 1$ az állami szektorban dolgozók termelékenysége, $\alpha = 0{,}3$ az állami szektorban a dolgozók által elsajátított többlet, és $v = (1+\alpha)x - z$ az állami szektorban fizetett nettóbér. $b = 0{,}5$; $a = 0{,}1$; $c = 2$; $r = 0{,}1$. Legyen $E_H^* = 0{,}5$; $E_L^* = 0{,}5$; $u^0 = 0{,}04$. A magánszektor termelékenységét ($y = 1{,}8$) szimmetrikusan bontjuk meg: $y_H = 2{,}2$ és $y_L = 1{,}4$; $s = 0{,}08$ a bontás sebessége. Ekkor az átalakítás hossza $T = 12$ év. A transzfert két részre osztjuk: $k = k_1 + k_2$, ahol k_1 a fejadót arányosítja. Egyelőre kizárjuk a támogatást: $k_2 = 0$ és $k_1 = 0{,}08$.

Ekkor az E.3. tételnek megfelelően a H-foglalkoztatása jóval gyorsabban nő, mint az L-é (E.1 ábra).

E.1 ábra

Hogyan hat a támogatás bevezetése? $k = 0{,}3$ mellett újrafuttatva a modellt, igazolódik, hogy a támogatás hatására alig csökken a H-foglalkoztatás, viszont meredeken emelkedik L-é az átmenet lezárásakor. Tanulságos a munkanélküli segély szerepének a numerikus elemzése is, Például $b = 0{,}3$-ra csökkentett segély esetén a támogatás hatása már nem olyan jelentős (E.2. ábra).

E.2 ábra

Kiderül, hogy látszatra elfogadható segély esetén olyan túlterhelt lesz a rendszer, hogy a támogatás bevezetése még a H-foglalkoztatást is növeli.

FELADATMEGOLDÁSOK

A számítógép-programozással megoldható feladatok megoldását nem közöljük, mert gép- és programfüggők.

1. fejezet

1.1. feladat. *a)* $x_{1,t} = g(x_{1,t-1}, x_{2,t-1}) = -x_{2,t-1}$ és $x_{2,t} = x_{1,t-1}$. *b)* Lásd 2.3. alfejezet.

1.2. feladat. Azért, mert $y_{-1} \neq 0$.

1.3. feladat. *a)* Nem, mert a kilengések nem enyésznek el. *b)* Igen, mert a kilengések az idők végezetéig korlátosak maradnak.

1.4. feladat. *a)* $P = 4$ és *b)* $y_t = -y_{t-1}$, $y_0 = -1$: $P = 2$.

1.5. feladat. (1.13) értelmében

$$(I - M)^{-1} = \delta \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad x^{\mathrm{o}} = \delta \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \end{pmatrix},$$

ahol $\delta = 1/(1 - \alpha\beta)$.

1.6. feladat. Az M mátrix sajátérték-egyenlete $\lambda s = Ms$, azaz koordinátásan $\lambda_j s_{1,j} = \alpha s_{2,j}$ és $\lambda_j s_{2,j} = \beta s_{1,j}$. Összeszorozva: $\lambda_j^2 s_{1,j} s_{2,j} = \alpha\beta s_{1,j} s_{2,j}$. Semelyik sajátvektor semelyik koordinátája sem lehet nulla, mert akkor a másik koordináta is nulla lenne: $\lambda_j^2 = \alpha\beta$. Ezért feltehetjük, hogy $s_{1,j} = 1$, tehát $\lambda_j s_{2,j} = \beta$, azaz $s_{2,j} = \pm\sqrt{\alpha/\beta}$. (1.20)-ból $x_0 = \xi_1 s_1 + \xi_2 s_2$, ahonnan adott $x_0 = (x_{1,0}, x_{2,0})$ induló állapotvektorból ξ_j megállapítható. (1.21) adja a keresett megoldást.

1.7. feladat. Először megoldjuk az $x_{1,t} = m_{11}x_{1,t-1} + w_1$ skalár egyenletet. A kapott megoldást behelyettesítjük az $x_{2,t} = m_{22}x_{1,t-1} + m_{21}x_{1,t-1} + w_2$ skalár egyenletbe, stb. Az egyetlen bonyodalom abból származik, hogy a jobb oldalon időben (exponenciálisan) változó tagok szerepelnek, ez azonban kezelhető, lásd az (1.36).

1.8. feladat. Az M mátrix j-edik oszlopa a j-edik egységvektor képét mutatja, tehát nagyítás és forgatás kombinálódik. A karakterisztikus egyenlet $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\rho(\cos\varphi)\lambda + \rho^2$, ahonnan a sajátértékek adódnak.

1.9. feladat. Az 1.6. feladat szerint M_1 két sajátértéke 1 és –1. Az 1.7. feladat szerint M_2 mindkét sajátértéke 1, azonban csak egy független sajátvektor létezik: $s = (0,1)$.

1.10. feladat. $x_t = \lambda x_{t-1} + w$, ahol x_t, λ és w skalár. 1.1. tétel: Ha $\lambda \neq 1$ skalár, akkor $x^{\mathrm{o}} = w/(1 - \lambda)$. 1.2. tétel: üres. 1.3. tétel: üres. 1.4. tétel: $-1 < \lambda < 1$. 1.5.

tétel: $0 < \lambda \leq 1$, $w > 0$, $x^{\mathrm{o}} > 0$. 1.6. tétel: $\Phi = 1/|\lambda|$. 1.7. tétel: $x_t = x_{t-1}$ értelmetlen. Az 1.8. tétel az 1.4. tételre egyszerűsödik.

1.11. feladat. *a)* $\lambda_1 = \lambda_2 \geq 0$. *b)* Legfeljebb egy előjelváltás, legfeljebb két előjelváltás.

1.12. feladat. *a)*

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\beta \\ 1/\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $b_{11} = 0$. *c)* 1.15. példa. *d)* Az 1.6. feladathoz hasonlóan kiszámítható az $I - B\langle k\rangle$ mátrix karakterisztikus egyenlete: $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 - \alpha\beta k_1 k_2 = 0$, ahonnan $\lambda_1 = 1 + \sqrt{\alpha\beta k_1 k_2}$, $\lambda_1 \geq 1$.

2. fejezet

2.1. feladat. $\gamma = 0{,}75$ mellett rendre $\beta = 0{,}25$; $0{,}9$; $1{,}5$, 4.

2.2. feladat. Behelyettesítve (2.15)-öt (2.16)-ba, majd (2.18)-at az új egyenletbe: $a_t = -\beta - b^* + \beta_i(\iota^* - \iota_a a_{t-1}) = \alpha - \alpha_i \iota a_{t-1}$, ahol $\alpha = -\beta - b^* + \beta_i \iota^*$ és $\alpha_i = \beta_i \iota_a$. Normál állapot: $a^o = \alpha/(1 + \alpha_i) = \alpha/(1 + \beta_i \iota_a)$, $\alpha > 0$ esetén csökkenő függvénye a ι_a reakcióegyütthatónak. Csillapítási együttható: $\Phi = 1/(\beta_i \iota_a)$ csökkenő függvénye a ι_a reakcióegyütthatónak.

2.3. feladat. *a)* $a_t = -\beta - b^* + \beta_i(\iota^* - \iota_a^* a_{t-2}) = \alpha - \alpha_i^* a_{t-2}$, ahol $\alpha = -\beta - b^* + \beta_i \iota^*$ és $\alpha_i^* = \beta_i \iota_a^*$. *b)* (2.20)-ba helyettesítsük be (2.19)-et $(t-1)$-nél: $a_t = \alpha + \alpha_e e_{t-1} = \alpha + \alpha_e(\varepsilon + \varepsilon_e e_{t-2} - \varepsilon_a a_{t-2}) = \alpha + \alpha_e \varepsilon + \alpha_e \varepsilon_e e_{t-2} - \alpha_e \varepsilon_a a_{t-2}$. Összehasonlítva az *a)* rész alapegyenletével, adódik az ekvivalencia feltétele: $\varepsilon_e = 0$, azaz (2.31) szerint $\omega = 0$, azaz (2.34) szerint $\varphi = \pi/2$, azaz $P = 4$.

2.4. feladat. Behelyettesítjük (2.13)-at (2.14)-be, majd a kapott egyenletbe (2.17*)-ot: $e_t + k^* = \psi(e_{t-1} + k^*) + \sigma_S(\sigma^* - \sigma_e e_{t-1})$. Rendezve: $e_t = (\psi - 1)k^* + \sigma_S \sigma^* + (\psi - \sigma_e)e_{t-1}$. Figyelemre méltó, hogy most nem szükségszerű az oszcilláció!

2.5. feladat. Helyettesítsük be (2.43)–(2.44)-ba a stacionárius értékeket. $y^{\mathrm{o}} = Y^{\mathrm{o}}\mathbf{1} + c$ és $Y^{\mathrm{o}} = A\langle y^{\mathrm{o}}\rangle$ egyenletpárból adódik a hagyományos $y^{\mathrm{o}} = Ay^{\mathrm{o}} + c$ egyenlet, ahonnan $y^{\mathrm{o}} = (I - A)^{-1}c$, $Y^{\mathrm{o}} = A\langle y^{\mathrm{o}}\rangle$. Rátérve stacionárius feltételrendszer maradékára: (2.45)–(2.46) szerint $y^{\mathrm{o}} + \langle d\rangle z^{\mathrm{o}} = y^*$, $Y^{\mathrm{o}} + D \times Z^{\mathrm{o}} = Y^*$-nak van pozitív megoldása $(z^{\mathrm{o}}, Z^{\mathrm{o}})$-ben, feltéve, hogy $y^{\mathrm{o}} < y^*$ és $Y^{\mathrm{o}} < Y^*$ teljesül.

2.7. feladat. Az

$$|\pi(\lambda)|^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta\mathbf{Re}\lambda}{1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\mathbf{Re}\lambda}$$

kifejezés minden $-1 \leq \mathbf{Re}\lambda \leq 1$-re definiálva van. A hiperbolikus $|\pi(\lambda)|^2$ függvény a maximumát az egyik végpontban veszi föl. Mivel $\pi(1) = (\beta - \alpha)/(1 - \varepsilon)$ és $\pi(-1) = (\beta + \alpha)/(1 + \varepsilon)$, feltételeink mellett $0 \leq \pi(1) < \pi(-1)$.

2.8. feladat. (Vö. Lovell, 1962 és Martos, 1990.) Fölhasználjuk, hogy egyöntetű norma és reakció esetén $b = (1 + \gamma\varepsilon)\mathbf{1} = \beta\mathbf{1}$, azaz a (2.66)-beli mátrix racionális függvénye N-nek, tehát λ ugyanolyan függvénye ν-nek.

$$\lambda = 1 - (1 - \nu)\varepsilon - (1 - \nu)\beta(1 - \nu\beta)^{-1}\nu\varepsilon.$$

2.9. feladat. Legyen most $\beta_i = b_i + k_i$, $\alpha_i = b_i$ és $\varepsilon_i = 1 - k_i$, $\pi_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$. A 2.7. feladat alapján ismét belátható, hogy $\pi_i(-1) \leq 0$ miatt $\rho[N\langle -p(-1)\rangle] \leq 1$ elégséges, de általában nem szükséges feltétel. Ha azonban N 2-ciklikus, akkor $-\rho(N)$ is domináns sajátérték, azaz $\rho[N\langle -p(-1)\rangle] \leq 1$ szükséges is.

3. fejezet

3.1. feladat. *a)* $f(x) > x$, bár $0 \le f'(x) = 1 - (1 + e^x)^{-2} e^x < 1$.

b) A $(-\infty,\infty)$ intervallum nem kompakt.

3.2. feladat. *a)* A leképezés valóban nem kontrakció, hiszen $\beta = 1$ és $x_0 = 0{,}01$ esetén $x_1 = 50{,}005$, míg $y_0 = 1$ esetén $y_1 = 1$.

b) A számtani és mértani közép összehasonlításából adódik, hogy $x_t \ge \sqrt{\beta}\quad (t \ge 1)$. Ekkor viszont $0 < f'(x) = 1/2 - \beta/(2x^2) < 1$, tehát kontrakció. Vegyük észre, hogy $f'(\sqrt{\beta}) = 0$, azaz a konvergencia nagyon gyors.

3.3. feladat.* Készítsük el a pókhálóciklusból ismert diagramot! Néhány próbálkozás után rájöhetünk a következő esetszétválasztásra.

a) 3.1. ábra: ha $1 < a < 2$, akkor az $f(x^{\mathrm{o}}) = x^{\mathrm{o}}$ fixpont a $(0;1)$ intervallumban fekszik. Szimmetria miatt $x^* = 1 - x^{\mathrm{o}}$-ra $f(x^*) = x^{\mathrm{o}}$. Ha $x^* < x_0 < 1$, akkor $x_1 < x^{\mathrm{o}}$; ha $1/2 < x_0 < x^*$, akkor $x^{\mathrm{o}} < x_1 < 1/2$. Beláttuk, hogy a rendszer legfeljebb egy időszakig lehet 1/2-től jobbra. Ha $x^{\mathrm{o}} < x_t < 1/2$, akkor $x^{\mathrm{o}} < x_{t+1} < x_t$; ha $0 < x_t < x^{\mathrm{o}}$, akkor $x_t < x_{t+1} < 1/2$. Monotonitás miatt a határérték létezik, természetesen fixpont, azaz egyenlő x^{o}-val.

b) 3.2. ábra: ha $2 < a < 3$, akkor van egy olyan $0 < x_1^* < 1/2$ szám, amelyre $f(x_1^*) = 1/2$. Szimmetria miatt $x_2^* = (1 - x_1^*)$-ra is $f(x_2^*) = 1/2$. Ha $x_2^* < x_0 < 1$, akkor $x_1 < x_1^*$. Ha $1/2 < x_0 < x_2^*$, akkor $x_1^* < x_1 < 1/2$. Ha $x_t < x_1^*$, akkor $x_t < x_{t+1} < x_1^*$. Ha $x_1^* < x_t < 1/2$, akkor $x_t < x_{t+1} < x_2^*$. Tehát előbb-utóbb a rendszer az (x_1^*,x_2^*) szakaszon belülre kerül és ott is marad. Ott már alkalmazható a kontrakciós tétel, mert

$$x_{1,2}^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - a/2}}{2}, \quad 0 < f'(x_1^*) = a(1 - 2x_1^*) = \sqrt{1 - 2/a} < 1.$$

3.4. feladat.* Ha a két mátrix közül legalább az egyik, például A invertálható, akkor elemi a segédtétel bizonyítása: $ABx = \lambda x$, $y = A^{-1}x \Rightarrow BAy = \lambda y$. Ebből határátmenettel tetszőleges A mátrixra is következik a tétel. Most már ismert, hogy $\rho(AB \cdots C) = \rho(B \cdots CA)$, tehát $Df^P(x_2) = Df(x_1)Df(x_P) \cdots Df(x_2)$ mátrix is stabil.

3.5. feladat. *a)* $x^{\mathrm{o}} = 2 - 2x^{\mathrm{o}} \Rightarrow x^{\mathrm{o}} = 2/3$. *b)* $x_2 = 2x_1$ és $x_1 = 2 - 2x_2 = 2 - 4x_1 \Rightarrow x_1 = 2/5 \Rightarrow x_2 = 4/5$. *c)* Két pont van az egyik ágon, egy pont a másik ágon. Feltehető, hogy az első kettő kisebb 1/2, illetve nagyobb 1/2. Számolással. *d)* Instabil, mert $|f'(\cdot)| \ge 2$, 4, illetve $8 \ge 1$.

3.6. feladat. A $\sin 2\varphi = 2 \sin\varphi \cos\varphi$ összefüggés alapján $\varphi_t = 2\varphi_{t-1}$, stb.

3.7–3.9. feladat.

4. fejezet

4.4. feladat. Behelyettesítve a megfelelő egyenletekbe:

$$k^{\mathrm{o}} = \psi k^{\mathrm{o}} + \sigma_S s^{\mathrm{u}} - i^{\mathrm{l}},\ e^{\mathrm{o}} = k^{\mathrm{o}} - k^*,\ b^{\mathrm{o}} = -\beta + \beta_i i^{\mathrm{l}},\ a^{\mathrm{o}} = b^{\mathrm{o}} - b^*.$$

$$s^{\mathrm{p}^{\mathrm{o}}} = \sigma - \sigma_e e^{\mathrm{o}} - \sigma_a a^{\mathrm{o}} \ge s^{\mathrm{u}},\ i^{\mathrm{p}^{\mathrm{o}}} = \iota + \iota_e e^{\mathrm{o}} \le i^{\mathrm{l}}.$$

Rendezve: $k^{\mathrm{o}} = (1 - \psi)^{-1}(\sigma_S s^{\mathrm{u}} - i^{\mathrm{l}})$, stb.

4.5. feladat. Tegyük föl, hogy a szabályozási változók a leírt módon mindig a korláton valósulnak meg. Ekkor (4.33), (4.35), (4.37) és (4.39) helyett is (4.32), (4.34), (4.36) és (4.38) megfelelői érvényesek:

$$(a) \qquad e_1 = \psi e_4 + \varepsilon_{\mathrm{ul}},\ e_2 = \psi e_1 + \varepsilon_{\mathrm{ul}},\ e_3 = \psi e_2 + \varepsilon_{\mathrm{lu}},\ e_4 = \psi e_3 + \varepsilon_{lu},$$

$$(b) \qquad a_1 = \beta_i i^{\mathrm{l}} - \beta_{\mathrm{o}},\ a_2 = \beta_i i^{\mathrm{u}} - \beta_{\mathrm{o}},\ a_3 = \beta_i i^{\mathrm{u}} - \beta_{\mathrm{o}},\ a_4 = \beta_i i^{\mathrm{l}} - \beta_{\mathrm{o}}.$$

Ugyanígy a (4.40)–(4.41) feltételek megfelelőinél:

$$(c) \qquad \sigma_e e_4 + \sigma_a a_4, \quad \sigma_e e_1 + \sigma_a a_1 \le \sigma - s^{\mathrm{u}}, \quad \sigma - s^{\mathrm{l}} \le \sigma_e e_2 + \sigma_a a_2,$$

$$(d) \qquad e^{\mathrm{u}} \le e_1, e_2 \qquad \text{és} \qquad e_3, e_4 \le e^{\mathrm{l}}.$$

(b)-ből a külső feszültségek azonnal adódnak. (a)-ra alkalmazva az 1.8. példa megoldását, adódnak a belső feszültségek. A (c) és a (d) egyenlőtlenségek numerikusan igazolhatók.

4.9. feladat. (4.59)-nél nem használtuk ki, hogy A_t időben állandó, csak azt, hogy teljesül a (4.58′) egyenlőtlenség.

5. fejezet

5.1. feladat. $f(t,x) = \lambda x$ miatt a k-adik differenciaegyenlet a $h = t/k$ jelöléssel

$$x_k(t_{i,k}) = x_k(t_{i-1,k}) + \lambda x_k(t_{i-1,k})h = (1 + \lambda h)x_k(t_{i-1,k}).$$

A mértani sorozat képlete szerint $x_k(t) = x_k(0)(1 + \lambda t/k)^k$, s ez $k \to \infty$ esetén valóban tart $e^{\lambda t}$-hez.

5.2. feladat. $f[\tau,x(\tau)] = \lambda x(\tau)$ miatt a k-adik integrálegyenlet

$$x_{k+1}(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x_k(\tau)\, d\tau.$$

Az $x_0(t) \equiv 1$ 0-dik közelítésre igaz a képlet. Teljes indukció: behelyettesítjük a k-adik közelítést és tagonként integrálunk, a j-edik tag integrálja $\lambda\lambda^j t^{j+1}/[(j+1)j!]$ a $(j+1)$-edik tag lesz, $j = 0,1,\ldots,k$, s marad a 0-dik tag: 1.

5.3. feladat. $f(x) = x^{2/3}$ függvényre az $[f(x) - f(0)]/(x - 0) = x^{-1/3}$ differenciahányados $x \approx 0$ körül nem korlátos!

5.4. feladat. *a)* $dx/dt = \lambda x \Rightarrow x^{-1}dx = \lambda dt \Rightarrow \log x = \lambda t + c \Rightarrow x(t) = e^{\lambda t + c} \Rightarrow x(0) = e^c \Rightarrow x(t) = x_0 e^{\lambda t}$.

b) $dx/dt = x^{2/3} \Rightarrow x^{-2/3}dx = dt \Rightarrow 3x^{1/3} = t \Rightarrow x(t) = (t/3)^3$.

c) $dx/dt = x^2 \Rightarrow x^{-2}dx = dt \Rightarrow -x^{-1} = t + c \Rightarrow x(t) = -1/(t+c) \Rightarrow x(0) = -1/c$ stb.

5.5. feladat. (5.17*)–(5.18*) és 5.7. tétel értelmében $\lambda = i$ és $s = (1,-i)/2$. Ezért $\mathbf{Re}\,s = (1,0)/2$ és $\mathbf{Im}\,s = -(0,1)/2$.

5.6. feladat. Az 5.8. tételt fogjuk alkalmazni. A gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha$ és $\lambda_1\lambda_2 = \beta$. *a)* Ha a rendszer stabil, akkor mindkét gyök valós része negatív, azaz $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ (akár valós, akár komplex a két gyök). *b)* Tegyük föl, hogy $\alpha > 0$ és $\beta > 0$. Ha a két gyök valós, akkor nem lehet sem egy (mert $\beta > 0$), sem kettő pozitív gyök (mert $\alpha > 0$). Ha a két gyök komplex konjugált, akkor valós részük egyenlő $-\alpha/2$-vel, tehát negatív, azaz a rendszer stabil.

5.6. feladat. $\alpha = 0$ esetén $\lambda^2 + 1 = 0$, azaz $\lambda_{1,2} = \pm i$, azaz $y(t) = A\cos t$.

6. fejezet

6.1. feladat. $Y_t = C_t + I_t$, $Y_t = Y_{t-1} + AI_{t-1}$, $C_t = (1-s)Y_t \Rightarrow Y_t = (1+As)Y_{t-1}$

6.2. feladat.

6.3. feladat. (i) Varian (1992, 8. fejezet). (ii) Indirekt: legyen $p^* \neq \pi p^{\mathrm{o}}$ ($\pi > 0$) egy másik egyensúlyi árvektor. Mivel $z(p^*) \leq 0$ és $p^{\mathrm{o}} > 0$, $(p^{\mathrm{o}})^{\mathbf{T}} z(p^*) > 0$ lehetetlen.

6.4. feladat. Egy független változó van, s a $\dot{p}_1 = f(p_1)$ megoldása monoton tart az egyensúlyhoz.

6.5. feladat. A (6.34)-ben bevezetett ellipszoidot toljuk el az egyensúlyi árvektorba és vizsgáljuk az így adódó

$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} \frac{[p_i - p_i(0)]^2}{d_i}$$

Ljapunov-függvényt.

7. fejezet

7.1. feladat. a) Behelyettesítéssel:

$$\sum_{t=0}^{T} \psi(x_{t+1} - x_t) \to \max$$

Deriválva x_t szerint: $-\psi(x_{t+1} - x_t) + \psi(x_t - x_{t-1})$, $t = 1, \ldots, T-1$, tehát u_t =állandó, tehát $u_t = (x_{T+1} - x_0)/T$.

b) Sorozatos behelyettesítéssel $x_{T+1} = x_0 + \sum_{t=0}^{T} u_t$ a feltétel, a Lagrange-függvény:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} [\psi(u_t) + \lambda u_t].$$

Parciális deriváltakat nullává téve: $\psi'(u_t) = -\lambda$ stb.

7.2. feladat. $v_1(x_1) = \min\{x_1^2 + u_1^2 + x_2^2 |\, u_1\} = \min\{u_1^2 + (x_1 + u_1)^2 |\, u_1\}$. u_1 szerint deriválva: $u_1 + x_1 + u_1 = 0$, azaz $u_1 = -x_1/2$. Visszahelyettesítve: $v_1(x_1) = 3x_1^2/2$. $v_0(x_0) = \min\{x_0^2 + u_0^2 + v_1(x_1) |\, u_0\} = \min\{x_0^2 + u_0^2 + (3/2)(x_0 + u_0)^2 |\, u_0\}$. u_0 szerint deriválva: $2u_0 + 3(x_0 + u_0) = 0$, azaz $u_0 = -(3/5)x_0$.

7.3. feladat. $x_{t+1} = x_t + u_t$, $x_0 = -1$, $x_T = 0$. $A_t = B_t = G_t = 1$, $F_t = 0$, $t = 0{,}1,\ldots,T-1$, és $F_T = 0$. Számolással igazolható, hogy $S_t = S_{t+1}/(S_{t+1} + 1)$, s $K_t = S_t$. Indukcióval: $S_t = 1/(T-t)$, $x_t = (T-t)x_0/T$, $u_t = 1/T$.

7.4. feladat. Hasonlít a 7.3. példához (transzformációval vissza is vezethető rá). Itt közvetlen bizonyítást adunk. Előkészítés: $V(1 \cdot 1) = V(1) + V(1) \Rightarrow V(1) = 0$. *a)* Fölírva a differenciát: $V(\xi + h) - V(\xi) = V[\xi(1 + h/\xi)] - V(\xi) = V(1 + h/\xi) - V(1)$. Tehát $h \to 0$ esetén a $[V(1 + h/\xi) - V(1)]/h$ differenciahányados egyrészt tart a $V'(\xi)$-hez, másrészt a láncszabály szerint tart $V'(1)/\xi$-hez: $V'(\xi) = V'(1)/\xi$. Az 5.4. tétel szerint a megoldás $V(\xi) = \log \xi$. *b)* Úgy mint a 7.3. példánál.

7.5. feladat. Vegyük észre, hogy $\mathbf{E}(x_1 + u_1 + w_1)^2 = (x_1 + u_1)^2 + \mathbf{E}w_1^2$. $v_1(x_1) = \min\{x_1^2 + u_1^2 + \mathbf{E}x_2^2 |\, u_1\} = \min\{x_1^2 + u_1^2 + \mathbf{E}(x_1 + u_1 + w_1)^2 |\, u_1\}$. u_1 szerint deriválva: $u_1 + x_1 + u_1 = 0$, azaz $u_1 = -x_1/2$. Visszahelyettesítve: $v_1(x_1) = 3x_1^2/2 + \mathbf{E}w_1^2$. $v_0(x_0) = \min\{x_0^2 + u_0^2 + v_1(x_1) |\, u_0\} = \min\{x_0^2 + u_0^2 + (3/2)\mathbf{E}(x_0 + u_0)^2 + \mathbf{E}w_1^2 |\, u_0\}$. u_0 szerint deriválva: $2u_0 + 3(x_0 + u_0) = 0$, azaz $u_0 = -(3/5)x_0$.

8. fejezet

8.1. feladat. Lásd a 10.2. és a C.2. alfejezetet.

8.2. feladat. $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t c_t \to \max$, feltéve, hogy $0 \le c_t - \beta k_{t+1}$, $t = 0,1,\ldots$, k_0 adott. $k_t = \beta k_{t-1} = \cdots = \beta^t k_0$ nem elégíti ki a transzverzalitási feltételt.

8.3. feladat. $\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (k_t - \beta k_{t+1}) \to \max$, feltéve, hogy $0 \le k_{t+1} \le k_t/\beta$, $t = 0,1,\ldots$, k_0 adott. $k_t = \beta k_{t-1} = \cdots = \beta^t k_0$ nem elégíti ki a transzverzalitási feltételt.

8.4. feladat. *a)* Vegyük (8.8) reciprokát, szorozzuk be Ψ-vel és osszuk el k_t-vel: $1 - k_{t+1}/k_t^{\alpha} = \Psi k_t / k_{t-1}^{\alpha} - \Psi$. Szinte kínálkozik z_t. *b)* Próbálkozással.

8.5. feladat. Behelyettesítéssel.

8.6. feladat. $\sum_{i=0}^{t} \alpha^i \log \Psi$.

8.7. feladat. a)

$$V(k) = \max\{\log u[k^{\alpha} - k^*] + \beta V(k^*) | \qquad 0 \le k^* \le k^{\alpha}\}.$$

b) Először határozzuk meg a jobb oldal maximumát: $\varphi(k^*) = \log(k^{\alpha} - k^*) + \beta(\xi \log k^* + \eta)$. Deriválva $\varphi(k^*)$-t: $\varphi'(k^*) = -1/(k^{\alpha} - k^*) + \beta\xi/k^*$. Számolással: $k^* = \beta\xi k^{\alpha}/(1 + \beta\xi)$ és $c = k^{\alpha}/(1 + \beta\xi)$. Visszahelyettesítve c és k^* értékeket $\varphi(k^*)$-ba és felhasználva a függvényegyenletet, azonosságot kapunk ξ-re és η-ra. Mivel az optimális politika csak az előbbitől függ, elegendő azt meghatározni. Tekintsük $\log k$ együtthatóit mindkét oldalon: $\xi = \alpha + \beta\xi\alpha$, ezért $\xi = \alpha/(1 + \alpha\beta)$. Innen $k^* = \Phi k^{\alpha}$ $(\Phi = \alpha\beta)$ és

c) $c = (1 - \Phi)k^{\alpha}$.

8.8–8.9. feladat. Lásd Levhari és Mirman (1980).

9. fejezet

9.1. feladat. $H(x,u,p) = f(x,u) + p^{\mathbf{T}} g(x,u)$. Vegyük H teljes időszerinti deriváltját! $dH/dt = H_x \dot{x} + H_u \dot{u} + H_p \dot{p}$. Figyelembe véve, hogy $\dot{x} = H_p^{\mathbf{T}}$; $\dot{p} = -H_x^{\mathbf{T}}$ és $H_u = 0$, adódik $dH/dt = 0$.

9.2. feladat. *a)* Háromszögegyenlőtlenség: $\overline{AB} + \overline{BC} \ge \overline{AC}$. Ezt a szemléletes tényt a bonyolultabb, de a bizonyítási sorban korábbi „nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal fekszik” segédtétellel igazolhatjuk. Tegyük föl, hogy $\overline{AC}$ a háromszög leghosszabb oldala. Mérjük föl az $\overline{AB}$ szakasz B pontjára a $\overline{BC}$ szakaszt. A keletkező $AC'C$ háromszögben C'-nél γ, C-nél $\gamma + \gamma'$ szög van, azaz a segédtétel szerint $\overline{AC} \le \overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

b) $f(t,x,\dot{x}) = \sqrt{1 + (\dot{x})^2} \ge 1$. Vegyük azonban észre, milyen nehéz az Euler–Lagrange differenciálegyenletet használni. A 9.3. alfejezetben tárgyalandó hiányos alapfüggvény második esetét alkalmazva: $f_{\dot{x}}(t,\dot{x}) = c$, azaz $\dot{x}/\sqrt{1 + \dot{x}^2} = c$, ezért $\dot{x} = k$, azaz $x \equiv 0$.

9.3. feladat. Tükrözzük a K pontot a tükör egyenesére: K' és jelöljük E-vel az érintési pontot! $\overline{TE} + \overline{EK} = \overline{TE} + \overline{EK'}$ a 9.2. feladat szerint akkor minimális, ha E pont a TK' egyenesen van.

9.4. feladat. Legyen a víz-levegő határ a t-tengely, a szem az x-tengely $(0,a)$ és a tárgy a negatív félsík (b,d) pontja. Legyen $(0,x)$ a törési pont, valamint u a levegőbeli és v a vízbeli terjedési sebesség reciproka. Ekkor a minimum-feladat a következő: $u\sqrt{a^2 + x^2} + v\sqrt{d^2 + (b - x)^2}$. Deriválva: $u[a^2 + x^2]^{-1/2} x - v[d^2 - (b - x)^2]^{-1/2}(b - x) = 0$, ahonnan adódik a szóban forgó törvény.

9.5. feladat. $f(x) = x$, $f'_{\dot{x}}(x) = 0$, $f'_x(x) = 1$, azaz az $df'_{\dot{x}}(x)/dt = f'_x(x)$ Euler–Lagrange differenciálegyenletnek nincs megoldása. A minimum és a maximum hiánya egyébként elemi megfontilásokból is látszik.

9.7. feladat. Legyen $L(x,\dot{x}) = x + p\dot{x}^2$. Az $df'_{\dot{x}}(x)/dt = f'_x(x)$ Euler–Lagrange differenciálegyenlet miatt $2p\ddot{x} = 1$, azaz. $x(t) = at^2 + bt + c$, $\dot{x}(t) = 2at + b$. Peremfeltételek: $1 = x(0) = c$ és $1 = x(1) = a + b + 1$, azaz $a = -b$. Az izoperimetirkus feltételből:

$$3 = \int_0^1 (2at - a)^2\,dt = \int_0^1 (4a^2t^2 - 4a^2t + a^2)\,dt = (4/3)a^2 - 2a^2 + a^2 = a^2/3,$$

azaz $a_{1,2} = -b_{1,2} = \pm 3$. $x_1(t) = 3t^2 - 3t + 1$ és $x_2(t) = -3t^2 + 3t + 1$. Visszahelyettesítve a célfüggvénybe: $\int_0^1 x_1\,dt = 1 - 3/2 + 1 = 1/2$ és $\int_0^1 x_2\,dt = -1 + 3/2 + 1 = 3/2$. A maximimumfüggvény is $x_2(t)$, a minimumfüggvény $x_1(t)$.

9.9. feladat. *a)* A t abszcisszában az $\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$ tömegelem energiája $x(t)\sqrt{1 + \dot{x}(t)^2}dt$. *b)* A (i) alakba behelyettesítve: $(x - p)(1 + \dot{x}^2)^{1/2} + \dot{x}^2(x - p)(1 + \dot{x}^2)^{-1/2} = 0$. Rendezve: $\dot{x} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 - C^2}/C$. Számolással $x(t) = \cosh(\delta t)/\delta + \gamma$. Ívhossz: $\sinh(\delta a)/\delta = \kappa$ meghatározza δ-t és a végpont: $D = \gamma(e^{-\delta a} + e^{\delta a)}/2 + \gamma$ meghatározza a γ-t. *c)* A görbe mélypontja a $t = 0$ pontban van: $x(0) = 1/\delta + \gamma \geq 0$.

10. fejezet

10.1. feladat. $c(0) = (k_0 + wT)/T = 1{,}25$; a megtakarítás egyenletes fölélése.

10.2. feladat. $f'(k^o) = \beta$ szerint $A\alpha k^{\alpha-1} = \beta$, azaz $k^o = [A\alpha/\beta]^{1/(1-\alpha)}$ és $c^o = f(k^o) = A(k^o)^\alpha$. $r^o = \beta$. $\lambda^2 - \beta\lambda - q^o = 0$, ahol $q^o = -f''(k^o)/a^o = (1-\alpha)\beta c^o/(\varepsilon k^o) \Rightarrow \lambda_1 = [\beta - \sqrt{\beta^2 + 4q^o}]/2$.

10.3. feladat. $k^o = 142{,}8$; $c^o = 44{,}3$; $r^o = 0{,}03$; $\lambda_1 = -0{,}034$.

10.4. feladat. Lassú a konvergencia, lásd az ábrát. Figyelemre méltó, hogy ha az egyensúlyból indulunk is, a diszkrét lépések kivetnek az egyensúlyból (lásd az 1.10. példát).

A. függelék

A.1. feladat. Térjünk vissza az 1.3. alfejezet elejére! Legyen (1.28)-ban $m_{11},m_{22} \geq 0$, M irreducibilitása miatt $m_{12},m_{21} > 0$. *a)* Ahhoz, hogy legyen pozitív sajátérték, az szükséges, hogy mindkét sajátérték valós legyen. Ellenőrizni kell, hogy $\omega^2 \geq 4\vartheta$ [(1.29)] teljesül-e. Igen, mert (1.28)-at behelyettesítve (1.29)-be, rendezéssel $(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21} \geq 0$ adódik. Mivel a két sajátérték összege $(-\omega)$ nem negatív, és a diszkrimináns pozitív; van pozitív sajátérték, amely (egy) domináns sajátérték.

b) A sajátérték-egyenletet rendezve: $(\lambda - m_{11})x_1 = m_{12}s_2$, $(\lambda - m_{22})x_2 = m_{21}x_2$. Összeszorozva és $x_1x_2 \neq 0$-val egyszerűsítve: $(\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) = m_{12}m_{21} > 0$. Tegyük föl, hogy $m_{11} \geq m_{22}$. Ekkor $\lambda_2 \leq m_{22} \leq m_{11} \leq \lambda_1$. Domináns pozitív gyökhöz tartozó sajátvektorra: $s_{1,1}/s_{2,1} = m_{12}/(\lambda_1 - m_{11}) > 0$. A másik sajátvektorra: $s_{1,2}/s_{2,2} = m_{12}/(\lambda_2 - m_{11}) < 0$.

c) Mivel a diszkrimináns pozitív, a két sajátérték különböző.

d) $2\rho(M) = m_{11} + m_{22} + \sqrt{(m_{11} - m_{22})^2 + 4m_{12}m_{21}}$, azaz $\rho(M)$ növekvő függvénye m_{12}-nek és m_{21}-nek. A négyzetgyök-függvény konkavitása miatt a $0 \leq m_{11} \leq m_{22}$ intervallumban m_{11} növekedésével párhuzamosan a diszkrimináns lassabban nő, mint $|m_{11} - m_{22}|$.

e) Szükségünk lesz a $P(\lambda) = (\lambda - m_{11})(\lambda - m_{22}) - m_{12}m_{21}$ karakteriszikus polinomra. Az adjungált mátrix segítségével az $(I - M)$ inverze a következőképpen fejezhető ki:

$$(I - M)^{-1} = P(-1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 - m_{22} & m_{12} \\ m_{21} & 1 - m_{11} \end{pmatrix}.$$

Ha M stabil, akkor $P(1) > 0$. A fentiek szerint $m_{ii} \le \lambda_1 < 1$, tehát $(I - M)^{-1} > 0$.

A.2. feladat. *a)–b)* Az A.1a. feladatban láttuk, hogy $P = 2$, akkor és csak akkor valósul meg, ha $m_{11} = m_{22} = 0$. Ekkor $\lambda_2 = -\lambda_1 = \sqrt{m_{12}m_{21}}$.

A.3. feladat. Ha mindkét oszlopösszeg azonos pozitív szám, akkor az sajátérték, például $\lambda_1 = m_{11} + m_{12} = m_{12} + m_{22}$, (1,1) bal oldali sajátvektorral. Ismert okok miatt a másik sajátérték, $\lambda_2 = \det M/\lambda_1 = [m_{11}m_{22} - (\lambda_1 - m_{11})(\lambda_1 - m_{22})]/\lambda_1 = m_{11} + m_{22} - \lambda_1$, ahonnan adódik a keresett dominancia-feltétel: $0 \le m_{11} + m_{22} \le 2\lambda_1$. (Ha $M \ge 0$, akkor a feltétel teljesül, hiszen $m_{11}, m_{22} \le \lambda_1$.)

A.4. feladat. l_1: ferde négyzet a következő csúcspontokkal: (1,0), (0,1), (−1,0), (0,−1); l_2: 0 központú egységkör, l_∞: négyzet a következő csúcspontokkal, (1,1), (1,−1), (−1, − 1), (−1,1).

A.5. feladat. A szimmetria miatt csak $||M||_\infty$−nel foglalkozunk. Alkalmazzuk $y_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}x_j$-re az abszolútérték-egyenlőtlenséget: $|y_i| \le \sum_{j=1}^n |m_{ij}|\ |x_j|$. Felhasználva az $||x||_\infty$ és $||M||_\infty$ norma definícióját, $|y_i| \le \sum_{j=1}^n |m_{ij}|\,||x||_\infty \le ||M||_\infty\ ||x||_\infty$, azaz $||y||_\infty \le ||M||_\infty\ ||x||_\infty$.

Belátható, hogy az egyenlőtlenség éles. Például legyen 1 egy olyan sorindex, amelyre $\sum_{j=1}^n |m_{1j}| = ||M||_\infty$ és legyen β_j egységnyi abszolút értékű komplex szám, amelyre $|m_{1j}| = m_{1j}\beta_j$, $j = 1,\ldots,n$. Végül az $x_j = 1/\beta_j$ választással $|y_1| = \sum_{j=1}^n |m_{1j}|$ stb,

B. függelék.

B.1. feladat. A (B.3) képletbe helyettesítve $c_{0,t} = c_{1,t+1}$ és $s_{i,t} = w_i - c_{i,t}$ képletet, adódik az egyenletrendszer.

B.2. feladat. Lásd (C.16)–(C.23).

B.3. feladat. Növekvő függvény deriváltja pozitív, szigorúan konvex függvény deriváltja növekvő, Rolle tétele szerint a két állandósult állapot között van olyan pont, ahol a derivált értéke 1, tehát a függvény deriváltja a kisebbik állandósult állapotban 0 és 1 közötti szám, a nagyobbikban 1-nél nagyobb szám.

B.4. feladat. *a)* Vegyük észre, hogy (B.4)-ben r_{t+1} helyére r_t lép, azaz $s_{0,t} = s(r_t)$. *b)* (B.3)-ban azonban megmarad r_{t+1}, azaz $s_{1,t+1} = r_{t+1}s(r_t)$. Megint élve a rövidre zárással, $s_{0,t+1} = s(r_{t+1})$, ahonnan $(t+1)$-ben $S(r_t, r_{t+1}) = \nu s(r_{t+1}) - r_{t+1}s(r_t) = 0$. A lokális stabilitás elemzése adja az eredményt.

B.5. feladat. Használjuk föl a B.2. feladat eredményét ε meghatározásánál. (B.8)-at hasonlítsuk össze a B.4. feladat eredményével.

B.6. feladat. Használjuk föl a B.1. feladat eredményét. Legyen $\gamma = 1/r_t$ és $\delta = 1/r_{t+1}$. Behelyettesítve a (B.5) differenciaegyenletbe, adódik

$$\frac{w_0 + w_1\delta}{1+\delta} + \frac{w_0 + w_1\gamma}{1+\gamma} = 1.$$

Némi számolás után $\gamma\delta = 1$.

B.7. feladat. *a)* Alkalmazzuk a $\xi = 1/r_t$ és jelölést. Az aranyszabály 2-ciklus szerint $\xi = r_{t+1}$. Ismét (B.5)-be helyettesítünk:

$$\frac{w_0\Phi\xi^\mu - w_1\xi}{1+\Phi\xi^\mu} = \frac{w_0\Phi\xi^{1-\mu} - w_1}{1+\Phi\xi^{-\mu}}.$$

Némi számolással

$$(w_1 + w_0\Phi^2)\xi - \Phi\xi^\mu + \Phi\xi^{1-\mu} - (w_1 + w_0\Phi^2) = 0.$$

Nyilvánvaló, hogy az egyik valós gyök 1 (állandósult állapot) és a többi (ha létezik) a 2-ciklus összetevője.

b) A $\mu = 2/3$ esetnek az a különlegessége, hogy ξ és ξ^μ $\xi^{1-\mu}$ egyszerű (egész kitevős) hatványai. Bevezetve a $\chi = \xi^3$ jelölést, most a nem-algebrai egyenlet egy harmadfokú egyenletté szelidül. $\chi - 1$ kifejezést kiemelve, marad egy másodfokú egyenlet:

$$(w_1 + \Phi^2 w_0)\chi^2 + (w_1 + \Phi^2 w_0 - \Phi)\chi + (w_1 + \Phi^2 w_0) = 0,$$

amely még az előbbinél is egyszerűbb. $w_0 = 1$ esetén a $\Phi\chi^2 - (1-\Phi)\chi + \Phi = 0$ másodfokú egyenlet egy boríték hátán is megoldható, s pozitív megoldás létezési feltételére a $\beta \le 1/27$ korlát adódik. A $\beta = 1/30$ esetén kapott $r_0 = 0{,}376$ gyök nem túlzottan érdekes, mivel az $S(r)$ kifejezés a $0{,}2 \le r \le 1$ szakaszon mindössze 0,003-at változik. (Lásd még a C.4. példát.)

B.8. feladat. Alkalmazzuk az $r_t = f'(k_t)$ és $w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$ összefüggéspárt!

C. függelék

C.1. feladat. Alkalmazzuk a Descartes-féle előjelszabályt: „egy valós együtthatós polinomnak legfeljebb annyi pozitív gyöke van, mint amennyi az együtthatóiból álló sorozat jelváltási száma" (Gale, 1973; Pólya és Szegő, 1924/1981, II. kötet, V. rész, 1.3. alfejezet).

C.2. feladat. Lásd a C.1. feladat megoldását.

C.3. feladat.

C.4. feladat. Helyettesítsük be $w_j = 1/D$, $j = 0,\dots,D$, $r^* = 1/\beta$ értékeket rendre (C.15°)–(C.16°)-ba: $W(1/\beta) = (\sum_{i=0}^{D}\beta^i)/(D+1)$, $V(1/\beta) = \sum_{i=0}^{D}\beta^i$, (hiszen $\Phi\beta^\mu = 1$), és (C.21°)–(C.20°) szerint $H(1/\beta) = 1$, tehát $c_j(1/\beta) = 1/(D+1)$.

C.6. feladat. A C.7. példát követve $W = (1 + r^{-1} + r^{-2})/3$, $\mathbf{V} = 3$, $H = (1 + r^{-1} + r^{-2})/9$, $\mathbf{W} = (1 + r^{-1})/3$. $v = \mathbf{SV} - \mathbf{W} = 9 - r - 1 - r^{-1} - r^2 - r - 1$ stb.

C.7. feladat.

C.8. feladat.

C.9. feladat.

IRODALOM

AARON, H. J. (1966): „The Social Insurance Paradox", *Canadian Journal of Economics and Political Science 32* 371–374.

AGHION, PH.–BLANCHARD, O. J. (1994): „On the speed of transition in Central Europe", *NBER Macroeconomic Annual, 9*, 283–319.

AIYAGARI, S. R. (1988): „Nonmonetary Steady States in Stationary Overlapping Generations Models with Long Lived Agents and Discounting: Multiplicity, Optimality, and Consumption Smoothing", *Journal of Economic Theory 45* 102–127.

AIYAGARI, S. R. (1989): „Can there be Short-Period Deterministic Cycles when People are Long-Lived?" *Quarterly Journal of Economics 104* 163–185.

ANDERSON, P. W., ARROW, K. J. és PINES, D., szerk. (1988): *The Economy as an Evolving Complex System*, Redwood City, CA, Addison-Wesley.

ANDO, A. és MODIGLIANI, F. (1963): „The 'Life Cycle' Hypothesis of Saving: Aggregate Implications and Tests", *American Economic Review 53* 55–84.

AOKI, M. (1976): *Optimal Control and System Theory in Dynamic Economic Analysis*, New York, North Holland.

ARNOLD, V. I. (1984): *Közönséges differenciálegyenletek*, (a 2. orosz kiadás fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó 1987.

ARROW, K. J. (1968): Application of Control Theory to Economic Growth, *Lectures in Applied Mathematics, Mathematics of Decision Sciences, Part 2, Vol. 12*, Providence RI, AMS.

ARROW, K. J. (1970): *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chicago, Markham.

ARROW, K. J., BLOCK, H. D. és HURWICZ, L. (1959): „On the Stability of the Competitive Equilibrium: II", *Econometrica 27* 82–109.

ARROW, K. J. és DEBREU, G. (1954): „Existence of Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica 22* 265–290.

ARROW, K. J. és HAHN, F. (1971): *General Competitive Analysis*, San Francisco, Holden-Day.

ARROW, K. J. és HONKAPOHJA, S. (1985a): „Introduction", *Arrow és Honkapohja, szerk.* 1–27.

ARROW, K. J. és HONKAPOHJA, S., szerk. (1985b): *Frontiers of Economics*, Oxford, Blackwell.

ARROW, K. J. és HURWICZ, L. (1958): „On the Stability of the Competitive Equilibrium: I", *Econometrica 26* 522–552.

ARROW, K. J. és INTRILLIGATOR, M. D., szerk. (1981): *Handbook of Mathematical Economics, Vol. I.* Amszterdam, North-Holland.

ARTHUR, W. B. (1993): „Pozitív visszacsatolási mechanizmusok a gazdaságban", *Közgazdasági Szemle 40* 138–148.

ARTHUR, W. B. és MCNICOLL, G. (1978): „Samuelson, Population and Intergenerational Transfers", *International Economic Review 19* 241–246.

ATHANS, M. (1972): „The Discrete Time, Linear-Quadratic-Gaussian Stochastic Control Problem", *Annals of Economic and Social Measurements 1* 449–492.

ATHANS, M. (1975): „Theory and Application: A Survey of Decentralized Control Methods", *Annals of Economic and Social Measurements 4* 345–355.

ATKINSON, A. B. (1969): „The Timescale of the Economic Models: How Long is the Long Run", *Review of Economic Studies 36* 137–152.

AUERBACH, A. J. és KOTLIKOFF, L. J. (1987): *Dynamic Fiscal Policy*, Cambridge, Cambridge University Press.

AUGUSZTINOVICS, M. (1989): „The Costs of Human Life", *Economic Systems Research 1* 5–26.

AUGUSZTINOVICS, M. (1992): „Towards a Theory of Stationary Populations", *kézirat,* KTI, Budapest (korábbi változat: Discussion Paper, 1991).

AZARIADIS, C. (1993): *Intertemporal Macroeconomics*, Oxford, Blackwell.

BAGDY, G. (1989): „Beruházási ciklus és költségtúllépés a szocialista gazdaságban", *Közgazdasági Szemle 36* 474–479.

BALASKO, Y., CASS, D. és SHELL, K. (1980): „Existence of Competitive Equilibrium in a General Overlapping Generations Model", *Journal of Economic Theory 23* 307–322.

BALASKO, Y. és GHIGLINO, C. (1995): „On the Existence of Endogenous Cycles", *Journal of Economic Theory 67* 566–577.

BALLA K.–KÖLLŐ, J.–SIMONOVITS, A. (2006): „Transzformációs sokk heterogén munkaerő-piacon", *Közgazdasági Szemle 53.*

BANAI, M. és LUKÁCS, B. (1987): „Beruházási pálya és variációs módszerek", *Közgazdasági Szemle 34* 432–440.

BAUER, T. (1978): „Beruházási ciklusok a tervgazdaságban. (A reform előtti gazdaságirányítási rendszer alapján)", *Gazdaság 11* 4. sz. 57–75.

BAUER, T. (1981): *Tervgazdaság, beruházás, ciklusok*, Budapest, KJK.

BAUMOL, W. J. (1970): *Economic Dynamics: An Introduction*, New York, McMillan, 3. kiadás.

BELLMAN, R. E. (1957): *Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press.

BENASSY, J.-P. (1974): „Disequilibriumelmélet", *Szigma 7* 135–163 és 241–270.

BENHABIB, J. (1992): *Cycles and Chaos in Equilibrium*, Princeton, Princeton University Press.

BENHABIB, J. és DAY, R. H. (1982): „A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model", *Journal of Economic Dynamics and Control 4* 37–55.

BERMAN, A. és PLEMONS, R. J. (1979): *Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences*, New York, Academic Press.

BLACKWELL, D. (1965): „Discounted Dynamic Programming", *Annals of Mathematical Statistics 36* 226–235.

BLANCHARD, O. J. és FISCHER, S. (1989): *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, MA, MIT Press.

BLATT, J. M. (1978): „On the Econometric Approach to Business Cycle Modelling", *Oxford Economic Papers 30* 292–300.

BLATT, J. M. (1980): „On the Frisch Model of the Business Cycle", *Oxford Economic Papers 32* 467–479.

BLATT, J. M. (1983): *Dynamic Economic Systems*, Armonk N.Y., M. E. Sharpe.

BODEWIG, E. (1959): *Matrix Calculus*, Amszterdam, North Holland.

BOLDRIN, M. és MONTRUCCHIO, L. (1986): „On the Indeterminacy of Capital Accumulation Paths", *Journal of Economic Theory 40* 26–39.

BOLDRIN, M. és WOODFORD, M. (1990): „Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey", *Journal of Monetary Economics 25* 189–222.

BOYER, C. B. (1968): *A History of Mathematics*, Princeton, Princeton UP.

BROCK, W. A. (1986): „Distinguishing Random and Deterministic Systems, Abridged Version", *Journal of Economic Theory 40* 168–195.

BROCK, W. A. and HOMMES, C. H. (1997) „A Rational Route to Randomness", *Econometrica 65* 1059–1095.

BRÓDY, A. (1969): *Érték és újratermelés*, Budapest, KJK.

BRÓDY, A (1973): „Szabályozási modellekről", *Szigma 6* 93–103.

BRÓDY, A. és FARKAS, M. (1987): „A gazdaság mozgás-formáiról", *Közgazdasági Szemle 34* 1178–1184.

BRUNNER, K. és MELTZER, A., szerk. (1976): *The Phillips Curve and Labor Markets*, Carnegie-Rochester Conference Series, Vol. 1, Amszterdam, North-Holland.

BRYSON, A. E. és HO, Y-C. (1969): *Applied Optimal Control*, Waltham, MA, Ginn and Company.

BURMEISTER, E. (1980): *Capital Theory and Dynamics*, Cambridge, Cambridge University Press.

CASS, D. (1965): „Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies 32* 233–240.

CASS, D. (1966): „Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem", *Econometrica 34* 833–850.

CHAMPSOUR, P. et al., szerk. (1990): *Essays in Honor of Edmund Malinvaud*, Cambridge, MA, MIT Press.

CHIANG, A. (1984): *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, New York, McGraw Hill.

CHIANG, A. (1992): *Elements of Dynamic Optimization*, New York, McGraw Hill.

CHIKÁN, A., FÁBRI, E. és NAGY, M. (1978): *Készletek a gazdaságban*, Budapest, KJK.

CHOW, G. C. (1975): *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*, New York, Wiley.

CHOW, G. C. (1989): „Rational and Adaptive Expectations in Present Value Models" *Review of Economics and Statistics 71* 376–384.

CODDINGTON, E. A. és LEVINSON, N. (1955): *The Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, McGraw Hill.

CUGNO, F. és MONTRUCCHIO, L. (1984): „Some New Techniques for Modelling Non-Linear Economic Fluctuations: A Brief Survey”, *Goodwin et al, szerk.* 146–165.

CSÁKI, F. (1973): *Fejezetek a szabályozástechnikából: Állapotegyenletek*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

DANCS, I. (1992): *Bevezetés a matematikai analízisbe*, Budapest, Aula.

DAY, R. (1982): „Szabálytalan növekedési ciklusok”, *Fokasz, szerk, 1997* 215–227.

DAY, R. (1994): *Complex Economic Dynamics*, Cambridge, MA, MIT Press.

DAY, R. és PIAGINIANI, G. (1991): „Statistical Dynamics and Economics”, *Journal of Economic Behavior and Organization 16* 37–83.

DAVIS, C. és CHAREMZA, W., szerk. (1989): *Models of Disequilibrium and Shortage in Centrally Planned Economies*, London, Chapman and Hall.

DEATON, A. (1992): *Understanding Consumption*, Oxford, Clarendon Press.

DEBREU, G. (1974): „Excess Demand Functions”, *Journal of Mathematical Economics 1* 15–22.

DECHERT, W. D. (1984): „Does Optimal Growth Precludes Chaos? A Theorem on Monotonicity”, *Journal of Economics 44* 57–61.

DENECKERE, R. és PELIKAN, S. (1986): „Competitive Chaos”, *Journal of Economic Theory 40* 13–25.

DEVANEY, R. L. (1989): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Redwood City, Addison-Wesley Publishing Company, 2. kiadás.

DIAMOND, P. A. (1965): „National Debt in a Neoclassical Growth Model”, *American Economic Review 55* 1126–1150.

DIAMOND, P. (2003): „Taxation, Incomplete Markets and Social Security”, Munich Lectures, Cambridge, MA, MIT Press.

DIAMOND, P.–MIRRLEES, J. (1978): „A Model of Social Insurance with Variable Retirement”, *Journal of Public Economics 10*, 295–336. o.

DOMAR, E. E. (1946): „Tőkenövekedés, műszaki haladás és növekedés”, magyarul *Szakolczai, szerk. (1963)* 137–168.

DOMAR, E. E. (1957): *Essays in the Theory of Economic Growth*, New York, Oxford University Press.

ELBERS, C. és WEDDEPOHL, H. N. (1986): „Steady State Equilibria with Saving for Retirement in a Continuous Time Overlapping Generations Model”, *Journal of Economics 46* 253–282.

ELAGDI, S. N. (1991): *An Introduction to Difference Equations*, New York, Springer.

ESŐ, P. és SIMONOVITS, A. (2003): „Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre”, *Közgazdasági Szemle, 50* 99–111.

EZEKIEL, M. (1938): „The Cobweb Theorem”, *Quarterly Journal of Economics 52* 255–280.

FEINSTEIN, G. H., szerk. (1967): *Socialism, Capitalism, and Economic Growth*, Cambridge University Press, Cambridge.

FELLNER, W. et al. (1967): *Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher*, New York, Wiley,

FOKASZ, N., szerk. (1997): *Rend és káosz*, Budapest, Replika.

FRISCH, R. (1933): „Terjedési és hatásproblémák a dinamikus közgazdaságtanban”, *Frisch (1974)* 103–137.

FRISCH, R. (1974): *Kvantitatív és dinamikus közgazdaságtan*, Budapest, KJK.

FULLER, A. és FISHER, M. (1958): „On the Stabilization of Matrices and the Convergence of Linear Iterative Processes”, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 54* 417–425.

GALE, D. (1963): „A Note on the Global Instability of the Competitive Equilibrium”, *Naval Research Quarterly 10* 81–89.

GALE, D. (1973): „Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models”, *Journal of Economic Theory 6* 12–36.

GALE, D. (1974): „The Trade Imbalance Story”, *Journal of International Economics 4* 119–137.

GANTMACHER, F. R. (1959): *The Theory of Matrices, Volumes 1 and 2*, New York, Chelsea.

GANDOLFO, G. (1971): *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, Amszterdam, North Holland, 2. kiadás, 1983, 3. kiadás: 1995.

GHIGLINO, C. és TVEDE, M. (1995a): „Endowments, Stability and Fluctuations in OLG models”, *Journal of Economic Dynamics and Control 19* 621–654.

GHIGLINO, C. és TVEDE, M. (1995b): „No-Trade and the Uniqueness of Steady States”, *Journal of Economic Dynamics and Control 19* 655–661.

GOODWIN, R. M. (1951): „The Non-Linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles”, *Econometrica 19* 1–17.

GOODWIN, R. M. (1967): „A Growth Cycle”, *Feinstein, szerk.* 54–58.

GOODWIN, R. M., KRÜGER, M. és VERCELLI, A., szerk. (1984): *Non-Linear Models of Fluctuating Growth. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 248* 146–165, Berlin, Springer.

GRANDMONT, J.-M. (1985): „On Endogenous Business Cycles”, *Econometrica 53* 995–1045.

GRANDMONT, J.-M. (1986): „Periodic and Aperiodic Behavior in Discrete One-Dimensional Dynamical Systems”, *Hildenbrand és Mas Collel, szerk.* 227–265.

GRANDMONT, J.-M. (1992): „Transformations of the Commodity Space, Behavioral Heterogeneity, and the Aggregation Problem”, *Journal of Economic Theory 57* 1–35.

GRANDMONT, J.-M. (1998): „Expectations Formation and Stability of Large Socioeconomic Systems”, *Econometrica 66* 741–781.

GRANDMONT, J.-M. és LAROQUE, G. (1990): „Stability, Expectations and Predetermined Variables”, *Champsour et al, szerk.* VOL. 1. 71–92.

GUCKENHEIMER, J. (1979): „Sensitive Dependence to Initial Conditions for One-Dimensional Maps”, *Communications of Mathematical Physics 70* 133–160.

GUCKENHEIMER, J. és HOLMES, P. (1986): *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York, Springer, 2. bővített és javított kiadás.

HAHN, W. (1967): *Stability of Motion*, New York, Springer.

HALMOS, P. (1958): *Végesdimenziós vektorterek*, Budapest, Műszaki Kiadó, 1984.

HARROD, R. (1939): „Egy esszé a dinamikus elméletről”, magyarul *Szakolczai, szerk. (1963)* 169–192.

HARROD, R. (1948): *Towards a Dynamic Economics*, London, McMillan.

HAYEK, F. A. (1935): *Collectivistic Economic Planning*, London, Routledge and Kegan Paul.

HICKS, J. (1950): *A Contribution to the Theory of Trade Cycle*, Oxford, Clarendon.

HILDENBRAND, W. (1983): „On the Law of Demand”, *Econometrica 51* 997–1019.

HILDENBRAND, W. és MAS COLLEL, A., szerk. (1986): *Contributions to Mathematical Economics*, Amszterdam, Elsevier.

HILDENBRAND, W. és SONNENSCHEIN, H., szerk. (1991): *Handbook of Mathematical Economics Vol. IV,* Amszterdam, North-Holland.

HIRSCH, M. W. (1989): „Dinamikai rendszerek és differenciálegyenletek”, *Alkalmazott Matematikai Lapok 14* 171–232.

HOLLY, S., RÜSTEM, B. és ZARROP, M. B., szerk. (1979): *Optimal Control for Econometric Models (An Approach to Economic Policy Formulation)*, London, McMillan.

HOMMES, C. H. (1991): *Chaotic Dynamics in Economic Models: Some Simple Case-Studies*, Groningen Theses in Economics, Management and Organization, Groningen, Wolters-Nordhoff.

HOMMES, C. H. (1993): „Periodic, Almost-periodic and Chaotic Dynamics in Hicks' Nonlinear Trade Cycle Model”, *Economic Letters 41* 391-397.

HOMMES, C. H. (1994): „Dynamics of the Cobweb Model with Adaptive Expectations and Nonlinar Supply and Demand”, *Journal of Economic Behavior and Organization 24* 315-335.

HOMMES, C. H. és NUSSE, H. E. (1989): „Does an Unstable Keynesian Unemployment Equilibrium in a Non-Walrasian Dynamic Macroeconomic Model Imply Chaos?”, *Scandinavian Journal of Economics 91* 161–167.

HOMMES, C. H. and NUSSE, H. E. (1992): „Period Three to Period Two Bifurcation for Piecewise Linear Models”, *Journal of Economics 54* 157-169.

HOMMES, C. H., NUSSE, H. E. és SIMONOVITS, A. (1995): „Cycles and Chaos in a Socialist Economy” *Journal of Economic Dynamics and Control 19* 155–179.

HOMMES, C. H. and SORGER, G. (1997) "Consistent Expectations Equilibria", *Macroeconomic Dynamics 2* 287–321.

HONKAPOHJA, S. és ITO, T. (1980): „Inventory Dynamics in a Simple Disequilibrium Macroeconomic Model”, *Scandinavian Journal of Economics 82* 184–198.

ICKES, B. W. (1986): „Cyclical Fluctuations in Centrally Planned Economies”, *Soviet Studies 38* 36–52.

ITO, S., TANAKA, S. és NAKADA, H. (1979): „On Unimodal Linear Transformations and Chaos: II”, *Tokyo Journal of Mathematics 2* 241-259.

JAKOBSON, M. V. (1981): „Absolutely Continuous Invariant Measures for One-Parameter Families of One-Dimensional Maps”, *Communications of Mathematical Physics 81* 39–81.

KALMAN, R. (1960): „A Contribution to the Theory of Optimal Control”, *Bol. Socied. Mat. Mexicana 5* 102–119.

KAMIEN, M. I. és SCHWARTZ, N. L. (1981): *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*, Amszterdam, North-Holland, 2. kiadás, 1991.

KEHOE, T. J. (1991): „Computation and Multiplicity of Equilibria”, *Hildenbrand and Sonnenschein, eds.* 2049–2144.

KEHOE, T. J. és LEVINE, D. K. (1984): „Regularity and Overlapping Generations Exchange Economies", *Journal of Mathematical Economics 13* 69-93.

KEHOE, T. J. és LEVINE, D. K. (1985): „Comparative Static and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economics", *Econometrica 53* 433–453.

KEHOE, T. J. és LEVINE, D. K. (1990): „The Economics of Indeterminacy in Overlapping Generations Models", *Journal of Public Economics 42* 219–243.

KENDRICK, D. (1981): „Control Theory with Applications to Economics", *Arrow és Intrilligator, szerk.* 111–158.

KEYNES, J. M. (1936): *A foglalkoztatás, a kamat és a pénz általános elmélete*, Budapest, KJK, 1965.

KIM, O. (1983): „Balanced Equilibrium in a Consumption Loans Model", *Journal of Economic Theory 29*, 339–346.

KIRMAN, A. (1992): „Whom or What Does the Representative Individual Represent?" *Journal of Economic Perspectives 6* 117–136

KOOPMANS, T. C. (1965): „On the Concept of Optimal Economic Growth", *Semain d'Etude sur le Role de l'Analyse Econometrique dans la Formulation due Plans de Dévelopment*, Vatikán, A Pápai Tudományos Akadémia, I. kötet, 225–287.

KOOPMANS, T. C. (1967): „Objectives, Constraints and Outcomes in Optimal Growth Models", *Econometrica 35* 1–15.

KORNAI, J. (1971): *Anti-Equilibrium*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

KORNAI, J. (1980): *A hiány*, Budapest, KJK.

KORNAI, J. (1982): *Növekedés, hiány és hatékonyság*, Budapest, KJK.

KORNAI, J. (1993): *A szocialista rendszer. Kritikai politikai gazdaságtan*, Budapest, HVG.

KORNAI, J. és MARTOS, B. (1971): „Gazdasági rendszerek vegetatív működése", *Szigma 4* 34–50.

KORNAI, J. és MARTOS, B., szerk. (1981): *Szabályozás árjelzések nélkül*, Budapest, Akadémiai Kiadó.

KORNAI, J. és SIMONOVITS, A. (1975): „Szabályozási problémák Neumann-gazdaságokban", *Szigma 8* 81–99.

KORNAI, J. és SIMONOVITS, A. (1981): „Normál pályáról vezérelt készletjelzéses modell", *Kornai és Martos, szerk* . 205–224.

KÓSA, A. (1973): *Variációszámítás*, Budapest, Tankönyvkiadó.

KOVÁCS, J. és VIRÁG, I. (1981): „Szakaszos vagy egyenletes növekedés", *Közgazdasági Szemle 28* 675–686.

KUHN, H. W. és SZEGŐ, G. szerk. (1969): *Mathematical Systems Theory and Economics, I.* Berlin, Springer.

KURIHARA, K. K., szerk. (1954): *Post-Keynesian Economics*, New Brunswick, Rutgers University Press.

KYDLAND, F. E. és PRESCOTT, E. C. (1977): „Rules rather than Discretion: The Inconsistency of Optimal Plans", *Journal of Political Economics 85* 473–491.

LACKÓ, M. (1980): „Feszültségek felhalmozása és leépítése", *Közgazdasági Szemle 33* 24–40.

LACKÓ, M. (1989): „Sectoral Shortage Models in Hungary", *Davis és Charemza, szerk.* 263–291.

LAITNER, J. P. (1981): „The Stability of Steady States in Perfect Foresight Models", *Econometrica 49* 319–333.

LAITNER, J. P. (1984): „Transition Time Paths for Overlapping-Generations Models", *Journal of Economic Dynamics and Control 7* 111–129.

LANCASTER, K. (1968): *Mathematical Economics*, New York, McMillan.

LANCASTER, P. (1969): *Theory of Matrices*, New York, Academic Press.

LEONTIEF, W. W. (1941): *The Structure of the American Economy*, New York, Oxford University Press (edition in 1951).

LEUNG, S. F. (1994): „Uncertain Lifetime, the Theory of Consumer, and the Life Cycle Hypothesis", *Econometrica 62* 1233–1239.

LEVHARI, D.–MIRMAN, L. J. (1980): „The Great Fish War: An Example using a Dynamic Cournot-Nash Solution", *The Bell Journal of Economics 11* 322–334.

LI, J. A. és YORKE, J. A. (1975): „Period Three Implies Chaos", *American Mathematical Monthly 82* 985–992.

LJUNGQVIST, L. és SARGENT, T. J. (2000): *Recursive Macroeconomic Theory*, Cambridge, MA, MIT Press.

LORENZ, E. N. (1963): „Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of Atmospheric Sciences 20* 130–141.

LORENZ, H.-W. (1993): *Nonlinear Dynamics Economics and Chaotic Motion*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin, Springer, 2. kiadás.

LOVELL, M. C. (1962): „Buffer Stocks, Sales Expectations and Stability: A Multisector Analysis of the Inventory Cycle", *Econometrica 30* 267–296.

LOVELL, M. C. (1986): „Tests of Rational Expectations Hypotheses", *American Economic Review 76* 110–124.

LUCAS, R. E. (1976): „Econometric Policy Evaluation, A Critique", *Brunner és Meltzer, szerk.* 19–46.

LUCAS, R. E. (1987): *Models of Business Cycles*, Oxford, Basil Blackwell.

LYAPUNOV, A. (1893): *Stability of Motions*, New York, Academic Press (orosz eredeti angol fordítása), 1966.

MANUELLI, R. E. és SARGENT, T. J. (1987): *Excercises in Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge MA, Harvard University Press.

MARTOS, B. (1981): „Fogalmak és tételek a szabályozás-elméletből", *Kornai és Martos, szerk.* 73–101.

MARTOS, B. (1984): „Nem walrasi szabályozási mechanizmusok", Szigma 17 123–145 .

MARTOS, B. (1990): *Economic Control Structures*, Amszterdam, North Holland.

McFADDEN, D. (1969): „On the Controllability Decentralized Macroeconomic Systems, The Assignment Problem", *Kuhn és Szegő, szerk.* 221–239.

McKENZIE, L. W. (1986): „Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics", *Arrow és Intrilligator, szerk.* 1281–1355.

MEDIO, A. (1991): „Continuous-time Models of Chaos in Economics", *Journal of Economic Behavior and Organization 16* 115–151.

MEDIO, A. (1992): *Chaotic Dynamics, Theory and Applications to Economics*, Cambridge, Cambridge University Press.

MEDIO, A. (1995): „Ergodicity, Predictability and Chaos", *Discussion Paper*, University of Venice.

METZLER, L. (1941): „The Nature and Stability of Inventory Cycles", *Review of Economic Statistics 23* 113–129.

METZLER, L. (1945): „The Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions", *Econometrica 13* 277–292.

MIRRLEES, J. A. (1971): „An Exploration in the Theory of Optimum Income Taxation", *Review of Economic Studies 38*, 175–208. o.

MIRRLEES, J. A. (1986): „The Theory of Optimal Taxation", *Arrow–Intrilligator, (szerk.)*, 1197–1249. o.

MITRA, T. és SORGER, G. (1998): „Rationalizing Policy Functions by Dynamic Optimization", *Econometrica 67* 375–392.

MODIGLIANI, F. és BRUMBERG, R. (1954): „Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data", *Kurihara, szerk.* 388–436.

MOLNÁR, GY. és SIMONOVITS, A. (1996): „Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modellcsaládjában", *Közgazdasági Szemle 43* 863–890.

MOLNÁR, S., SZIDAROVSZKY, F. és OKUGUCSI, K. (1992): „Nem lineáris differenciaegyenletek globális aszimptotikus stabilitásának általános kritériumairól", *Alkalmazott Matematikai Lapok 16* 339–347.

MORISHIMA, M. (1964): *Growth, Stability and Equilibrium*, Oxford, Oxford University Press.

NELSON, R. és WINTER (1982): *An Evolutionary Theory of Economic Change* Cambridge MA, Belknap Press.

NEUMANN, J. (1938): „Egy általános egyensúlyi modell", *Neumann*, 1965, 160–176.

NEUMANN, J. (1965): *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK, 1965, 160–176.

PETERS, W. (1988): „A Pension Insurance System in an Overlapping Generations Model", *Journal of Institutional and Theoretical Economics 144* 813–830.

PHELPS, E. (1961): „A felhalmozás aranyszabálya: Tanmese", *Szakolczai, szerk. (1967)* 266–275.

PHILLIPS, W. (1954): „Stabilization Policy and a Closed Economy", *Economic Journal 64* 290–323.

PITCHFORD, J. D. és TURNOVSKY, S., szerk. (1977): *Application of Control Theory to Economic Analysis* Amszterdam, North-Holland.

POHJOLA, M. T. (1981): „Stable and Chaotic Growth: The Dynamics of a Discrete Version Cycle Model", *Journal of Economics 41* 27–39.

PÓLYA, GY. (1968): *A gondolkodás művészete, I.: Indukció és analógia*, (angol eredeti magyar fordítása) Budapest, Gondolat, 1988.

PÓLYA, GY. és SZEGŐ (1924): *Válogatott feladatok és tételek analízisből, I–II. kötet*, Budapest, Tankönyvkiadó (német eredeti angol átdolgozásának magyar fordítása) 1980-81.

PONTRJÁGIN, L. SZ. (1961): *Közönséges differenciálegyenletek*, (orosz eredeti fordítása) Budapest, Akadémiai Könyvkiadó, 1972.

PONTRJÁGIN, L. SZ., BOLTYANSZKIJ, V. G., GAMKRELIDZE, R. V. és MISCSENKO, J. F. (1961): *Optimális folyamatok elmélete* (orosz eredeti fordítása), Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1968.

PRESTON, A. J. (1977): „Existence, Uniqueness and Stability of Linear Optimal Stabilization”, *Pitchford és Turnovsky, szerk.* 293–335.

PUSKÁS, CS. (1993): *Lineáris algebra*, Budapest, Aula.

RALSTON, A. (1965): *Bevezetés a numerikus analízisbe*, (angol eredeti fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1969.

RAMSEY, F. (1928): „A Mathematical Theory of Savings”, *Economic Journal 38* 543–559.

REICHLIN, P. (1992): „Endogenous Cycles with Long-Lived Agents”, *Journal of Economic Dynamics and Control 16* 243–266.

RÉNYI, A. (1966): *Valószínűségszámítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

RÓZSA, P. (1974): *Lineáris algebra és alkalmazásai*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

RUDIN, W. (1976): *A matematikai analízis alapjai*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1978.

SAARI, D. G. (1985): „Iterative Price Mechanisms”, *Econometrica 53* 1117–1131

SALMON, M. és YOUNG, P. (1979): „Control Models and Quantitative Economic Policy”, *Holly et al, szerk.* 74–105.

SAMUELSON, P. A. (1939a): „Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration”, *Review of Economic Studies 21* 75–78.

SAMUELSON, P. A. (1939b): „A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier”, *Journal of Political Economy 47* 786–797.

SAMUELSON P. A. (1941): „The Stability of Equilibrium: Comparative Statistics and Dynamics”, *Econometrica 9* 97–120.

SAMUELSON, P. A. (1947): *Foundations of Economics Analysis*, Cambridge, MA, Harvard University Press, bővített kiadás, 1983.

SAMUELSON, P. A. (1958): „An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money”, *Journal of Political Economy 66* 467–482.

SAMUELSON, P. A. (1965): „A Catenary Turnpike Theorem Involving Consumption and the Golden Rule”, *American Economic Review 55* 486–496.

SAMUELSON, P. A. (1975): „The Optimum Growth Rate for Population”, *International Economic Review 16* 531–537.

SARGENT, T. J. (1987): *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge MA, Harvard University Press.

SÁRKOVSZKIJ, A. N. (1964): „Egy olyan folytonos leképezés együttélő ciklusai, amely az egyenest önmagára képezi le”, *Ukrán Matematikai Folyóirat 16*, 61–71, orosz eredeti angol fordítása: Stefan (1977).

SCARF, H. (1960): „Some Examples of Global Instability of Competitive Equilibrium”, *International Economic Review 1* 157–172.

SCARF, H. (1967): „On the Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping”, *SIAM Journal of Applied Mathematics 15* 1328–1343.

SEN, A., szerk. (1970): *Growth Economics*, Harmondsworth, Penguin.

SHELL, K. (1967a): „Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change”, *Shell, szerk.* 1–30.

SHELL, K., szerk. (1967b): *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, Cambridge, MA, MIT Press.

SHILLER, R. (1978): „Rational Expectations and the Dynamic Structure of Macroeconomic Models”, *Journal of Monetary Economics 4* 1–44.

SIMON, H. A. (1956): „Dynamic Programming under Uncertainty with a Quadratic Criterion Function”, *Econometrica 24* 74–81.

SIMONOVITS, A. (1978): „A decentralizált szabályozás maximális konvergenciasebessége”, *Szigma 11* 49–67.

SIMONOVITS, A. (1979a): „Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris modellben”, *Szigma 12* 31–56.

SIMONOVITS, A. (1979b): „Mégegyszer a várakozásokról”, *Szigma 12* 245–248.

SIMONOVITS, A. (1981a): „Korlátos szabályozás és destabilizálás”, *Kornai és Martos, szerk.* 255–289.

SIMONOVITS, A. (1981b): „Maximal Convergence Speed of Decentralized Control”, *Journal of Economic Dynamics and Control 3* 51–64.

SIMONOVITS, A. (1983): „Ütközőkészletek és naiv várakozások egy nem-walrasi dinamikus makromodellben: stabilitás, ciklus és káosz”, *Szigma 16* 15–30.

SIMONOVITS, A. (1987): „A stop-go beruházási ciklusok – egy régi modell új értelmezése”, *Közgazdasági Szemle 34* 1027–1034.

SIMONOVITS, A. (1988a): „Rejtett beruházási ciklusok a szocialista gazdaságban”, *Közgazdasági Szemle 35* 866–878.

SIMONOVITS, A. (1988b): „A szocialista gazdaság beruházási ciklusainak matematikai modellje”, *Szigma 20* 97–122.

SIMONOVITS, A. (1990): „Beruházási határciklusok a szocialista gazdaságban”, *Közgazdasági Szemle 37* 1143–1156.

SIMONOVITS, A. (1992): „Indexált kölcsönök és várakozások matematikai elemzése” *Közgazdasági Szemle 39* 262–278.

SIMONOVITS, A. (1993): „Káoszelmélet és közgazdaságtan”, *Magyar Tudomány 38* 503–511.

SIMONOVITS, A. (1994): „Együttélő nemzedékek modellje”, *Közgazdasági Szemle 41* 411–427.

SIMONOVITS, A. (1995a): „Együttélő korosztályok modellje”, *Közgazdasági Szemle 42* 358–386.

SIMONOVITS, A. (1995b): „On the Number of Balanced Steady Steady States in a Realistic Overlapping Cohorts Model”, *Acta Oeconomica 47* 51–67.

SIMONOVITS, A. (1995c): „Mégegyszer az optimális növekedésről”, *Közgazdasági Szemle 42* 1136–1146.

SIMONOVITS, A. (1995d): „Pensions and Family Allowances: A Reconsideration of the Social Insurance Paradox”, *Acta Oeconomica 47* 337–347.

SIMONOVITS, A. (1999a): „Are there Endogeneous Cycles in a Realistic Overlapping Cohorts Model?”, *Structural Chage and Economic Dynamics 11* 321-329.

SIMONOVITS, A. (1999b): A racionális és a naiv várakozások stabilitásának összehasonlítása", *Közgazdasági Szemle 46* 689-700

SIMONYI, K. (1981): *A fizika kultúrtörténete*, Budapest, Gondolat, 2., bővített kiadás.

SIMS, C. A. (1986): „Comments”, *Sonnenschein, szerk.* 37–39.

SINGER, D. (1978): „Stable Orbits and Bifurcations of Maps of the Interval”, *SIAM Journal of Applied Mathematics 35* 260–267.

SLUTZKY, E. (1927): „The Summation of Random Causes as the Sources of Cyclic Processes” *Econometrica 5* 105–146 (az orosz eredeti javított fordítása) 1937.

SOLOW, R. (1956): „A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics 70* 65–94.
SOLOW, R. (1957): „A technikai változás és az aggregált termelési függvény", magyarul *Szakolczai, szerk. (1967)* 122–140.
SONNENSCHEIN, H. F., szerk. (1986): *Models of Economic Dynamics*, New York, Springer.
SORGER, G. (1992): „On the Minimum Rate of Impatiance for Complicated Optimum Growth Paths", *Journal of Economic Theory 12* 11–30.
STEFAN, P. (1977): „A Theorem of Sharkovskii on the Existence of Periodic Orbits of Continuous Endomorphism of the Real Line", *Communications of Mathematical Physics 54* 237–248.
STOKEY, N. és LUCAS, R. (1989): *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge MA, Harvard University Press (közreműködő: Prescott, E. C.).
STROTZ, R. H. (1955): „Myopia and Inconsistency on Dynamic Utility Maximization", *Review of Economic Studies 23* 165–180.
SZAKOLCZAI, GY., szerk. (1963): *A gazdasági fejlődés feltételei*, Budapest, KJK.
SZAKOLCZAI, GY., szerk. (1967): *A gazdasági növekedés feltételei*, Budapest, KJK.
SZEPESI, GY. és SZÉKELY, B. (1971): „A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben", *Szigma 4* 137–151.
SZÉPFALUSSY, P. és TÉL, T., szerk. (1982): *Véletlenszerű jelenségek nem lineáris rendszerekben: a káosz*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
TAKAYAMA, A. (1974): *Mathematical Economics*, Hinsdale IL, Dryden, 2. kiadás: 1985.
TALLOS, P. (1999) *A dinamikai rendszerek matematikai alapjai*, Budapest, Aula.
THEIL, H. (1957): „A Note on the Certainty Equivalence in Dynamic Programming", *Econometrica 25* 346–349.
TINBERGEN, J. (1956): „The Optimum Rate of Savings", *Economic Journal 66* 603–609.
TINBERGEN, J. (1960): „Optimum Savings and Utility Maximization over Time", *Econometrica 28* 481–489.
TOBIN, J. (1967): „Life Cycle Saving and Balanced Growth", *Fellner et al.* 231–256.
TSE, E. és ATHANS, M. (1972): „Adaptive Stochastic Control for a Class of Linear Systems", *IEEE Transaction on Automatic Control 17* 38–52.
VALENTINYI, Á. (1995): „Az endogén növekedéselmélet: Áttekintés", *Közgazdasági Szemle 42* 582–594.
VARGA, R. (1962): *Matrix Iterative Analysis*, Englewood Cliff, N.J., Prentice Hall.
VARIAN, H. (1981): „Control Theory with Economic Applications", *Arrow és Intrilligator, szerk.* 111–158.
VARIAN, H. (1992) *Microeconomic Analysis*, Third edition, New York, Norton.
VIRÁG, I. (1969): „Optimális felhalmozási pályák", *Gazdasági fejlődés és tervezés*, Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 108–136.
WALRAS, L. (1874, 1877): *Elements of Pure Economics*, London, Allen and Unwin (a francia eredeti angol nyelvű fordítása), 1954.
WITSENHAUSEN, H. S. (1968): „A Counterexample in Stochatic Optimum Control", *SIAM Journal of Control 5* 131–147.

WONHAM, W. M. (1967): „Optimal Stationary Control of a Linear System with State-dependent Noise”, *SIAM Journal of Control 5* 486–500.
WORLD BANK POLICY RESEARCH REPORT (1994): *Averting the Old Age Crisis*, Oxford, Oxford University Press.
YAARI, M. E. (1965): „Uncertain Lifetime, Life Insurance and the Theory of Consumer”, *Review of Economic Studies 32* 137–150.
YOUNG, D. M. (1971): *Nagy lineáris rendszerek iterációs megoldása*, (angol eredeti fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1979.
ZALAI, E. (1989): *Bevezetés a matematikai közgazdaságtanba*, Budapest, KJK.