matt.tex

Simonovits András:

MATEMATIKATÖRTÉNETI VÁZLAT

BME, Matematikai Intézet
e-mail: simonov@econ.core.hu

2007. június 26.

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS

1965 és 1970 között az ELTE TTK matematikus szakára jártam, és akkoriban az V. éveseknek még kötelező volt matematikatörténetet hallgatniuk. Amikor azonban 1969-ben V. éves lettem, az előadó egyéb elfoglaltsága miatt elmaradt a matematikatörténeti kurzus. Tudomásom szerint manapság már egyáltalán nem tanítanak matematikatörténetet matematikusoknak. Kérdések vetődnek fel: miért érdemes egyáltalán matematikatörténetet tanítani és tanulni? Miért nem elég a legújabb felfogás szerint megismerkedni a matematikával?

Több válasz is adható e kérdésekre. Íme néhány lehetséges válasz (vö. Kline, 1972): 1) Önmagában is érdekes, hogy miképp húzták föl elődeink a matematika „végleges épületét". 2) Jobban megértjük a végleges eredményt, ha megismerjük a hozzávezető rögös utat. 3) A matematika története fényt derít a matematika különféle eredményeinek egymáshoz való viszonyára. 4) A matematikatörténet rávilágít, hogy a fejlődés tényleges időrendi út gyakran ellentétes irányú az oktatási sorrenddel: az előbbi induktív (a konkréttól az elvontig halad), az utóbbi deduktív (az elvonttól a konkrétig halad). 5) A matematikai szabatosság fogalma történetileg változott: a régi görögök szabatosságát az újkorban felváltotta egy lazább megközelítés, hogy jóval később – magasabb szinten – visszatérjenek a logikai pontossághoz.

Majdnem húsz év óta tanítok közgazdászokat matematikára és matematikusokat közgazdaságtanra, és mindig meglepődöm, hogy milyen keveset tudnak a hallgatók a matematika történeti fejlődéséről. Például: mikor jött létre a valószínűség-számítás? Hogyan született a lineáris algebra? Előadásaimban mindig igyekeztem felvillantani a matematikatörténeti hátteret, de soha nem volt elég időm belemenni a részletekbe (vö. Simonovits, 1998). Úgy gondolom, hogy érdemes megpróbálni egy féléves előadássorozatban felvázolni a matematikatörténet néhány érdekes és fontos eseményét és folyamatát.

Mivel a magasabb matematikát ismerőknek szánom a jegyzetet, igyekszem az egyébként kitűnő népszerűsítő könyvekben (lásd Irodalomjegyzék) megszokottnál részletesebben kidolgozni a matematikai kérdéseket, sőt feladatokat is tűzök ki, amelyek megoldását a könyv végén mutatom be. Ugyanakkor nem lévén matematikatörténész, nem tudok (de nem is akarok) túlzottan belemerülni a történeti részletekbe. A jobb áttekinthetőség kedvéért a szöveget igyekszem minél inkább modulárissá tenni; tételek, felsadatok, példák tagolják a szöveget, akárcsak a matematikakönyvben.

Megismétlem, hogy ebben a jegyzetben – néhány kivételtől eltekintve – alig foglalkozom az általános történeti háttérrel, illetve az egyes matematikusok életével, csak a jegyzet végéhez csatolok majdnem minden szereplő matematikusról rövid, néhány mondatos életrajzot. Történelmi tanulmányainkból is tudhatjuk, mennyire összefonódott a társadalom, a technika, a fizika és a matematika fejlődése. Ugyancsak figyelemre méltó a legnagyobb matematikusok sokoldalúsága: Arkhimédész az ókor legnagyobb hadmérnöke, Pascal a francia esszé nagymestere, Newton a valaha élt egyik legnagyobb elméleti és kísérleti fizikus, Leibniz az egyik legnevesebb filozófus, és Gauss is kiemelkedő fizikus volt. Még a 20. századi matematikusóriások közt is találunk polihisztorokat: Poincaré a matematika számos területén alkotott maradandót, és Neumann János a logikán, a funkcionálanalízisen kívül a számítógép és a játékelmélet egyik megteremtője.

Szándékosan használok mindenütt modern jelöléseket és fogalmakat, mert a hangsúlyt nem annyira a történeti hűségre, hanem a matematika jobb megértésére helyezem. Ezt a módszert követi a jegyzetben gyakran hivatkozott Smith (1929) és Fauvel–Gray (1987) forrásgyűjtemény is, amely számos eredeti mű angol fordítását adja meg.

Könyvem olvasásakor néha érdemes bekapcsolni a számítógépet, hogy beprogramozzunk néhány feladatot és kiszámítsuk a keresett értéket. S ha alkalmanként a függvénytáblát is kézbe vesszük, vagy a zsebszámológépet is használjuk, akkor talán jobban megértjük, milyen fáradságos volt számolni az elektronikus számítógép megjelenése és elterjedése előtt.

Külön gondot okozott a bőséges anyagból való válogatás. El akartam kerülni a népszerűsítő művek gyakori hibáját, hogy a közérthetőség kedvéért túl sokat foglalkoznak viszonylag egyszerű kérdésekkel, és lényegében nem jutnak túl a 18. századon. Egy-egy példával élve: az egyébként kiváló Boyer (1968/1991) könyvben a Newton és Leibniz előtti rész 400 oldal, míg a Newtonnal és Leibniz-cel kezdődő rész alig több, mint 200 oldal. (Még aránytalanabb Sain (1986) magyar nyelvű műve, de arányosabb a magyar nyelvre is lefordított nagyon tömör Struik (1948).) Értékes ismeretterjesztő írások találhatók a következő folyóiratokban: Matematikai Lapok, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, Mathematical Intelligencer. A világhálón számos értékes forrás létezik, kiemelem a `http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~ history.mathematicians` helyet. A részletek kifejtése helyett az Olvasó figyelmébe ajánlom az Irodalomjegyzékben is szereplő műveket, amelyek a jegyzet eme hiányosságait pótolják. Saját korlátaim miatt ki kell hagynom olyan fontos eseményeket, mint a modern algebra és geometria kialakulása (az utóbbiról jó áttekintést nyújt Coxeter, 1969). Saját érdeklődésemet követve viszont bevettem olyan részleteket, mint a játékelmélet kialakulása.

Ugyanakkor nem akarom lexikonszerűen egyszerűen felsorolni a későbbi eredményeket, ha nem tudok legalább utalni a matematikai részletekre. Ez nem mindig könnyű. Míg például a nagy számok Bernoulli-féle (gyenge) törvényének a matematikai hátterét még vázolom, a többi „törvény” (centrális határeloszlás vagy az erős törvény) bizonyítására már csak távirati stílusban utalok.

A legnagyobb matematikusok életéről szórakoztató, bár néha pontatlan beszámolót ad Bell (1937). Sokkal mélyebb, de szelektív Gingyikin (2001) könyve, amely hosszú oldalakon keresztül mutatja meg néhány kiemelkedő matematikus és fizikus életét és munkásságát. Szellemében könyvemhez talán legközelebb Stillwell (1989) áll. Tömörsége miatt említem Stewart (1987) remekművét. Külön kiemelek két matematikatörténetet, amelyek matematikusok számára íródtak: az egyik Hodgkin (2005) – viszonylag rövid (280 o.) és koncentrált, de nagyon alapos és filozofikus; a másik Kline (1972) – nagyon részletes (1200 o.) és célratörő. Bár a magyar vonatkozások ismertetésekor szándékosan visszafogom magam, felhívom a figyelmet egy tartalmas kötetre, amely a 20. századi magyar matematikáról szól (Horváth, 2006).

Remélem, előadásaimmal sikerül fokoznom a hallgatóság érdeklődését e méltatlanul elhanyagolt terület iránt, és a jegyzetben említett, a témáról további írt könyvek és cikkek olvasásával olvasóim és hallgatóim elmélyítik majd ismereteiket.

Köszönetemet fejezem ki Benedek Gábornak, Földesi Imrének, Freud Róbertnek, Kőrösi Gábornak, Major Péternek, Pataki Jánosnak, Székely J. Gábornak, Tasnádi Attilának és Tóth Jánosnak a korábbi változatokhoz fűzött megjegyzéseikért. Külön köszönettel tartozom Rácz Andrásnak, aki áldozatos munkával mondatról mondatra átvizsgálta a jegyzetet, valamint hallgatóimnak (például Béla Szilviának, Farkas Dórának, Gyurcsek Andrásnak, Kőrösi Attilának és Rácz Lászlónak), akik alaposan kommentálták a jegyzet korábbi változatát. Természetesen az esetleges hibákért kizárólag én vagyok felelős.

Budapest, 2007. június.

2. AZ ÓKORI MATEMATIKÁRÓL

2.1. Bevezetés

„Már a régi görögök (sőt a sumérok és a babiloniak) is tudták...". Remek könyvek születtek az ókor matematikájáról, amelyek közül magyarul is olvasható van der Waerden (1954) – szerzője mellesleg a modern algebra egyik atyja volt – és Neugebauer (1970). A görög korszak tárgyalása önmaga külön kurzust igényelne. Itt csak önkényesen kiválasztott témákat vázolhatunk, 2.2. alfejezet: számírások, 2.3. alfejezet: Egyiptom és Mezopotámia, 2.4–2.6. alfejezet: a görög geometria, számelmélet, analízis és 2.7. alfejezet: a görög hanyatlás.

Történeti háttérként a következőket említjük meg: az egyiptomi és a mezopotámiai civilizációk hatalmas folyamok (Nílus, Tigris és Eufrátesz) partjain alakultak ki, és a mezőgazdasághoz szükséges öntözéshez naptárkészítésre, tehát csillagászatra és matematikára volt szükségük. E tudományok művelői a papok voltak. A görög civilizáció fejlődése viszont más jellegű volt. Az i.e. 600 és i.e. 336 között a görögség városállamokban élt, amelyekből kulturálisan is kiemelkedett az athéni városállam. Nagy Sándor makedón uralkodó i.e. 336 és i.e. 323 között meghódította a görög városállamokat, majd a Közel-Keletet (Perzsiát, Egyiptomot stb.), amelyből halála után kialakultak az óriási *hellenisztikus* államok. Szempontunkból a legfontosabb Egyiptom központja, Alexandria. Háttérolvasmányként ajánljuk az ókori természettudományokat áttekintő Szabó–Kádár (1984) könyvet.

2.2. Az ókori számírás

Külön kitérek az ókori számírásokra, mert tanulságosnak vélem, hogy a mai rendszerhez képest milyen ügyetlen számírást alkalmaztak (vö. van der Waerden, 1954, 64–85. o.)

Érdekes módon a helyértéket már a sumérok (i.e. 2400 körül) is ismerték, és oszthatósági okokból 60-as számrendszerben számoltak. (Mi is ezt tesszük, amikor órában – vagy fokban–, percben és másodpercben megadott adatokat össze akarunk hasonlítani.) Sőt, ismerték a mi tizedes törtjeink elődeit is. Csupán két dolgot nem ismertek: a számjegyeket és a nullát. A számjegyeket a rómaiakhoz hasonlóan jelölték, és a 60-as számrendszer miatt 59 „számjelre" volt szükségük. Ékírásos nyers agyagtábláikat a gyakori tűzvészek cseréptáblává égetve hagyták az utókorra.

A görögök számírása először a római rendszerhez volt hasonló, később egy ügyesebb rendszert, az alfabetikust vezették be: az ábécé első 9 betűjével jelölték az 1 és a 9 közti számokat: $\alpha = 1$, $\beta = 2$ stb.; a 10–18. betűvel jelölték a tízeseket, például $\iota = 10$, $\kappa = 20$ stb. és a 19–27. betűvel a százasokat: $\rho = 100$, $\sigma = 200$, majd az ezreseknél újra kezdték a betűzést, csak egy vesszőt tettek a betű elé: $,\alpha = 1000$. Ez a rendszer azonban lehetetlenné tette a változókon alapuló algebrai írásmódot: Eukleidész már nem ismerte a korábban alkalmazott $\Gamma\Delta$ jelölést a Γ és Δ összegére, és még a számolás is nehéz volt ezzel a rendszerrel. A törteket viszont a maihoz hasonlóan írták.

2.1. feladat. Szorozza össze az LI és az IL római számokat!

2.3. Egyiptomi és mezopotámiai előzmények

Az egyiptomiak már i.e. 2700 körül olyan magas piramist építettek, mint a Gellért-hegy (146 m). Ehhez fejlett sík- és térmértani ismeretekre volt szükségük. Például ismerték a Pitagorasz-tételt. Ízelítőül egyetlenegy „egyiptomi" tételt mutatunk be. Múzeumi lelőhelyéről moszkvai papirusznak nevezik a dokumentumot.

2.1. tétel. *(Moszkvai papirusz, i.e. 1890.) Legyen a négyzet alapú gúla és a csonka gúla magassága: h illetve m, a gúla alsó és felső négyzetének az oldalhossza: a, illetve b. Ekkor a két térfogat*

$$V = \frac{1}{3}a^2h, \qquad \text{illetve} \qquad V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)m.$$

Bizonyítás. Egy háromszög alapú hasáb három olyan azonos alapterületű tetraéderre bontható, amelyeknek azonos a magasságuk, tehát a háromszög alapú hasáb térfogata a tetraéder térfogatának a háromszorosa. A négyzet alapú hasáb két egybevágó, háromszög alapú hasábra bontható, tehát a négyzet alapú gúla térfogata a négyzet alapú hasáb térfogatának az egyharmada. A csonka gúla térfogata viszont egy nagy és egy kis gúla térfogatának a különbsége. ∎

Megemlítjük, hogy az egyiptomiak (Rhind papirusztekercs, i.e. 1700 körül) már a $(16/9)^2 \approx 3{,}16$ jó közelítő értéket használták az egységsugarú kör fél kerületére, a mai π-re. (Rhindnek hívták azt a személyt, aki a papiruszt Luxorban megvásárolta és a British Museumnak ajándékozta.)

Érdekes, hogy a mezopotámiaiak a csonka gúla térfogatára általában egy rossz képletet, nevezetesen az $(a^2+b^2)m/2$-t használták, pedig ismerhették a helyes megoldáshoz szükséges $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$ képletet (vö. van der Waerden, 130–131. o.). A π értékével sem bajlódtak túl sokat, durván 3-nak vették, pedig az csak az egységkörbeírt hatszög fél kerülete. Itt jegyezzük meg, hogy bár az egyiptomi és a babiloni írást 1822-ben, illetve 1850 körül megfejtették, a matematikai szövegek értelmezése gyakran többértelmű.

Ugyanakkor a mezopotámiaiak a másodfokú egyenletet is meg tudták oldani 4000 évvel ezelőtt, de nem ismervén a negatív számokat esetszétválasztásra kényszerültek aszerint, hogy 0, 1 vagy 2 pozitív gyök létezik. Ez a hiányosság egyébként 1500-ig szinte az egész világon fennmaradt.

Meglepő, hogy a babiloniak ismertek egy hatékony eljárást (a mi Newton-algoritmusunkat, vö. 5.4. feladat) a négyzetgyök kiszámítására, és mivel (60-as alapú) helyértékes rendszert használtak, hihetetlen pontosan tudtak számolni vele (Boyer, 1968/1991, 27. o.).

2.2. feladat. Négyzetgyökvonás. Egy β pozitív szám pozitív négyzetgyökét a következő iterációs eljárással számíthatjuk ki:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\beta}{x_n}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

ahol x_0 egy tetszőleges pozitív szám. a) Bizonyítsuk be, hogy a második lépéstől kezdve a sorozat monoton csökkenően konvergál $\sqrt{\beta}$-hoz! b) Mutassuk meg, hogyha sikerül β-ból egy jó nagy négyzetszámot leválasztani, azaz $\beta = b^2 + c$, ahol $b,c > 0$, és c/b kicsi, akkor az $x_0 = b + c/(2b)$ „jó" felső közelítést ad!

2.1. példa. A babiloni $\sqrt{2} = 1{,}414222$ közelítés csak az utolsó jegyben hibás.

2.4. A görög geometria

Az előző alfejezetben láttuk, hogy már a görögök előtt is volt matematika. A görög matematikusok voltak azonban az elsők, akik az i.e. 6. századtól kezdve felismerték, hogy (tovább nem definiálható) alapfogalmakat kell bevezetni, bizonyításra nem szoruló axiómákat kell megfogalmazni, majd a fogalmak definíciójával tételek mondhatók ki, amelyeket bizonyítani kell. Ez a legkönnyebben a geometriában végezhető el.

Talán a kisázsiai Thalész (kb. i.e. 585) volt az első matematikus, aki nemcsak kimondott (korábban már ismert, és vélhetőleg Keletről importált) tételeket, hanem megpróbált logikus bizonyításokat adni rájuk. Elemi tétele a nevét viseli: A félkör átmérője a félkörív bármely pontjáról derékszögben látszik.

A dél-itáliai Püthagorasz (kb. i.e. 550) nemcsak matematikus, hanem zenetudós, filozófus és egy titkos társaság szellemi vezetője is volt. A róla elnevezett tételt – a derékszögű háromszög átmérőjére emelt négyzet területe egyenlő a befogókra emelt négyzetek területének összegével – már korábban is ismerték. Úgy tűnik, hogy a húrhosszak aránya és a zenei harmónia közti összefüggést azonban ő fedezte föl. Legegyszerűbb megfigyelése: ha egy húr hosszát megfelezzük, akkor kétszer nagyobb rezgésszámú hangot, oktávot ad, amely egybehangzik az eredeti hanggal. Bonyolultabb osztásnál, amikor a húrt 12 egyenlő részre osztjuk, és ebből 8 vagy 9 egységet veszünk, akkor a hang rezgésszáma harmonikusan változik: kvinttel („szó") vagy kvarttal („fá") magasabb hangot kapunk.

Bár az athéni Platón (i.e. 427 – i.e. 347) elsősorban filozófus volt, de iskolájában (az Akadémiában) nagy súlyt fektetett a matematikai képzésre – mint a logikus észjárás segítőjére. Nem csoda, hogy iskolájában találjuk meg a kor nagy matematikusait: Arkhütaszt és Theaitetoszt (i.e. 390) – aki felfedezte a 4. és az 5. szabályos poliédert, a dodekaédert és az ikozaédert. A kor legnagyobb tudósa azonban Eudoxosz (i.e. 370 körül), aki geometriai tudását csillagászként is gyümölcsöztette, amikor megalkotta az első kozmikus modellt (15.2. alfejezet).

Eukleidész (kb. i.e. 300) már a városállamok bukása utáni, hellenisztikus korban élt, és a Nagy Sándor által alapított egyiptomi fővárosban, Alexandriában alkotott. Fő műve a több magyar fordításban is elérhető *Elemek*, amelynek jelentős része az elemi geometriát a ma is használt axiomatikus felépítésben tárgyalta. (A legújabb fordításhoz világhírű matematikatörténészünk, Szabó Árpád írt előszót.) Tudjuk, hogy már előtte is írtak ilyen monográfiákat, de csak az övé maradt fent, mert jobb volt, mint a korábbiak. Azt is tudjuk, hogy nem volt igazán jelentős matematikus, de elsőrendű tankönyvet írt, amely az elődök munkáit ragyogóan összegezte. Időtállóságára jellemző, hogy mai középiskolás geometriai könyveink is az *Elemek*et követik.

Itt csak az I. könyv felépítését vázoljuk röviden. Ismert tételeket sorolunk fel. I.1. Az egyenlő szárú háromszög megszerkeszthető. ... I.15. Csúcsszögek egyenlők. ... I.16. A háromszög bármelyik külső szöge nagyobb, mint a másik két csúcsánál fekvő szög.

... I.20. A háromszög bármely két oldalának hossz-összege nagyobb, mint a harmadik oldalé (háromszög-egyenlőtlenség). ...Egybevágósági tételek...

Sokan támadták a szerzőt, hogy miért kell olyan nyilvánvaló dolgokat bizonyítani, mint amilyen az I.16 vagy az I.20. A válasz nyilvánvaló: az axiomatikus tárgyalásban nem szabad a szemléletre támaszkodni, a logikai szabatosság megköveteli, hogy „mindent" bizonyítsunk.

A továbbhaladáshoz szükségünk van az V. posztulátumra. *Ha egy egyenes két másik egyenest úgy metsz, hogy azonos oldalán keletkező két szög összege kisebb, mint két derékszög, akkor a két egyenes ezen az oldalon metszi egymást.* Szemléletesebben átfogalmazható az axióma, ha bevezetjük a D.23. definíciót: *párhuzamos*nak nevezünk egy síkban fekvő két egyenest, ha nem metszik egymást. Lássuk tehát az ún. párhuzamossági axiómát: *Bármely egyeneshez és egy külső ponthoz az általuk meghatározott síkban pontosan egy párhuzamos egyenes húzható.*

És ekkor igazolható az I.32: a háromszög belső szögeinek összege két derékszög. Hasonlóan igazolható az I.16. élesítése: A háromszög két belső szögének összege egyezik a harmadik külső szöggel.

S végül az I. könyv csúcspontja: I.47. (a Pitagorasz-tétel): Egy derékszög két befogójára emelt négyzetek területének összege egyezik az átfogóra emelt négyzet területével. A bizonyítás területátalakításon alapul, de nem a középiskolában tanulton, hanem annak egyik korábbi változatán, az ún. szélmalmon. Ne feledkezzünk meg I.48.-ról sem, amely a tétel megfordítását mondja ki.

A görög matematikusok gondolkodásának kifinomultságára jellemző, hogy hamar felvetették: a párhuzamosokról szóló, híres V. posztulátum (más néven: axióma) más mint a többi. Ezért is halasztotta Eukleidész az axióma kimondását egészen az I.27. tételig. Mások megpróbálták az V. posztulátumot a többi axiómából tételként levezetni (Szabó, 1978). Csak 1830 körül derült ki Bolyai és Lobacsevszkij munkásságából (12.4. alfejezet), hogy a kísérletezők lehetetlenre vállalkoztak: ez az axióma nem vezethető le a többiből, független tőlük. Ugyanakkor a görögök nem értették meg, hogy az alapfogalmakat (pont, egyenes, sík) nem lehet a végtelenségig visszavezetni, ezek az axiómákkal együtt határozzák meg a rendszert.

A kritikus és elvont görög matematikai gondolkodásra különösen jellemző, hogy már az i.e. 5. század végén olyan feladatokkal is foglalkoztak, amelyeknek nem volt gyakorlati jelentőségük, elméletileg azonban csak a 19. századi késői utódok tudták azokat megoldani. Ilyen a szögharmadolás, a kockakettőzés (az ún. déloszi probléma) és a kör négyszögesítése (lásd 12.2. alfejezet).

Az ókor legnagyobb geométere Apollóniosz volt (i.e. 210 körül), aki különösen a kúpszeletek terén ért el csodálatra méltó eredményeket (vö. van der Waerden, 386–424. o.). Egyetlenegy tételt emelünk ki gazdag munkásságából:

2.2. tétel. *(Apollóniosz.) Az $y^2 = 2px$ (fekvő) parabola felső ágának az x_0 pontbeli érintője az y-tengelyt $y_0/2$ magasságban metszi, ahol $y_0^2 = 2px_0$.*

2.3. feladat. Vezessük le a 2.2. tételből, hogy a parabolatükörbe vízszintesen beeső fénysugarak a visszaverődés után átmennek a $(p/2,0)$ koordinátájú gyújtóponton!

2.5. A görög számelmélet

A görög számelméletből három tételt emelünk ki, mindhárom megtalálható Eukleidész *Elemei*ben. Részletesebb elemzést ad Weil (1983, Chapter I.)

2.3. tétel. *(Eukliedész, X.27.) Az $x^2 = 2$ megoldása nem írható föl két egész szám hányadosaként, mai szóval $\sqrt{2}$ irracionális.*

Bizonyítás. Módszere *indirekt*: feltesszük, hogy létezik két ilyen egész szám, p és q, amelyeknek nincs 1-től különböző közös osztójuk, hányadosuk pedig $x = p/q$. Ebből paritási meggondolásokkal ellentmondást kapunk. ∎

Megjegyzés. Utalunk arra a két közismert tényre, hogy a $\sqrt{2}$ az egységoldalú négyzet átlója, míg $\sqrt{5}$ a szabályos ötszög szerkesztésénél lép föl. Több matematikatörténész azt gondolja, hogy a görögök az egymásba skatulyázott (már a babiloniak által is ismert) csillagötszögek végtelen sorozatából jöttek rá először az irracionális számok létezésére, nevezetesen $x^2 = 5$ gyökének irracionalitására.

2.4. tétel. *(Eukliedész, IX.20.) A prímszámok sorozata nem véges (szóval végtelen).*

Bizonyítás. Szintén indirekt. Tegyük föl, hogy véges sok prímszám van, $p_1, \ldots, p_n$, vegyük a szorzatukat, adjunk hozzá 1-et: $p_1 \cdots p_n + 1$. Ekkor vagy egy új prímszámot kapunk, vagy egy új prímszám többszörösét, hiszen e szám az előző prímszámok egyikével sem osztható. Ellentmondást kaptunk. ∎

2.4. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a $4k - 1$-alakú prímszámokból is végtelen sok van!

Mindkét tétel a valaha megalkotott legszebb matematikai tételek közé tartozik, és egyszerűsége ellenére nagyon mély matematikai gondolkodásmódról tanúskodik.

A harmadik tétel a pitagoraszi számhármasokról szól. Ismert, hogy az x,y befogójú és z átfogójú derékszögű háromszögre teljesül az $x^2 + y^2 = z^2$ egyenlőség. Az egyiptomiak ismerték az egyenlet néhány egész értékű megoldását: például $3^2 + 4^2 = 5^2$. Állítólag egy kötélre egyenlő távolságra 3, 4, illetve 5 csomót tettek, és ezeket háromszögben kifeszítve „szerkesztettek" derékszöget. Nyilvánvaló, hogy egy egész értékű megoldás többszörösei is megoldások, ezért célszerű a relatív prím megoldásokra szorítkozni: $(x,y,z) = 1$. Ezeket nevezik primitív pitagoraszi számhármasoknak. A keleti hatás itt is jelen van: az óbabiloniak számos ilyen számhármast ismertek (van der Waerden, 123–129. o.).

2.5. tétel. *A pitagoraszi számhármasok a következő alakúak:*

$$x = 2mn, \qquad y = m^2 - n^2, \qquad z = m^2 + n^2,$$

ahol m,n természetes számok, amelyekre $m > n$, különböző paritásúak és $(m,n) = 1$.

A bizonyítás elemi, azonban hosszúsága miatt (Freud–Gyarmati, 2000, 286–287. o.) nem ismertetjük. Könnyebb belátni, hogy a tételben megadott számok pitagorasziak, de hogy más pitagoraszi számhármas nincs, az már nehezebben igazolható állítás.

Történeti jelentősége miatt a tökéletes számokról szóló tételt is ismertetjük. Egy számot *tökéletes*nek nevezünk, ha nála kisebb osztóinak száma egyenlő magával a számmal. Például a 6 és a 28 tökéletes szám.

2.6. tétel. *(Eukleidész, IX. 36.) „Ha az egységtől kezdve kétszeres arányban képzünk egy mértani sorozatot, amíg az összeg prím nem lesz, és az összeggel megszorozzuk az utolsó tagot, akkor a szorzat tökéletes szám lesz.”*

Modern jelöléssel:

$$\text{Ha} \qquad p = 2^{n+1} - 1, \qquad \text{akkor} \qquad (2^{n+1} - 1)2^n \qquad \text{tökéletes.}$$

A mértani sor összegére hamarosan visszatérünk.

Több évszázaddal később, talán az i.sz. 3. században, Diophantosz megújította a számelméletet és az algebrát. Egyrészt olyan feladatokat vizsgált, amelyeknek csak egész értékű megoldásai érdekesek. Másrészt elszakadt a korábbi geometriai korlátoktól, és algebrai feladataiban 3-nál magasabb és negatív hatványokat is vizsgált. Külön érdeme, hogy jelöléseket vagy rövidítéseket vezetett be a hatványokra, a műveletekre és az ismeretlenekre, de a mai jelöléseket csak 1500 körül vezették be az európaiak.

2.6. A görög analízis

Egy negatív fejleménnyel kezdjük a tárgyalást, az éleai Zénonnal (i.e. 460 körül), aki négy híres paradoxonával rámutatott a folytonosság fogalmi csapdáira. Itt csupán a legnevesebb *paradoxont* mutatjuk be, amely azt mondja ki, hogy hiába fut Akhilleusz kétszer gyorsabban, mint a teknősbéka, sohasem éri utol. „Valóban”, legyen a kezdeti távolság Akhilleusz és a teknősbéka között d_0, és legyen t_0 az az idő, amíg Akhilleusz lefutja e távolságot. Ez alatt azonban a teknősbéka is tovább lép, és a köztük lévő új távolság $d_1 = d_0/2$ lesz. Ennek leküzdéséhez Akhilleusznak $t_1 = t_0/2$ időre lesz szükség, de eközben újra keletkezik közöttük egy $d_2 = d_1/2$ távolság, s e folyamat a végtelenségig folytatódik, „tehát” Akhilleusz sohasem éri utol a teknősbékát. (Egészen a 17. sz. közepéig kellett várni, hogy valaki a pozitív tagú $\sum_i d_i$ végtelen sor összegét kiszámítva meghatározza, hogy Akhilleusz hol – példánkban éppen $2d_0$-ben – éri utol a teknősbékát.) Ezzel a feladat megszűnt paradox lenni. (Egyébként állítólag Zénon vezette be az *indirekt okoskodást* a matematikába!)

Nem tudjuk, hogy a mértani sor összegét mikor fedezték fel, de Eukleidésznél már szerepel. Szó szerint idézzük (276. o.):

2.7. tétel. *(Eukleidész, IX. 35.) „Ha valahány szám mértani sorozatot alkot, és mind a második, mind az utolsó tagból az elsővel egyenlő számot vonunk ki, akkor amint a második tag maradéka az első taghoz, úgy aránylik az utolsó tag maradéka az előtte álló tagok összegéhez.”*

A biztonság kedvéért modern jelöléssel is felírjuk az állítást (521. o.): Ha $(a_i)_i$ a sorozat, akkor $(a_2 - a_1) : a_1 = (a_n - a_1) : (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$, azaz

$$s_{n-1} = \frac{a_1(a_n - a_1)}{a_2 - a_1} = \frac{a_n - a_1}{q - 1}, \qquad q = \frac{a_i}{a_{i-1}}.$$

A bizonyítás ugyanaz, mint manapság, csak a jelölések hiánya miatt majdnem egy oldalra nyúlik.

Az analízis előfutáraként ismét megemlítjük Eudoxoszt, aki a 2.3. tételben fellépő irracionális számok helyébe bevezette az arányelméletet – mai kifejezéssel élve: alulról és felülről racionális számokkal közelítette az irracionális számokat. Nagyon leegyszerűsítve gondolatait, négy *mennyiség* egyenlő aránypárt alkot, azaz $a/b = c/d$, ha rendre akármilyen természetes m és n párral szorozva a számlálókat és a nevezőket, a következő implikáció érvényes:

$$\begin{array}{llll} \text{ha} & ma < nb, & \text{akkor} & mc < nd; \\ \text{ha} & ma = nb, & \text{akkor} & mc = nd; \\ \text{ha} & ma > nb, & \text{akkor} & mc > nd. \end{array}$$

Például ha igazolni akarnánk, hogy $\sqrt{2}/1 = \sqrt{6}/\sqrt{3}$, akkor igazolni kellene, hogy

$$\begin{array}{llll} \text{ha} & m\sqrt{2} < n, & \text{akkor} & m\sqrt{6} < n\sqrt{3}; \\ \text{ha} & m\sqrt{2} = n, & \text{akkor} & m\sqrt{6} = n\sqrt{3}; \\ \text{ha} & m\sqrt{2} > n, & \text{akkor} & m\sqrt{6} > n\sqrt{3}. \end{array}$$

Természetesen a 2.3. tételből tudjuk, hogy az egyenlőség sor üres, hiszen nincs olyan (m,n) természetes számpár, amelyre $m\sqrt{2} = n$.

Egyrészt el kell ismerni e megoldás logikai szabatosságát, másrészt hangsúlyozni kell, hogy az arányelmélet sokáig megakadályozta, hogy az irracionális számok elnyerjék méltó helyüket a geometrián kívül.

Mai kifejezéssel élve, ugyancsak Eudoxosz fedezte föl, hogy a görbevonalú testek területét a körbe írt és a kör körül írt sokszögek területsorozatának közös *határérték*eként lehet definiálni. Laczkovich–T. Sós (2005, 7–8. o.) nyomán ismertetjük Eudoxosz következő tételét és bizonyítását.

2.8. tétel. *(Eudoxosz, i.e. 370., Eukleidész, XII.2.) Egy kör területe az átmérője négyzetével arányos.*

Bizonyítás. Először az látható be, hogy a K körbe írt négyzet a kör területének több, mint a felét tartalmazza, a négyzethez tartozó ívek felezésével keletkező nyolcszög a kör maradék területének megint több mint a felét tartalmazza, és így tovább. Ebből következik, hogy a K körbe beírhatunk egy olyan sokszöget, amelynek a területe a kör területét egy tetszőleges, előre megadott számnál jobban közelíti (kimeríti).

A bizonyítás befejezését mai jelölésekkel mondjuk el. Legyen a K_1 kör területe t_1, átmérője d_1, s hasonlóan a 2. körre. Állítás: $t_1/t_2 = d_1^2/d_2^2$. Indirekt: $\delta = t_1/t_2 - d_1^2/d_2^2 \neq 0$, mondjuk pozitív. Írjunk a K_1 körbe egy olyan S_1 sokszöget, amely K_1 területét jobban megközelíti, mint δt_2. Legyen S_2 a K_2 körbe írt, S_1-hez hasonló sokszög, területeik aránya $s_1/s_2 = d_1^2/d_2^2$. Ekkor

$$\frac{t_1}{t_2} - \delta = \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{s_1}{s_2} > \frac{t_1 - \delta t_2}{t_2} = \frac{t_1}{t_2} - \delta,$$

s ez ellentmondás. ∎

Megjegyzés. A 8.3. példában majd egy egyszerűbb bizonyítást mutatunk.

A görög matematika csúcsát Arkhimédész (i.e. 287?– i.e. 212) jelenti. A továbbiakban néhány fontosabb tételét világítjuk meg.

Ismert, hogy az egységátmérőjű kör kerülete, π mennyi helyen megjelenik a matematikában. E szám első matematikailag szabatos megközelítése Arkhimédésztől származik, lásd Hajós (1964, 19.6, 131–132. o.). Arkhimédész a π kiszámításához tisztázta: mi egy zárt konvex görbe kerülete. Az egységátmérőjű kör kerületét definiálhatjuk a körbe és köré írt tetszőleges n-oldalú szabályos sokszög kerületének közös határértékével. Ehhez Arkhimédész egy rekurziót talált, amellyel tetszőleges n-oldalú beírt szabályos sokszög kerületéből meghatározta a $2n$-oldalú szabályos sokszög kerületét, és ugyanezt tette a körül írt sokszögekre (van der Waerden, 1954, 333–335. o.).

2.9. tétel. *(Arkhimédész, i.e. 3. sz.) Az egységsugarú körbe, illetve köré írt szabályos n- és $2n$-oldalú sokszög fél oldalai között a következő rekurzió érvényes:*

$$a_{2n} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}} \qquad \text{és} \qquad A_{2n} = \frac{\sqrt{1+A_n^2}-1}{A_n}.$$

Megjegyzések. 1. A bizonyítás elemi geometriai eszközökkel végezhető (vö. Fried–Simonovits, M. 2005, 189–193. o.). A Pitagorasz-tétel mellett a beírt sokszögeknél egy hasonlóságot, a körül írt sokszögeknél pedig a szögfelező-tételt (ti. a szögfelező a vele szembe levő oldalt a szárak hosszának arányában osztja) kell alkalmazni.

2. A π kiszámításához a sokszögek fél kerületét kell kiszámítani: $p_n = na_n$ és $P_n = nA_n$: $p_n < \pi < P_n$, $\lim_{n\to\infty} p_n = \pi = \lim_{n\to\infty} P_n$.

3. Ismert, hogy az egységsugarú körbe írt és a kör körül írt szabályos hatszög fél oldala rendre $a_6 = 1/2$ és $A_6 = \sqrt{3}/3$. Némi túlzással azt mondhatjuk, hogy Arkhimédész a 2.9. tétel rekurziója segítségével kézzel (számító-, sőt számológép, sőt a helyértékes arab számrendszer nélkül) határozta meg az $n = 12$, 24, 48, 96-oldalú szabályos sokszögek kerületét. A $\sqrt{3}$-ra is egy viszonylag pontos kétoldalú racionális közelítéssel rendelkezett:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

A kétoldalú közelítés pontosságát négyzetre emeléssel ellenőrizhetjük (kézi számítás helyett számológéppel):

$$2{,}9999145 < (\sqrt{3})^2 < 3{,}0000015.$$

A négyzetgyökvonást minden bizonnyal a babiloni algoritmussal végezte. (A számológépes érték $\sqrt{3} = 1{,}7320508$. A 2.2.b feladat szerint érdemes a $300 = 289 + 11$ felbontásból kiindulni, ez az $x_0 = 1{,}7 + 11/340 = 1{,}73236$ közelítést adja – az osztást kényelemből ismét számológéppel végeztük. A babiloni algoritmus $x_1 = 1{,}7321$-t adja, amely már a 4. tizedesjegyre is pontos.) Mellesleg Arkhimédész egyenlőtlenségekkel dolgozott, hogy a korlátok érvényesek legyenek. Mai kifejezéssel élve, intervallumaritmetikát alkalmazott.

A végső közelítő eredményt az $n = 96$-oldalú sokszögre kapta:

$$3{,}1408 < 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70} < 3{,}1429.$$

2.2. példa. Arkhimédész számítása számítógépen. Bemutatjuk Arkhimédész számítását számítógépen, de előtte konjugálással megszabadulunk a 2.9. tétel $1-1\approx 0$ alakú kifejezéseitől:

$$a_{2n}=\frac{a_n}{\sqrt{2\left(1+\sqrt{1-a_n^2}\right)}} \qquad \text{és} \qquad A_{2n}=\frac{A_n}{\sqrt{1+A_n^2}+1}.$$

Tanulságos az alsó és a felső közelítés számtani közepét is feltüntetni.

2.1. táblázat. *Az egységátmérőjű körbe és köré írt $6\cdot 2^k$ oldalú szabályos sokszög kerülete*

Oldalszám	Körbe írt	Körül írt	Átlag
	sokszög kerülete		
n	p_n	P_n	$(p_n+P_n)/2$
6	3,00000	3,46410	3,23205
12	3,10583	3,21539	3,16061
24	3,13263	3,15966	3,14614
48	3,13935	3,14609	3,14272
96	3,14103	3,14272	3,14187

Hajós (1964, 19.6, 131–132. o.) egy mesterkéltebb, de számítástechnikailag egyszerűbb rekurziót mutat be, ahol az alsó és a felső közelítő becslés egymásba fonódik. (Laroche (2003, 68. o.) szerint az algoritmus Gausstól származik.)

2.10. tétel. *Legyen r_1 és R_1 egy n-oldalú szabályos sokszögbe és körül írt körének a sugara, akkor az ugyanakkora kerületű és kétannyi oldalú szabályos sokszög beírt és körül írt körének r_2 és R_2 sugarát a következő képletek adják:*

$$r_2=\frac{r_1+R_1}{2} \qquad \text{és} \qquad R_2=\sqrt{R_1 r_2}.$$

2.5. feladat. Határozzuk meg az 1024 oldalú szabályos sokszögbe írt és körül írt kör sugarát a félegység oldalú (azaz kétegység kerületű) négyzetből kiindulva! Az eredmény $r_9=0{,}318309$ és $R_9=0{,}318310$. Reciprokot véve adódik 3,14160 és 3,141591 mint felső és alsó korlát π-re.

2.11. tétel. *(Arkhimédész, kb. i.e. 240.) Az R sugarú félgömb térfogata az R sugarú alapkörű és R magasságú henger térfogatának a 2/3-ada: $V=2\pi R^3/3$.*

Megjegyzés. A képletet a 4.3. példában a kalkulus segítségével gépiesen is levezetjük.

Bizonyítás. Középiskolából ismert, hogy Arkhimédész a gömb térfogatát úgy számította ki, hogy az alapkörén álló, R sugarú és R magasságú hengerből „kivonta" a csúcsán álló, a hengerbe beírt kúpot, és a Pitagorász-tétel segítségével megállapította, hogy bármely magasságban vízszintesen elmetszve a különbségtestet és a félgömböt, a két metszet területe azonos. A Bonaventura Cavalieri (1598–1647) által 1635-ben publikált elvet megelőlegezve (lásd Smith, 1929, 605–612. o.), Arkhimédész ebből arra következtetett, hogy a két test térfogata is azonos. ∎

Arkhimédész talán erre az eredményére volt a legbüszkébb, a hengerbe helyezett félgömböt és kúpot vésette a sírjára is, Cicero még jóval később is látta a sírkövet. Másik jelentős eredményét tartalmazza a

2.6. feladat. a) Osszuk föl a $[0, 1]$ szakaszt n egyenlő részre, és számítsuk ki az $y = x^2$ parabola alatti alsó, illetve felső „téglányösszeget", t_n-et és T_n-et. Az első n négyzetszám összegképletét felhasználva, lássuk be, hogy $1/3 - 1/n < t_n < T_n < 1/3 + 1/n$. b) Ebből adódik, hogy a terület $T = 1/3$! c) Ebből következik a gúla térfogatképlete is (2.1. tétel). d) Arkhimédészt követve, határozzuk meg a parabola alatti terület közelítő összegét úgy, hogy alkalmas mértani sorozat szerint választjuk az osztópontokat (Simonyi, 1981, 76–79. o.).

Arkhimédész „integrál-"bizonyításaiban alsó és felső közelítéseket alkalmazott, és e bizonyítások olyan szabatosak voltak, amelyet csak a 19. században sikerült újból elérni, és akkor is csak nehezen (8. fejezet). Arkhimédész azonban fizikus is volt, aki eredményeit gyakran fizikai analógiák segítségével sejtette meg, s csak utána alkalmazta a szabatos matematikai eljárást. Érdemes az Erathosztenészhez (kb. i.e. 276–i.e. 194), az Alexandriában élő kiváló matematikushoz és csillagászhoz írt levélből néhány mondatot szó szerint is idézni: „...azt gondoltam, hogy nem lesz haszontalan, ha leírom, és elküldöm neked ...a speciális módszeremet, amelynek segítségével képes leszel arra, hogy bizonyos matematikai problémákat a mechanika segítségével ismerj fel. Meg vagyok győződve arról, hogy ez nem kis haszonnal jár a tételek bizonyításánál. Néhány dolgot ugyanis, amely először mechanikai módszerrel vált világossá előttem, geometriailag is bebizonyítottam, mert vizsgálatuk a mondott módszerrel nem tekinthető tényleges bizonyításnak."

Szinte hihetetlen, de csak 1906-ban találta meg Heiberg dán tudománytörténész ezt a levelet, amely *A módszerről* címet viseli, s amelyben többek között a gömb térfogatát is az emelőtörvény segítségével sejtette meg. Itt Arkhimédész a gömböt mint egymásra helyezett körök összességét tekinti. (Bevallom, számomra a módszer bonyolultabb, mint a közvetlen bizonyítás, de ha a határérték mechanikus meghatározása helyett a kimerítéssel kell élni, akkor tényleg nehéz helyzetbe hozhatjuk magunkat.) Külön érdekesség, hogy a munkát egy *palimpszeszt* tartalmazta, azaz egy olyan régi pergamenlap, amelyről az eredeti szöveget levakarták, és egy új szöveget írtak rá. A részleteket Simonyi (1981, 75–80. o.) tartalmazza.

A görögök ismerték a szögfüggvények elődeit, és mai szóhasználattal élve, szögfüggvény-táblázataik is voltak. (A mi szinuszunkat úgy kaphatjuk meg az ő „húrfüggvényükből", hogy vesszük a központi szög kétszereséhez tartozó körívek húrjának a felét.) Hogyan készítették őket? Az addíciós képletek segítségével. Induljunk ki a következő képletből: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Ebből következően

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, azaz (eltekintve a negatív előjeltől)

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$$

Tudjuk, hogy $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$. Félszögképletünk szerint tehát

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = 0{,}966.$$

Innen kiszámítható a 7,5; majd a 3,75; majd a 1,875; végül a 0,9375 fok koszinusza. Innen már interpolálhatjuk a $\cos 1^\circ$-ot, amelyből az addíciós képletek minden szögre megadják a keresett értéket. A gyakorlatban az eljárás finomítható percre és másodpercre.

Imponáló a szintén Arkhimédésztől származó eredmény, amelyet modern jelölésekkel, és szinusz helyett koszinuszra átírva, a következőképpen fogalmazhatunk meg.

2.12. tétel. *A* $\cos$ *függvény alatti terület a* $[0,x]$ *szakaszon* $\sin x$.

Arkhimédész speciális megfontolásokkal oldotta meg a feladatot, amelyeket modern köntösben csak a 8.2. feladat megoldásában közöljük. A rutin bizonyítást az 5.4. példában adjuk meg,

Joggal jegyzi meg van der Waerden (367. o.), hogy hiába határozta meg Arkhimédész rengeteg függvény integrálját, nem mondhatjuk, hogy felfedezte magát az integrált, mert nem ismerte föl ezt az általános fogalmat.

2.7. A hanyatlás

Az ókori, és azon belül a görög matematika az i.e. 3. században elérte a csúcsot, és utána jelentősen hanyatlott. A visszafejlődésnek egyaránt voltak külső és belső okai (vö. van der Waerden, 425–430. o.). Külső okok között említhetjük meg a városállamok és a hellenisztikus államok szétesését, a Római Birodalom terjeszkedését. A római civilizáció nagyszerű technikai találmányokat fejlesztett ki, és ragyogó építményeket hagyott az utókorra, még a csillagászat sem halt el (sőt a csúcsot i.sz. 150 körül a hellén Ptolemaiosszal érte el, lásd: 15.2. alfejezet), de semmilyen matematikai felfedezéssel sem dicsekedhet.

Mélyebben gyökereznek a matematikai hanyatlás belső okai: 1. Mivel a görögök korán rájöttek az irracionális számok létezésére, de a valós számokkal nem akartak dolgozni, geometriai szakaszokkal, illetve azok hosszával számoltak. Például a $\sqrt{2}$ helyett az egységoldalú négyzet átlójával dolgoztak. Emiatt nem tudtak könnyedén inhomogén kifejezésekkel számolni, például a másodfokú egyenletet is $x^2 + ax + b^2 = 0$ alakban írták föl, sőt, a negatív számok hiánya miatt $x^2 + ax = b^2$ alakban, ahol $a,b > 0$ (a két alak nem ekvivalens!). 2. A görögök betűket használtak a számok írására, ezért nem dolgozhattak változókkal. 3. Amíg több matematikus dolgozott együtt, a szóbeli közlés legyőzhette e nehézségeket, de a hellenisztikus államok bukása után ez a lehetőség megszűnt.

3. KÖZÉPKORI MATEMATIKA

3.1. Bevezetés

Az ókori matematika már az i.e. 3. században elérte csúcspontját. A középkori (476–1492) matematika története nem büszkélkedik nagy felfedezésekkel, de a továbbfejlődés megértése céljából szükséges rövid áttekintése. A 3.2. alfejezetben utalunk a kínai és hindu fejleményekre, a 3.3. alfejezet az arab közvetítéssel, (különösen a mai helyértékes arab számrendszer kialakulásának és elterjedésének rögös útjával) foglalkozik, majd a 3.4. alfejezetben szólunk a mozgásegyenletekkel kapcsolatos európai felfedezésekről. Kiváló áttekintést nyújt Juskevics (1961).

3.2. Kína és India

Csak röviden szólunk az ókor és a középkor határán megjelenő kínai és indiai matematikáról (vö. Boyer, 1968/1991, 12. fejezet. és Juskevics, 1961, 17–177. o.). A Jangce és a Sárga-folyó mentén kialakuló kínai, és az Indus és a Brahmaputra mentén születő hindu társadalmak ugyanúgy öntözésen alapultak, mint a már említett egyiptomi és mezopotámiai civilizációk. Talán ezért, talán más okból, a kínai és indiai matematika az egyiptomihoz és mezopotámiaihoz hasonló, meglehetősen önkényesen összeválogatott feladatgyűjteményeket hagyott ránk. Ezekből kiderül, hogy matematikusaik jó közelítéssel ismerték az egységkör kerületét, tudták, hogy az arkhimédészi 22/7 pontatlan, de i.sz. 500 körül azt hitték, hogy a 355/113=3,1415929... pontos.

A kínai forrásra utal a számelméletből ismert *kínai maradéktétel* (Juskevics, 1961, 84–88. o.). Korábbi elődöket követve, Csu-Si-csie 1299-ben *az égi elemek módszer*ét, mai elnevezéssel a Horner-elrendezést alkalmazta a következő algebrai egyenlet megoldására (Juskevics, 1961, 76. o.):

$$576x^4 - 2640x^3 + 1729x^2 + 3960x - 1\ 695\ 252 = 0.$$

Elsőként az $x = 8$ egész részt határozta meg, majd az $y = x - 8$ transzformációval $y = 2/3$-ot. A négyzetszámok összegképlete 1261-ből és a Pascal-háromszög 1303-ból származik (Juskevics, 1961, 90-91. o., illetve 83–84. o.). Ezek a felfedezések azonban semmilyen hatással sem voltak az európai civilizációra, mert csak több száz éves késéssel jutottak el a fejlett világba, amikor már az európaiak maguk is felfedezték őket.

A kínaihoz hasonló volt az indiai matematika szerkezete és fejlődése. Egyetlenegy hindu matematikust említünk meg: Brahmaguptát (kb. 628), akinek műve egyaránt tartalmaz helyes és helytelen eredményeket: az előbbire példa Héron (i.sz. 1. század) képlete az a, b, c oldalú háromszög területére, amelyet már Arkhimédész (i.e. 3. század!) is ismert:

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

ahol s a háromszög fél kerülete. Az utóbbira példa Héron képletének Brahmaguptától származó általánosítása (d a negyedik oldal, s a négyszög fél kerülete) a négyszög területére:

$$T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

amely azonban csak a húrnégyszögre pontos. Boyer (1968/1991, 219. o.) szerint Brahmagupta adós maradt e korlátozással, míg Juskevics (1961, 165. o.) szerint „Brahmagupta kifejezetten hangsúlyozta, hogy közelítő képletről van szó."

3.1. feladat. Igazoljuk a húrnégyszögre vonatkozó képletet!

Külön foglalkozunk az arab számjegyekkel és a helyérték-rendszerrel. Manapság természetes, hogy arab (helyesen: indiai) számjegyekkel írjuk le számainkat, és helyértéket használunk. (Igaz, ez utóbbiról a Winword használói kezdenek leszokni, mert a program automatikusan középre igazít!) De az előző fejezetben láttuk, hogy az ókorban ez ismeretlen volt, csupán a babiloniak alkalmaztak helyérték-rendszert. A mai rendszer csupán a 7. században kezdett megjelenni, először Indiában, majd arab közvetítéssel Európában is (vö. van der Waerden, 1954, 86–100. o.).

A hinduk első újítása az volt, hogy ellentétben a babiloni és a római számokkal, az első 9 szám egyjelű azonosítót kapott, mai alakban: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Aztán valaki felfedezte, hogy ezekkel a számjegyekkel milyen könnyen lehet bármilyen számot leírni. Dokumentumok szerint egy 595-ből származó adománylevélben fordul elő először egy modern formában leírt szám, nevezetesen 346.

Végül egy délindiai szerzőt, Níkalanthát említek meg, aki Juskevics (1961, 177–185. o.) szerint 1501–1502-ben – 170 évvel megelőzve Gregoryt és Leibnizt, az arkusz tangens Taylor-sora alapján adta meg a $\pi/4$ értékét (vö. 5.5. példa)! A lassan konvergáló sor mellett még a $(\pi - 2)/4$ sorát is közli, amely sokkal gyorsabban konvergál. „Létezik egy kellően egyszerű és teljesen hihető rekonstrukció.... A levezetéshez olyan eszközökre [lánctörtekre] van szükség, amelyeket a XV. században az indiai matematikusok jól ismertek" (181. o.).

3.3. Az iszlám hegemónia

Történelmi tanulmányainkból ismert, hogy i.sz. 632 után az iszlám vallás meghódította Ázsia és a Földközi-tenger partvidékének jelentős részét. Hamarosan egész Észak-Afrika átvette az arabok vallását, és 711-ben Ibéria (a mai Spanyolország és Portugália) egy csapásra arab uralom alá került. A keresztények csak nyolc évszázados harc után, 1492-ben verték ki az arab hódítókat teljesen a félszigetről. Emellett Szicíliát is hosszabb ideig hatalmukban tartották az arabok.

Az arabok viszonylag magas fokú civilizációt teremtettek meg, és ami a számunkra a legfontosabb: lefordították görögről arabra a klasszikusokat, kommentálták azokat, és sokuk csak így maradt fenn. Először Bagdadban a kalifa hozott létre elsőrangú tudományos központot. Az ibériai harcok ellenére az arabok, a keresztények és a zsidók jól együttműködtek egymással. A helyi keresztény és zsidó tudósok arabról latinra fordították a görög klasszikusokat, és ezzel közérthetővé tették őket egész Nyugat-Európában. Később mások görögről közvetlenül latinra is lefordították a még fellelhető klasszikusokat. Itt csupán Eukleidész *Elemek*ének sorsáról szólunk néhány mondatot (a fordítói jegyzetek alapján). Egyetlenegy, 505 körüli latin fordítás töredéke maradt fent napjainkig. Az első arab fordítás 801-ből való, később a magyarázatokat is lefordították. Külön említést érdemel Gerbert munkája, amely az elveszett latin fordítást igyekezett pótolni, de ebből is csak az első fejezetek maradtak ránk. Ugyanis a fordító nemcsak kora legjobb matematikusa volt, hanem egyben a későbbi II. Szilveszter pápa, aki 1000-ben Szent Istvánnak koronát küldött.

A hosszú háború végére azonban a keresztényi türelem elfogyott, a spanyol és portugál uralkodók, az ún. *keresztény királyok* az arab és a zsidó tudósokat és kereskedőket is elűzték – végső soron a két ország kárára.

Röviden áttekintjük az arabok matematikai eredményeit (vö. Boyer, 1968/1991, 13. fejezet és Juskevics, 1961, 186–345. o.). Talán a legjelentősebb arab matematikus a bagdadi Al-Khvárizmi (meghalt kb. 850-ben), akinek a nevéből torzulással keletkezett a mi *algoritmus* szavunk. Fő matematikai tevékenysége az algebra kialakítása volt. *Al-jabr wa'l muqabalah* c. könyve eredeti címéből származik az *algebra* szavunk, jelentése: az egyenlet két oldalából kivonjuk ugyanazt a mennyiséget. Feladta a görögök ragaszkodását a geometriai alapokhoz, bátran foglalkozott tetszőleges együtthatójú másodfokú egyenletekkel.

A munkamegosztás hiánya miatt a legnevesebb arab filozófusok és fizikusok jelentős matematikai műveket is hagytak maguk után: az elsősorban orvosként híres Ibn-Sinának (980–1037), akit mi Avicennaként ismerünk, Eukleidész-fordítást köszönhetünk. Az Alhazenként ismert Ibn-al-Haitham (kb. 965–1039) fénytantudós többek között továbbfejlesztette Arkhimédész térfogatszámítási eredményeit.

Külön említést érdemel Omár Khájjám (kb. 1050–1123), a nagyszerű perzsa költő, aki matematikusként is kiemelkedett. Bár tévesen azt állította, hogy a harmadfokú egyenletek aritmetikailag nem oldhatók meg (4.2. alfejezet), dicsérendő, hogy két kúpszelet metszéspontjaként határozta meg a harmadfokú egyenlet pozitív gyökét. (Természetesen ez nem euklideszi szerkesztés!) Legyen a harmadfokú egyenlet $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, és legyen $x^2 = 2py$ egy parabola. (Figyeljük meg, hogy még most is kísért a geometriai háttér, a homogenitás!) Ekkor behelyettesítve a parabola egyenletét a harmadfokú egyenletbe: adódik $2pyx + 2apy + b^2x + c^3 = 0$. Ez utóbbi egy hiperbola, és a fenti parabola metszi ki belőle a gyököket. (Külön nehézséget jelentett, hogy a negatív számokat még ő sem ismerte, ezért rengeteg esetet kellett megkülönböztetnie!) Eukleidész arányossági elméletével viaskodva közel került az irracionális számok definiálásához, és még a valós szám fogalmával is próbálkozott. Állítólag a kínaiakkal együtt a neves perzsa is ismerte a természetes egész kitevős binomiális tételt (alább a 4.3. tétel).

Végül megemlítjük az utolsó jelentős iszlám matematikust, al-Kasit (meghalt 1436-ban). Talán ő volt az első matematikus, aki használta a tizedes törteket, és ezek segítségével a π értékét minden korábbinál pontosabban meghatározta: $\pi \approx 3{,}1415926535897932$. Kilencjegyű szinusztáblázatáról Simonyi (1981, 120. o.) és Juskevics (1961, 332–338. o.) ír. A számjegyek megjegyzését elősegítendő, kétsoros versben közli világrekordját. Emellett Kasi a Pascal-háromszögről (4.4. példa) úgy ír, mint amit már előtte is ismertek (Juskevics, 1961, 254–256. o.), és közelítő négyzetgyökvonási eljárását némi túlzással a Newton-féle törtkitevős binomiális-tétel elődjének tekinthetjük.

Visszatérünk a hindu számjegyekhez, pontosabban az arabok általi továbbfejlesztésükhöz. Nehéz volt eljutni a nullához! Emiatt például a babiloniaknál nem volt különbség a 60, az 1 és az 1/60 között, csak a szövegösszefüggésből jöttek rá, hogy mi mennyi. Végül is megjelent a zérus, egy kis köröcskeként, amelyet ma 0-ként írunk.

Latin neve: cifra, az arab al-sifr szóból (magyarul: űr) származik, és ebből lett a német „számjegy" szó is (Ziffer). A titkosírásban alkalmazott „sifrírozás" szó is ebből származik. Al-Khvárizmi az egész arab kultúrkörben elterjesztette a mai rendszert. Tehát 10, 1 és 0,1 – ha nem is így jelölte őket.

A helyértékes arab számokat nehezen fogadták el Európában. Igaz, a fiatalkorában évekig az iszlám világban tanuló Leonardo Pisano (kb. 1180–1250) – más néven – Fibonacci, már 1202-ben kiadott egy kitűnő matematikakönyvet latinul. E könyv nagyon népszerű lett, legalábbis a kereskedők között, hiszen nagyon megkönnyítette a számolást. 1299-ben azonban Firenze városa rendeletileg betiltotta az arab számok használatát, ti. alkalmazásukkal könnyű volt hamisítani a könyvelést. Körülbelül 1500-ra győzte le az új számrendszer a régit latin Európában is. Nem sokkal előbb tűnt le a görög számrendszer Bizáncban!

Ma már kevéssé ismert, hogy a logaritmus felfedezése (lásd a 4.3. alfejezetet) előtt is vissza tudták vezetni a szorzást az összeadásra (Boyer, 1968/1991, 307–310. o.). Ehhez a

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

képletet és a szögfüggvény-táblázatokat alkalmazták. Osztásra azonban már nem alkalmas az eljárás!

3.2. feladat. Számítsuk ki közelítőleg az $12345 \cdot 6789$ szorzatot a következőképpen: megkeressük a $\sin x = 0{,}12345$ és a $\sin y = 0{,}6789$ egyenletet kielégítő x és y számot, képezzük az $x+y$ és az $x-y$ számot, és kivonjuk egymásból a függvénytáblázatban található koszinuszaik értékét. A felezés után az eredményhez hozzáírunk 5+4=9 darab nullát.

Fibonaccihoz visszatérve, két látszólag játékos feladatát említjük meg, hozzátéve, hogy mindkét feladat a további fejlődés szempontjából jelentős volt.

3.1. példa. Fibonacci-számok (1202). „Egy gazdának van egy pár nyula. Tegyük föl, hogy ez a pár nyúl minden hónapban egy újabb pár nyulat fiadzik, amelyek mindegyike kéthónapos korától szintén havonta egy pár nyúlnak ad életet. A kérdés az, hogy az egymás után következő hónapokban hány pár nyula lesz a gazdának" (Simonyi, 1981, 122. o.). Könnyű belátni, hogy a választ a következő rekurzió adja: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_0 = 1$ és $F_1 = 1$. A megoldás közlését a 6.1. feladatra bízzuk.

3.2. példa. (Fibonacci, idézi Juskevics, 1961, 393. o.) „Legkevesebb hány darab mérlegsúllyal lehet megmérni bármilyen olyan testet, amelynek súlya az egység egész számú többszöröse, és egy adott értéknél kisebb. A választ Leonardo az 1, 3, 9, 27,... számsorozattal adta meg azon az alapon, hogy minden egész szám előállítható 3 hatványainak és 1-nek az összegeként és különbségeként."

3.4. Mozgástan

Nyugat-Európában a kultúra művelői főleg a papok voltak, bár a 10. századtól kezdve egymás után alakultak meg az egyetemek. Sajátos okok miatt mégis inkább az egyetemeken kívül fejlődött a tudomány.

Az európai középkori matematika megújulása jelentős részben fizikusok érdeme (vö. Simonyi, 1981, 125–126. o. és Juskevics, 1961, 412–431. o.). Két nevet említünk:

Thomas Bradwardine-t (1290?–1349), Canterbury püspökét és Nicole Oresmét (1323?–1382), Lisieux pöspökét.

Bradwardine 1328-ban a téves arisztotelészi dinamika alapegyenletéből indult ki, amely szerint a sebesség (v) az erő (F) és az ellenállás (R) hányadosával arányos. Mai írásmódban:

$$v \sim \frac{F}{R}.$$

Bradwardine azon az alapon vetette el ezt az egyenletet, hogy $F < R$ esetén nem adja a helyes $v = 0$ eredményt. Számos próbálkozás után a következő érdekes képletet javasolta:

$$v = V\left(\frac{F}{R}\right),$$

ahol x-szeres sebességhez a hányados x-edik hatványa tartozik:

$$xV\left(\frac{F}{R}\right) = V\left(\left(\frac{F}{R}\right)^x\right).$$

Könnyű belátni, hogy e függvényegyenlet folytonos megoldása egyedül a

$$V \sim \log\frac{F}{R},$$

ahol a log a jegyzetben mindig természetes alapú logaritmust jelent. Természetesen ez a mozgástörvény teljesen hamis, viszont utat nyitott egy új függvénynek, a logaritmusnak (vö. 4.3. alfejezet).

3.3. feladat. Igazoljuk, hogy az $V(a^x) = xV(a)$, $(a > 1)$ függvényegyenlet egyetlen megoldása a logaritmusfüggvény!

Oresme hasonló úton az $y = a^x$ exponenciális függvényhez jutott el. Az erő és az ellenállás viszonyát fejezte ki sebességhányadosokkal. Mai írásmódban:

$$\frac{F_2}{R_2} = \left(\frac{F_1}{R_1}\right)^{v_2/v_1}.$$

Emellett Oresme képes volt olyan bonyolult végtelen sorokat is kezelni (vö. Boyer, 1968/1991, 266–267. o.), mint

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2,$$

és az egyetemi tanulmányainkból ismert módon igazolta, hogy a harmonikus sor összege végtelen: $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n) = \infty$.

3.4. feladat. Igazoljuk elemi módszerrel, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}, \qquad \text{ahol} \qquad |q| < 1\ !$$

4. AZ ÚJKORI MATEMATIKA KEZDETE

4.1. Bevezetés

Történeti háttérként csak utalunk Nyugat-Európa kulturális megújhodására, a reneszánszra, amely 1300 körül kezdődött. Egyre inkább fejlődtek a városok, a kereskedelem és a kézművesség. Az egyházi kultúra mellett fokozatosan kialakult a világi kultúra is, először Itáliában, majd másutt is. 1450 körül Gutenberg feltalálta a könyvnyomtatást, 1517-ben Luther sikeresen megindította a reformációt. A nagy földrajzi felfedezések együtt jártak a navigáció, a csillagászat és a térképészet ugrásszerű fejlődésével. Franciaországban, Hollandiában és Nagy-Britanniában létrejött a modern és sikeres nemzetállam, amely a kereskedelmen kívül a tudományt is támogatta. A nagy tudósok többsége még mindig nem az egyetemeken fejtette ki tevékenységét.

Hosszú hanyatlás és stagnálás után Európában a 16–17. században megélénkült a matematika fejlődése. A 4.2. alfejezetben leírjuk, hogyan találták meg az olaszok 1540 körül a harmadfokú egyenletek megoldóképletét. A 4.3. alfejezetben Napier 17. század eleji találmányával, a logaritmussal foglalkozunk. A 4.4. alfejezetben a binomiális tételt érintjük, majd a 4.5. alfejezetben elmeséljük, hogyan élesztette újjá Fermat a számelméletet. A 4.6. alfejezet vázolja Descartes és Fermat útját az analitikus geometriához. A 4.7. alfejezet az elemi analízisről szól: megmutatjuk, hogy Fermat speciális meggondolások révén meg tudta határozni az egész (sőt, tört) kitevőjű hatványfüggvény érintőjének meredekségét, illetve a függvény alatti területet.

4.2. A harmadfokú egyenlet megoldóképlete

Az ókoriak könnyedén megoldották a másodfokú egyenleteket, de nem tudtak megbirkózni a harmad- és magasabb fokú egyenletekkel. Hosszas kísérletezés után 1540 körül több itáliai matematikus, köztük Girolamo Cardano (1501–1576) is megtalálta a megoldást. Gingyikin (2003, 21–48. o.) nyomán először közöljük a modern megoldást, majd utalunk a korabeli nehézségekre (lásd Smith, 1929, 201–206. o.).

Teljes harmadfokú egyenlet, azaz

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0 \neq c$$

esetén, ahol a,b,c valós számok, az ismeretlen x értékeit, azaz az egyenlet gyökeit keressük. Mivel a középkorban is ismerték a helyettesítést, Cardanónak viszonylag könnyű volt rábukkannia arra, hogy a négyzetes tag az $y = x + a/3$ helyettesítéssel eltávolítható: valóban, az $x = y - a/3$ köbre emelése után belépő $-y^2a$ tag kiejti a négyzetre emeléskor kapott ay^2 tagot. Visszatérve az eredeti jelölésekre, elegendő tehát az $x^3 + ax + b = 0$, sőt a hagyomány szerint a

$$x^3 + ax = b \tag{4.1}$$

egyenletet vizsgálni, mert pozitív a,b együtthatók esetén így kapunk pozitív gyököt.

A megoldás kulcslépése az, hogy a gyököt a szimmetrikus $x = v - u$ alakban keressük. $v = x + u$-t köbre emelve:

$$v^3 = x^3 + 3x^2u + 3xu^2 + u^3. \tag{4.2}$$

Mivel $3x^2u + 3xu^2 = 3xu(x + u) = 3xuv$, ezért a (4.2) egyenlet a következő alakba írható:

$$x^3 + 3uvx = v^3 - u^3. \tag{4.3}$$

A (4.1) és a (4.3) egyenlet azonossá válik, ha az (a,b) párhoz találunk olyan (u,v) párt, amelyre $3uv = a$ és $v^3 - u^3 = b$. Ahhoz, hogy a másodfokú egyenlet gyökeire és együtthatóira vonatkozó összefüggést alkalmazhassuk, némileg átrendezzük az egyenletpárt:

$$u^3(-v)^3 = -\frac{a^3}{27} \qquad \text{és} \qquad v^3 + (-u^3) = b.$$

Azaz u^3 és $(-v)^3$ az

$$y^2 - by - \frac{a^3}{27} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei. Pozitív gyökre szorítkozva $v > u$, azaz

$$v^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}} \qquad \text{és} \qquad u^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}. \tag{4.4}$$

Köbgyököt vonva, adódik u és v, azaz x.

Ha elfogadjuk a komplex számokat (9.2. alfejezet), akkor három megoldás létezik. Ahhoz, hogy a három vagy az egy valós megoldás esetét megkülönböztessük, be kell vezetni a (4.1) harmadfokú egyenlet diszkriminánsát:

$$\Delta = \frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}.$$

A szokásos algebrai előadásokban belátják a következő tételt:

4.1. tétel. *(Cardano, 1545–Bombelli, 1572.) Ha $\Delta > 0$, akkor a (4.1) harmadfokú egyenletnek egy valós és két komplex gyöke létezik, amelyet a (4.4) képlet ad. Ha $\Delta < 0$, akkor a (4.1) harmadfokú egyenletnek mindhárom gyöke valós, de a megoldó képlet alkalmazásában komplex számok jelennek meg.*

Megjegyzések. 1. Belátható, hogy más megoldó képlet esetén sem lehet megszabadulni a komplex számoktól.

2. A 4.3. feladatban kitűzzük a 4.1. tétel igazolását!

Cardano idejében még a negatív számok sem voltak elfogadottak, ezeket Cardano „hamis számoknak” nevezi. Képzeljük el meglepetését, amikor komplex, vagy ahogy ő nevezte, „szofisztikált” (kifinomult) számokkal találkozott, amelyeket „éppolyan rejtélyeseknek, mint haszontalanoknak” tekintett. A rejtély megoldásához Raffaello Bombelli

(1526–1573) kezdett hozzá. Felfedezte, hogy ezekkel a számokkal ugyanúgy lehet számolni, mint a valós számokkal. Azt is megértette, hogy a konjugált komplex számok összege valós, és talán mindhárom gyököt felismerte. Érdemes felidézni az $x^3 = 15x + 4$ egyenletnek azt a bizonyos gyökét és Bombelli-féle egyszerűsítését (vö. Stillwell, 1989, 190–191. o.):

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

De a komplex számok igazán szabatos tárgyalására még 1800-ig kellett várni, akárcsak az algebra alaptételének – a komplex számsíkon minden polinomnak létezik legalább egy gyöke – bizonyításáea (9. fejezet).

További nehézséget jelentett a mai jelölések hiánya. Tulajdonképpen nem is algebrailag, hanem még geometriailag gondolkodtak abban az időben, és például az $u^3 - v^3$ kifejezést mint két kocka térfogatának különbségét fogták föl. Elég nehéz lehetett! Képletek helyett számpéldák szerepeltek, és a feladat megoldását versben fogalmazták meg (vö. Pataki, 2003). (Valójában Cardano egy konkrét egyenletet vizsgált: $x^3 + 6x = 20$, amely korabeli jelölésekkel cub p; 6 reb ae$\bar{q}$lis 20, ahol p az összeadás jele, reb az ismeretlen és ae$\bar{q}$lis az egyenlőségé.)

A romantikus történetről csak néhány mondatban számolunk be, pedig felér egy kalandregénnyel. Scipione del Ferro (1465–1526), a bolognai egyetem matematikaprofesszora azt állította magáról, hogy ő tudja a harmadfokú egyenlet megoldását, de csak egyetemi utódjának és egyben vejének, Hannibal della Navénak és saját tanítványának, Antonio Mario Fiorének árulta el a titkot 1510 körül. Az örökös úgy döntött, hogy megtartja magának és tanítványának a titkot, hogy sikerrel vívhassanak tudományos párbajokat.

Időközben a kalandos életű, dadogósnak nevezett Niccolo Tartaglia (kb. 1500–1557) is megsejti a megoldást. 1535-ben tudományos párbajra hívta ki a titok letéteményesét, Fiorét. Ahhoz, hogy a párbajban helytálljon, Tartagliának meg kellett találnia a megoldóképletet. Meg is találta!

Cardano igazi polihisztor volt (róla nevezték el a kardáncsuklót, amely ma lehetővé teszi, hogy a hátsókerék-meghajtású autóknál a kardántengely az orrmotortól hátra vigye a forgást). Éppen egy algebrai könyvet írt, amikor értesült Tartaglia titkáról. Hosszas huzavona után 1539-ben Tartaglia átadta a képletet Cardanónak, de megígértette, hogy Cardano titokban tartja azt a képletet.

Cardano sokat kínlódott, amíg belátta a képlet helyességét. (Még ő is térbeli geometriai átalakításokkal bajlódott.) Amikor azonban della Nave felfedte előtte a titkát, akkor Cardano érvénytelennek tekintette Tartagliának tett fogadalmát, és 1545-ben közölte a képletet és a bizonyítását.

A harmadfokú egyenlet megoldásában Cardanónak segédkező Ludovico Ferrari (1522–1566) gyorsan megoldotta a negyedfokú egyenletet is, a harmadfokú egyenletre visszavezetve a feladatot (lásd Smith, 1929, 207–212. o.). Az ötödfokú egyenlet megoldása azonban ellenállt a próbálkozásoknak, és csak a 19. század elején sikerült kimutatni, hogy gyökvonásokkal ez általában nem is lehetséges (12.2. alfejezet).

De a feladat rövid távon is komoly hatást gyakorolt a matematika fejlődésére. Itt csupán két közvetlen követőt említünk. Francois Viète (1540–1603) (vö. Boyer, 1968/1991, 302–306. o.) volt az első, aki következetesen megkülönböztette a paramétereket és a változókat, az előbbieket mássalhangzókkal, az utóbbiakat magánhangzókkal jelölte. (Az a, b, c, illetve x, y,... jelölés később alakult ki.) Átvette a németektől az összeadás jelét, de a változó köbét továbbra is a latin cubus szóval jelölte. Ő volt az első, aki – habár korlátozott érvénnyel, pozitív együtthatókra és gyökökre szorítkozva – de észrevette a harmadfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggést. Külön kiemeljük a következő észrevételét.

4.1. példa. (Viète, 1591.) Harmadfokú egyenlet megoldásának visszavezetése a szögharmadolásra. (Stillwell, 1989, 56. o.) Az $x^3 + ax + b = 0$ harmadfokú egyenlet $4y^3 - 3y = c$ alakra hozható. Tegyük fel, hogy $|c| < 1$. Mivel $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$, az $y = \cos\theta$ és $\cos 3\theta = c$ helyettesítés $\cos 3\theta = c$-t adja. Azaz c-ből kifejezhető 3θ, és szögharmadolással θ, azaz y. Figyelemre méltó, hogy ez a módszer éppen akkor küszöböli ki a komplex számokat, amikor azok a Cardano-módszerben megjelennek.

Viète leglátványosabb trigonometriai felfedezése a következő:

$$\sin nx = n\cos^{n-1} x \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos^{n-3} x\sin^3 x + \cdots ...$$

(Ez már a klasszikus binomiális tétel előfutára, de Vièta egyedi módszereket alkalmazott e tétel bizonyítására.) Ennek a képletnek a segítségével 1593-ban képes volt megtalálni a következő 45-ödfokú egyenlet pozitív gyökét:

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - \cdots - 45x = K, \qquad |K| < 1$$

ti. a $K = \sin 45\theta$ helyettesítéssel $x = 2\sin\theta$.

Nem sokkal később, 1629-ben Albert Girard (1590–1639) kimondta az n-edfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggést tetszőleges esetre (negatív és komplex gyökökre is). Ő vezette be a pozitív félegyenes mellé a negatív félegyenest. Ő ismerte fel, hogy egy n-edfokú egyenletnek n gyöke van, természetesen multiplicitással.

Algebrai alfejezetünk végén megemlítjük René Descartes (1599–1650) idevágó felfedezését: ha p_n egy n-edfokú polinom, amelynek α valós szám gyöke, akkor p_n osztható $x - \alpha$-val: azaz létezik egy olyan $n - 1$-edfokú q_{n-1} polinom, amelyre $p_n(x) = q_{n-1}(x)(x - \alpha)$.

4.3. A logaritmus feltalálása

Talán az első igazi újkori matematikai felfedezés, amely a görögök és az arabok számára elképzelhetetlen lett volna, a logaritmus felfedezése volt. Azt, hogy mennyire a levegőben lógott e felfedezés, jól mutatja, hogy egyszerre két tudós is felfedezte, egymástól függetlenül: John Napier (1550–1617) skót báró és Jobst Bürgi svájci polgár.

Az elektronikus zsebszámológép korában nehéz elképzelni, milyen nehéz volt pontosan számolni sokszámjegyű számokkal 1970 előtt. A mechanikus számológépet Blaise Pascal (1622–1662) találta föl 1650 körül, amelyet Gottfried W. Leibniz (1646–1716) tökéletesített 1672-ben (lásd Smith, 1929, 165–172 és 173–181. o.).

A szorzást már a középkorban vissza tudták vezetni összeadásra (3.3. alfejezet), de az osztást még nem. Külön nehézséget okozott, amikor szögfüggvényekkel kellett osztani. Pontos és részletes táblázatokat eleve csak tizedes törtekkel lehet készíteni, de azok felfedezésére és elterjedésére megbocsáthatatlanul sokáig kellett várni. A németalföldi Simon Stevin (1548–1620) munkája a tizedes törtekről csak 1585-ben jelent meg (lásd

Smith, 1929, 20–34. o.). Hangsúlyozzuk, hogy a francia forradalomig (pontosabban 1795-ig) a mértékegységek és a pénzek sem tízes alapúak voltak. (A különösen hagyománytisztelő Nagy-Britanniában csak 1972-ben szorította ki az 1 font = 20 shilling és 1 shilling = 12 penny rendszert a mai 1 font = 100 penny rendszer! Az angolszász országok súly- és mértékegységei továbbra is hasonlóan bonyodalmasak. Például 1 szárazföldi mérföld=1760 yard, 1 yard=3 láb, 1 láb=12 hüvelyk. Hány hüvelyk 1 mérföld?)

A szorzás, az osztás és a hatványozás egyszerűsítésére született a *logaritmus*. Az 1970 előtt tanuló és dolgozó nemzedékek, a legutolsó nemzedéknek még a szerző is tagja volt, a tízes alapú logaritmussal számoltak: $y = \lg x$ az a szám, amelyre $x = 10^y$. A következőképpen szorozták össze x-et és y-t: $\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y$, tehát összeadták a táblázatból kiolvasható $\lg x$-t és $\lg y$-t, és szintén a táblázatban megnézték, hogy melyik szám logaritmusa az eredmény.

4.2. példa. A 3.2. feladatot a lg segítségével a következőképpen végezhetjük el:

$$\lg(1{,}2345 \cdot 6{,}789) = \lg 1{,}2345 + \lg 6{,}789 = 0{,}0915 + 0{,}8319 = 0{,}9234;$$

és a négyjegyű logaritmustáblából visszakeresve, interpolációval adódik $8{,}382 \cdot 10^7$. A pontos eredményt a zsebszámológép adja: 83 810 205.

Kiemeljük, hogy logaritmussal az osztás majdnem olyan könnyű, mint a szorzás, csak összeadás helyett kivonásra van szükség.

Napier 1-hez közeli alapszámból indult ki, hogy a kitevő növelésével csak lassan változzanak a hatványok (lásd Smith, 1929, 149–155. o.). Legyen $a = 0{,}9999999 = 1 - 10^{-7}$, ekkor $y = a^x$ inverz függvényét definiálta, sőt még el is bonyolította a dolgot, beszorozván a hatványt 10^7-nel. Nem jutott el az

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{4.5}$$

határértékig, hiszen megállt az $n = 10^7$ közelítésnél.

Meg kell említenünk, hogy a logaritmussal kapcsolatos kutatásai kapcsán Napier felírt egy *mozgásegyenlet*et, amely mai jelölésekkel $\dot{x} = -x$. Ennek a megoldása $x_0 = 1$ kezdeti érték esetén $x(t) = e^{-t}$.

Briggs oxfordi geometriaprofesszor 1615-ben meglátogatta a magányos felfedezőt, és rábeszélte, hogy a számolásban nélkülözhetetlen tízes alapú logaritmusra térjen át. Napier 1617-ben meghalt, és Briggsre hárult a gyakorlati munka, a logaritmustábla elkészítése.

Hogyan készítettek hatványsorok nélkül logaritmustáblázatokat? A görög szögfüggvény-táblázatok készítőiről szólva a 2.6. alfejezetben már utaltunk a felezésre és az interpolálásra. Hasonlóképpen jártak el a logaritmustábla első készítői is. Ha $\lg 10 = 1$, akkor $\lg 10^{1/2} = 1/2$, $\lg 10^{1/4} = 1/4$, azaz $\lg 3{,}162277 = 0{,}5000$ és $\lg 1{,}77828 = 0{,}25000$. Egyes források (Stillwell, 1989, 123. o.) szerint azonban már Briggs is felismerte a magasabb fokú interpoláció fontosságát (5.3. alfejezet).

Röviden vázoljuk még, hogyan jelentkezhetett a kortársak számára a logaritmusfüggvény inverze, az *exponenciális függvény*. Említett differenciálegyenletén kívül állítólag Stevin kamatláb-táblázatai is befolyásolták Napiert. Mindenesetre vezessük be a következő függvényt:

$$e(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

ahol x egy valós szám. Jakob Bernoulli (1654–1705) későbbi megfontolását megelőlegezve egy heurisztikus bizonyítást adunk a határérték létezésére. Képzeljük azt, hogy az éves kamatláb x (megfelelő infláció esetén ez akármekkora pozitív szám lehet). Sok bank verseng egymással a befektetők kegyeiért, indexük $n = 1, 2, \ldots$. Az n-edik bank egy év alatt n-szer köti le a pénzünket, és minden alkalommal az x/n időszakos kamatláb szerint kamatoztatja addigi befektetésünket. A kamatos kamat képlete szerint az n-edik bank egy év alatt éppen a „lim" után álló kifejezést fizeti ki egységnyi befektetés után. Nyilvánvaló, hogy minél gyakoribb az újra befektetés, annál nagyobb az összesített kamat. Csupán azt kell belátni, hogy ez a sorozat korlátos: nevezetesen kisebb mint 3^x. Ekkor már következik a határérték létezése.

Viszonylag könnyű belátni e függvény következő tulajdonságait.

4.2. tétel. *Az $e(\cdot)$ függvénynek a következő tulajdonságai vannak:*
a) $e(1) = e$.
b) $e(x)e(y) = e(x + y)$.
c) $e(0) = 1$.
d) $e(-x) = 1/e(x)$.
e) $e(x) > 0$.
f) $e'(x) = e(x)$ *(a deriváltfüggvény itt az érintő).*

Bizonyítás. a) Behelyettesítéssel.
b)

$$e(x + y) = \lim_n \left(1 + \frac{x + y}{n}\right)^n$$

és

$$e(x)e(y) = \lim_n \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{y}{n}\right)\right]^n = \lim_n \left(1 + \frac{x + y + xy/n}{n}\right)^n,$$

ahol az xy/n tag elhanyagolható.

c) b)-ből: $e(0 + 0) = e(0)e(0)$, azaz $e(0) = 1$ (nulla nem lehet).

d) b)-ből: $1 = e(x - x) = e(x)e(-x)$.

e) Elegendően nagy n-re $1 + x/n > 0$.

f) b)-ből kis h-ra:

$$\frac{e(x + h) - e(x)}{h} = e(x)\frac{e(h) - e(0)}{h},$$

ahol

$$\frac{e(h) - e(0)}{h} \approx h^{-1}\left[\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n - 1\right] \approx h^{-1}[1 + hn/n - 1] = 1.$$

A utolsó lépésben felhasználtuk a mindjárt kimondandó 4.3. klasszikus binomiális tételt vagy a későbbi, de elemibb 4.7. tételt. ∎

4.4. A binomiális tétel

Különleges történelmi fontossága miatt külön alfejezetet szentelünk a pozitív egész kitevős binomiális tételnek.

4.3. tétel. *Legyen n pozitív egész szám, és legyen x egy valós szám. Ekkor az $1+x$ binom n-edik hatványa a következő n-edfokú polinom:*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Megjegyzés. Általánosabb alakban szokták kimondani a tételt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

de későbbi kifejtésünk szempontjából az inhomogén, egyváltozós polinomos alak a kedvezőbb. A tétel sok szempontból érdekes. Egyrészt váratlan kapcsolatot teremt az algebra és a kombinatorika közt, hiszen $\binom{n}{k}$ azt is mutatja, hogy n elemből hányféleképp lehet kiválasztani k-elemű halmazokat. Másrészt az $(\binom{n}{k})$-táblázat felírható *Pascal-háromszög*ként, ahol az n-edik sorbeli $\binom{n}{k}$ fölött, balra $\binom{n-1}{k-1}$, jobbra $\binom{n-1}{k}$ áll, és hármójuk között a kapcsolat

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Bár a témakörből sok mindent már évszázadokkal korábban is ismertek, de Pascal foglalta kerek egésszé a témakört, továbbá ő használt először *teljes indukciót* (lásd Smith, 1929, 67–79. o.). Harmadrészt a tétel általánosítható törtkitevőkre, és ez új utat nyitott Newton számára (lásd az 5. fejezet).

A 10. fejezetben részletesebben is foglalkozunk majd azzal, hogyan alakult ki a kombinatorikából a klasszikus valószínűség-számítás Pascal vezérletével. Némileg előre ugrunk az időben.

4.1. feladat. a) Alkalmazzuk a binomiális tételt az e szám (4.5) definíciójára, és próbáljuk ebből levezetni az e hatványsoros definícióját:

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

b) Számítsuk ki az e közelítő értékét a két módszerrel $n = 1, 2, \ldots, 9$-re!

Az első n természetes szám r-edik hatványösszege, jele

$$S_n^r = \sum_{k=1}^{n} k^r,$$

sokat foglalkoztatta a 17. század kutatóit. Fermat és Pascal a következő figyelemre méltó összefüggést találta (vö. Weil, 1983, 48. o. és Boyer, 1968/1991, 365. o.).

4.4. tétel. *(Fermat, 1640 előtt, illetve Pascal, 1654.) Az S_n^r hatványösszegek kielégítik a következő egyenletet:*

$$\sum_{j=1}^{r} \binom{r+1}{j} S_n^{r+1-j} = (n+1)^{r+1} - (n+1).$$

Megjegyzések. 1. Boyer megjegyzi, hogy Pascal nem képletben, hanem szóban fejezte ki e tételt. Talán ennek tudható be, hogy egy nagyon sikeres népszerűsítő író, „szabad idejében” az Európai Újjáépítési és Fejlesztési Bank első elnöke, Attali (2000) összekeverte a tételt a sokkal egyszerűbb mértani sorozat összegképletével. Vigyázni kell a népszerűsítő irodalommal!

2. Johann Faulhaber (1580–1635) 1631 előtt az első 17 kitevőre meghatározta a pontos S_n^r hatványösszegeket. Később Jakob Bernoulli minden kitevőre meghatározta a képletet (vö. Függelék).

4.2. feladat. Bizonyítsuk be a 4.4. tételt n szerinti teljes indukcióval!

4.5. A számelmélet újjászületése

A számelmélet újjászületésének tárgyalását célszerű a Mersenne-prímekkel kezdeni (vö. Freud–Gyarmati, 2000, 161–162. o.). Marin Mersenne (1588–1648) francia matematikusról nevezték el a következő számokat. Legyen p egy prím, és legyen $M_p = 2^p - 1$ a p-edik Mersenne-szám. A 2.6. tételben említett tökéletes számok miatt érdekes, hogy M_p prím-e vagy sem. A legkisebb összetett Mersenne-szám $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$. Mersenne meglepően hosszú listát közölt az utólag róla elnevezett prímekről, és viszonylag kevés hibát követett el sejtéseiben.

Pierre Fermat (1601–1665) toulouse-i jogász szabad idejében matematikával foglalkozott. Amatőr létére sok kiemelkedő eredményt talált, de manapság a nem matematikusok szemében igazán híressé számelméleti munkássága tette, amellyel a 17. században újjáélesztette a számelméletet. Itt csak két számelméleti eredményét és két híres sejtését mutatjuk be – ízelítőül. Részletes ismertetést ad Weil (1983, Chapter II.) Az első tétel a Mersenne-prímekkel kapcsolatos.

4.5. tétel. *(Kis Fermat-tétel, 1640.) Ha p prím, akkor bármely a egész számra $a^p - a$ osztható p-vel.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval, a szerint. $a = 1$-re az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy a tétel igaz az a természetes számra, és ebből akarjuk igazolni az állítást $a + 1$-re. A binomiális tétel szerint

$$(a+1)^p - a - 1 = a^p - a + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k.$$

A szumma előtti különbség az indukciós feltevés szerint osztható p-vel, és a szumma minden tagja $p|\binom{p}{k}$ miatt osztható p-vel (meggondolandó!). ∎

Megjegyzés. Ezt a bizonyítást adta először Euler 1736-ban, de Fermat is ismerhette.

A 2.5. alfejezetben már említettük a pitagoraszi számhármasok kérdését (2.5. tétel), amely Fermat-t a következő tétel kimondására ihlette.

4.6. tétel. *(Fermat, 1637?) Az $x^4 + y^4 = z^4$ egyenletnek természetes számokra nincs megoldása.*

A bizonyítás elemi, azonban hosszúsága miatt (Freud–Gyarmati, 2000, 321–323. o.) nem ismertetjük. Csak annyit jegyzünk meg, hogy a bizonyításhoz Fermat a teljes indukció indirekt változatának egy rokonát, a *végtelen leszállás* módszerét alkalmazta. Indirekt módon feltette, hogy létezik legalább egy olyan z természetes szám, amely ellentmond a szóban forgó tételnek, ezek közül vette a legkisebbet, és ebből belátta, hogy létezik egy még kisebb ilyen természetes szám – ellentmondás.

Fermat nem állt meg e tételnél, hanem nagyon merészen a következőt írta az ókori matematikus, Diophantosz könyvének újkori nyomtatott kiadásának a lapszélére: „Két köbszám összege sohasem lehet köbszám, két negyedik hatvány összege sohasem lehet negyedik hatvány stb. Erre egy csodálatos bizonyítást találtam, de sajnos a margón kevés a hely ahhoz, hogy leírhassam." Fermat állítása azonban 1994-ig csak bizonyítatlan *sejtés* maradt, amellyel a 10. fejezetben találkozunk újra. Visszatekintve, biztosak lehetünk benne, hogy Fermat tévedett, nem volt helyes bizonyítása. Még az is lehetséges, hogy maga is rájött bizonyítási ötlete hibájára, csak elfelejtette áthúzni a merész megjegyzését.

4.1. sejtés. *(Fermat, 1637.) Legyen $n > 2$ egy természetes szám. Az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek természetes számok körében nincs megoldása.*

Történeti jelentősége miatt megemlítjük, hogy Fermat tévesen azt hitte, hogy az $F_n = 2^{2^n} + 1$ számok minden természetes n-re prímek. Ezt a hibás sejtését 1654-ben Pascalhoz írt utolsó levelében (lásd 10.2. alfejezet) mondta ki. Valójában $n = 0, 1, 2, 3, 4$-re igaz az állítás, de már $n = 5$-re nem (Freud–Gyarmati, 158. o.)

4.6. Koordináta-geometria

Már a görögök is ismerték a geometria és az analízis kapcsolatát, de nem gondolták ki a koordináta-rendszert. Az 1630-as években Fermat (lásd Smith, 1929, 389–396. o.) és Descartes vezette be a koordináta-rendszert (lásd Smith, 1929, 397–402. o.), és ábrázolta benne a függvényeket. Pontosabban: „...már Apollóniosz ... is használt [koordináta-rendszert], amikor leírta a kúpszeleteket. De valójában Descartes mutatott rá először, hogy a koordináta-rendszer segítségével geometriai problémák algebraiakká fogalmazhatók át" (Laczkovich–T. Sós, 2005, 11. o.).

Talán a legnagyobb nehézséget a homogenitási követelmény leküzdése jelentette: $y = x - x^2$ a régieknek értelmetlennek tűnt, mert mértanilag x 1-dimenziós és x^2 2-dimenziós. A nagy felfedezés számunkra már közhely: ha az $e(x,y) = 0$ egyenletben két ismeretlen, x,y szerepel, akkor az egyenletet kielégítő (x,y) pontok egy síkbeli mértani helyet jellemeznek.

A kezdeti nehézségeket jól jelzi, hogy sem Descartes, sem Fermat nem használt negatív ordinátákat. Ennek ellenére sikerült belátniuk, hogy $ax = by$ egy 0-án átmenő félegyenes; sőt, $xy = c$ egy hiperbola (egyik ága). Emellett koordináta-transzformációval sikerült bizonyos görbék egyenletét egyszerűsíteniük stb.

A mai jelölések hiánya azonban még a 17. században is sok gondot okozott. Amint Simonyi (1981, 241–242. o.) megjegyzi: az egyenes egyenletét Fermat még szövegesen adja meg (latinul): „D in A aequitur B in E", ahol D és B a két paraméter, A és E a független és a függő változó, és „aequitur" az egyenlőség neve.

Folytatva az idézetet: „A koordináta-geometria használata viszonylag lassan terjed el, mert Fermat könyve csak 1679-ben jelenik meg nyomtatásban, Descartes pedig szándékosan homályosan ír.” Ennek okáról magát Descartes-ot idézzük: „Ami az Analízist illeti, annak egy részét elhagytam, hogy megnehezítsem a rosszindulatú elmék buzgólkodását. Ha ugyanis gondolataimat teljes részletességgel közöltem volna, ők azzal dicsekedhettek volna, hogy mindezeket már réges-régóta tudták; most így meg sem mernek mukkanni, félve, hogy rögtön elárulják tudatlanságukat.” Még szerencse, hogy a már említett Mersenne atya a kor nagy tudósaival levelezés útján tartotta a kapcsolatot, és így a matematikai felfedezések előbb-utóbb elterjedtek. Annak idején ez volt a tudományos közlés bevett módja.

Megkockáztatjuk, hogy Galileo Galilei (1564–1642) könnyebben megalkothatta volna mechanikáját az analitikus geometria ismeretében. Ennek ellenére már 1608-ban felfedezte a ferdehajítás képletét, és később egy derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolta a folyamatot.

4.3. példa. (Galilei, 1638, 276–281. o.) Egy homogén gravitációs térben ferdén elhajított test parabolapályán repül. Valóban, legyen a kezdősebesség vízszintes és függőleges koordinátája rendre u és v. Ekkor az (x,y) koordinátájú síkban a mozgásegyenlet

$$x = ut \qquad \text{és} \qquad y = vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ha a parametrikus alak helyett a szokásos alakra van szükség, akkor t kiküszöbölésével adódik

$$y = \frac{v}{u}x - \frac{g}{2u^2}x^2.$$

4.7. Elemi analízis

Ha már ismert a koordináta-rendszer, akkor lehet elemi analízissel is foglalkozni. Kezdjük az érintőfeladatokkal.

4.7. tétel. *(Fermat, kb. 1630.) Legyen $\alpha \neq 0$ egy racionális szám és legyen x egy tetszőleges pozitív valós szám! Ekkor az x^α hatványfüggvény x pontbeli érintőjének meredeksége $\alpha x^{\alpha-1}$.*

Bizonyításvázlat. Kezdjük a pozitív egész kitevővel: $\alpha = r$. Legyen y egy x-től különböző valós szám és írjuk föl az $y^r - x^r = (y-x)(y^{r-1} + y^{r-2}x + \cdots + yx^{r-2} + x^{r-1})$ azonosságot. $y - x$-szel osztva, $y = x$-re a hányados jobb oldala rx^{r-1}-re egyszerűsödik. (Ekkor még nem foglalkoztak a határértékkel!)

Ha $\alpha = -r$ vagy $\alpha = p/q$, akkor az állítás $X = 1/x$, illetve $X = x^{1/q}$ helyettesítéssel visszavezethető a bizonyított esetre. ∎

4.4. példa. (Fermat, 1636, vö. Eukleidész, VI.27.) Az egységnyi fél kerületű téglalapok közül a négyzet területe a maximális. Valóban, legyen a téglalap két oldalának hossza rendre x és $1-x$. Az $x(1-x) = x - x^2$ függvény deriváltja $1 - 2x$, amely Fermat észrevétele szerint a belső szélsőérték-helyen nulla kell hogy legyen: $x = 1/2$. Fermat nem ismerte a derivált newtoni–leibnizi fogalmát, ehelyett a következőképpen járt el (Fauvel–Gray, 1987, 358. o.). Legyen e egy kis szám, amellyel x-et megváltoztatjuk:

ekkor $(x+e)(1-x-e) = x-x^2+e-2xe-e^2$. Kivonva az eredeti értéket: $e-2xe-e^2$. Elhagyva a nagyon kicsiny e^2-et, a változás akkor tűnik el, ha $x = 1/2$.

Megjegyezzük, hogy számos más optimalizálási feladathoz hasonlóan, ez a feladat is megoldható elemi geometriai vagy algebrai eszközökkel, azonban bonyolultabb esetekben szükség van a deriváltra (lásd 7. fejezet).

4.3. feladat. Igazoljuk a 4.1. tételt analízis segítségével!

4.4. feladat. Bizonyítsuk be a 2.2. tételt és a 2.2. feladatot analitikusan!

4.5. példa. A (4.3.) klasszikus binomiális tételnek van egy érdekes olvasata, amely központi jelentőséget kap a kifejlett analízisben (5.3. alfejezet): az $f(x) = (1+x)^n$ függvényt (Taylor-)polinomként állítja elő, ahol x^k együtthatója $f^{(k)}(0)/k!$.

Az érintőszerkesztési feladatok után rátérünk a területszámításra.

4.8. tétel. *(Fermat, 1636.) Legyen $\alpha \neq -1$ egy valós szám és legyen a és b két pozitív szám, $a < b$! Ekkor az x^α függvény alatti terület a és b között*

$$\frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Bizonyítás. Osszuk föl az a és b közötti szakaszt n részre úgy, hogy az osztópontok mértani sorozatot alkossanak: $x_i = aq^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Írjuk fel a bal oldali végpontokra a téglányösszeget:

$$S_n = a^\alpha(aq-a) + \cdots + a^\alpha q^{\alpha(n-1)}(aq^n - aq^{n-1}).$$

A $q^{\alpha+1}$ hányadosú mértani sor összegképletével határozzuk meg explicite az összeg értékét!

$$S_n = a^{\alpha+1}\frac{(q-1)(q^{(\alpha+1)n}-1)}{q^{\alpha+1}-1} = \frac{(q-1)(b^{\alpha+1}-a^{\alpha+1})}{q^{\alpha+1}-1}.$$

Ha $n \to \infty$, akkor $q \to 1$, és a 4.7. tétel értelmében $b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}$ szorzója $1/(\alpha+1)$-hez tart. ∎

Megjegyezzük, hogy Fermat eredeti bizonyítása (vö. (Fauvel–Gray, 1987, 362–364. o.) jóval hosszabb volt, mert nem álltak rendelkezésére a modern jelölések. A 2.6.d feladatban már utaltunk arra, hogy Fermat módszerét már Arkhimédész is alkalmazta a parabolaszelet területének meghatározására.

4.5. feladat. Bizonyítsuk be a 4.8. tételt természetes kitevőre Pascal 4.4. tétele segítségével!

Most visszatérünk Arkhimédész legkedvesebb (2.11.) tételére.

4.6. példa. Az R-sugarú félgömb térfogata $2\pi R^3/3$. Fektessük a félgömböt a főkörére, és r magasságban a főkörrel párhuzamos síkkal messük el, ekkor egy $\sqrt{R^2 - r^2}$ sugarú kört kapunk, s ennek területét a magasság szerint integrálva kapjuk a térfogatot:

$$V = \pi\int_0^R (R^2 - r^2)\,dr = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Figyelemre méltó, hogy az integrálásnál ismét megjelenik Arkhimédész zseniális gondolata a henger és a kúp különbségéről, de mechanikus módszerünk most már magától adja az ötletet.

Mi a helyzet a 4.8. tétellel az $\alpha = -1$ esetben? Az „általános" képlet csődöt mond. Grégoire Saint-Vincent (1584–1667) fokozatosan ráébredt, hogy az eredmény az eredetileg számolásra kitalált természetes alapú logaritmus.

4.9. tétel. *(G. Saint-Vincent, 1622?–1647.) A hiperbola alatti terület az 1 és x számok között a természetes logaritmus megváltozása:*

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log x.$$

4.6. feladat. A 4.8. tétel bizonyítási módszerét alkalmazva, igazoljuk a 4.9. tételt!

Mellesleg az említett szerző volt az első, aki a pozitív tagú $\sum_i d_i$ végtelen sor összegét kiszámítva meghatározta, hogy Akhilleusz hol (példánkban éppen $2d_0$-ben) éri utol a teknősbékát.

Különösen az integrálási feladatokból lehet látni, hogy mennyi ötlet kell egy konkrét függvény alatti terület kiszámításához. (A görög analízisről szóló alfejezetben, a 2.12. tételben láttuk, hogy a koszinusz alatti terület kiszámításához bonyolult trigonometrikus képletet kellett alkalmaznunk.) Világossá vált, hogy általános módszerre van szükség.

5. A KALKULUS SZÜLETÉSE

5.1. Bevezetés

A kalkulus (matematikai analízis, differenciál- és integrálszámítás) 1670 körül született, és hatalmas lökést adott mind a tiszta, mind az alkalmazott matematika fejlődésének. Az 5.2. alfejezetben utalunk a kalkulus ókori (2.6. alfejezet) és újkori (4.7. alfejezet) előzményeire. Az 5.3. és az 5.4. alfejezet két áttörésről, a differenciál-, illetve az integrálszámítás felfedezéséről szól. Az 5.5. alfejezetben vázoljuk az alkalmazásokat, és az 5.6. alfejezetben röviden érintjük a Newton és Leibniz közötti prioritási vitát. Források: Laczkovich–T. Sós (2005, 7–14. o.) és Simonyi (1981, 242–246. o.).

A történeti háttérből a tudományos fejlődés felgyorsulását, a tudományos folyóiratok létrejöttét és a tudományos akadémiák megalapítását emeljük ki.

5.2. Előzmények

Az ókori görögök tudták, hogyan lehet meghatározni a legegyszerűbb görbék (például a kör és a parabola) érintőjének egyenletét és e görbék alatti területet, vagy a belőlük adódó forgástestek (gömb, kúp) térfogatát.

A görögöknek és arab követőiknek nem volt azonban általános módszerük az érintő- és területszámítási feladatokra, sőt még a koordináta-geometriát sem ismerték. Minden konkrét feladat megoldására egy sajátos ötletre volt szükség, amelyek némelyikével a középiskolában ismerkedhettünk meg (lásd Simonyi, 1981, 77–80. o.).

Sokat javult a helyzet az újkorban: Fermat 1640 körül már ismerte a hatványfüggvény alatti területet és az érintő meredekségét. Érdekes módon az Isaac Newton (1643–1727) (régi időszámítás szerint 1642) és Leibniz előtti matematikusokat a görög matematikai szabatossághoz való ragaszkodásuk gátolta az általános módszer kidolgozásában. Talán Isaac Barrow (1630–1677), Newton cambridge-i tanára jutott legközelebb a kalkulus felfedezéséig. Newton és Leibniz bátorságára és univerzalizmusára volt szükség, hogy elszakadjanak az ókorból örökölt sablonoktól, és feltalálják az egyetemes új módszert, a kalkulust. A 8. fejezetben majd látni fogjuk, hogy két évszázados küzdelemben hogyan sikerült szabatossá tenni a „végtelen kicsiny mennyiségek” matematikáját. Már itt le kell szögeznünk, hogy a felfedezők maguk is tisztában voltak azzal, hogy ingoványos talajon járnak, de nem volt más választásuk.

5.3. Az első áttörés: differenciálszámítás

Mielőtt az első áttörést történetét vázolnánk, szót kell ejtenünk a változó fogalmáról. Laczkovich–Sós (2005, 11. o.)-t idézzük: „A XVII. századi matematikusok elképzelése szerint a fizikai jelenségekben szereplő mennyiségek az időtől folytonosan függő változók, amelyeknek az értékei pillanatról pillanatra változnak. Ezt az elképzelést a geometriai problémákra is kiterjesztették. Így minden görbét úgy képzeltek el, mint egy folytonosan mozgó pont pályáját, és így a pont koordinátái szintén az időtől függő változó mennyiségek. Ezen elképzelés az $y = x^2/(4p)$ egyenletet nem úgy értelmezi, hogy y függ x-től, hanem úgy, hogy mind ketten függnek az időtől, azaz az (x,y) pont végigfut a parabolán."

Folytatva az idézetet: „...A legfontosabb összetevő a változó mennyiségek differenciálja volt. [Intuitíve] minden változás ≫végtelen kicsiny≪ változások összegéből keletkezik. Így maga az idő is végtelen kicsiny időintervallumokból tevődik össze. Az x változó differenciálja az a végtelenül kicsiny mennyiség, amennyivel x megváltozik egy végtelenül kicsiny időintervallum elteltével. Az x differenciálját dx-szel jelöljül. Ekkor tehát x értéke egy végtelenül kicsiny időintervallum elteltével $x + dx$-re változik."

Az első lépés a differenciálszámítás kidolgozása volt. Ez a megközelítés lényegében a függvényt az érintő segítségével vizsgálja. Heurisztikusan a függvény differenciálhányadosa a függő és a független differenciál hányadosa:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Két végtelen kicsiny mennyiség hányadosának definíciója rengeteg logikai nehézséget okozott. Ma már úgy mondjuk, hogy a különbségi hányados határértékéről van szó. geometriailag pedig az érintő meredeksége a húr meredekségének a határértéke. Modernebb jelölés: $f'(x)$.

Mind Newton, mind Leibniz kidolgozott egy szabálygyűjteményt, amelyet ma is szinte változatlan formában tanítanak (lásd Smith, 1929, 619–626. o.). Például két differenciálható függvény összegének a deriváltja a derivált függvények összege:
$(f+g)' = f'+g'$. A szorzat és a hányados deriváltjához már „igazi" képletre van szükség.

5.1. tétel. *Két függvény szorzatának és hányadosának a deriváltja rendre:*

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \text{és} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Leibniz bizonyítás nélkül közölte az első szabályt. Az itt következő, korhű bizonyítás Guillaume l'Hospital (1661–1704) tankönyvéből származik.

Bizonyítás. Legyen x, illetve y parányi megváltozása, differenciálja dx, illetve dy. A szorzat parányi megváltozásában a differenciálok szorzata elhanyagolható, mert jóval kisebb, mint a differenciálok. Ekkor

$$(x + dx)(y + dy) - xy = (dx)y + xdy + dxdy = (dx)y + xdy.$$

∎

Némileg bonyolultabb a következő állítás, amely két függvényre vonatkozik: $y = f(u)$ és $u = g(x)$ két skalár–skalár függvény, amelyek „összetehetők": $y = f(g(x))$.

5.2. tétel. *Megfelelő simasági feltételek esetén egy összetett függvény deriváltja egyenlő a külső (f) és a belső függvény (g) deriváltjának szorzatával:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Bizonyítás. Heurisztikusan érvelve tekintsük a differenciálhányadosokat törteknek, bővítsünk du-val, s adódik az állítás. ∎

Ezekkel a szabályokkal minden elemi függvény (hatvány, exponenciális, szögfüggvények kombinációi) deriváltja előállítható a rész-elemi függvények deriváltjainak függvényeként.

5.1. példa. Az arkusz tangens függvény deriváltja:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

A következő összefüggéseket alkalmazzuk egymás után, mechanikusan:

$$\frac{d\tan y}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y},$$

ugyanis $x = \tan y = \sin y / \cos y$, 5.1. tétel stb. Emellett

$$\frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{d\tan y/dy},$$

ugyanis az összetett függvény deriválási szabályából következik az inverz függvény deriválási szabálya.

Newton egyik legismertebb tétele a 4.3. binomiális tétel általánosítása tetszőleges kitevőre, ahol $\binom{n}{k}$ helyére az általánosított binomiális együttható lép (lásd Smith, 1929, 219–228. o.).

5.3. tétel. *(Newton-féle binomiális tétel, 1665.) Legyen $\alpha \neq 0$ valós szám, és legyen $|h| < 1$ valós szám. Ekkor*

$$(1+h)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} h^k.$$

Megjegyzés. Meglepő lehet, de a matematikatörténeti könyvek szerint Newton nem bizonyította be az általánosított binomiális tételt, ez a feladat Eulerra maradt.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az $(1+h)^\alpha$ függvényre az $x_0 = 1$ pont körüli Taylor–(Maclaurin)-sor képletét (1715), – Colin Maclaurin (1698–1746) skót matematikus – amelyet Newton 1665-ben természetesen még nem ismert, de James Gregory (1638–1675) 1670-ben már ismert (5.5. példa):

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k.$$

A 4.7. tétel szerint

$$(x^\alpha)^{(k)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k},$$

tehát $f^{(k)}(1) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. ∎

Ez a tétel világította meg Newton előtt az utat az analízis felépítéséhez. Példákkal szemléltetjük a binomiális tétel szerepét Newton munkásságában.

5.2. példa. (Végtelen mértani sor összege mint binomiális sor $\alpha = -1$-re.)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^k + \cdots.$$

Korábban már John Wallis (1616–1703) is érdeklődött az $\sqrt{1-x^2}$ függvény alatti terület kiszámítása iránt, és Newton felismerte, hogy a binomiális tétel itt is szerepet kaphat (Newton levele Oldenburghoz 1676-ban).

De Newton megfordította az 5.3. tételbeli levezetést (lásd Smith, 1929, 614–615. o.).

5.1. feladat. (Simonyi, 1981, 244–245. o.) Newtont (1669/1711)-et követve, vezessük le az 5.3. tétel segítségével a törtkitevőjű hatványfüggvény deriváltját! (A kettős évszám a kézirat keletkezése és kinyomtatása közti időre utal.)

Ezen a ponton nyomatékosan hangsúlyozzuk az interpoláció szerepét a matematika fejlődésében. A logaritmustábla-készítő Briggs 1624-ből származó ötletét követve Gregory 1670-ben levélben közölte Collinsszal a véges differenciák interpolációs módszerét, amelyet Newton körülbelül ezzel egyidőben fedezett fel, s amelyet 1687-ben a Principia III. könyvének 5. lemmájaként közölt. Legyen Δ^k a k-adik differenciaoperátor, rekurzív meghatározása a következő: $\Delta f(x) = f(x+b) - f(x)$, és $\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+b) - \Delta^{k-1} f(x)$. Ekkor az interpolációs képlet

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h(h-b)\cdots[h-(k+1)b]}{k!}\Delta^k f(a) b^{-k},$$

Ebből a képletből Brook Taylor (1685–1731) már könnyen „levezethette” a korábban említett Taylor-sort is, csak az b-vel kellett tartania 0-hoz. Szinte hihetetlen, hogy a gépies levezetésre MacLaurin 1742-es könyvéig kellett várni. Valóban, ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, akkor tagonkénti differenciálással $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)a_k x^{k-n}$, azaz $f^{(n)}(0) = a_n n!$

Nevezetes példája Leibniz analógiakeresésének az

5.3. példa. A két függvény szorzatának n-edik deriváltjára vonatkozó szabály:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)},$$

amely „jól rímel” a binomiális tételre.

5.4. A második áttörés: integrálszámítás

Az analízis kialakításában a második döntő lépés az integrál – vagyis terület – számítás megalkotása volt. Ha összehasonlítjuk egymással a 4.7. és a 4.8. tételt, azt láthatjuk, hogy az x^α függvény alatti terület (0-tól számítva) az $x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ függvényhez vezet, s ez utóbbi érintőjét véve, visszakapjuk a kiindulási x^α függvényt. Ezt minden bizonnyal Fermat is észrevette, de őt a polinomokon kívül nem érdekelte más függvény, ezért nem is gondolt valamilyen általános integrálási módszer kidolgozására.

Newton és Leibniz alapvető felismerése az volt, hogy ez a megfordíthatóság általánosan is igaz. Newtont az 5.3. törtkitevőjű binomiális tétel, Leibnizet a $\sum_k 1/k^2$ sor (vö. 8.1. példa) következő variánsának az ún. teleszkopikus összegkénti összegzése segítette. (A kinyitható teleszkóp, távcső összecsukása esetén az eredeti hosszúság jelentősen csökken. Amennyiben a $\sum_{i=1}^n a_i$ összeg egyes tagjait fel tudjuk írni $a_i = s_i - s_{i-1}$ alakban, akkor az összeg $s_n - s_0$.)

5.2. feladat. (Leibniz, 1673.) Parciális törtekre bontással igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = 1\ !$$

Newton és Leibniz volt az első, aki azt is felismerte, hogy az algebrai függvények mellett szükség van a transzcendens függvényekre és a végtelen hatványsorokra is.

Némi kísérletezés után, a $\sum_{i=1}^m f_i \Delta x_i$ összeg folytonosításaként, a Σ eltorzításával, Leibniz bevezette az integrál jelet, s ebből alakult ki az integrál mai jelölése:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ezután kimondható az

5.4. tétel. *(A Newton–Leibniz-formula, 1693 előtt.) Legyen f egy folytonos függvény a korlátos $[a,b]$ szakaszon! Tegyük föl, hogy létezik olyan F függvény, amelynek érintőjének meredeksége (azaz a deriváltja) a szakasz minden pontjában megegyezik az f függvény ottani értékével: $F'(x) \equiv f(x)$. Akkor az f függvény alatti előjeles terület azonos az F függvény változásával. Képletben:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

1. heurisztikus bizonyítás. Legyen $I(x)$ az $f(x)$ függvény $[a,x]$ közti integrálja. Írjuk föl az integrálfüggvény parányi megváltozását: $I(x+dx) = I(x) + f(x)dx$. Ebből egyszerű rendezéssel „következik”, hogy $I'(x) = f(x) = F'(x)$. Mivel $I(a) = 0$, $I(b) = F(b) - F(a)$. ∎

2. heurisztikus bizonyítás. Behelyettesítve az $f(x_i) \approx \delta F(x_i)/\delta x_i$ közelítést a $\sum_{i=1}^n f_i \delta x_i$ téglányösszegbe, és egyszerűsítve δx_i-vel, a teleszkopikus összeg alapján:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)\delta x_i \approx \sum_{i=1}^n \frac{\delta F(x_i)}{\delta x_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^n \delta F(x_i) = F(b) - F(a).$$

Bízva abban, hogy az egyre több tagra kiterjedő, de tagonként egyre pontosabb közelítés határértékben a függvények széles körére pontossá válik, a bal oldalon az f függvény a és b közti integrálját kapjuk, azaz „beláttuk” a Newton–Leibniz-képletet. ∎

Megjegyzések. 1. Természetesen az $I(x + dx)$ kifejezés nem szabatos, ezért a rá vonatkozó egyenlet sem az. A 2. heurisztikus bizonyítást csak a 8.3. alfejezetben tesszük szabatossá.

2. Figyeljük meg, hogy a hatványfüggvényről szóló 4.8. integrálási tételnél is felhasználtuk a 4.7. deriválási tételt.

3. Ismét érdemes felhasználni egy fizikai analógiát: a sebesség definíció szerint az út idő szerinti deriváltja, viszont az utat a sebesség idő szerinti integráljaként számítjuk ki, tehát az integrálás a differenciálás megfordítása.

Egyetemi tanulmányainkból ismert, hogy az integrálás algoritmikusan nehezebb, mint a differenciálás. Hasonlatként megemlítjük, hogy mindenkinek könnyebb az anyanyelvére, mint az anyanyelvéről fordítania. Ehhez hasonlóan minden elemi függvény mechanikusan deriválható, de az integrálás már nehezebb. További gondot jelent, hogy vannak olyan elemi függvények (például az 5.8. példa az ingánál és a 11.2. tételbeli Gauss-féle hiba-sűrűségfüggvény), amelyeknek az integrálja nem is elemi függvény. Stillwell (1989, 154. o.) szerint Jakob Bernoulli már 1694-ben ezt már sejtette, de csak sokkal később, 1833-ban bizonyították be ezt a sejtést. E korlát ellenére számos esetben segít a Newton–Leibniz-szabály.

A szorzatfüggvény integrálja helyett az ún. parciális integrálást vezették be, a láncszabály helyett pedig a helyettesítést, de ezeket csak éppen megemlítjük.

Az integrálás és a differenciálás fenti viszonyára egy frappáns példát adunk.

5.4. példa. (vö. 2.12. tétel.) $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1$.

Egy függvény integrálását megkönnyítheti, ha a Taylor-sorát integráljuk. (Persze, ehhez igazolni kellene, hogy a sorfejtés és az integrálás felcserélhető, de ezzel sokáig nem törődtek nagyjaink, vö. 8.3. fejezet.)

5.5. példa. A π szám kiszámítása végtelen sorral (Gregory, 1668 és Leibniz, 1676).

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \cdots$$

Ez volt Leibniz egyik fő eredménye, amelyet 1676-ban a londoni Királyi Társaság titkárán, Oldenburgon keresztül elküldött Newtonnak. (Emlékeztetjük az Olvasót, hogy állítólag ezt az eredményt a hinduk már 1500 körül ismerték!)

Valóban, az 5.1. példa, a Newton–Leibniz-formula, a mértani sor és a 4.8. tétel értelmében

$$\arctan x = \int_0^x [\arctan t]' \, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \, dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Behelyettesítve az $x = \tan(\pi/4) = 1$ összefüggést, és eltekintve a konvergencia bizonyításától, adódik a végtelen sor. Itt a kalkulust már teljes erejében láthatjuk!

Newton kárörömmel válaszolta Leibniznek, hogy egyrészt már Gregory is ismerte e képletet, másrészt nagyon lassan konvergál a sor: „100 évre lenne szükség ahhoz, hogy 20 tizedesjegy pontossággal kiszámítsuk azt” (Gingyikin, 2001, 192. o.).

5.6. példa. Számítógépes programmal kiszámítjuk a Gregory–Leibniz-képlet segítségével a π közelítő értékét $n = 10^k$-ra, $n = 10^k - 1$-re, ahol $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

5.1. táblázat. *A Gregory–Leibniz-sor közelítése kettős pontossággal*

tagszám n	alsó közelítés S_n	felső közelítés S_{n-1}
10	3,04184	3,25237
100	3,13159	3,15169
1000	3,14059	3,14259
10000	3,14149	3,14169
100000	3,14158	3,14160

Megjegyzés. A korai számítógépekről ismerős GWBASIC program egyszeres pontosság esetén nem tud nagyon kicsi számokkal dolgozni, ezért a számítás fokozatosan annyira elromlik, hogy $n = 10^4$-nél már a „felső korlát” is a helyes érték alá süllyed!

5.3. feladat. Oldjuk meg a newtoni módszerrel a 3.4. feladatot!

5.5. Alkalmazások

Természetesen a kalkulus nem azért hozta lázba Európát, mert a fent említett néhány speciális feladatot megoldhatóvá tette, hanem mert széles körben alkalmazhatónak bizonyult.

Kezdjük egy egyszerű alkalmazással, egy függvény gyökének a Newton-eljárással (1671), másképp az *érintőmódszer*rel való meghatározásával. Ha f egy skalár–skalár függvény, amelynek a ξ egy gyöke, azaz $f(\xi) = 0$, akkor egy közelítő x_n gyök ismeretében megpróbálkozhatunk az érintőegyenes metszéspontját adó $f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n) = 0$ egyenletből adódó

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iterációval. Ez a módszer nem mindig konvergál, de jó esetben nemcsak konvergál, hanem nagyon gyorsan konvergál.

5.4. feladat. Igazoljuk, hogy a 2.2. feladatban tárgyalt babiloni négyzetgyökvonási algoritmus a fenti Newton-algoritmus speciális esete az $f(x) = x^2 - \beta$ esetre!

A végtelen sorok segítségével például gyerekjátékká vált táblázatokat készíteni, hiszen csak a négy alapműveletre van szükség.

5.5. feladat. (vö. 2.6. alfejezet.) Számítsuk ki $\cos(\pi/12)$ értékét 0,01-es pontossággal Taylor-sorával, ahol x természetesen ívmértékben van megadva:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots!$$

Hasonlóan egyszerű a logaritmusok kiszámítása, különösen a *természetes* alapúé.

5.6. feladat. a) A $\log(1 + x)$ függvény Taylor-sora segítségével számítsuk ki $\log 2$ értékét egyszeres és kétszeres pontossággal $n = 10^k$-ra, ahol $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$! b) Mi történik, ha a $\log 2 = -\log(1/2)$ képletet alkalmazzuk? c) Hogyan lehet a konvergenciatartományt kiterjeszteni Saint-Vincent

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

képletével?

Az analízis köréből megemlítjük a *differenciálegyenletek*et, ahol az egyenletekben nemcsak változók, hanem azok deriváltjai is szerepelnek. Kezdjük a differenciálegyenletek legegyszerűbb családjával, mellőzve a pontos feltételeket.

5.5. tétel. *(Leibniz, 1691.) Az $\dot{x}(t) = g(t)h(x)$ alakú, szétválasztható változójú differenciálegyenlet $x(0) = x_0$ kezdeti érték melletti megoldása*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{h(\xi)}\, d\xi = \int_0^t g(\tau)\, d\tau.$$

Bizonyítás. A $d\xi/d\tau = g(\tau)h(\xi)$ „törtet” átalakítva a

$$\frac{d\xi}{h(\xi)} = g(\tau)d\tau$$

egyenlethez jutunk, amelyet integrálva a $[0,t]$ szakaszon a fenti implicit egyenletet kapjuk. ∎

5.7. feladat. Oldjuk meg az $\dot{x} = \lambda x$ (elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris skalár) differenciálegyenletet az $x_0 = 1$ kezdőfeltétel mellett az 5.5. tétel módszerével!

Newton előszeretettel alkalmazta a differenciálegyenletek megoldására *hatványsoros módszerét.* Ezt a legegyszerűbben az 5.7. feladaton szemléltethetjük.

5.7. példa. Az $\dot{x} = \lambda x$ elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris skalár differenciálegyenlet megoldása az $x_0 = 1$ kezdőfeltétel mellett a hatványsor-módszerrel a következőképpen határozható meg. A megoldást az $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ alakban keressük: $\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k$. Behelyettesítve a differenciálegyenlet két oldalába és a t^k együtthatóit egyenlővé téve: $(k+1)a_{k+1} = \lambda a_k$. Az $x(0) = a_0 = 1$ kezdeti feltétel mellett $a_k = \lambda^k/k!$, tehát $x(t) = e^{\lambda t}$. Úgy tűnik, hogy a kalkulus felfedezőinek a figyelmét elkerülte e királyi út, és helyette a logaritmus „inverz hatványsoraként” vezették le meglehetősen bonyolultan a fenti hatványsort. Ribnyikov (1960, 174–176. o. és 208–210. o.) szerint Newton maga sokkal bonyolultabb feladatokkal küszködött, és csak Eulernak jutott eszébe az exponenciális függvényt részletesen elemezni. Egyébként a fizikai alkalmazásokban a független változó nagyon gyakran az idő, ezért x helyett általában t-vel jelölik a független változót, és vessző helyett ponttal jelölik a deriválást, még a többi esetben is.

S ezzel már az analízis leglátványosabb sikerénél vagyunk, a mechanikai alkalmazásoknál. Newton 1687-ben publikálta a Principiát, amelyben számos olyan fizikai feladatot megoldott, amelyekre az elődök gondolni sem mertek. Például bebizonyította, hogy a gravitációs erőtérben mozgó tömegpont pályája kúpszelet (kör, ellipszis vagy parabola vagy hiperbola), s ezzel igazolta Kepler I. törvényét (15.3. alfejezet). Pontosan kiszámította még azt is, mekkora sebességgel (8 km/s) kell elhajítani egy testet (mai technikai lehetőséggel élve: kilőni egy rakétát) ahhoz, hogy vissza ne essen a Földre.

5.8. példa. (Matematikai inga, Taylor, 1713.) A középiskolában tanult Newton-féle II. törvényben a gyorsulás a helyzet második deriváltja: tehát $m\ddot{x} = F(x)$, ahol m a tömeg és F a helytől függő erő. A matematikai ingánál az $F(x) = -D\sin x$, tehát bevezetve az $\omega^2 = D/m$ állandót, a kitérés kis szögére a $\sin x \approx x$ *közelítéssel* adódik az $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ másodrendű lineáris differenciálegyenlet. Behelyettesítéssel is belátható, hogy a megoldás $x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$, ahol A a maximális kilengés és δ a fáziskésés szöge. (Ha nem nulla az inga kezdősebessége, akkor a kezdő kitérés nem maximális!) Számításunk igazolja Galilei 1602-ből származó híres megfigyelését: az inga lengésideje gyakorlatilag *alig függ* a kezdőszög értékétől (Galilei, 1638, 286. o.).

Leibniz és követői is ragyogó matematikai alkalmazásokat találtak. Külön (a 7. fejezetben) foglalkozunk majd a *variációszámítás*sal: optimalizálunk egy pályát, ahol a célfüggvény egy olyan pillanatnyi nyeremény időbeli integrálja, amely az időn és a helyzeten kívül a pillanatnyi sebességtől függ. Általánosabban: az integrandus a független változón kívül a függő változótól és annak deriváltjától függ.

A „régiek" azonban nem tudták követni e fejleményeket. Leibniz zseniális mestere, a holland Christiaan Huygens (1629–1695) bevallotta tanítványának, hogy ő már nem képes alkalmazni az új módszereket.

5.6. A prioritási vita

Tanulságosnak tartom a kalkulus felfedezése kapcsán kialakult prioritási vitát. Nem kétséges, hogy az 1643-ban született Newton 1665 körül már többé-kevésbé tisztában volt a kalkulussal, beleértve a végtelen hatványsorok szerepét és a differenciálegyenleteket. (A fiatal lángész ugyanakkor fedezte föl az általános tömegvonzás elméletét és a fény összetett természetét.)

1670 körül először fényelméletével lépett a tudományos nyilvánosság elé, de itt összeütközött Hooke-kal, a Királyi Társaság (angolul: Royal Society, gyakorlati szerepét illetően az Angol Tudományos Akadémia) akkori titkárával, és olyan heves vita támadt, hogy Newton megfogadta: lehetőleg kerüli a nyilvánosságot. Attól kezdve sokáig csak legszűkebb baráti körében terjesztette írásait.

1646-ban született Leibniz, aki 1672-ben tökéletesítette Pascal számológépét. Ezért a találmányáért a Királyi Társaság tagjává választotta. Londoni látogatásai során Leibniz futólag betekintést nyert Newton egyes írásaiba. Leibniz 1673–1676 között – Newtontól függetlenül – felfedezte a kalkulust. Amikor Leibniz saját eredményeit levelekben közölte Newtonnal, Newton kitérően válaszolt, fő eredményeit csak rejtjelezve adta át Leibniznek (Fauvel–Gray, 1987, 402–408. o.). Hosszas habozás után Leibniz 1684-ben megkezdte a kalkulus kifejtését egy általa alapított matematikai folyóiratban (Fauvel–Gray, 1987, 428–434. o.). Ahogyan korunk egyik kiemelkedő matematikusa, Arnold (1984, Előszó a 3. kiadáshoz) megjegyezte: „Leibniz hatalmas érdeme az analízis széles körű propagandája ... és az analízis algoritmusainak teljes automatizálása: az analízis alkalmazására és oktatására olyan módszert talált ki, hogy azok az emberek is élhettek vele, akik egyáltalán nem értették az analízist."

Már említettük, hogy Newton hosszas noszogatás hatására, 1687-ben publikálta a Principiát, a korszerű fizika időben és jelentőségében is első könyvét. Jellemző módon azonban elsősorban nem az általa teremtett modern analízis eszközeit alkalmazta, hanem visszanyúlt az ókori mértani kifejtéshez. Csak ritkán utalt a kalkulusra (Simonyi, 1981, 220–225. o.).

Hodgkin (2005, 172. o.) hangsúlyozza, hogy minden érdemük ellenére, az eredeti Leibniz-cikkek nehezen érthetők voltak még a beavatottak részére is (például a Bernoulli-fivérek szerint az első cikk „inkább rejtély, mint magyarázat”), és legalább egy évtized kellett ahhoz, hogy Leibniz eszméi elterjedjenek. Talán az első Leibniz-követő, Ehrendfried Tschirnhaus (1651–1708) publikációját kellett megelőzni a szedett-vedett írás közlésével. Vélhetőleg a módszer logikai gyengeségei miatt sem siettek a szerzők a felfedezés mielőbbi közzétételével.

1700 után Newton végre publikálta egy-két fontosabb matematikai írását. Ekkor lángolt fel a vita Newton és Leibniz hívei közt, hogy valójában ki fedezte föl a kalkulust: Newton vagy Leibniz? A vita hamarosan nagyon elmérgesedett. 1712-ben a Királyi Társaság (amelynek akkori elnöke maga Newton) „pártatlan” bizottsága plágium vétségében marasztalta el Leibnizet. Ma már ismert az a Newtontól származó kézirat, amely a bizottság jelentése alapjául szolgált. Leibniz méltatlanul elfelejtve halt meg 1716-ban, míg Newtont az egész világ ünnepelte, és 1727-ben a Westminsterben „mint egy fejedelmet temetik el” (Voltaire).

A történelem fintoraként megemlíthetjük, hogy a 18. század kontinentális matematikája a sokkal kifejezőbb leibnizi jelölésrendszert vette át (lásd az 5.1. példa heurisztikus levezetését), és ennek nyomán viharos sebességgel fejlődött. A newtoni jelölésekhez ragaszkodó brit matematika begubózott, s elvágta magát a fejlődéstől. Száz év kellett ahhoz, hogy a britek legalább a matematikában megszabaduljanak „pompás elszigeteltségüktől”.

Zárásul idézzük magát Leibnizet (Gingyikin, 2001, 190. o.) a jelölések fontosságáról: „Gondoskodni kell arról, hogy a jelek alkalmasak legyenek a felfedezésre. Ez a legjobban akkor sikerül, ha a jelek röviden kifejezik és mintegy tükrözik a dolog mély természetét, és akkor csodálatos módon csökken a gondolkodásra fordítandó munka.”

6. MÁTRIXOK ÉS DETERMINÁNSOK

6.1. Bevezetés

A mátrixok és a determinánsok elmélete (általánosabban a lineáris algebra) a 18–19. században alakult ki – elsősorban lineáris (algebrai- és differenciál)egyenletek, valamint mértani feladatok megoldására. A mai oktatásban szükségképpen megfordítják a történelmi sorrendet, először tanítják a lineáris algebrát, és aztán alkalmazzák az eszközöket az említett feladatok megoldására. (Didaktikus kivétel: Freud, 1996.) Visszatérve a történelmi sorrendhez, a 6.2. alfejezetben vázoljuk, miképp vezetett a lineáris algebrai egyenletrendszerek megoldása a determinánsok, illetve a mátrixok felfedezéséhez. A 6.3. alfejezetben bemutatjuk, hogy a lineáris differenciálegyenletek megoldása viszont megkövetelte kvadratikus mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározását. A 6.4. alfejezetben bemutatjuk, hogy az absztrakció eredményeként végül kialakult a lineáris algebra. A tárgyalás nagymértékben támaszkodik a skóciai St Andrews egyetem „History of Mathematics" honlapján található *Mátrixok és determinánsok* cikkére és Kline (1972) 21. és 33. fejezetére.

6.2. Lineáris algebrai egyenletek

Már az ókori babiloniak, i.e. 300 körül foglalkoztak olyan szöveges feladatokkal, amelyek kétismeretlenes, két egyenletből álló egyenletrendszerhez vezettek. Száz évvel később a kínaiak már táblázatban írták fel egy hasonló, de 4×3-as feladat együtthatómátrixát, és a megoldás során a ma Carl F. Gaussra (1777–1855) nevét viselő kiküszöböléses módszert ajánlották.

Cardano 1545-ben már megfogalmazta 2×2-es mátrixra vonatkozó Cramer-szabályt. A japán Seki 1683-ban definiálta a *determinánst*, és példákon mutatta be kiszámítását. Egy „...1693-ban [a St Andrews honlapja szerint 1683-ban, S.A.] l'Hospitalhoz írt levelében [Leibniz] leírja, milyen feltételek mellett oldható meg egy kétismeretlenes, három [lineáris] egyenletből álló rendszer. Arra is rámutatott, milyen hasznos, ha az egyenletek együtthatóit kettős indexű kifejezésekkel jelöljük (lásd Smith, 1929, 267–270. o.). Kissé anakronisztikusan azt mondhatjuk, hogy az $x_i = \sum_j a_{ij} y_j$ kifejezésben fellépő i és j indexekről beszélt.... A determinánsokra vonatkozó általános tételeket később is csak *ad hoc* bizonyították be, amikor a matematika más területén fellépő probléma megoldásához szükség volt rájuk. A determinánsok fejlődése ennek következtében – a matematika más területeihez viszonyítva – lassúnak mondható" (Praszolov, 1994, 1–2. o.).

Gabriel Cramer (1704–1752) fedezte fel, hogyan lehet egy lineáris algebrai egyenlet megoldását determinánsokkal kifejezni. Mai jelöléssel, legyen A egy n-edrendű négyzetes mátrix, x és b egy-egy n-dimenziós vektor. Legyen $\det A \neq 0$ az A mátrix determinánsa,

D_j egy olyan mátrix, amelynek j-edik oszlopában $a_{i,j}$ helyett b_i áll, egyébként azonos az A mátrixszal.

6.1. tétel. *(Cramer-szabály, 1750.) Az $Ax = b$ egyenlet megoldása*

$$x_i = \frac{\det D_i}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

1770 körül Pierre-Simon Laplace (1749–1827) mellett Louis-Joseph Lagrange (1736–1813) is foglalkozott determinánsokkal, és ő vette észre először, hogy a 3-dimenziós térben a determináns a mátrix oszlopai által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

Gauss adta a determináns nevet 1801-ben, és csillagászati számításaiban egy 6×6-os lineáris egyenletrendszer megoldására először ő használta szabatosan a kiküszöböléses módszert.

A determinánselmélet első rendszeres kifejtése Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) és Carl G. J. Jacobi (1804–1851) érdeme. Cauchy 1812-ben vezette be a determináns modern fogalmát, ő dolgozta ki a főminorok és az adjungált determinánsok elméletét.

6.3. Lineáris differenciálegyenletek

Most időben visszaugrunk a 18. század közepére. A legegyszerűbb érdekes differenciálegyenlettel az 5.8. példában találkoztunk. Ott láttuk, hogy az $\dot{x} = \lambda x$ differenciálegyenlet megoldása az $x(0) = x_0$ kezdőfeltétel mellett $x(t) = e^{\lambda t} x_0$. Felvetődik a kérdés: mi a megoldás, ha a feladatot magasabb rendű esetre vagy több dimenzióra általánosítjuk? Itt lép be a történetünkbe Leonhard Euler (1707–1783), minden idők *egyik* legnagyobb és *a* legtermékenyebb matematikusa.

A magasabb rendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásának történetét Kline (1972, 484–486. o.) nyomán tárgyaljuk (lásd Smith, 1929, 638–643. o.). 1735-től kezdve Johann Bernoulli és Euler levelezett egy fizikai feladat (az egyik végén rögzített rúd kihajlása) megoldásáról, amelyben az $a^4 x^{(4)}(t) = x(t)$ negyedrendű lineáris differenciálegyenlet adódott (vö. Fauvel–Gray, 1987, 447–449. o.). Euler először az 5.7. példában bemutatott hatványsor-módszerrel oldotta meg a feladatot, de nem ismerte föl, hogy négy (két valós, két képzetes) exponenciális megoldás lineáris kombinációjával találkozott. Néhány év múlva azonban felismerte a megoldás természetét, és felfedezte az általános megoldást is.

6.2. tétel. *(Euler, 1743.) Az n-edrendű*

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}$$

lineáris differenciálegyenlet megoldása a

$$\lambda^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k$$

karakterisztikus algebrai egyenlet λ_k gyökeiből – amennyiben azok mind különbözők – a következőképpen adódik:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e^{\lambda_k t},$$

ahol a ξ_k együtthatók a következő kezdeti feltételekből határozhatók meg:

$$x^{(j)}(0) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \lambda_k^j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Bizonyítás. Helyettesítéssel könnyű belátni, hogy az $e^{\lambda_k t}$ ún. *alapmegoldások* és tetszőleges lineáris kombinációik kielégítik a differenciálegyenletet kezdeti feltételek nélkül. A Vandermonde-determináns tulajdonságaiból (nullától különböző voltából) következik, hogy különböző gyökök esetén, adott $\{x^{(j)}(0)\}_{j=0}^{n-1}$ kezdeti értékek mellett a $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ együtthatók egyértelműen meghatározhatók. ∎

Megjegyzések. 1. Euler még azt is észrevette, hogy amennyiben a gyökök közt vannak egyenlők, például $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p$, akkor az első p alapmegoldásban az $e^{\lambda_1 t}$ exponenciális függvényt meg kell szorozni 1-gyel, t-vel, ..., t^{p-1}-gyel.

2. Látszólag bonyodalmat okoz, ha a sajátértékek között komplex számok lépnek föl. Mivel azonban a karakterisztikus egyenlet együtthatói valósak, ezért a komplex sajátértékek konjugált párban lépnek fel, és a sajátvektorok is választhatók konjugált pároknak. Ekkor a skalárok is komplex konjugált párok. Valójában a komplex gyökök nagyon hasznosak, hiszen a periodikus megoldások így jelentkeznek (vö. 6.1. példa). A kulcs a 9.1. tételben majd bemutatandó Euler-képlet: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, ahol φ valós szám stb., amelyet akkor talán még Euler sem ismert.

6.1. példa. (Komplex gyökök esete.) Tekintsük az inga linearizált egyenletét: $\ddot{x} = -\omega^2 x$, amely egy másodrendű, skaláris lineáris egyenlet. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 = -\omega^2$. Gyököt vonva: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. A megoldás: $x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$ (vö. 5.8. példa).

6.1. feladat. Vezessük le a 6.2. tétel diszkrét idejű megfelelője alapján a Fibonacci-számok explicit alakját (3.1. példa)! Érdekes módon de Abraham de Moivre (1667–1754) 1724-ben már rekurzív sorozatokat tanulmányozott, méghozzá a generátorfüggvények segítségével (Stillwell, 1989, 126–128. o.)

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Rátérünk a többváltozós elsőrendű differenciálegyenlet megoldására, amely elsőként a bolygómozgások vizsgálatakor vetődött fel. Legyen M egy n-dimenziós négyzetes mátrix, x egy n-dimenziós valós vektor.

Analógia alapján kimondható a

6.3. tétel. *(Lagrange, 1765.) Az $\dot{x} = Mx$ elsőrendű, állandó együtthatós, homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer x_0 kezdeti feltételhez tartozó megoldása*

$$x(t) = e^{Mt} x_0, \tag{6.1}$$

ahol

$$e^{Mt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k t^k}{k!}. \tag{6.2}$$

A heurisztikus bizonyításban tagonként deriváljuk e^{Mt} hatványsorát, és a skaláris esethez hasonló módon kiderül, hogy $de^{Mt}/dt = Me^{Mt}$. (A pontos bizonyítást például Arnold, 1984, 14–15. fejezete tartalmazza.)

Hogyan lehet azonban egyszerűen kiszámítani e mátrixhatványsort? Egyelőre félrerakjuk a kezdeti értékeket, és egyszerű megoldásokkal kísérletezünk, amelyek

$$x(t) = e^{\lambda t} v \tag{6.3}$$

alakban írhatók föl, ahol λ tetszőleges valós szám és v valamilyen n-dimenziós vektor. Helyettesítsük be a (6.3) feltételezett megoldást a differenciálegyenletünkbe:

$$\lambda e^{\lambda t} v = M e^{\lambda t} v, \qquad v \neq 0,$$

azaz $e^{\lambda t} \neq 0$ miatt

$$\lambda v = M v. \tag{6.4}$$

A lineáris algebrából ismert, hogy a (6.4) egyenletben szereplő v vektor az M mátrix egy *sajátvektora*, a λ skalár pedig a *sajátértéke*. Könnyű belátni, hogy minden sajátérték a

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - M)$$

karakterisztikus polinom gyöke: $p(\lambda) = 0$, a szekuláris egyenleté, amely Laplace nevét is viseli, mert elsők közt ő használta a hosszú távú változásokra vonatkozó csillagászati feladatokban a 18. század végén. Az n-edfokú karakterisztikus polinomnak multiplicitással n számú gyöke van: legyen a k-adik gyök λ_k, és legyen egy hozzá tartozó sajátvektor v_k. Felhasználva, hogy egy homogén lineáris differenciálegyenlet bármely két megoldásának lineáris kombinációja is megoldás, minden sajátvektor-kombináció is megoldás:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k e^{\lambda_k t},$$

ahol ξ_k alkalmas skalár, $k = 1, \ldots, n$. További megfontolásokból következik a

6.4. tétel. *Ha az n számú sajátértékhez n számú lineárisan független sajátvektor tartozik, akkor az x_0 kezdeti értékhez tartozó megoldás*

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k e^{\lambda_k t}$$

alakú, ahol a ξ_k skalárokat egyértelműen meghatározza az

$$x_0 = \sum_{k=1}^{n} \xi_k v_k$$

kezdeti feltétel.

Megjegyzés. Az igazi nehézséget az okozza, ha nincs n számú független sajátvektor (vö. 6.2. feladat). Arnold (1984, 26. 4. alfejezet) szellemesen jegyzi meg: amikor a 18. század közepén Euler és Lagrange a differenciálegyenlet-rendszerek megoldásánál többszörös sajátértékekkel találkoztak, a matematikusok még nem ismerték a mátrixok Jordan-alakját. *Heurisztikus* gondolatmenetük a síkbeli egyenletre ($n = 2$) kétszeres sajátérték esetében a következőképpen szemléltethető: közelítsük meg az M mátrixot olyan $\{M_k\}$ mátrixsorozattal, hogy M_k mindkét sajátértéke különböző. Ekkor $\lambda_{1,k}$ és $\lambda_{2,k}$ konvergál a kétszeres multiplicitású λ sajátértékhez, a $v_{1,k}$ és $v_{2,k}$ sajátvektor pedig a „hiányos" v sajátvektorhoz (a második, független sajátvektor hiányzik). De a $\xi_1 e^{\lambda_{1,k}t}$ és $\xi_2 e^{\lambda_{2,k}t}$ kombináció helyett vehetjük a $\xi_1 e^{\lambda_{1,k}t}$ és $\xi_2(e^{\lambda_{2,k}t} - e^{\lambda_{1,k}t})/(\lambda_{2,k} - \lambda_{1,k})$ kombinációt, s akkor határértékben $\xi_1 e^{\lambda t}$ mellé a $t\xi_2 e^{\lambda t}$ alapmegoldást kapjuk.

Szemléltetésül egy feladat következik.

6.2. feladat. (Hiányos sajátvektorok.) Tekintsük a következő síkbeli differenciálegyenlet-rendszert: $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = 0$, amely az egyenes vonalú egyenletes mozgást írja le. Igazoljuk a) közvetlenül és b) közvetve, hogy a megoldás $x_2(t) = x_2^0$ és $x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t$! Fizikai tartalom: x_1 a helyzet, x_2 a sebesség, és a gyorsulás nulla.

Eddig csak homogén egyenletekkel foglalkoztunk. Gyakran találkozunk azonban inhomogén differenciálegyenletekkel is. Legyen g egy folytonos és korlátos skalár–vektor függvény. A megoldást Jean d'Alembert (1717–1783), a francia enciklopédia egyik főszerkesztője fedezte fel.

6.5. tétel. *(d'Alembert, 1766.) Az $\dot{x} - Mx = g$ elsőrendű, állandó együtthatós, inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer bármely két megoldása legfeljebb a homogén egyenlet megoldásában különbözhet egymástól:*

$$x_1(t) - x_2(t) = \hat{x}(t), \qquad \text{ahol} \qquad \dot{\hat{x}}(t) = M\hat{x}(t). \tag{6.5}$$

Bizonyítás. Írjuk föl mindkét megoldással az eredeti inhomogén differenciálegyenletet:

$$\dot{x}_1(t) - Mx_1(t) = g(t) \qquad \text{és} \qquad \dot{x}_2(t) - Mx_2(t) = g(t).$$

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - M(x_1 - x_2) = 0.$$

A $\hat{x} = x_1 - x_2$ valóban a homogén egyenlet megoldása. ∎

6.4. Lineáris algebra

Láttuk, hogy milyen természetesen jelentek meg a lineáris algebra fogalmai a lineáris algebrai és a differenciálegyenletek elméletében. Most körüljárjuk a lineáris algebra néhány fogalmát, anélkül, hogy hivatkoznánk az algebrai vagy a differenciálegyenletekre.

Vegyük a síkot és tekintsük a sík *homogén lineáris (azaz additív és homogén) transzformáció*it: a tükrözést, a nyújtást és a forgatást. Legyen v a V sík egy vektora és M egy síkbeli lineáris transzformáció. Könnyű belátni, hogy két síkbeli vektor valós lineáris kombinációja is síkbeli vektor, valamint a kombináció transzformáltja egyenlő a transzformáltak kombinációjával:

$$M(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) = \xi_1 M v_1 + \xi_2 M v_2.$$

Tehát M tényleg homogén lineáris transzformáció.

Tekintsük a végtelen sokszor differenciálható függvények V terét, és a differenciálás $D : f \to f'$ műveletét. Ez is transzformáció:

$$D(\xi_1 f_1 + \xi_2 f_2) = \xi_1 D f_1 + \xi_2 D f_2.$$

Ha véges sokszor deriválható függvényekre szorítkozunk, akkor a deriválásnál csökken a függvény simasága, szűkül a tér.

A sík bázisa bármely két nem azonos irányú vektor. (Komplex számok feletti vektortér esetén a vektor állásáról kell beszélni!) Bizonyos síkbeli transzformációknak van olyan vektora, amelynek irányát a transzformáció változatlanul hagyja: ezek a sajátvektorok. A forgatásnak is van sajátvektora, de csak a komplex számtest fölött.

Az analitikus függvények terében a deriválásra nézve az e-alapú exponenciális függvény az 1 sajátértékű sajátvektor (fixpont), és az $e^{\lambda t}$ függvények a λ sajátértékű sajátvektorok, más néven a *sajátfüggvények*.

Cauchy 1826-ban használta elsőként a *táblázat* kifejezést az együtthatómátrixra. Kvadratikus alakok négyzetösszeggé transzformálhatóságát vizsgálva felfedezte, hogy a (szimmetrikus) mátrixok diagonalizálhatók. Tőle származik az $A \to B = T^{-1}AT$ *hasonlósági transzformáció* fogalma, bár a kifejezést még nem alkalmazta.

Új lökést adott a lineáris algebra fejlődésének Cayley és Sylvester munkássága. Arthur Cayley (1821–1896) 1858-ban definiálta először a mi $m \times n$-es mátrixunkat, és megmutatta, hogy a kvadratikus alakok és a lineáris transzformációk az ő definíciójának speciális esetei. Bevezette a *mátrixalgebra* fogalmát, a műveleteket és a mátrix inverzét. Tőle és William Rowan Hamilton (1805–1865) ír matematikustól és fizikustól származik a következő tétel.

6.6. tétel. *(Cayley–Hamilton, 1858.) Minden négyzetes mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját.*

Megjegyzés. Jellemző a korra, hogy Cayley megelégedett az $n = 2$ eset bizonyításával, vagy ahogyan írta: „nem gondolom, hogy szükség van arra a fáradságra, hogy a tételt tetszőleges rendű mátrixra formálisan belássam”.

Bizonyítás helyett. Az általános bizonyítás némileg bonyolult, a sajátvektorokból álló bázisok esetén azonban szinte triviális: Legyen λ_j az M mátrix j-edik sajátértéke és v_j a hozzá tartozó sajátvektor, $j = 1, \dots, n$; a sajátvektorok bázist alkotnak. $P(M)v_j = 0$. Ekkor $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$, és az $M - \lambda_j I$ tényezők felcserélhetősége miatt $P(M) = (M - \lambda_1 I) \cdots (M - \lambda_n I) = 0$. ∎

6.3. feladat. Igazoljuk a Cayley–Hamilton-tételt $n = 2$-re!

A mátrix *rangját*, azaz a lineárisan független oszlopvektorok (vagy sorvektorok) maximális számát James Sylvester (1814–1897) definiálta 1884-ben, és belátta, hogy az invariáns a hasonlósági transzformációkra.

A mátrixok Jordan-alakjáról szóló tételt (1870) nem ismertetjük, de felhívjuk a figyelmet, hogy milyen természetesen adódik a differenciálegyenletek megfelelő alakjából (Arnold, 1984, 25. fejezet).

A vektortér fogalmát szintén Leibniz sugallta, azonban írásai csak jóval halála után, 1833-ban jelentek meg. Hamilton 1841 körül már az n-dimenziós vektortérről értekezett, a komplex számokat (lásd még a 9. fejezet) már 1837-ben mint a valós test feletti kétdimenziós vektorteret írta le, de fő célja a komplex számok algebrájának háromdimenziós általánosítása volt. Ez lehetetlennek bizonyult, helyette négydimenziós számokat talált. „1843. október 16-án egy séta közben Hamilton lelki szemei előtt megjelentek az i, j, k szimbólumok az $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ összefüggésekkel egyetemben. Az [1], i, j, k elemek által generált algebra elemeit *kvaternióknak* nevezte. Élete utolsó negyedszázadában Hamilton szinte kizárólag a kvaterniókkal foglalkozott" (Praszolov, 1994, 1–2. o.). A kvaterniók adták az első nemkommutatív testet, s ennek ma már felfoghatatlan az elvi jelentősége (lásd Smith, 1929, 677–683. o.). A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy Hamilton matematikai munkássága a mechanika és az optika területén ma is alapvető – minden bizonnyal fontosabb, mint a kvaterniók elméletének kidolgozása.

Hermann Günther Grassmann (1809–1877) autodidakta matematikus volt. Stettini (ma Szczecin) gimnáziumi tanárként „1832-ben már vektorokkal írta le a mechanika egyenleteit, s ezzel nagymértékben leegyszerűsített bizonyos számításokat. Felismerte és explicite rögzítette a vektorösszeadás kommutativitását és asszociativitását. Később általános formában is kifejtette a – bizonyos algebrai tulajdonságokkal rendelkező – rendszerek elméletét. ... Értelmezte az n-dimenziós tér r számú vektorának geometriai szorzatát mint ... az $n \times r$-es mátrix r-edrendű aldeterminánsai[t]" (Praszolov, 1994). Bár elnyerte a leibnizi gondolatok továbbfejlesztésére kitűzött díjat, értetlenség miatt egyetemi állást nem kapott, pedig olyan óriások kezében volt a mű, mint Gauss, Möbius és Kummer. Könyveit érdektelenség miatt bezúzták. Amikor 1860 körül műve jelentőségét fölfedezték (lásd Smith, 1929, 684–696. o.), a matematika már nem érdekelte, sikeresen foglalkozott ókortudományokkal.

7. A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS KIALAKULÁSA

7.1. Bevezetés

Már a régi görögök is ... érdeklődtek a maximumfeladatok iránt. Először egyszerű feladatokat tanulmányoztak: 1. Adott kerületű téglalapok közül melyik a maximális területű? A négyzet (4.3. példa). 2. Milyen utat követ a fény egy síktükörről visszaverődve? A legrövidebbet, amikor a beesés szöge egyenlő a visszaverődés szögével. Később jóval bonyolultabb feladatokat is felvetettek, például az ún. *izoperimetrikus feladat*ot: adott kerületű síkidomok közül melyik a maximális területű? A legenda szerint a mitológiai Didó királynő jött rá a megoldásra: kör. A 7.2. alfejezetben néhány történeti érdekességű speciális variációszámítási feladat megoldását vázoljuk. A 7.3. alfejezetben bemutatjuk, hogyan oldotta meg Euler heurisztikusan, Lagrange pedig szabatosan az általános optimalizálási feladatokat. (Bár Lagrange a variációs módszer nevet javasolta, Euler *variációszámítás* elnevezése terjedt el.) A 7.4. alfejezetben civakodásokról és elismerésekről szólunk. Irodalom: Pólya (1968), Kósa (1970), Kline (1972, 573–591. o.) és Gingyikin (2001).

7.2. Speciális variációszámítási feladatok

Már Eukleidész tudta, hogy a síktükörről visszaverődő fény kilépési szöge egyenlő a beesés szögével. Héron pedig felismerte ennek egy érdekes következményét: a tárgy- és a képpont között a tükröt érintő fény útjának a hossza *minimális.*

7.1. feladat. Bizonyítsuk be Héron tételét!

Azt azonban csak 1620 körül vette észre Snellius és Descartes, hogy a levegő és a víz határfelületén bekövetkező fénytörésnél is egy egyszerű törvény érvényesül: a beesési és a törési szög szinuszának a hányadosa állandó. Képletben: $\sin\alpha/\sin\beta = n$. Állandó kísérőnk, Simonyi (1981, 189–194. o.) hangsúlyozza, hogy Descartes tévesen azt is állította, hogy $n = c_2/c_1$, ahol c_1 és c_2 rendre a fény terjedési sebessége a vízben és a levegőben. Mivel $\sin\alpha > \sin\beta$, ebből $c_1 < c_2$ következne – ami a hangra igaz, de a fényre nem. (A fénysebességek alkalmazása annál inkább meglepő, mert 1676 előtt nem volt még becslés sem a fénysebességre, vö. Gingyikin, 2001, 99–103. o.).

1653–1662 között Fermat felfedezte, hogy fordított összefüggés áll: $n = c_1/c_2$, hiszen $c_1 > c_2$. Ekkor viszont most is érvényes egy minimumelv, csak nem az útra, hanem az időre, az ún. *Fermat-elv (1653)*: inhomogén közegben két pont között a fény a legrövidebb idejű pályán terjed. Ez csupán egy elv, amely a fizikai Huygens-elvvel magyarázható. Fermat azt is tudta, hogy más fizikai környezetben, például a konvex tükörnél a fény a leghosszabb idejű utat választja, tehát általában szélsőértéket.

7.2. feladat. Bizonyítsuk be a Fermat-elvet a fénytörésre! Érdekes, hogy Leibniz első kalkuluscikkében éppen ezt a feladatot oldotta meg úttörő módszerével! Simonyi (1981, 193. o.) bemutatja, hogy milyen bonyolult volt Fermat idejében egy ilyen feladat elemi geometriai bizonyítása.

Az első igazi variációszámítási feladatot Newton oldotta meg a Principiában (1687, II. könyv, 34. állítás következménye): melyik forgástestnek van a minimális közegellenállása, ha a forgástengely irányában halad? Newton nemcsak megoldotta a feladatot, de felismerte annak gyakorlati jelentőségét a hajóépítésben.

A variációszámítás azonban a *brachisztochron* feladattal született: a homogén nehézségi erőtérben két (nem egymás fölötti) pont között melyik a leggyorsabb (ti. minimális idejű) lesiklást biztosító görbe? A feladatot jóval Newton említett felfedezése előtt Galilei (1638, 268. o.) fogalmazta meg a nyilvánosság számára. Tévesen azt állította, hogy az optimum egy körív, pedig csak azt igazolta, hogy egy adott negyedköríven gyorsabb a lesiklás, mint bármely húrokból álló törött vonalon (Simonyi, 1981, 172. o.). A helyes megoldást Johann Bernoulli (1667–1748) 1696-ban találta meg, egész sor fizikai analógiát felhasználva. Történeti érdekesség, hogy a megoldás (lásd Smith, 1929, 644–655. o.) közzététele előtt felhívással fordult a világ matematikusaihoz, hogy ők is oldják meg a feladatot. A megoldást benyújtók névsora valóban rendkívüli volt: Newton, Jakob Bernoulli, Leibniz és l'Hospital.

Felsoroljuk Johann Bernoulli négy zseniális meglátását a brachisztochron-feladattal kapcsolatban (Gingyikin, 2001, 144–156. o.): 1. rábukkant arra, hogy a mechanikai feladatra ugyanúgy érvényes a Fermat-elv, mint a fénytörési feladatra; 2. diszkretizálta a feladatot; 3. az osztópontokra felírta a Snellius–Descartes törvényt, 4. határértékben megkapta a folytonos feladat optimumát. Az eredmény: ciklois.

A kvantitatív megoldás lényege a következő (vö. 7.4. feladat): tekintsük az függőleges síkot (x,y) koordinátarendszerrel, legyen $c(y)$ a tömegpont sebessége az y magasságban, és legyen $\alpha(y)$ a görbe meredeksége. A Fermat-elv és a Snellius–Descartes-törvény folytán $\sin\alpha(y) = \gamma c(y)$, az energiamegmaradás törvénye értelmében viszont $c(y) = \sqrt{2gy}$, ahol g a nehézségi gyorsulás együtthatója, γ pedig egy állandó, azaz $\sin\alpha(y) = \gamma'\sqrt{y}$, ahol γ' egy másik állandó. Mivel a 17. század matematikájában a ciklois központi szerepet játszott, nem csoda, hogy sokan felismerték: utolsó egyenletünket pontosan egy cikloisív elégíti ki.

A kalkulus születésének évtizedeiben számos más konkrét klasszikus variációszámítási feladatot is felvetettek: például a két pontban rögzített kötél vagy lánc alakja a kötélgörbe vagy láncgörbe, amelyet Galilei (1638, 164. o.) tévesen a parabolával azonosított. A helyes eredmény a koszinusz hiperbolikusz függvény, az exponenciális függvény és reciprokának zámtani közepe.0

7.3. Általános variációszámítási feladatok

Johann Bernoulli vetette föl tanítványának, Eulernak a geodéziai felületek legrövidebb pályáinak a feladatát 1728-ban. További konkrét feladatok megoldása után, Euler 1732 körül megfogalmazta a variációszámítás általános alapfeladatát, és 1744-ben megjelent egy könyve a „legáltalánosabb értelemben vett izoperimetrikus feladatok” megoldásáról.

Didaktikai okokból először elhagyjuk az izoperimetrikus feltételt, és az alapfeladatot tekintjük. Legyen f egy háromváltozós skalárértékű sima függvény a $[0,X]$ szakaszon, a három skalárváltozó x, y és y'. A feladat: keressük azt a sima – megengedett – y függványt a $[0,X]$ szakaszon, amelynek kezdőértéke y_0, végértéke y_X és amely maximalizálja az

$$I = \int_0^X f(x,y(x),y'(x))\,dx$$

integrált.

7.1. példa. a) Elemi geometriai módszerrel belátható, hogy két pont között a legrövidebb „út" az egyenes. b) Legyen a két pont (0, 0) és (1, 1). Analitikus alakban a célfüggvény

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx,$$

amelyről majd belátjuk (7.3. feladat), hogy minimumhelye az $y(x) = x$ egyenes.

Euler a Bernoulli-féle diszkretizálási módszerrel felfedezte a variációszámítás alaptételét, amelyet Lagrange tett szabatossá.

7.1. tétel. *(Euler–Lagrange, 1744–1755.) Ha az I „funkcionál" a megengedett y függvényen szélsőértéket vesz föl, akkor a függvénynek ki kell elégítenie a következő, ún. Euler–Lagrange-differenciálegyenletet:*

$$f'_y(x,y,y') = \frac{d}{dx} f'_{y'}(x,y,y'),$$

ahol f'_y és $f'_{y'}$ rendre az f függvény második és harmadik változója szerinti parciális deriváltfüggvénye.

Megjegyzés. Ez az optimumfeltétel szükséges, de általában nem elégséges. Az f függvény konkavitása elegendő a maximumhoz, de enyhébb feltevések is léteznek. Adrien-Marie Legendre (1752–1833) 1788-ban megadta másodrendű szükséges feltételét a maximum létezésére: $f''_{y'y'} \le 0$, amelyről először tévesen azt hitte, hogy elégséges is.

Bizonyításvázlat. Osszuk föl a $[0,X]$ intervallumot k egyenlő részre: $h = X/k$ egy részintervallum hossza. Helyettesítsük folytonos változóinkat és egyenletünket diszkrét megfelelőikkel. Legyen $x_i = ih$, $y(x_i) = y_i$, $y'(x_i) = (y_{i+1} - y_i)/h$, $f(x_i,y(x_i),y'(x_i)) = f(ih,y_i,(y_{i+1} - y_i)/h)$. Ekkor az integrált közelítő téglányösszeg a következő:

$$I_k = \sum_{i=0}^{k-1} hf(ih,y_i,(y_{i+1} - y_i)/h).$$

Fölírjuk az y_i szerinti parciális deriváltat, majd nullává tesszük őt, $i = 0,\ldots, k-1$:

$$h\frac{\partial}{\partial y} f(ih,y_i,(y_{i+1}-y_i)/h) - \frac{\partial}{\partial y'} f(ih,y_i,(y_{i+1}-y_i)/h) + \frac{\partial}{\partial y'} f((i-1)h,y_i,(y_i-y_{i-1})/h) = 0.$$

Az egyenletet elosztjuk h-val, és k-val tartunk a végtelenhez, azaz h-val 0-hoz. Visszatérve folytonos függvényeinkhez, és kimerevítve egy $x = i(k)/k$ időpontot, a második és a harmadik tag tart $-f'_{y'}$ idő szerinti deriváltjához: adódik az Euler–Lagrange-egyenlet. A levezetés sántít: nincs bizonyítva, hogy a határátmenet jogos. ∎

7.3. feladat. Oldjuk meg a 7.1. példát a 7.1. tétel analitikus módszerével!

7.4. feladat. Oldjuk meg a leggyorsabb lesiklás feladatát a variációszámítás szabványos eszközeivel!

1755-ben Lagrange szabatosan megoldotta a variációszámítás alapfeladatát. A fő gondolat jól ismert a tankönyvekből (például Kósa, 1970, 29–31. o.), itt csak dióhéjban vázoljuk. A globális optimum lokálisan is optimum. Tehát, ha csak egy tetszőleges, de rögzített t pont kis környezetében „variáljuk" az optimális pályát egy a valós számmal paraméterezett görbesereggel, akkor az $I(a)$ egyváltozós függvénynek belső szélsőértéke van, tehát $I'(0) = 0$. Ebből számolással adódik az Euler–Lagrange differenciálegyenlet.

Hol marad az izoperimetrikus feladat megoldása? Legyen $g(x,y,y')$ egy f-hez hasonló tulajdonságú függvény, és tegyük föl, hogy a hozzá tartozó izoperimetrikus feltétel szintén integrál alakban írható föl:

$$J = \int_0^X g(x,y(x),y'(x))\,dx = 0.$$

A megoldást legegyszerűbben a Lagrange-szorzók jóval később (1788-ban) kidolgozott módszerével adhatjuk meg. Legyen p egy tetszőleges skalár, és vegyük az ún. Lagrange-függvényt (de nem a mechanikában, hanem az optimumszámításban szereplő értelemben): $L = f + pg$. A közönséges feltételes szélsőérték-számításhoz hasonlóan most is igaz, hogy ha a feladatnak van belső szélsőértéke, akkor alkalmas p skalárra a Lagrange-függvény stacionárius lesz, azaz az $I(a) + pJ(a)$ függvény a szerinti deriváltja eltűnik (de ez nem mindig jelenti az $I(a) + pJ(a)$ függvény tényleges szélsőértékét).

7.2. tétel. *(Lagrange.) Ha az I funkcionál a $J = 0$ izoperimetrikus feltétel mellett a megengedett y függvényen szélsőértéket vesz föl, akkor a 7.1. tételhez hasonlóan az $L = f + pg$ Lagrange-függvénynek ki kell elégítenie a megfelelő Euler–Lagrange-differenciálegyenlet-rendszert:*

$$L'_y(x,y,y') = \frac{d}{dx} L'_{y'}(x,y,y'),$$

ahol p a $J(p) = 0$ egyenletből határozható meg.

Feladatként fogalmazzuk meg az eredeti izoperimetrikus feladatot!

7.5. feladat. Az eredeti izoperimetrikus feladat. Adott egy egységnyi hosszúságú szakasz és egy κ hosszúságú kerítés, $1 < \kappa \le \pi/2$. Kerítsük be az adott szakasz fölötti maximális területű tartományt! Eredmény: egy körszelet. (Mivel nem akarunk parametrikus függvényekkel számolni, feltesszük, hogy a kerítés olyan rövid, hogy az optimumban a körszelet legfeljebb a megfelelő félkörrel egyenlő.) Pólya (1968, X. fejezet) tartalmazza a variációszámítást mellőző elemi eredményeket.

7.4. Civakodás és elismerés

Matematikatörténetet írva nehéz ellenállni az civakodás és elismerési történeteknek. Az 5.6. alfejezetben már írtunk a Newton–Leibniz prioritási vitáról, most további történeteket vázolunk.

A Bernoulli-hármas civakodásának történetét Stillwell (1989, 181–187. o.) nyomán vázoljuk. A két testvér, Jakob és Johann egyrészt Leibniz bulldogjai voltak a Newtonnal folytatott prioritási vitában. Ugyanakkor egymással is ádáz vitákat folytattak. Jakob jóval (13 évvel) idősebb volt Johannál, és a báty tanította az öccsöt a matematikára. Sok történész szerint Jakob volt a lassabb, de mélyebb, míg Johann gyorsabb, de felületesebb. Amikor a tanítvány kezdte utolérni mesterét, a mester féltékennyé vált, és szeretett volna minél nagyobb részt kihasítani a tanítvány sikereiből.

Nem kell azonban féltenünk Johannt sem. Az első jelentősebb veszekedés a két testvér között az izoperimetrikus feladat kapcsán tört ki. 1697-ben Jakob helyesen ismerte fel, hogy a feladat a variációszámítás körébe tartozik, de megoldását csak 1701-ben küldte be a párizsi Akadémiához, azonban csak halála után, 1706-ban nyitották ki a borítékot. Eközben a türelmetlen Johann helytelen megoldásával akarta megelőzni bátyját és kétségbe vonta bátyja eredményének a létezését is.

Különösen furcsa módon bánt fiával, Daniel Bernoullival (1700–1782), akit szintén a legnagyobbak sorában fogunk látni. A fiú korábban írt Hidrodinamika című munkáját csak 1738-ban tudta publikálni. Ezt a késedelmet használta fel az apa, aki 1743-ban egy hasonló című munkát publikált, 1732-es dátummal. Ez az arcátlanság azonban visszafelé sült el, és még Johann önálló hidraulikai eredményeit sem ismerték el.

Szerencsére azonban a nagy matematikusok közötti megértésről is beszámolhatunk, nevezetesen az Euler–Lagrange kapcsolatról. 1755-ben a 19 éves Lagrange, a torinói tüzériskola kezdő tanára, levelet írt az akkori világ leghíresebb matematikusának, Eulernek, amelyben elmagyarázta, hogyan lehet szabatosan megoldani a variációs feladatokat. Euler lelkesen fogadta az ifjú Lagrange kezdeményezését. Élénk levelezés kezdődött kettőjük között, Torinó és Berlin között néha kéthetente fordult a posta. 1756-ban Euler előterjesztésére a berlini akadémia Lagrange-ot külföldi tagjává választotta, azelőtt, hogy Lagrange munkái megjelentek volna. (Weil (1983) 197. o. azonban megjegyzi, hogy Lagrange már egy évvel korábban is írt Eulernak, azonban ez a levél még nem volt Euler figyelmére méltó, aki csak megőrizte, de nem válaszolta meg a levelet.)

Az egyébként folyamatosan publikáló Euler ebben az esetben nem sietett közölni saját eredményeit. 1759-ben írt levelében ez áll: „Úgy látom, az izoperimetrikus feladatra adott analitikus megoldásod tartalmazza mindazt, amit e területen el lehet várni. Nagyon örülök, hogy ez az elmélet, mellyel első kísérleteim után alighanem egyedül foglalkoztam, általad tökéletes formát nyert. A kérdés fontossága arra serkentett, hogy a Te magyarázatod alapján magam is levezessem az analitikus megoldást. Azonban úgy határoztam, hogy ezt eltitkolom, amíg Te nem publikálod eredményeidet, mivel semmiképpen sem szeretnélek megfosztani az általad megszolgált dicsőség egy részétől." (Gingyikin, 2001, 253–254. o.)

Eulert sem kerülte el azonban az igazságtalan kritika. Az előzményekhez azt kell tudni, hogy a variációszámítás alkalmazásaként – Maupertuis meglehetősen kidolgozatlan elvét követve – Euler, majd Lagrange kidolgozta a fizika *variációs elveit*, amelyek a newtoni erőtörvényeket általánosítják. E nélkül az általánosítás nélkül a kényszer- és súrlódásos mozgások, valamint a pontrendszerek mechanikája reménytelenül bonyolult lenne, és a modern fizika felépítése is sokkal nehezebben ment volna. A szabadgondolkodó Voltaire-t azonban annyira feldühítette ez a Newton-ellenes és Leibniz-párti törekvés, hogy „Akákia doktorának gúnyirata Saint-Malo szülöttének" című művében igazságtalanul írt Eulerről: „Egy olyan tudósról van szó, aki legalább 600 oldalt számol ahelyett, hogy végiggondolná a problémát, és maximum 10 sorban leírna mindent." Gingyikin (2001, 243–244. o.), akitől a történetet átvettük, hozzáteszi: „Itt láthatjuk, hogy Voltaire milyen sajátos módon ábrázolta a zseniális számoló alakját." Mindezt Voltaire annak ellenére tette, hogy nemcsak a felvilágosodás kiemelkedő filozófusa és írója volt (a ma is népszerű Candide-ja az optimista Leibniz elleni gúnyirat), de ő honosította meg a newtoni fizikát Franciaországban, legyőzve a francia fizikában még mindig uralkodó descartesi zűrzavart. (Franciaországban még 1730-ban sem vált uralkodóvá Newton elmélete arról, hogy a Föld a sarkokban lapult!)

8. KALKULUSTÓL AZ ANALÍZISIG

8.1. Bevezetés

A kalkulus kialakulásának előfeltétele az volt, hogy megszabaduljanak az ókorból örökölt szabatosságtól. (Itt csak utalunk az 2. fejezetre és az 5.2. alfejezetre.) A kalkulus 1670-től hatalmas lendülettel fejlődött, félrelökte a vele szembe szegezett ellenvetéseket, de csak 1872-re alakult ki szabatos alakja. A logikai tisztaságért folytatott küzdelem 200 éves elhúzódását sokan nagyon szigorúan ítélik meg: Például Laczkovich–T. Sós (2005, 13–14. o.) így ír: „A kalkulust kezdettől fogva sok kritika és támadás érte, – tegyük hozzá, teljes joggal. A módszer logikai tisztasága nagyon is vitatható volt, mert homályos fogalmakkal dolgozott, és a gondolatmenetei néha zavarosak voltak. ...Mert mit jelent az, hogy végtelen kicsiny mennyiség? Végül is egy ilyen mennyiség nulla vagy sem? Ha nulla, akkor nem oszthatunk vele a dy/dx differenciálhányadosban. Ha viszont nem nulla, akkor a számolásban nem hanyagolhatjuk el. Egy ilyen ellentmondás megengedhetetlen egy matematikai fogalom esetén.... A kalkulus körüli vita egészen a XIX. század végéig tartott..., [amikor is] a kalkulus intuitív, de homályos és ellentmondásos fogalmait precízen definiált matematikai fogalmakkal helyettesítették."

Minden probléma ellenére nem nagyon lehetett volna lerövidíteni ezt a kalandos utat. Ha az úttörők nem kezdenek el vakmerően előrehaladni, akkor még talán ma is az arkhimédészi fogságban szenvedne a matematika. Csak a heurisztikusan nyert eredmények ismeretében lehetett felismerni, hogy miért is van szükség a szabatosságra, és hogy miképp lehet rendet tenni a felső matematikában.

Ebben a fejezetben három kérdést járunk körül: a 8.2. alfejezetben bemutatunk egy tipikus példát az euleri heurisztikus okoskodásra; a 8.3. alfejezetben választ keresünk a kérdésre: hogyan viselkedhet egy végtelen tagszámú függvénysor (szabad-e tagonként deriválni)? A 8.4. alfejezetben vázoljuk, hogyan tették szabatossá a határérték és a valós szám fogalmát a 19. század óriásai: Cauchy, Dedekind és Weierstrass.

8.2. Heurisztika

A variációszámításban már láttunk egy példát (7.1. tétel) arra, hogyan „vezette le" Euler a róla és Lagrange-ról elnevezett optimumfeltételt. Sokunk legkedvesebb példája azonban az, ahogyan az 5.2. feladat ikertestvérét a leleményes Euler 1735-ben összegezte, világhírnévre téve szert. A kérdést P. Mengoli 1650-ben vetette fel, majd Collins 1673-ban ismertette meg Leibnizcel, aki 1697-ben Jakob Bernoullitól várt megoldást. (Részletes tárgyalást ad Pólya (1968) 33–38. és 47–51. o., valamint Weil (1983) 256–276. o. A divergens sorokról szóló Hardy (1949) könyv remek történeti fejezeteket tartalmaz.)

8.1. tétel. *(Euler, 1735.) A négyzetszámok reciprokösszege:*

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}. \tag{8.1}$$

Heurisztikus bizonyítás. 1) Legyen az n-edfokú $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ egyenletnek n különböző gyöke: $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Ekkor a gyökök és együtthatók közti összefüggések alapján

$$a_{n-1}=-a_n(\alpha_1+\cdots+\alpha_n).$$

Ha egyik gyök sem nulla (azaz $a_0\neq 0$), akkor a gyökök reciprokára az előzőhöz teljesen hasonló módon a következő összefüggés írható föl:

$$a_1=-a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Írjunk x helyére x^2-et. Belátható, hogy a $2n$-edfokú $b_0-b_1x^2+\cdots+(-1)^nb_nx^{2n}=0$ egyenletnek $2n$ különböző gyöke n ellentett párt képez: $\pm\beta_1,\ldots,\pm\beta_n$. Ekkor a reciprok-négyzetösszegre

$$b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots+\frac{1}{\beta_n^2}\right).$$

2) Euler a $\sin x=0$, azaz Taylor-sorra áttérve, az

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\cdots=0$$

„végtelen fokú” egyenletet vizsgálta, amelynek gyökei $\{k\pi\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Elosztva az egyenletet x-szel, az

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+\cdots=\prod_k\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=0$$

„végtelen fokú” egyenletet kapta, amelynek gyökei $\{\pm k\pi\}_{k=1}^{\infty}$. (A biztonság kedvéért végtelen szorzat alakban is felírta.) Ezért az 1) pont „alapján”, $b_0=1$, $b_1=1/6$, tehát

$$\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{(2\pi)^2}+\cdots+\frac{1}{(n\pi)^2}+\cdots\right).$$

Innen már átszorzással adódik a (8.1) képlet. ∎

Mi a hiba a bizonyítással? a) Nincs garancia arra, hogy „végtelen fokú” polinomra is érvényes a gyökök és együtthatók közti összefüggés. b) Nem tudjuk, nincsenek-e egyéb, komplex gyökei a hatványsorként felfogott $\sin x$-nek. Ez utóbbira évekkel később egy Euler-tétel adott választ, amely a szinusz, koszinusz és az exponenciális függvényt kapcsolta össze (9.1. tétel). Gingyikin (2001) magyar szerkesztője, Major Péter a 228. o. 16. lábjegyzetében utal a 19. században bizonyított komplex függvénytani eredményre (Weierstrass-tételre, Kline, 1972, 667. o.), amelynek segítségével már belátható az összefüggés.

Euler és matematikustársai többször is visszatértek a feladatra, és hosszas küzdelem után végül sikerült megnyugtató bizonyítást találniuk. De a heurisztikus megoldás addig is támaszt jelentett a kutatóknak. A bizonytalanság évtizedei alatt is sikerült Eulernak közelebb jutnia az igazsághoz. A $\sin x$ függvény Taylor-sorának további együtthatóit meghatározva is hasonló eredményt kapott:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}. \tag{8.2}$$

Az 5.5. példában már találkoztunk a Gregory–Leibniz-sorral. Heurisztikus módszerével Euler levezette ezt az összefüggést is, ezúttal az $1 - \sin x = 0$ egyenlet gyökeit és együtthatóit vizsgálta.

8.1. feladat. Igazoljuk Euler heurisztikus módszerével a (8.2) képletet!

Megjegyzés. A fentiekben a számelméletben alapvető szerepet játszó Riemann-féle zéta-függvény, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ helyettesítési értékét határoztuk meg $s = 2$, 4-re, lásd a 10.3. tételtől kezdve.

Külön kiemeljük, hogy a 18. század matematikusai nem riadtak vissza sejtéseik numerikus ellenőrzésétől. Euler is ellenőrizte sejtését, és sok tizedesjegyű egyezést talált. Ezzel a módszerrel a Függelékben foglalkozunk.

8.3. Függvények és függvénysorok

Szőkefalvi-Nagy (1965, 11–15 és 310–314. o.) és Kline (1972, 504–514. o.) nyomán vázoljuk a függvényfogalom fejlődését és a függvénysorok kialakulását. (Figyelemre méltó, hogy a két beszámoló lényeges pontokon eltér egymástól!) Descartes a 17. század első felében még távol akarta tartani a matematikától az olyan görbéket, amelyek nem definiálhatók algebrai műveletekkel. Newton és Leibniz egyik alapvető újítása az volt, hogy a lehető legszélesebb függvényfogalomra törekedtek, hiszen már az $1/x$ függvény integrálja is kivezet az algebrai görbék osztályából. Euler már természetesen használta az összes olyan függvényt, amely a négy alapművelet alkalmazása során keletkezik, beleértve az exponenciális függvényt, illetve az invertálást és helyettesítést. Ezeket ma *elemi* függvényeknek nevezzük.

A történet a *rezgő húr egyenlet*ével kezdődött. (Emlékeztetünk arra, hogy már Püthagoraszt is ez a kérdés izgatta!) Fizikai meggondolásokból következik, hogy az x-tengelyen a 0 és az l pontban rögzített húr y nagyságú kitérésének az x helytől és a t időtől függő változását, pontosabban rezgését leíró parciális differenciálegyenlet

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

ahol a peremfeltételek a következők:

$$y(t,0) = 0 \qquad \text{és} \qquad y(t,l) = 0,$$

míg a kezdeti feltételek (adott kezdeti alak és nyugvó kezdeti állapot)

$$y(0,x) = f(x) \qquad \text{és} \qquad y'_t(t,x) = 0.$$

A francia d'Alembert fedezte föl 1746-ban, hogy a rezgő húr egyenletének a megoldása

$$y(t,x) = \frac{1}{2}[\varphi(at + x) - \varphi(at - x)],$$

ahol $\varphi(x) = f(x)$ analitikus függvény. Ugyanis a $\xi = x + at$ és az $\eta = x - at$ független új változók bevezetésével a differenciálegyenlet a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta} = 0$$

alakra hozható, amelynek az általános megoldása valóban szeparálható: $y = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Egyszerű számolással adódik, hogy $f(-x) = -f(x)$ páratlan függvény a $[-l,l]$ szakaszon.

d'Alembert cikkét olvasva, és saját korábbi munkáira visszatérve, Euler 1749-ben „más" megoldást talált. Tetszőleges folytonos függvényt mérlegelve Euler megoldása

$$y(t,x) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi ct}{l},$$

ahol

$$y(0,x) = \sum_n A_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Ahogyan Euler 1763-ban hangsúlyozta: ezzel egy egészen új fejezetet nyitott az analízis történetében. Felhívjuk a figyelmet, hogy az itt fellépő szinusz-megoldásokat a fizikusok *harmonikus rezgés*eknek nevezik, amelyek periódusa egymás egész számú többszörösei.

1753-ban a már korábban említett Daniel Bernoulli azonban még tovább lépett, Euler véges összege helyére végtelen sok tagot írt, és felfedezte, hogy végtelen sok hullámmal tetszőleges, nemcsak folytonos függvényre is érvényes megoldást talált.

A három lángész heves vitája évtizedeken keresztül tartott, és még a negyedik zseni, Lagrange 1759-es megjelenése sem hozott megoldást. (Itt jelzem, hogy Gingyikin (2001, 255–256. o.) megint csak másképpen írja le a vitát, és Lagrange itt nem részletezett megoldását fogadja el helyesnek.) A fő baj az volt, hogy mindenki mást tekintett függvénynek: d'Alembert sokszor differenciálható függvényeket mérlegelt, Euler folytonosakat (de ezeket analitikusaknak nevezte), Bernoulli pedig szakadásos függvényeket is megengedett. A 8.1. példában látni fogjuk, hogy egy $[0,2\pi]$ szakaszon definiált függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztve az egész valós egyenesre, $x_k = 2\pi k$-ban szakadásos függvényeket kaphatunk.

Bár Euler és Daniel Bernoulli trigonometrikus sorai sokáig szunnyadtak, mégsem haltak meg. A befolyásos francia fizikus, Joseph Fourier (1768–1830) a hővezetés parciális differenciálegyenletét tanulmányozva 1811-ben újra bevezette ezeket a sorokat, amelyeket a siker bizonyítékaként róla nevezték el *Fourier-sorok*nak:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol az a_k,b_k valós számok az ún. Fourier-együtthatók. Ahogyan a 23 éves Lagrange 1759-ben szembeszállt Bernoullival, az 1811-ben „még csak" 75 éves tudós szembeszállt

Fourier-val. Más matematikusok sem bocsájtották meg Fourier matematikai hiányosságait (például azt a később megtagadott feltevését, hogy függvényei analitikusak). Fouriernak 1825-ig kellett várnia cikke publikálásával, amikor a Francia Akadémia vezetője lett. Cikke azonban már kéziratban, publikálása előtt is jelentős hatást fejtett ki. Két forradalmi újítását emeljük ki: a) az a_k,b_k együtthatók meghatározásához az f függvénynek nem kell simának lennie; b) két függvény megegyezhet a $[0,2l]$ intervallumon, és különbözhet azon kívül.

Mai szemmel nézve (vö. 13.3. alfejezet) az alapgondolat egyszerű. A $\cos kx$ és a $\sin kx$ függvények ortogonális bázist alkotnak a $[0,2\pi]$ intervallumon négyzetesen integrálható függvények terében, ahol két függvény hajlásszögét a következőképp definiáljuk. Vegyük a szorzatfüggvény integrálját, és osszuk el a négyzetfüggvények integrálnégyzetgyökének a szorzatával:

$$\cos(f,g) = \frac{\int_0^{2\pi} fg}{\sqrt{\int_0^{2\pi} f^2 \int_0^{2\pi} g^2}}.$$

„Jól viselkedő” függvények Fourier-együtthatóit ugyanúgy számítjuk ki, mint a közönséges síkban egy vektor koordinátáit, a skalárszorzat segítségével. Lássuk az utóbbiakat: legyen $v = v_1e_1 + v_2e_2$ egy síkvektor, ahol v_1,v_2 a két koordináta és e_1,e_2 a két egymásra merőleges egységvektor. Ekkor $ve_1 = v_1e_1e_1 + v_2e_2e_1$, és $e_1e_1 = 1$, $e_2e_1 = 0$ miatt $ve_1 = v_1$. Tehát a v_i koordináta a v vektor és az e_i egységvektor skalárszorzata.

8.2. tétel. *(Euler, kb. 1760.) Egy függvény Fourier-együtthatói formálisan a következőképpen számíthatók ki:*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \qquad k = 1,\, 2, \ldots.$$

Bizonyítás. Szorozzuk be az f függvény formálisan értelmezett Fourier-sorát tagonként $\cos mx$-szel és integráljuk a $[0,2\pi]$ intervallumon. Az ortogonalitás miatt minden tag kiesik, kivéve a $\cos mx$-et, amelynek a négyzetintegrálja π, ha $m > 0$ és 2π, ha $m = 0$. Ugyanígy kiszámítható a $\sin mx$ együtthatója is. ∎

A következő fontos példát Niels Abel (1802–1829) norvég matematikus találta, akinek a nevével még többször is találkozni fogunk.

8.1. példa. (Abel, 1826, vö. Szőkefalvi-Nagy, 1965, 263–264. o.) A $[0,2\pi]$ szakaszon definiált $f(x) = (\pi - x)/2$ függvény Fourier-együtthatói $a_k = 0$, $b_k = 1/k$. Valóban, parciális integrálással belátható, hogy

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Figyeljük meg, hogy a Fourier-sor nemcsak a $[0,2\pi]$ szakaszon van értelmezve, hanem az egész $(-\infty,\infty)$ intervallumon, természetesen 2π szerint periodikus. Definiáljuk most az $f(x)$ függvényt is 2π szerint periodikusnak: $f(x + 2\pi) = f(x)$. Ekkor viszont az

$x_k = 2k\pi$ pontokban a fenti f függvénynek szakadása van. De egészen más függvényt kapunk, ha ugyanezt a függvényt a $(-\pi,\pi)$ szakaszról terjesztjük ki.

A matematikában nagyon gyakori fogás, hogy egy f függvényt egy $\{f_n\}$ függvénysorozattal közelítünk (például a Taylor-sor részletösszegeivel): $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, ahol a konvergencia pontonként értendő. Gyakran a függvénysorozat speciális alakú:

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n(x),$$

ilyenkor *függvénysor*ról beszélünk. A Fourier-sor egy speciális függvénysor.

Kérdés: ha az $\{f_n(x)\}$ függvénysorozat minden tagja folytonos (integrálható, differenciálható), akkor igaz-e ugyanez $f(x)$-re? Igaz-e továbbá, hogy az integrálok (deriváltak) határértéke egyenlő a határértékek integráljával (deriváltjával)? *Válasz*: fel „kell” tenni a függvénysor(ozat) egyenletes konvergenciáját (Rudin, 1964, 7. fejezet).

Lakatos (1976) nagyon érdekes történeti összefoglalást adott a kérdéskörről (1. függelék, 185–206. o.). Leibniz és követői azt „hitték”, hogy *folytonos függvények konvergens sorozatának határértéke is folytonos függvény*. Cauchy 1821-ben kiadott tankönyve volt az első, amely a folytonosságot a mai módon definiálta (vö. Fauvel–Gray, 1987, 566–568. o.): $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$, csak ő még nem adott pontos $(\varepsilon - \delta)$ definíciót a sorozat határértékére (8.4. alfejezet). Éppen ezért volt képes Cauchy „bizonyítást” adni a hamisnak bizonyult leibnizi hittételre.

A 8.1. példa kapcsán Abel megemlíti, hogy Cauchy tétele alól vannak kivételek. Talán ez az észrevétel lehetett az oka, hogy Cauchy soha nem készült el analízis tankönyve második kötetével, és az elsőt sem adta ki újra. Abel sem találta meg a probléma kulcsát, helyette egy nagyon speciális, de nagyon fontos esetre, a hatványsorokra igazolta a konvergenciát (lásd Smith, 1929, 286–291. o.).

8.3. tétel. *(Abel, 1826.) Ha egy $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor konvergál az $x = r$ valós értékre, akkor a hatványsor konvergál az egész $|x| \le r$ szakaszon is, és ott folytonos.*

Bizonyítás. Az Abel-féle átrendezés alapján. ∎

A Fourier-sorok konvergenciájának első szabatos tételét Lejeune Dirichlet (1805–1859) fedezte fel, amelyben megadta a konvergencia elemi feltételeit.

8.4. tétel. *(Dirichlet, 1829/1837.) Ha a $[0,2\pi]$ intervallumon az f függvény véges sok monoton szakaszból áll, akkor az f függvény Fourier-sora konvergál a függvényhez.*

Bizonyításvázlat. Szőkefalvi-Nagy (1965, 323–324. o.) Meglepő módon a Fourier-sor első $2n + 1$ tagjából álló szelete zárt alakban felírható a

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

ún. *Dirichlet-féle magfüggvénnyel*:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t) D_n(t)\, dt.$$

A magfüggvény alakjából leolvasható, hogy aszimptotikusan az integrál egyre inkább az x pontra koncentrálódik. ∎

8.2. feladat. Bizonyítsuk be a Dirichlet-mag segítségével a 2.11. tételt (a koszinusz-függvény elemi integrálásáról)!

Egyébként nem is kell a bonyolult Fourier-sorokhoz folyamodni, létezik egy nyilvánvaló ellenpélda a leibnizi hittételre.

8.2. példa. A folytonosság hiánya: $f_n(x) = x^n$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$, ha $0 \le x < 1$ és $f(1) = 1$.

Hasonló példákat lehet hozni arra, hogy integrálható (deriválható) függvénysorozatok határértéke nem integrálható (nem deriválható), vagy ha igen, nem azonos a integrálok (deriváltak) határértékével.

1850 körül talán Philipp Seidel (1821–1896) vette észre először, hogy ha általánosan be akarjuk bizonyítani, hogy folytonos függvények konvergens sorozatának határértéke is folytonos, akkor a pontonkéntinél erősebb konvergenciafogalomra van szükség, amelyet a hamarosan kimondandó 8.5. tétel bizonyítása sugall.

Definíció. Egy $\{f_n\}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az f függvényhez a kompakt I intervallumon, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $N = N_\varepsilon$ természetes szám, hogy akármilyen $n \ge N$-re és $x \in I$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Megjegyzés. A hagyományos, pontonkénti konvergencia definíciójában N_ε az x változótól is függ és nem egyenletes konvergencia esetén $\sup_x N_{\varepsilon,x} = \infty$!

8.5. tétel. *(Seidel, 1848.) Ha folytonos függvények $\{f_n\}$ sorozata egyenletesen konvergens az I intervallumon, akkor az f határfüggvény is folytonos.*

Bizonyítás. Legyen ε és N a definícióban szereplő pár. Az f_N függvény egyenletesen folytonos az I intervallumon, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$, ha $|x - y| < \delta$. A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva: $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < 3\varepsilon$. Tehát a határfüggvény is (egyenletesen) folytonos. ∎

8.3. feladat. a) Igazoljuk, hogyha egy függvény kétszer folytonosan differenciálható a $[0,\ 2\pi]$ intervallumon, akkor a Fourier-együtthatóinak nagyságrendje $1/k^2$!
b) Igazoljuk a) felhasználásával, hogy ekkor Fourier-sora egyenletesen konvergál a függvényhez!

Hasonló tételek igazak a függvénysorozatok deriválhatóságára és integrálására, amelyeket rejtve ki is használtunk az 5. fejezetben a Gregory–Leibniz-sor levezetésekor és ebben a fejezetben a Fourier-együtthatók levezetésekor. Magának Seidelnek sem jutott eszébe azonban, hogy megvizsgálja, milyen más tételekben használták fel rejtve az egyenletes konvergenciát. Csak 1870-ben igazolta Eduard Heine (1821–1881), hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens Fourier-előállítása egyértelmű, s csak 1875-ben mutatta meg Gaston Darboux (1842–1917), hogy a sorszeletek egyenletes konvergenciája esetén a függvénysor tagonként integrálható.

Összegezve Lakatos gondolatmenetét: több évtizedig tartott, amíg az egyenletes konvergencia utat tört magának a matematikában. S miután nagy nehezen bevezették e fogalmat, még sokáig késlekedtek a következetes alkalmazásokkal. Hamis tehát az a beállítás, hogy a matematikai eredmények rögtön definíció–tétel–bizonyítás szerkezettel születtek meg, mint ahogyan a mítosz szerint Pallasz Athéne teljes fegyverzetben ugrott ki apja, Zeusz fejéből.

8.3. példa. Számítógép segítségével meghatározzuk a 8.1. példában szereplő Fourier-közelítés értékét az $x_1 = \pi - 0{,}5$, $x_2 = \pi - 0{,}05$ és $x_3 = \pi - 0{,}005$ helyen $n = 10, 100, 1000, 10000$ tagszámra.

8.1. táblázat. *A Fourier-sor közelítése*

n	$S_n(x_1)$	$S_n(x_2)$	$S_n(x_3)$
10	0,29180	0,00113	0,00000
100	0,25007	0,02974	0,00010
1000	0,25034	0,02512	0,00298
10000	0,25002	0,02502	0,00251
Pontos	0,25000	0,02500	0,00250

Az alfejezet lezárásaként megemlítjük a Püthagorasz-tétel Fourier-sorokra történő általánosítását, amelyet Marc-Antoine Parseval (1755–1836) fedezett fel formális eszközökkel.

8.6. tétel. *(Parseval-tétel, 1799.) Ha f egy négyzetesen integrálható függvény, akkor a Fourier-együtthatókra igaz a következő:*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = 2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Bizonyítás. Írjuk föl a Fourier-sor négyzetét kifejtve, integráljuk a kettős összeget tagonként és vegyük figyelembe az ortogonalitást. ∎

A széleskörű értelmezhetőség miatt a Fourier-sor konvergenciája is sokáig kérdéses volt. Azt már 1873-ban igazolta Paul du Bois-Reymond (1831–1883), hogy vannak olyan folytonos függvények, amelyeknek a Fourier-sora végtelen sok pontban divergál. Fejér Lipót (1880–1959) 1904-ből származó híres tételének következménye kimondja, hogy ha egy folytonos függvény Fourier-sora konvergál, akkor magához a függvényhez konvergál. A végleges eredmény egészen az 1960-as évekig váratott magára: egy folytonos függvény Fourier-sora *majdnem mindenütt* konvergens.

Végül visszatérünk Euler nevezetes feladatához.

8.4. példa. Alkalmazva a Parseval-tételt a 8.2. példára, igazolható Euler (8.1) képlete.

Valóban,

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{12} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

8.4. Határérték és valós számok

Newtonnak és Leibniznek nem volt „türelme” a végtelen kicsiny mennyiségekkel kapcsolatos finomságokkal bajlódni, és az egész 18. század követte őket ebben a „nagyvonalú” hozzáállásban. A 8.1. tételben is láttunk arra példát, hogy még maga a nagy Euler is különösebb lelkiismeret-furdalás nélkül terjesztette ki a végesre bizonyított összefüggéseket a végtelenre.

Newton és d'Alembert elképzeléseit szabatossá téve, Cauchy vezette be a *derivált*at mint a differenciahányadosok határértékét (Fauvel–Gray, 1987, 568. o.). A Taylor-sor maradéktagját bevezetve, megcáfolta Lagrange elhamarkodott állítását, hogy a végtelen sokszor deriválható függvényt előállítja a hatványsora.

Leibniz naiv elképzeléseit pontosítva, folytonos függvényre Cauchy vezette be a *határozott integrál* fogalmát 1823-ban (Fauvel–Gray, 1987, 569. o.), de következetesen a bal oldali osztópontban vette a függvényértéket. Ezt a definíciót Bernhard Riemann (1826–1866) 1854-ben általánosított folytonos függvényről tetszőlegesre, tetszőleges közbülső pontban véve a függvényértéket. Ők már pontos bizonyítást adhattak az 5.4. tételre, az analízis alaptételére.

Az 5.4. tétel Cauchy-féle bizonyításvázlata. Osszuk föl a szakaszt n tetszőleges részre, x_i osztópontokkal! Írjuk föl a következő teleszkópösszeget:

$$F(b) - F(a) = F(b) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \cdots + F(x_1) - F(a).$$

Az n-tagú összeg mindegyik tagjára írjuk föl a Lagrange-féle középértéktételt: $F(x) - F(y) = F'(z)(y - x)$. Ekkor

$$F(b) - F(a) = F'(z_n)(b - x_{n-1}) + F'(z_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + F'(z_1)(x_1 - a)$$

egy téglányösszeget ad, amely a folytonos függvény integrálhatósága miatt az integrálhoz konvergál, ha a felosztás finomsága tart nullához. ∎

Már említettük, hogyan próbálta meg Cauchy az 1820-as években szabatosan definiálni a határértéket. Karl Weierstrass (1815–1897) több évtizeddel későbbről származó, $\varepsilon - \delta$ formalizmusát használva, azt mondhatjuk, a konvergens $\{a_n\}$ valós sorozatnak a valós a szám a határértéke, ha tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ valós számhoz található egy olyan N_ε természetes szám, hogy az N_ε-nál nagyobb indexű a_n tag eltérése a határértéktől abszolút értékben kisebb, mint ε:

$$|a_n - a| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad n > N_\varepsilon.$$

Cauchy azt is tudta (vö. Cauchy-kritérium), hogy a valós számok esetében a határérték létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ valós számhoz található legyen egy olyan N_ε természetes szám, hogy az N_ε-nál nagyobb indexű bármely két tag eltérése abszolút értékben kisebb legyen, mint ε:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \qquad \text{ha} \qquad m,n > N_\varepsilon.$$

Most bemutatunk egy egyszerűbb bizonyítást a 2.7. tételre.

8.5. példa. Jelölje a d átmérőjű kör területét $t(d)$, és a beírt n-oldalú szabályos sokszög területét $s_n(d)$. Mivel $t(d) = \lim_{n\to\infty} s_n(d)$ és $s_n(d) = d^2 s_n(1)$, ezért $t(d) = \lim_{n\to\infty} d^2 s_n(1) = d^2 \lim_{n\to\infty} s_n(1) = d^2 t(1)$.

A szabatosságnak azonban ára van. Például az összetett függvény deriváltjáról szóló, heurisztikusan triviális 5.2. tétel két szabatos, 1–1 oldalas bizonyítása meglehetősen bonyolult (vö. Laczkovich–T. Sós, 2005, 234–236. o.).

Összefoglalóan elmondhatjuk, hogy minden hibája ellenére, Cauchy volt az, aki elsőként körvonalazta az analízis épületének tervrajzát. Visszatérve a klasszikus görög matematikai szigorhoz, a definíciók–tételek–bizonyítások sorozataként fogalmazta meg az analízist.

Cauchy azonban még képtelen volt helyesen definiálni a valós szám fogalmát az 1820-as években, mert körkörös definíciót adott: „egy irracionális valós szám az őt közelítő racionális számok határértéke". Csak több évtizeddel később – másokkal együtt – 1872-ben Richard Dedekind (1831–1916) jutott el az egyik helyes definícióhoz: akárhogyan osztjuk ketté A és B osztályba a racionális számok halmazát úgy, hogy az A osztály bármelyik eleme kisebb legyen a B osztály bármelyik eleménél, egyetlenegy valós számot definiál e *vágás*. Vagy $\sup A$ vagy $\inf B$ létezik. Ha A-nak van legnagyobb eleme, vagy B-nek van legkisebb eleme, akkor a vágás eredménye egy racionális szám. Egyébként azonban egy irracionális valós számhoz jutunk. Belátható (vö. Rudin, 1964, 1. fejezet), hogy az így definiált valós számok a szokásos műveletekkel és rendezéssel rendezett testet alkotnak, amelyre érvényesek a valós analízis tételei. Felhívjuk az Olvasó figyelmét, hogy a vágás definíciója milyen közel áll Eudoxosz arányelméletéhez (2.6. alfejezet)!

A többoldalas teljes leírás helyett (lásd Smith, 1929, 35–45. o. vagy Fauvel–Gray, 1987, 572–577. o.) megelégszünk néhány definíció és tétel kimondásával.

Definíció. Egy S rendezett halmaz *felsőhatár-tulajdonságú*, rövidítve: *fh-tulajdonságú*, ha bármely nem üres és felülről korlátos E részhalmazának van felső határa: $\sup E$ létezik. Hasonlóan, az *ah-tulajdonságú* halmazra $\inf E$ létezik.

Könnyen belátható, hogy a racionális számok Q halmaza nem fh-tulajdonságú, de a valós számok R halmaza igen.

8.4. feladat. Igazoljuk (akár a babiloni négyzetgyökvonási algoritmussal), hogy nincs a $\sqrt{2}$-nél nagyobb racionális számok közt legkisebb, azaz a $\sqrt{2}$ nem racionális szám!

Az fh- és az ah-tulajdonság ekvivalenciájáról szól a

8.7. tétel. *Egy fh-tulajdonságú halmaz ah-tulajdonságú is.*

A *valós számok*at konstruálja meg a

8.8. tétel. *Létezik fh-tulajdonságú R rendezett test, és ez nyilvánvalóan valódi résztestként tartalmazza a Q testet.*

Megjegyzések. 1. Mivel Q részteste R-nek, a racionális számokkal végzett R-beli műveletek eredménye megegyezik a Q-beli eredménnyel.

2. Mai szemmel nézve az egyik lehetőség az axiomatikus felépítés, ahol igazolandó, hogy az axiómarendszer ellentmondásmentes, például úgy, hogy megadunk egy modellt.

A másik lehetőség: megadunk egy struktúrát a végtelen tizedestörtekkel, bevezetjük az alapműveleteket és relációkat, és igazoljuk, hogy ez megfelel a kívánalmaknak.

Történelmi érdekesség, hogy már az ókoriak is pedzegették a valós számok következő tulajdonságát.

8.9. tétel. *(Arkhimédészi tulajdonság.) Ha x,y két pozitív szám, akkor van olyan n pozitív egész, amelyre $nx > y$.*

Bizonyítás. Indirekt. Legyen $A = \{nx\}_{n=1}^{\infty} \le y$. Ekkor A-nak van felső határa: $\alpha = \sup A$. Mivel $x > 0$, ezért $\alpha - x < \alpha$, tehát van olyan n egész, amelyre $\alpha - x < nx$. Azaz $\alpha < (n+1)x \in A$, ellentmondás. ∎

Visszatérve Szőkefalvihoz (1965, 14–15. o.): „[Bernhard] Bolzano [(1781–1848)] volt az első, aki [1834-ben] példát szerkesztett mindenütt folytonos, de sehol sem deriválható függvényre, ezt a példát azonban nem közölhette.” [Bolzano pap volt, és szokatlan vallási nézetei miatt a felettesei nem nézték jó szemmel matematikai kutatásait sem.] „Weierstrass 1861-től kezdve előadásaiban, 1872-ben pedig egy dolgozatában taglalta a kérdést, s egy nevezetes példát közölt ....; ez a példa véget vetett azoknak az ismételt kísérleteknek, amelyek célja az volt, hogy a legáltalánosabb típusú folytonos függvények (legalábbis egyes pontok kivételével való) differenciálhatóságát bizonyítsák. Az új vizsgálati iránnyal szemben ... nagyfokú bizalmatlanság nyilvánult meg, gyakran éppen a vezető matematikai tekintélyek részéről. Henri Poincaré [(1852–1912)] így írt: ≫Régebben, ha egy új függvényt felfedeztek, ezt valami gyakorlati célból tették; ma kimondottan azért találják fel őket, hogy atyáik következtetéseire rácáfoljanak≪..... Charles Hermite (1822–1901) még erősebb szavakat használt: ≫Rémülettel és borzalommal fordulok el ettől a siralmas fekélytől: függvények, amelyeknek nincs deriváltjuk.≪” Pedig Dirichlet már korábban, 1829-ben megalkotta a róla elnevezett vad függvényt: a [0, 1] intervallumon van értelmezve, racionális számra 1, irracionálisra 0. A valóság azonban hamarosan beérte a legmerészebb matematikai eszméket is: a Brown-mozgás (amely az atomok mellett a tőzsdei árfolyamok mozgását is leírja) mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvény.

A sors meglepő fordulataként 1960 körül Abraham Robinson bevezette a nemsztenderd analízist, amely axiomatizálta Newton és Leibniz végtelen kicsiny mennyiségeit (vö. Robinson, 1966 és Csirmaz, 1999). Kezdetben sokan nagy reményeket fűztek ehhez az újításhoz, de ma már úgy tűnik, nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket.

9. KOMPLEX SZÁMOK ÉS KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

9.1. Bevezetés

A komplex számokkal már a 4.2. alfejezetben is találkoztunk, de most bővítjük a kört. A 9.2. alfejezet bemutatja, mennyire későn, csak a 19. század elején sikerült szabatosan bevezetni a komplex számokat. Igaz, ekkor szinte egy csapásra megszületett a komplex függvénytan is (9.3. alfejezet). A tárgyalásban Ribnyikov (1960) X. fejezetére támaszkodunk.

9.2. Komplex számok

A másodfokú egyenletek tanulmányozásánál, például $x^2 + 1 = 0$ megoldásánál, már találkozhatunk a kissé misztikus, *képzetes* $i = \sqrt{-1}$-gyel. Itt még a képzetes vagy általánosabban a komplex számok mint nem kívánatos elemek, a megoldások köréből kizárhatók voltak. A harmadfokú egyenlet megoldása során (4.2. alfejezet) azonban már kikerülhetetlen a használatuk, mégpedig éppen a három valós gyökű egyenlet megoldásakor. A 16. század közepétől azonban 1800-ig kellett várni, hogy a komplex számokat szabatosan tárgyalják a matematikusok.

Azt már Bombelli is felfedezte, hogy az $a+bi$-alakú komplex számokkal természetesen ugyanúgy számolhatunk, mint a valós számokkal: például tagonként összeadhatjuk őket, a disztributivitás szabályai szerint összeszorozhatjuk őket, stb. Euler azonban még 1770-ben is kételkedett „létezésükben”. Bár sokat számolt velük, még ő is elkövetett olyan elemi hibákat, mint $\sqrt{-1}\sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$, pedig a helyes eredmény $i \cdot 2i = -2$.

d'Alembert nagy lépést tett előre a komplex számok kezelésében, amikor belátta, hogy a komplex számok halmaza zárt az négy alapműveletre és a hatványozásra, például $(a + bi)^{c+di}$ felírható $e + fi$ alakban, azonban bizonyítása kiegészítésre szorult (Kline, 1972, 594. o.).

Meglepő módon sokáig kellett várni a komplex számsík felfedezésére. Pedig Girard már 1629-ben felfedezte a negatív számokat is tartalmazó, teljes számegyenest, és Wallis már 1655-ben utalt arra, hogy a képzetes számokat a valós számegyenesre merőleges egyenesen kellene ábrázolni (lásd Smith, 1929, 46–54. o.).

A komplex számsíkot azonban két amatőr matematikus fedezte föl. Az első, Caspar Wessel (1745–1818) dán földmérő, aki 1798-ban a Dán Akadémia közleményeként anyanyelvén publikálta felfedezését (lásd Smith, 1929, 55–66. o.), amelyet csak 100 évvel később vettek észre. A második, a svájci Jean Robert Argand (1768–1822), aki 1806-ban publikálta a komplex számok grafikus ábrázolásáról szóló eredményeit. Időközben Gauss is felfedezte a később róla elnevezett számsíkot, de most sem sietett eredményének publikálásával (1831).

A komplex számok trigonometrikus alakja sokat segít a megértésben. A komplex számok szorzatának abszolút értéke az abszolút értékük szorzata, a szorzat argumentuma az argumentumok összege:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)).$$

Ez a szögfüggvények ókori addíciós tételén alapul, belőle már következik a komplex számok természetes kitevőjű hatványára vonatkozó Moivre-tétel.

9.1. példa. (de Moivre, 1707/1730.) A $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ szám n-edik hatványa $z^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Jellemző, hogy maga de Moivre soha nem mondta ki képletét a fenti alakban, és 1748-ban Euler volt az első, akinél hasonló képlet szerepel (lásd Smith, 1929, 440–454. o.).

9.3. A komplex függvénytan kialakulása

A komplex függvénytan kialakulásánál az első igazi matematikai nehézséget a logaritmus negatív értelmezési tartományra való kiterjesztése okozta, amely a parciális törtekre bontással történő integrálásnál lépett fel. 1712-ben Leibniz és Johann Bernoulli azon vitatkozott szenvedélyesen, hogy pozitív x esetén $\log(-x)$ valós-e (Bernoulli) vagy komplex (Leibniz). A hosszadalmas vita még a kezdeményezők halála után sem ült el, amikor 1749-ben Euler felfedezte, hogy a $\log(-1) = i\pi$, de általánosabban: $\log(-1) = i(2k+1)\pi$, ahol k tetszőleges egész (vö. 9.1. tétel következmény).

A következő tétel levezethető az exponenciális függvény komplex változós hatványsorából, amelyet 1748 körül vezetett be Euler:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k. \tag{9.1}$$

9.1. tétel. *(Euler, 1727/1739.) Az exponenciális és a trigonometrikus függvények között fennáll a következő azonosság:*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad \text{ahol} \qquad \varphi \qquad \text{valós (vagy komplex) szám.}$$

Következmény. $e^{i\pi} = -1$.

Bizonyítás. Helyettesítsük be a (9.1) hatványsorba az $i\varphi$ képzetes értéket. Figyelembe véve az $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ és $i^4 = 1$ összefüggéseket és a trigonometrikus függvények hatványsorát, adódik a tétel. ∎

Megjegyzés. Gingyikin (2000, 237. o.) megjegyzi, hogy valójában bonyolultabb volt a felfedezés útja. Az 5.1. példában említett integrálási feladatban a parciális törtekre bontáskor

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

adódik, amit formálisan integrálva a bal oldalon az arkusz tangens függvényt kapjuk, a jobb oldalon viszont képzetes argumentumú logaritmust:

$$\arctan x = \frac{1}{2i} \log \frac{x-i}{x+i}.$$

Newton egyik legkiemelkedőbb társa, Roger Cotes (1682–1716) hasonló gondolatmenetet követve, már 1715-ben heurisztikusan közel jutott az Euler-képlethez.

9.1. feladat. Részletezzük a számolást, és bizonyítsuk be, hogy a legutolsó képletből következik az Euler-képlet!

A (9.1) képlet egyebek mellett lehetővé tette a 6. fejezetben említett lineáris differenciálegyenletek általános tárgyalását.

A komplex függvénytan felé vezető úton – Stillwell (1989, 179–180. o)-t követjük ismertetését követjük. Kezdjük az egykori csodagyerek, Alexis Claude Clairaut (1713–1765) fontos lépésével. 1740-ben a Föld alakját vizsgálva (vö. 7.4. alfejezet) egy (x,y)-síkbeli erőteret modellezett, és észrevette, hogy a (P,Q) konzervatív erőtérben, ahol az energia megmarad, a $Pdx + Qdy$ elemi munka integrálja akkor és csak akkor független az úttól, ha a mennyiség teljes differenciál

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

azaz

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{és} \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

valamint P,Q kielégíti a következő egyenletet:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

1752-ben hidrodinamikai feladatok tanulmányozásánál d'Alembert hasonló feladatot vizsgált, csak erő helyett sebességeket tekintett. Ekkor stacionárius és örvénymentes áramlásokra szorítkozva a fenti egyenlet megmarad, de kiegészül a folyadék összenyomhatatlanságát kimondó második feltétellel:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

d'Alembert észrevette, hogy érdemes a két skalár–vektorfüggvényt egy komplex-komplex függvénybe egyesíteni. Csak be kell vezetni a komplex változós függvények differenciálását. Mivel a komplex számokkal ugyanúgy oszthatunk, mint a valósakkal, a definíció egyszerű. Egy $f(z)$ komplex–komplex függvény a z pontban deriválható (más néven *reguláris vagy holomorf*), ha egy T tartományban létezik az

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

határérték.

Az örök vetélytárs, Euler azt is észrevette, hogy a deriválhatóság tanulmányozásához érdemes a függvény független és függő változójának valós és képzetes részének megkülönböztetni. Legyen

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) \tag{9.2}$$

a tekintett függvény, ahol x,y valós változó és u,v valós változós, valós értékű függvény. Sőt, igazolta a követőiről elnevezett tételt.

9.2. tétel. *(Cauchy–Riemann feltétel.) Egy komplex változós, komplex értékű függvény akkor és csak akkor deriválható a z pontban, ha ott teljesül*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Bizonyítási ötlet. Szükségesség. Legyen $\Delta z = t$ valós, ekkor $f'(z) = u'_x + iv'_x$. Legyen $\Delta z = it$ képzetes, ekkor $f'(z) = -iu'_y + v'_y$. Két komplex szám csak akkor egyenlő, ha valós, illetve képzetes részei megegyeznek: $u'_x = v'_y$ és $v'_x = -u'_y$.

Elégségesség. Felírjuk a $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ függvény valós és képzetes differenciáljait:

$$du = u'_x dx + u'_y dy \qquad \text{és} \qquad dv = v'_x dx + v'_y dy.$$

Ebből behelyettesítéssel adódik az f függvény differenciálja:

$$df = du + idv = u'_x dx + u'_y dy + iv'_x dx + iv'_y dy.$$

Összevonva a dx és a dy együtthatóit és felhasználva a Cauchy–Riemann feltételt, adódik az állítás:

$$df = (u'_x + iv'_x)(dx + idy).$$

∎

Valós integrálokat komplex függvények segítségével először Euler értékelt 1776-tól kezdve. A valóshoz hasonlóan definiálható a komplex síkon a vonalintegrál és a körintegrál, jele: $\int_C$ és $\oint$. Központi jelentőségű a következő tétel:

9.3. tétel. *(Cauchy, 1822.) Egy egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett reguláris függvény körintegrálja 0.*

Megjegyzés. Ha egy függvény körintegrálja nulla, akkor két pont közti integrálja független a választott úttól.

Bizonyítás. Írjuk föl a körintegrálban az integrandust valós és képzetes összetevője összegeként:

$$\oint f(z)\,dz = \oint [u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy] + i \oint [v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy].$$

Clairaut-tételénél láttuk, hogy

$$\oint P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

pontosan akkor teljesül, ha $P'_y = Q'_x$. A Cauchy–Riemann-feltétel szerint tehát mindkét integrál 0. ∎

A komplex sík egy U nyílt halmazán *analitikus*nak neveznek egy f függvényt, ha az U halmaz minden z_0 pontjában lokálisan hatványsorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n.$$

Azt könnyű belátni, hogy minden analitikus függvény differenciálható, de jóval nehezebb igazolni az állítás megfordítását: minden differenciálható függvény analitikus.

Laplace 1782–1812 között az állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldására és általában az integrálás megkönnyítésére bevezette a később róla elnevezett *Laplace-transzformációt*, amely egy „jól viselkedő” f függvényhez az

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

függvényt rendeli. Először csak valós s-re definiálta, de később komplex s-re is kiterjesztette a transzformált értelmezési tartományát.

Siméon-Denis Poisson (1781–1840) észrevette, hogy a feladat visszafelé is értelmes: adott F függvényhez megtalálható:

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(t)e^{st}ds,$$

ahol a elég nagy valós szám.

Kikapcsolódásul megemlítjük a Laplace-transzformált közvetlen közgazdaságtani jelentését és szerepét a differenciálegyenletek megoldásában.

9.2. példa. Legyen $f(t)$ az egyén t időpontbeli kiadása, és s az időben változatlan, de infinitezimális időszakra vonatkozó kamatláb, akkor $F(s)$ a kiadási pályának a 0 időpontra vonatkozó *jelenértéke*. Ez az az összeg, amelyre akkor lenne szükség, ha az egész életpályán jelentkező összes kiadást a 0 időpontban, egy összegben, előre kellene kifizetni. Ez a fogalom segít a (9.3) differenciálegyenlet megoldásában. Tegyük föl, hogy a $t = 0$ időpontban világra jött, és végtelen élettartamú fogyasztó A_0 vagyonnal születik, amelyet élete folyamán felél: $A_0 = F(s)$. Tetszőleges pozitív T időpontbeli $A(T)$ vagyonát a

$$\dot{A} = sA - f \tag{9.3}$$

differenciálegyenlet határozza meg: valóban, egy pillanat alatt a vagyonváltozás egyenlő a tőkekamat és a fogyasztás különbségével. A jelenérték segítségével közgazdaságilag $A(T)$ könnyen meghatározható: a vagyon jelenértékének változása $[0,T]$ időszakban egyenlő a fogyasztás jelenértékével, azaz

$$A_0 - A(T)e^{-sT} = \int_0^T f(t)e^{-st}dt.$$

Végül megemlítjük az algebra alaptételét.

9.4. tétel. *(Gauss, 1801.) Minden n-edfokú komplex együtthatós polinomnak multiplicitással számolva n számú gyöke van.*

Gauss bizonyításának alapgondolata legegyszerűbben a következőképpen szemléltethető (Boyer, 1968/1991, 498–499. o.): tekintsük a $z^2 - 4i = 0$ egyenletet, és keressük a gyököket $z = a + bi$ alakban, ahol a és b valós számok! Mivel $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, a komplex egyenlet (valós és képzetes része) két valós egyenletre egyszerűsödik: $a^2 - b^2 = 0$ és $ab - 2 = 0$. Az első egyenletből ($a + b = 0$ vagy) $a - b = 0$, egy egyenes egyenlete; a második egyenlet egy derékszögű hiperbola(pár) egyenlete. Könnyen belátható, hogy a hiperbolának és a releváns egyenesnek egy-egy metszéspontja van.

Gauss maga további három bizonyítást adott e tételre, (a másodikat lásd Smith, 1929, 292–306. o.). Napjainkban a tételt legelegánsabban Rouché tételével bizonyítják.

10. EULER ÉS A MODERN SZÁMELMÉLET

10.1. Bevezetés

A számelmélet a természetes számok oszthatósági tulajdonságaival foglalkozik. A 2.4. és a 4.5. alfejezetben rendre az ókori és a 17. századi kezdeteket érintettük. Ebben a fejezetben azt körvonalazzuk, hogyan nőtt ki a modern számelmélet Euler munkásságából. A 10.2. alfejezetben Euler számelméleti eredményeiből válogatunk. A 10.3. alfejezetben néhány további fejleményt ismertetünk. Magyar nyelvű számelméleti könyvek közül Freud–Gyarmati (2000) munkájára és Gingyikin (2001) népszerűsítő könyvének megfelelő fejezetére támaszkodunk, de ajánljuk a már hivatkozott Weil (1983) könyvet is.

10.2. Euler számelméleti eredményeiből

A 4.5. alfejezetben már tárgyaltuk a kis Fermat-tételt (4.5. tétel) és a Fermat-sejtést (1637). Meglepő módon ezek az eredmények 1727-ig nem sok figyelmet keltettek. A 20 éves Euler figyelt fel elsőként Fermat halála után kinyomtatott munkáira. Euler számelméleti érdeklődését az egyébként jelentéktelen Christian Goldbach (1690–1764) keltette fel, s ezt az érdeklődését hősünk egész életében megőrizte. Goldbach nevét a máig megoldatlan Goldbach-sejtésről ismerjük:

10.1. sejtés. *(Goldbach, 1742.) Bármely 2-nél nagyobb páros szám felbontható két prímszám összegére.*

Euler kortársai némileg megütköztek a korban szokatlan érdeklődés miatt. Ahogyan Daniel Bernoulli 1778-ban írta Euler egyik tanítványának: „Nem gondolja-e, hogy túl sok figyelmet szentelnek, már megbocsásson, az egyszerű számoknak, elpazarolva rájuk annyi erőt...?” (Gingyikin, 2001, 220. o.)

Euler 1732-ben ötletes számolással megmutatta, hogy Fermat-nak a primekről szóló sejtése már $n = 5$-re sem igaz, mert az F_5 osztható 641-gyel. (Különben ez volt Fermat egyetlen hamis sejtése.) Szintén Euler látta be a 2.6. tétel megfordítását: más páros tökéletes szám nincs. Azt viszont még ma sem tudjuk, hogy van-e páratlan tökéletes szám.

Még ennél is fontosabb volt a kis Fermat tétel általánosítása, amelyhez Euler bevezette a $\varphi(n)$ függvényt: természetes n-re $\varphi(n)$ az $1, 2, \ldots, n$ számok közül az n-hez relatív prímek számát adja.

10.1. tétel. *(Fermat–Euler-tétel, 1737.)*

$$(a,m) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Megjegyzés. Ez a tétel valóban általánosítja a 4.5. tételt, mert $m = p$ esetén $\varphi(p) = p - 1$, és $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$-ből $(a,p) = 1$-re a-val való szorzással következik $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Bizonyítás. Legyen r_i, $i = 1, \dots, \varphi(m)$ egy redukált maradékrendszer (mod m), azaz olyan számok, amelyek különbsége nem osztható m-mel, de minden redukált maradékosztály szerepel köztük. Mivel $(a,m) = 1$, $\{ar_i\}$ is redukált maradékrendszer (mod m). Ezért minden i-hez létezik olyan j, amelyre $ar_i \equiv r_j \pmod{m}$. Összeszorozva a kongruenciákat, és kihasználva, hogy a két oldalon ugyanazon maradékok permutációi állnak,

$$a^{\varphi(m)} r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)} \equiv r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)} \pmod{m},$$

és egyszerűsítve az m-hez relatív prím $r_1 r_2 \cdots r_{\varphi(m)}$-mel, adódik az eredmény. Figyelemre méltó, hogy az általánosítás csírája fellelhető Fermat-nál is. ∎

Külön szólunk a Fermat-sejtés igazolásáról $n = 3$-ra, mert ez új utat nyitott a számelméletben.

10.2. tétel. *(Euler, 1770.) Az $x^3 + y^3 = z^3$ egyenletnek nincs pozitív egészekre megoldása.*

Kiindulásul az $x^3 + y^3 = z^3$ egyenlet következő átrendezése szolgált: $x^3 = z^3 - y^3 = (z - y)(z^2 + zy + y^2)$. Bevezetve az egyik harmadik primitív egységgyököt:

$$\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

a $z^2 + zy + y^2 = (z - y\omega)(z - y\omega^2)$ felbontáshoz jutunk, azaz

$$x^3 = z^3 - y^3 = (z - y)(z - y\omega)(z - y\omega^2).$$

Euler úttörő lépése az volt, hogy kidolgozta az ún. *Euler-egészek* számelméletét, és ennek segítségével megmutatta, hogy a harmadfokú Fermat-egyenletnek az $a + b\omega$ Euler-egészek körében sincs megoldása. Ez lehetne nehezebb is, mint az eredeti feladat, de valójában könnyebb, mert itt érvényes a számelmélet alaptétele, azaz alkalmazható a felbontás egyértelműsége (Freud–Gyarmati, 2000, 323–331. o.)

Euler nemcsak algebrai, hanem analitikus módszereket is alkalmazott szerteágazó számelméleti vizsgálataiban. Az analitikus megközelítés forradalmi újdonságára maga Euler világított rá (Gingyikin, 2001, 225. o.): „Annak ellenére, hogy itt az egész számokat vizsgáljuk, és ebben a végtelen kis mennyiségekkel való számolás nem tűnik alkalmazhatónak, következtetéseimhez mégis a differenciálás és egyéb cselfogások segítségével jutottam."

A rövidség kedvéért mindössze két analitikus eljárását vázoljuk.

Az elsőben Euler merészen bevezette a (később Riemannról elnevezett) *zéta-függvényt* (vö. 8.1. tétel):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad s > 1 \qquad \text{valós.}$$

A 8.2. alfejezetben már láttuk Euler vakmerőségét a $\zeta(2)$ kiszámításában. Ugyanezt tükrözi a

10.3. tétel. *(Euler, kb. 1744.) A zéta-függvény előállítható végtelen szorzatalakban:*

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

ahol a végtelen szorzat minden prímre kiterjed.

Bizonyítás. (Heurisztikus.) A végtelen mértani sor összegképlete szerint a szorzat p-tényezője $\sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}$. A végtelen sorok szorzatában éppen

$$n^{-s} = \prod p^{-\alpha(p)s}$$

az n szám kanonikus előállításának $-s$-edik hatványa. ∎

E gondolatmenet szabatossá tétele után a következő tételt kapjuk.

Következmény. *(Euler, 1744). Az első n prímszám reciprokának összegére igaz a következő kétoldali becslés:*

$$\log\log n - 2 < \sum_{p \le n} \frac{1}{p} < \log\log n + c.$$

Megjegyzés. Az állítás alsó becslése újra bizonyítja a prímek végtelenségéről szóló 2.4. tételt, hiszen véges sok prím esetén a fenti összeg is véges volna, viszont a nála kisebb $\log\log n$ végtelenhez tart (Freud–Gyarmati, 2000, 190–196. o.).

Sőt, Euler azt is kitapogatta, hogy érvényes a következő összefüggés:

$$\zeta(1-s) = 2(2s)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s)\zeta(s),$$

ahol

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\, dx, \qquad s \ge 1$$

az Euler-féle Gamma-függvény, amely a faktoriálist általánosítja természetes számokról pozitív valós számokra.

Egyenlőségünkkel a zéta-függvény értelmezése kiterjeszthető az 1-nél kisebb valós részű komplex számokra is. Könnyen látható, hogy az új tartományon végtelen sok triviális negatív gyök található: $s_k = -2k$, $k = 1, 2, \ldots$.

10.1. feladat. Igazoljuk, hogy $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$!

A második eljárás az additív számelmélet körébe tartozik (vö. Freud–Gyarmati (2000) 339–342. o., Weil (1983) 276–283. o. és Gingyikin (2001) 232–233. o.). Két kombinatorikusan definiált mennyiséget akart Euler meghatározni: a) hányféleképp lehet egy k természetes számot egymástól különböző természetes összeadandók összegére felbontani: jele a_k; b) hányféleképp lehet egy k természetes számot páratlan összeadandók összegére felbontani: jele b_k. Egyik esetben sem vagyunk tekintettel a felbontás sorrendjére, vagyis a partíciók számát keressük. Euler belátta, hogy a két sorozat azonos, és közvetett módon megadta a sorozat kiszámítási szabályát.

A 6.1. feladatban már találkoztunk egy tetszőleges $(a_n)_n$ sorozat *generátorfüggvény*ével , az

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

formális hatványsorral, $a_0 = 1$. Euler a következő megfigyeléseket tette:

10.4. tétel. *(Euler, 1740 után). A fenti két sorozat generátorfüggvénye rendre*

$$A(x) = \prod_k (1 + x^k) \qquad \text{és} \qquad B(x) = \frac{1}{\prod_k (1 - x^{2k-1})},$$

valamint a két hatványsor azonos: $A(x) = B(x)$, tehát a két sorozat is azonos: $a_n = b_n$ minden n-re.

Megjegyzés. A módszer erejére jellemző, hogy csak 1850 körül sikerült közvetlen kombinatorikus bizonyítást adni e kombinatorikai tételre.

Bizonyítás. Az $A(x)$ végtelen szorzatban a beszorzásokat elvégezve, az a_n együttható annyi 1-es összege, ahány „a”-felbontás létezik. A $B(x)$ függvény nevezőjében szereplő végtelen szorzat k-adik tényezője a végtelen mértani sor képlete szerint $\sum_{i=0}^{\infty} x^{(2k-1)i}$, tehát a végtelen szorzatban a beszorzásokat elvégezve, a b_n együttható annyi 1-es összege, ahány „b”-felbontás létezik. $|x| < 1$ esetén mindkét hatványsor konvergens.

Most már csak a két függvény azonosságát, azaz

$$\prod_k (1 + x^k) = \frac{1}{\prod_k (1 - x^{2k-1})}$$

egyenlőséget kell igazolni. Először szorozzuk be a bal oldal első tényezőjét a jobb oldal nevezőjének első tényezőjével: $(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$-et kapjuk, majd beszorozva a bal oldal második tényezőjével, $1 - x^4$-et kapjuk. Másodszor szorozzuk be a bal oldal harmadik tényezőjét a maradék jobb oldal első tényezőjével: $(1+x^3)(1-x^3) = 1-x^6$-ot kapunk, stb. ∎

10.2. feladat. Bizonyítsuk be a generátorfüggvény-módszerrel, hogy a sorrendtől eltekintve, minden egész szám pontosan egyféleképp állítható elő különböző 2 hatványainak összegeként!

Végül egy nevezetes irracionalitási eredmény.

10.3. feladat. (Euler, 1737.) Igazoljuk az e hatványsoros alakjával, hogy az e irracionális szám!

Jóval nehezebb volt Johann H. Lambertnak (1728–1777) igazolnia tételét 1770-ben a π irracionalitásáról (a Freud–Gyarmati (2000, 396–398. o., 9.5.2. tétel) szereplő kétoldalas bizonyításban integrál is szerepel).

10.3. További fejlemények

Nem célunk számelmélet-történetet írni, ezért csak olyan fejleményekre utalunk, amelyek a jegyzetben már előadottakkal közvetlen kapcsolatban vannak.

Euler különböztette meg elsőként az *algebrai számok*at, amelyek valamilyen (nullától különböző) egész együtthatós polinom gyökei, illetve a *transzcendens számok*at, amelyek semmilyen egész együtthatós polinomnak nem gyökei. Tőle származik az elnevezés, ti. hogy a transzcendens számok meghaladják az algebra hatókörét. Legendre azt sejtette, hogy a π transzcendens, de sokáig semmi bizonyosat nem tudtak ilyen számok létezéséről. Joseph Liouville (1809–1882) 1844-ben konstruált ilyen számokat, például $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$ – kihasználva, hogy egy n-edfokú algebrai szám $1/s^n$-nél jobban nem közelíthető s nevezőjű törtekkel (Freud–Gyarmati, 2000, 389–392. o., 9.4.2 és 9.4.1. tétel).

További évtizedekre volt szükség, amíg Hermite 1873-ban belátta, hogy az e transzcendens (lásd Smith, 1929, 99–106. o.), illetve Ferdinand Lindemann (1852–1939) 1882-ben igazolta, hogy a π transzcendens (vö. Freud–Gyarmati, 396–402. o.). Utalunk rá, hogy e legutolsó tételből következik, hogy „a kör nem négyszögesíthető", azaz euklideszi szerkesztéssel nem szerkeszthető meg egy olyan négyzet, amelynek kerülete megegyezik egy adott körével (12.2. alfejezet). Körülbelül ebben az időben Georg Cantor (1845–1918) halmazelméleti megfontolásokkal megmutatta, hogy míg az algebrai számok megszámlálhatók, addig a transzcendens nem, tehát az összes valós számok sem (lásd 12.1. feladat és Fauvel–Gray, 1987, 579. o.). Ebből egy csapásra következett, hogy vannak transzcendens számok, de a bizonyítás nem konstruktív.

Eulernak a Fermat-sejtés speciális esetére adott részbizonyítása vezette el Gausst a Gauss-egészek vizsgálatához, és döbbentette rá „a matematikusok fejedelmét", hogy a számelmélet alaptételét ki kell mondani, és bizonyítani kell: minden természetes szám egyételműen felbontható prímhatványok szorzatára.

Később további kitevőkre is igazolták a Fermat-sejtést. Ernst Kummer (1810–1893) az ideálok bevezetésével 1850 körül megmutatta, hogy hol a hiba Lamé és Cauchy korábbi bizonyításában, és jelentősen kiterjesztette a Fermat-sejtés érvényességi körét (lásd Smith, 1929, 119–126. o.). A Fermat-sejtést azonban csak 1994-ben sikerült Andrew Wiles-nak (1953–) igazolnia. (A témakörről hasznos népszerűsítő leírást ad Singh, 1997.)

Kiemeljük, hogy Freud–Gyarmati (2000) számelméleti tankönyve rengeteg történelmi utalást és pármondatos életrajzot tartalmaz a témáról.

Végül bemutatunk egy Eulertől származó sejtést, amely nagyon hasonlít a Fermat-sejtésre, és amelyet csak nemrégiben cáfoltak meg.

10.2. sejtés. *(Euler, vö. Laroche, 2004, 53. o.) Az $x^4 + y^4 + z^4 = u^4$ egyenletnek nincs természetes számokból álló megoldása.*

Ez azonban nem igaz, mert Noam Elkies 1988-ban talált egy ellenpéldát:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4.$$

Bonyolultabb a helyzet a zéta-függvénnyel. Már a 10.3. tétel következménye is megmutatja, hogy a prímszámok sűrűsége a természetes számok között aszimptotikusan nullához tart. Legyen $\pi(x)$ a prímszámok száma x-ig, tehát sűrűségük $\pi(x)/x$. Eulertől, Gausstól, Legendre-tól származik a

10.3. sejtés. *(Gauss, 1793.) A* $[2,x]$ *intervallumbeli prímszámok sűrűsége aszimptotikusan* $1/\log x$*, azaz*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Gauss $x = 3\ 000\ 000$-ig ellenőrizte a sejtés helyességét, sőt, az $1/\log x$-nél is pontosabb becslést talált. Mindenekelőtt bevezetjük a Gauss-féle *logaritmikus integrált*:

$$\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dt}{\log t},$$

amelyet a $t = 1$-ben lévő szingularitás miatt szimmetrikus improprius integrálként kell értelmezni (Cauchy-főérték). (Gauss maga 2-től indította az integrált!) Elég könnyen belátható, hogy $\operatorname{li} x \approx \log x/x$.

Laroche (2003, 58–59. o.) szerint Gauss a következő heurisztikus valószínűségszámítási meggondolással jutott el a sejtéshez. Tegyük föl, hogy a prímszámok „egyenletesen oszlanak el" a természetes számok halmazán. Ekkor az $[x,x+\delta x]$ intervallumon kb. $\pi(x)\delta x/x$ prímszám található, nagyságuk kb. x. Ez alapján, valamint a 10.3. tétel következménye és a Lagrange-középérték-tétel szerint

$$\frac{\delta x \pi(x)/x}{x} \approx \sum_{p=x}^{x+\delta x} \frac{1}{p} \approx \log\log(x+\delta x) - \log\log(x) \approx \frac{\delta x}{x \log x},$$

azaz „adódik" a sejtés.

A szentpétervári Pafnutyij Csebisev (1821–1894) a sejtésnél egy gyengébb tételt igazolt (lásd Smith, 1929, 127–148. o.).

10.5. tétel. *(Csebisev, 1848.) A* $[2,x]$ *intervallumbeli prímszámok sűrűsége osztva* $\log x$*-szel aszimptotikusan két – 1 körüli – korlát között marad:*

$$c_1 < \frac{\pi(x)}{x/\log x} < c_2,$$

ahol $0{,}922 < c_1 < 1 < c_2 < 1{,}105$.

Csebisev a zéta-függvényt alkalmazta saját bizonyításában. (Itt említjük meg, hogy ugyancsak Csebisev igazolta 1850-ben Joseph Bertrand (1822–1900) sejtését (1845), nevezetesen, hogy minden, 1-nél nagyobb természetes szám és a kétszerese között van prímszám.)

1859-ben Riemann egy zseniális nyolcoldalas cikkben vázolta a prímszámtételhez vezető utat. Bonyolultsága miatt az F2. függelékre halasztjuk a terv körvonalazását, és ott szólunk a zéta-függvény gyökeinek elhelyezkedéséről szóló nevezetes Riemann-sejtésről is. A tervet több évtizeddel később Jacques Hadamard (1865–1963) és Charles-Jean de la Vallée Poussain (1866–1962) valósította meg.

10.6. tétel. *(Hadamard–de la Vallé Poussain, 1896.) A* $[2,x]$ *intervallumbeli prímszámok sűrűsége aszimptotikusan* $1/\log x$*, azaz*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Végül megemlítjük, hogy a prímszám-tételt elemileg – komplex függvénytani eszközök alkalmazása nélkül – bizonyította Erdős Pál (1913–1996) és Atle Selberg (1917–) 1949-ben. Freud–Gyarmati (2000, 174–178. o.) gyengébb állandókkal néhány oldalas bizonyítást ad.

11. PARADOXONOK A VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁSBAN

11.1. Bevezetés

A valószínűség-számítás a Kolmogorov-féle axiomatizálás (1933) óta ugyanolyan matematikai tárgy, mint az algebra, vagy a számelmélet, de sok matematikus még mindig idegenkedve tekint rá. Ennek több oka is van: a) a valószínűség-számítás „csak valószínű” kijelentéseket tesz, b) sok paradoxon kísérte a valószínűség-számítás történetét. A 11.2. alfejezetben néhány valószínűség-számítási paradoxon bemutatásával próbáljuk meg szemléltetni e tudományág történetét, majd a 11.3. alfejezetben a nagy számok törvényeivel világítjuk meg a paradoxonok hátterét. Kiváló áttekintést nyújt a paradoxonok témaköréről Székely (2004) munkája. Magyar nyelvű valószínűség-számítási monográfia Rényi (1966). Szórakoztató, de mély írás Rényi (1967).

11.2. Paradoxonok a szerencsejátékokban

A kockadobás ősi játékszenvedély volt: már i.sz. 30 körül a római katonák is kockadobással döntötték el, kié legyen Krisztus ruhája. Érdekes módon a 16. századig a matematikusok nem foglalkoztak a szerencsejáték matematikájával. A 4.2. alfejezetben említett Cardano írta az első könyvet a témáról, de műve számos hibát tartalmaz. Az első igazi valószínűség-számítási feladatot 1654-ben Fermat és Pascal oldotta meg, egymástól függetlenül (lásd Smith, 1929, 546–565. o.). A feladat a következő volt:

11.1. példa. (de Méré lovag feladata, 1654; vö. Székely, 2004, 21–23. o.) Két játékos egy *igazságos* játszmasorozatot játszik egymással, azaz 50–50 százalék egy játszma nyerési esélye. Az nyer, aki elsőként megnyer 6 játszmát. A játék félbeszakad, amikor az első játékos már 5, a második 3 játszmát megnyert. Kérdés: hogyan osszák el a díjat egymás között? Válasz: A játék legfeljebb további 3 játszma után befejeződne, 8 egyforma valószínűségű módon. Ebből csak 1 kedvez a másodiknak, tehát a díjat 7:1 arányban kell elosztani az első és a második játékos között. A paradoxont itt az jelenti, hogy a feladatot korábban olyan kiváló gondolkodók, mint Luca Pacioli (1445–1509), vagy Tartaglia sem tudták megoldani. (Még a 18. század egyik legjobb matematikusa, d’Alembert sem értette meg 1754-ben, hogy ha két érmét dob fel, akkor 4, és nem 3 egyenlő valószínűségű elemi esemény következik be: FF, FI, IF és II.)

Egymástól függetlenül, Fermat és Pascal általánosította a feladatot: Ha az első játékosnak m, a másodiknak pedig n további játszmára van szüksége a nyeréshez, akkor az első játékos győzelmi esélye

$$p_1 = 2^{-(m+n-1)} \sum_{j=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{j}.$$

(A bizonyítás kedvéért tegyük föl, hogy a játékosok általában még a győzelem esetén sem hagyják abba a játékot, és ráadásul mind az $m+n-1$ játszmát lejátsszák. Legyen j az 1. játékos által megnyert (további) játszmák száma, ekkor $\binom{m+n-1}{j}$ azoknak a kombinációknak száma, amelyek esetén $m+n-1$ lépésből $j \geq m$-ben nyer az 1. játékos, és $j-m < n$-ben nyer a 2. játékos.)

Az érdekesség kedvéért idézzük a levelek sorszámait és dátumait: 1. Pascal első levele Fermathoz elveszett. 2. Fermat válasza Pascalnak dátum nélküli. 3. Pascal Fermatnak: 1654. július 29. a híres mondatokkal: „szeretném kinyitni a szívemet Önnek..., olyan nagy az örömöm, hogy egyetértünk. Látom, hogy az igazság ugyanaz Toulouse-ban mint Párizsban.” 4. Fermat válasza Pascalnak: 1654. augusztus 29, benne a hibás sejtés a Fermat-prímekről. 5. Fermat levele Pascalnak: 1654. szeptember 25. 6. Pascal Fermatnak: 1654. október 27.

A fejlődés ütemére jellemző, hogy az első valószínűség-számítási könyvet már 1657-ben megírta Huygens.

„J[akob] Bernoulli[nál] találkozunk először a valószínűség *definíciójával.* Bernoulli szerint a *valószínűség a bizonyosság foka és úgy aránylik a bizonyossághoz, mint rész az egészhez.* Ezen inkább filozófiai, mint matematikai definíció mellett szerepel Bernoullinál a valószínűség kombinatorikus, ún. *klasszikus definíciója* is, amely szerint [Laplace nyomán] *egy esemény valószínűsége egyenlő az eseményre nézve kedvező esetek számának és az összes esetek számának hányadosával, feltéve, hogy ezen esetek mind egyformán valószínűek*” (Rényi, 196?/2005, 165. o.).

Keletkezési helyéről kapta nevét a következő valószínűség-számítási feladat.

11.2. példa. (Daniel Bernoulli, 1735, szentpétervári paradoxon; vö. Székely, 2004, 39–42. o.) Tegyük föl, hogy egyenlő esélyű fej-vagy-írást játszunk egy kaszinóban, és minden játszmában mi választhatjuk meg a tétet. Biztos nyerést ad a következő stratégia: az első nyerésig játszunk, addig minden lépésben megduplázzuk az előző tétet. Valóban, tegyük föl, hogy a kezdő tét 1 Ft, és a k-adik játszmában nyerünk először: $x_k = 2^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$,. A mértani sor összegképlete szerint a nyeremény $-1-2-\cdots-2^{k-2}+2^{k-1}=1$, függetlenül k értékétől.

A paradoxon abban áll, hogy a játék igazságos, és mégis biztosan nyerünk, ha a tétet lépésről lépésre megfelelően emeljük. A paradoxon magyarázata a következő: ahhoz, hogy ezt a játékot lejátszhassuk, korlátlan kezdőtőkére van szükség, márpedig ilyen nagy tőkéje senkinek sincs. (Valóban, a tét várható értéke végtelen: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k = \sum_k \frac{1}{2^k} 2^{k-1} = \infty$.) Talán emiatt maximalizálják a feltehető téteket a kaszinók, pedig az ő nyerési esélyük nagyobb, mint $1/2$.

Daniel Bernoulli e játék kapcsán vezette be a Neumann–Morgenstern-féle hasznosságfüggvény (vö. 14. fejezet) elődjét: azt állította, hogy a nyeremény hasznossága a nyeremény nagyságával nem egyenesen arányosan, hanem csak logaritmikusan nő: $u(x_k) = \log_2 x_k$. Ha ez igaz, akkor a játék értéke, amennyit egy játékos hajlandó a részvételért fizetni, a várható hasznosság értéke: $p_k = 1/2^k$ annak a valószínűsége, hogy a játék a k-adik lépésben ér véget, tehát a várható hasznosság a 3.4. feladat szerint

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \log_2 x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}(k-1) = 2-1 = 1 < \infty.$$

Újabb paradoxonunk Bertrandtól származik.

11.3. példa. (Bertrand, 1888.) Három doboz közül az egyikbe véletlen választással a játékvezető elrejt egy kincset. A játékos találomra választhat a lezárt dobozok közül. A választás után azonban nincs vége a játéknak. A játékvezető megmondja a játékosnak, hogy a másik két doboz közül kinyitja az egyiket, olyant, amelyikről tudja, hogy üres. A játékos az üres doboz kinyitása után módosíthatja választását. Érdemes?

A meggondolatlan játékos azt gondolhatja, hogy mindegy, hogy mit választ, tehát nem érdemes módosítania eredeti választását. A meggondolt játékos azonban számol (lásd 11.1. tétel). Szimmetria miatt föltehetjük, hogy a játékvezető a kincset az 1. dobozba rejtette. A játékos eredetileg 1/3–1/3 valószínűséggel választotta a három doboz közül az x indexűt: $x = 1, 2, 3$. A játékvezető nem teljesen véletlen, a játékos választásától erősen függő választása $y = 1, 2, 3$, a következő feltételekkel: ha $x = 1$, akkor 1/2–1/2 feltételes valószínűséggel nyitja ki $y = 2$-t, illetve $y = 3$-t. Ha viszont $x = 2$, illetve $x = 3$, akkor a játékvezető biztosan az $y = 3$, illetve $y = 2$ dobozt nyitja ki. Ha a játékos nem változtat első választásán, akkor a találati valószínűség 1/3 marad. Ha viszont változtat, akkor $x = 1$ esetén kapott $y = \{2, 3\}$ jelzésre adott tagadó $z = \{3, 2\}$ választással biztosan veszít, viszont az $x = 2$, illetve az $x = 3$ esetén kapott $y = 3$, illetve $y = 2$ jelzésre adott tagadó $z = 1$ választással biztosan nyer, s a biztos találatok együttes valószínűsége 2/3. Érdemes tehát változtatni.

A megoldás kulcsát általánosabban Thomas Bayes (1702?–1761) fogalmazta meg, s a Wikipedia tartalmazza az eredeti bayes-i megoldást is.

11.1. tétel. *(Bayes-elv, kb. 1750; vö. Székely, 2004, 89–94. o.) Ha A és B két tetszőleges esemény, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ egyedi és $P(AB)$ együttes valószínűséggel fordul elő, akkor A-nak B, illetve B-nek A melletti feltételes valószínűsége*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \qquad \text{illetve} \qquad P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Ha $B_0, B_1, \ldots$ teljes eseményrendszer (az „okok”), akkor

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}.$$

Vagyis ha ismertek az A esemény megfigyelése előtti $P(A|B_k)$ valószínűségek, valamint $P(B_k)$ ún. *előzetes (a priori) valószínűségek*, akkor a Bayes-tétellel kiszámíthatók az A megfigyelése utáni, ún *utólagos (a posteriori)* valószínűségek: $P(B_k|A)$-k.

Bayes maga nem diszkrét, hanem folytonos valószínűségekből indult ki, és feltette, hogy az előzetes eloszlás például az $[a,b]$ intervallumon egyenletes; diszkrét esetben $P(B_k) = P(B_1)$. Bár viszonylag általános feltételek esetén igaz, hogy kellően sok megfigyelés után a ténylegesen ismeretlen előzetes eloszlás megválasztása lényegtelen, vannak olyan példák, amikor ez nem igaz.

Következik a negyedik példa.

11.4. példa. (Diszkrét idejű elágazási folyamatok, avagy ritka családnevek kihalása, Galton–Watson, 1874, vö. Székely, 2004, 165–167. o.) Tegyük fel, hogy egy adott évszázad elejétől indítjuk a folyamatot. Minden évszázad fel van osztva negyedszázadokra, és mindig a negyedszázadok elején születnek a gyerekek. Legyen $p_0, p_1, p_2, \ldots$ annak a valószínűsége, hogy egy férfinak 0, 1, 2, ... fiúgyereke születik, $0 < p_0 < 1$.

Kérdés: mi annak a valószínűsége, hogy valamikor nem születik fiú utód, azaz kihal az apai családnév? A választ a 6.1. feladatban és a 10.4. tétel előtt bevezetett generátorfüggvény adja:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \qquad |z| \le 1.$$

Tekintsük az n-edik nemzedékben azon fiúk számának az eloszlását, akik még az ősapa ritka nevét hordják. Belátható (11.1. feladat), hogy ennek az eloszlásnak a generátorfüggvénye $g_n(z) = g(g_{n-1}(z))$, ahol $g_1(z) = g(z)$. Annak valószínűsége, hogy az n-edik nemzedékben kihal a név, $q_n = g_n(0) \le 1$. Nyilvánvaló, hogy a $\{q_n\}$ sorozat monoton növekvő, ezért létezik határértéke: $q = g(q) \le 1$. Mivel $1 = g(1)$, a világhírű Francis Galton (1822–1911) és szerzőtársa, Watson, 1874-ben (tévesen) arra következtetett, hogy a ritka családnevek kihalnak. Csak az 1920-as években fedezték fel az okoskodásban a hibát: ha a születendő fiúk számának várható értéke $m = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k$ nagyobb, mint 1, akkor a $q = g(q)$ egyenletnek van egy másik megoldása is, amely kisebb mint 1, és ez a helyes megoldás. Ugyanis a $q_{n+1} = g(q_n)$ rekurziónak a $q^* = g(q^*)$ fixpont a lokálisan aszimptotikusan stabil megoldása. (Paradoxonnak tekinthető viszont, hogy az $m = 1$ esetben kihal a családnév.)

Lotka, a matematikai biológia egyik atyja, 1931-ben a $p_k = ab^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ egyenletrendszert az USÁ-ra becsülve, $a = 0{,}2126$, $b = 0{,}5893$ és $p_0 = 1 - p_1 - p_2 - \cdots = 0{,}4825$ paraméterértékeket kapta, ekkor $q = 0{,}819$ a kihalás valószínűsége.

11.1. feladat. a) Igazoljuk a függvényrekurziót! b) Mutassuk meg, hogy $q_n = g(q_{n-1})$ és keressük meg a $q^* = g(q^*)$, $q^* < 1$ nem triviális fixpont stabilitásának feltételét (vö. Rényi, 1966, 138–141. o.)!

Végül utalunk az ötödik paradoxonra, amelyben már folytonos valószínűségi változók lépnek fel.

11.5. példa. (Bertrand, 1888.) Adott egy kör, és bele van írva egy szabályos háromszög. Véletlenül elhelyezünk a körben egy húrt. Kérdés: mi a valószínűsége annak az eseménynek, hogy a húr hossza nagyobb, mint a háromszög oldala? Válasz: attól függően, hogy a húr egyik végpontját, vagy az egyik oldallal párhuzamosnak vett húr „magasságát”, vagy a húr középpontját választjuk egyenletes eloszlás szerint, a valószínűség rendre 1/3, 1/2 vagy 1/4. „A példa annak idején azért tűnt paradoxonnak, mert nem vették figyelembe, hogy a három különböző felfogásnak a húr véletlen választására vonatkozó különböző kísérleti feltételek felelnek meg, s ezek különböző ... valószínűségi mértékhez vezetnek” (Rényi, 1966, 66–68. o.).

11.3. A nagy számok törvényei

Tegyük föl, hogy egy kísérletnek két kimenetele van: sikeres p valószínűséggel, és sikertelen $q = 1-p$ valószínűséggel; $0 < p < 1$. (Például egy szabályos érme 1/2 valószínűséggel esik F-re, és 1/2 valószínűséggel I-re.) Jakob Bernoulli mérlegelte a kísérlet n-szeres ismétlését. Könnyű belátni, hogy annak valószínűsége, hogy a siker k-szor következik be,

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Innen kapta a nevét *binomiális eloszlás.*

Most megfogalmazzuk a nagy számok gyenge törvényének legegyszerűbb alakját.

11.2. tétel. *(Jakob Bernoulli, posztumusz, 1713.) Akármilyen kicsiny $\varepsilon,\delta > 0$ valós számpárhoz létezik olyan $N_{\varepsilon,\delta}$ természetes küszöbszám, hogyha a kísérletet $n > N_{\varepsilon,\delta}$-szor egymástól függetlenül megismételjük, akkor a k/n relatív gyakoriság eltérése a p valószínűségtől legalább $1-\delta$ valószínűséggel kisebb lesz, mint ε. (Például mind a fejek, mind az írások nagyjából 50–50%-ban jelentkeznek.)*

Megjegyzések. 1. Ez a tétel a nagy számok ún. *gyenge törvénye* a binomiális eloszlásra, amelyet viszonylag egyszerű eszközökkel lehet bizonyítani. A lényeg: az n-edrendű binomiális eloszlás szórása viszonylag lassan nő a kísérletek számával, hiszen $\sqrt{npq}$, s ez $\sqrt{n}$-nel arányos. Általános eloszlásra a tételt a Csebisev-egyenlőtlenséggel (francia fordítás 1867) lehet igazolni. Érdemes megjegyezni, hogy a nevezetes egyenlőtlenség Csebisevtől származó bizonyítása az alkalmatlan jelölések miatt szükségtelenül bonyolult volt (lásd Smith, 1929, 580–587. o.). Az egyes valószínűségi változókat a ma szokásos X_i helyett $x,y,z,\ldots$, diszkrét realizációjukat $x_1,x_2,\ldots,x_l$, $y_1,y_2\ldots,y_m$ és $z_1,z_2,\ldots,z_n$ jelölte. A megfelelő várható értéket $m_i = EX_i$ helyett $a,b,c,\ldots$, varianciájukat $s_i^2 = EX_i^2$ helyett $a_1,b_1,c_1,\ldots$ stb. jelölte. Bevezetve a megfelelő valószínűségeket: $p_1,p_2,\ldots,p_l$, $q_1,q_2\ldots,q_m$ és $r_1,r_2,\ldots,r_n$, Csebisev felírta a megfelelő elemi összefüggéseket és nehezen áttekinthető, több oldalas számolással levezette az egyenlőtlenséget.

2. Hosszú fejlődési folyamat egyik csúcspontjaként ezt a tételt Alekszandr J. Hincsin (1894–1959) 1934-ben általánosította tetszőleges páronként független, egyforma eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók sorozatára is (vö. Rényi, 1966, VI.3. pont, 4. tétel).

11.2. feladat. Bizonyítsuk be a 11.2. tételt!

Ha n nagy, akkor elég nehéz megbecsülni az $N_{\varepsilon,\delta}$ függvényt. Ezért fontos a gyenge törvény de Moivre-tól származó élesítése (lásd Smith, 1929, 566–575. o.).

11.3. tétel. *(de Moivre, 1733/1738.) Legyen Y_n egy n-edrendű $p = 1/2$ paraméterű binomiális eloszlású véletlen változó. Az $X_n = (Y_n/n - 1/2)/\sqrt{n/4}$ standardizált (0 várható értékű és 1 szórású) véletlen változó F_n eloszlásfüggvénye konvergál a standardizált normális eloszláshoz:*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt,$$

ahol Φ a Gauss-féle hibafüggvény.

Megjegyzések. 1. Ez a tétel valóban élesebb, mint a gyenge törvény, hiszen a

$$\Phi(x_n) - \Phi(-x_n) = 1-\delta, \qquad x_n = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{4}}$$

egyenlőségpár aszimptotikus felvilágosítást nyújt $N_{\varepsilon,\delta}$-ról.

2. Ezt a tételt $p = 1/2$-ről tetszőleges p-re, sőt diszkrét egyenletes eloszlásra Laplace általánosította, ezért sokszor Moivre–Laplace-tételnek is nevezik (lásd Smith, 1929, 588–604. o.). Ez annyiban is jogos, hogy a tételt Laplace vitte sikerre. Emellett még Gauss neve is megjelenik, nyilván nem érdemtelenül.

A bizonyítás megtalálható Rényi (1966) III.16. pontjában, és lényeges módon felhasználja az F.1. feladatban kitűzött Stirling-formulát.

A klasszikus valószínűség-számítás alaperedményeiből végül megemlítjük a statisztika egyik legfontosabb alapelvét, *legkisebb négyzetek módszerét*, amelyet Gauss és Legendre fedezett fel, nagyjából egy időben, 1800 körül, akárcsak a prímszámsejtést.

11.4. tétel. *(Legendre, 1805). Legyen* $E = a + bx + cy + fz + \text{stb.}$ *egy statisztikus összefüggés, ahol* a,b,c,f *állandók, és* x,y,z *pedig valószínűségi változók. Ha a hibanégyzet várható értékét akarjuk minimalizálni, akkor a következő egyenleteknek kell teljesülniük:*

$$0 = \int ab + x\int b^2 + y\int bc + z\int bf + \text{stb.},$$

$$0 = \int ac + x\int bc + y\int c^2 + z\int cf + \text{stb.},$$

$$0 = \int af + x\int bf + y\int cf + z\int f^2 + \text{stb.}.$$

Talán nem meglepő, hogy Legendre megadta az elv két fontos speciális esetét: 1) az egyváltozós speciális esetet, amikor is a megfigyelések átlaga minimalizálja a négyzetes hiba várható értékét, 2) a mechanikai analógiát is, amikor a tökéletlen megfigyelésektől való minimális négyzetes eltérést a tömegközéppont adja.

Most ugrunk egy nagyot előre az időben, és a valószínűség-számítás axiomatizálásával kapcsolatban ismét Rényit (196?/2005, 166–168. o.) követjük. Természetesen a valószínűség klasszikus definíciója körkörös, hiszen a valószínűség a nevezőben is megjelenik, és a definíció a szereplő alapeseteket egyenlően valószínűnek tekinti. A 17–18. században jól megfelelt mind az elméletnek, mind a gyakorlatnak ez a definíció, hiszen ebben az időben „a számfogalom, a függvény vagy a határérték sem volt mai értelemben igazán tisztázott, de akkoriban ennek hiányát sem érezték. Gyökeresen megváltozott azonban a helyzet a 19. században, amikor a matematika és a matematikai szabatosság fogalma alapvető átalakuláson ment keresztül.” Kialakult a matematika formalista, axiomatikus felfogása. „Ebből a nagyszabású átalakulásból ... a valószínűség-számítás meglepően sokáig, egészen a 20. század kezdetéig kimaradt.... Ez a lemaradás ahhoz vezetett, hogy a 20. század elején a matematikusok zöme a valószínűség-számítást nem is fogadta el a matematika szerves részének, egyenrangú ágának, hanem a matematika és a fizika, illetve filozófia között közbenső helyet elfoglaló és meglehetősen kétes értékű tudományágnak tekintette. David Hilbert (1862–1943) már 1900-ban felismerte e lemaradás káros voltát, és ezért a matematika legaktuálisabb megoldatlan feladatainak a listájára felvette a valószínűség-számítás axiomatikus megalapozásának a problémáját. ...[Ezt] kielégítően elsőnek A[ndrej] N. Kolmogorov [(1903–1987)]... oldotta meg 1933-ban. [A]... Kolmogorov-féle elméletben a véletlen eseményeket halmazok reprezentálják, és a valószínűség egyszerűen ezeken a halmazokon értelmezett normált [Lebesgue-] mérték.” Ez a megalapozás nemcsak logikailag kielégítő, de egyben össze is kötötte a valószínűség-számítás és a matematika egyéb területeinek a fejlődését.

A nagy számok legélesebb törvénye az ún. *erős törvény*, amelyet a legegyszerűbb alakjában fogalmazunk meg.

11.5. tétel. *(Kolmogorov, 1930.) Ha a teljesen független és egyforma eloszlású,* $\{X_k\}$ *valószínűségi változóknak van várható értéke és szórása, akkor a sorozatukkal képzett* $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$ *számtani közép majdnem biztosan tart a közös várható értékhez.*

Megjegyzések. 1. A gyenge törvény csak azt mondja ki, hogy adott kísérletszámnál azoknak az eseményeknek a halmaza, ahol a relatív gyakoriság eltérése nagyobb

ε-nál, tart nullához. De nem mond semmit sem arról, hogy miképp változik e „rossz” halmaz a kísérletszám függvényében. Az erős törvény ezzel szemben azt mondja ki, hogy az *aszimptotikusan* rossz halmaz mértéke nulla.

2. A mértékelméleti bizonyítást lásd Rényi (1966, VI.7. pont, 1. tétel). Itt egy meglepő példán szemléltetjük a tételt, amely egyben rávilágít a valószínűség-számítás mértékelméleti hátterére is. Ezt a tételt egyébként már 1909-ben ismerte Émile Borel (1871–1956).

11.5. példa. A [0, 1] szakasz tizedes törtjeit kettes számrendszerben felírva, legyen X_k valószínűségi változó értéke a k-adik jegy, $k = 1, 2, \ldots$. Erre a sorozatra a nagy számok erős törvénye teljesül: az 1-esek relatív gyakorisága 1 valószínűséggel 1/2. Valóban, legyen $\omega = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ egy tetszőleges végtelen 0–1-sorozat, s legyen ezek halmaza $\Omega = [0, 1]$. Véges, m számú x_k értékét rögzítve, a keletkező hengerhalmazok valószínűsége $1/2^m$. Kolmogorov alaptétele szerint ez a klasszikus mérték kiterjeszthető az egész valószínűségi mezőre σ-additív valószínűségként stb.

Megemlítjük, hogy ha f és g két valószínűségi változó, akkor a 8.3. alfejezetben definiált hajlásszög éppen a két változó korrelációs együtthatóját adja.

12. LEHETETLENSÉGI TÉTELEK

12.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben több olyan kérdéskörrel foglalkozunk, amelyekre a végleges válasz nemleges. Itt a kérdések nehézsége miatt a korábbiaknál is vázlatosabb ismertetésre szorítkozunk. A következő kérdéskörökkel foglalkozunk. A 12.2. alfejezetben: megoldhatók-e algebrailag az ötödfokú egyenletek? A 12.3. alfejezetben: megszerkeszthető-e euklideszi módon a szabályos hétszög? A 12.4. alfejezetben: következik-e a párhuzamossági axióma a többi axiómából? A 12.5. alfejezetben: van-e olyan halmaz, amelynek a számossága nagyobb a megszámlálhatónál és kisebb a kontinuumnál?

12.2. Megoldhatók-e algebrailag az ötödfokú egyenletek?

A 4.2. alfejezetben részletesebben körvonalaztuk, hogy 1540 körül szinte egyszerre találták meg a harmad- és a negyedfokú egyenlet megoldóképletét. Ezután több mint két évszázadig sikertelen próbálkozások következtek, míg végül 1770–1830 között a matematikatörténet egyik legszebb fejezeteként kiderült, hogy az ötöd- és a magasabb fokú egyenletek általában nem oldhatók meg. Szakszerű tárgyalást ad Fried (1981/1989, 7. fejezet), mi viszont Gingyikin (2001, 272–276. o.) népszerűsítő és történeti elemzését követjük. Zárásul egy rövid csoportelméleti történetleírást adunk.

Az első lépés Tschirnhaustól származott, akinek „...sikerült olyan helyettesítést találnia, amely az általános n-edfokú egyenletet $y^n+a=0$ alakú, két tagból álló egyenletté alakítja át.... Ez a helyettesítés az ismert képletet adja $n=3$ esetén, és $n=4$ esetén is alkalmazható. Leibniz azonban kénytelen elkeseríteni barátját: az $n=5$ esetén a helyettesítés együtthatóinak megtalálásához 5-nél magasabb fokú egyenletet kell megoldani."

1770–1771-ben jelent meg Lagrange 200 oldalas cikke: „Gondolatok az egyenletek algebrai megoldásáról". „Vizsgálatait az $n \leq 4$ esetekre vonatkozó képletekkel kezdi, különös figyelmet fordítva az n-edik gyök alatt álló kifejezésekre. Az $x^2+ax+b=0$ másodfokú egyenlet esetén ez $\Delta = a^2/4 - b$..." – diszkrimináns –, amely az $x_{1,2}$ gyökpár szimmetrikus polinomja, sőt $(x_1-x_2)^2$ függvénye. A harmadfokú egyenletnél azt vette észre, hogy az $x_{1,2,3}$ gyökhármas és az egyik harmadfokú primitív egységgyök, ε segítségével a harmadfokú egyenlet mindkét diszkriminánsa kifejezhető:

$$\Delta_{\pm} = \left(\frac{x_1 + x_2\varepsilon + x_3\varepsilon^2}{3}\right)^3.$$

Itt viszont a $\Delta(x_1,x_2,x_3)$ függvény a gyökök bármilyen permutációja mellett is csak két értéket vesz föl: Δ_+-t és Δ_--t.

E szimmetrikus függvények és a gyökök permutációcsoportjainak vizsgálatával Lagrange nemcsak a magasabb fokú egyenletek, de a csoportelmélet alapjait is lerakta. (Vele egy időben Alexandre Theophile Vandermonde (1735–1796) is észrevette a legfontosabb összefüggéseket, az ő munkáját azonban árnyékba borította Lagrange-é.) „Paolo Ruffini (1765–1822) bebizonyította, hogy az ötödfokú egyenlet gyökeinek nincsenek olyan nem triviális függvényei, amelyek ötnél kevesebb értéket vesznek föl, és meg volt győződve, hogy bebizonyította az ötödfokú egyenletek megoldhatatlanságát gyökvonások segítségével [1799]. De hátra volt még annak bizonyítása, hogy az ilyen függvények létezése valóban szükséges a megfelelő képlet létezéséhez. A megoldhatatlanság teljes bizonyítását Abel adta meg [1826-ban (miután rájött arra, hogy hibás az ötödfokú egyenlet megoldására korábban adott bizonyítása)] (lásd Smith, 1929, 261–266. o.). Ezt megelőzte Gauss dolgozata szabályos sokszögek körzővel és vonalzóval történő szerkesztéséről, illetve ami vele ekvivalens, az $y^n - 1 = 0$ alakú egyenletek gyökeinek kifejezéséről négyzetgyökök segítségével. E dolgozatban a gyökök permutációjára alapozott szellemes fogások lehetővé tették egy kétezer éves feladat megoldását [lásd a 12.3. alfejezet]. Az algebrai egyenletek megoldhatóságának problémáját [Evariste] Galois (1811–1832) elmélete oldotta meg véglegesen."

Ismert, hogy Galois hevenyészett pályázatait a Francia Akadémia illetékesei elvesztették (Cauchy és Fourier) vagy visszautasították (Legendre). Megmaradt feljegyzéseit sokáig még a legjobb matematikusok sem értették meg. Ez nem is meglepő, hiszen az utolsó változatot (lásd Smith, 1929, 278–285. o. vagy Fauvel–Gray, 1987, 502–505. o.) csak a párbaj előtti éjszakán írta le Galois, amelyben életét vesztette. Csupán 1846-ban jelentette meg a rendbe tett vázlatot Liouville.

Természetesen az n-edfokú egyenlet megoldhatatlansága nem gyakorlati kérdés, hiszen már a harmadfokú egyenlet gyökeit sem érdemes numerikusan a gyökképlet segítségével meghatározni. Kizárólag elvi kérdésről van szó, amelynek megoldása nagyban hozzájárult a modern, azaz absztrakt algebra, mindenekelőtt a csoportelmélet kialakulásához. Az alfejezet hátralévő részében röviden vázoljuk a csoportelmélet történetét.

Történetileg az első absztrakt algebrai struktúra a csoport volt, amely csírájában már Gauss, Abel, Galois és Cauchy munkáiban megjelent az 19. század elején. Emlékeztetünk a modern definícióra: Elemek G halmazát *csoport*nak nevezzük, ha értelmezve van rajta egy művelet, a szorzás, amely asszociatív: $a(bc) = (ab)c$; egy 1 egységelem, amely a szorzás semleges eleme: $a1 = a = 1a$; és az a^{-1} inverz elem: $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$. Kommutatív esetben (Abel-csoport) szorzat helyett összeadásról beszélünk, és a műveletre $+$, az egységelemre a 0, az inverzre pedig a $-a$ jelet alkalmazzuk.

12.1. feladat. a) Igazoljuk, hogy egy csoportban csak egy egység és minden elemnek csak egy inverze létezhet. b) Igazoljuk, hogy véges csoportban az inverz létezése következik a többi axiómából! (Mivel kezdetben csak véges csoportokat vizsgáltak, nem is követelték meg az inverz létezését!)

Megismételjük, történetileg az első példát a csoportra a permutációk adták.

12.1. példa. Permutációcsoport (Dedekind, 1858). Legyen $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ az első n természetes szám halmaza, és legyen π egy permutáció, azaz az N elemeinek 1–1-értelmű leképezése önmagára. Két permutáció szorzatán a két permutáció egymás utáni alkalmazását értjük. Az összes lehetséges permutációk csoportot alkotnak.

A csoportelmélet történetileg első tételének kimondásához még két fogalomra van szükség. Egy csoport *rendje* a csoport elemszáma, jele: $|G|$. Egy H csoport a G csoport *részcsoportja*, ha $H \subseteq G$, és H zárt a G csoportműveletre nézve: $1 \in H$; ha $a,b \in H$, akkor $ab \in H$ és $a^{-1} \in H$. A H különböző mellékosztályainak számát a H G-beli *indexé*nek nevezzük, jele: $(G : H)$.

12.1. tétel. *(Lagrange, 1770.) A H részcsoport rendje osztója a G csoport rendjének: $|G| = |H| \cdot (G : H)$.*

Ruffini 1799-es korszakalkotó könyvében, ha homályosan is, de bevezette a permutációcsoport tranzitivitását és primitivitását.

Lagrange és Ruffini nyomdokain haladva, Cauchy 1815-ben a helyettesítéses csoportokról egy hosszabb művet írt. Főtétele nem algebrai fogalmazású: *Egy n-változós nemszimmetrikus függvény különböző értékeinek száma* legalább akkora, mint az n alatti legnagyobb p prím értéke, hacsak nem 2. Csoportelméleti nyelvre átfordítva, a teljes szimmetrikus csoportra vonatkozó csoportindex felső korlátja p vagy 2.

A csoportelméletben a legnagyobb lépést Galois tette meg, aki 1830 körül bevezette a invariáns részcsoport (vagy normálosztó) fogalmát: az N részcsoport *invariáns részcsoportja* G-nek, ha tetszőleges $n \in N$ és $g \in G$ esetén $gng^{-1} \in N$, valamint két csoport *izomorfiá*ját. Két csoportot *izomorf*nak nevezünk, jele: $G \simeq G'$ ha van olyan 1–1-értékű megfeleltetés, amely műveletartó: azaz $ab = c$ akkor és csak akkor teljesül, ha $a'b' = c'$ is teljesül. Az *egyszerű csoport* fogalma is tőle származik: ti. olyan csoport, amelynek nincs valódi normál részcsoportja.

Megismételjük, hogy Liouville fedezte fel és tette elérhetővé Galois elméletét. Szólnunk kell Camille Jordan (1838–1922) munkásságáról, aki 1870-ben megoldotta Abel kérdését: melyek azok az adott fokú egyenletek, amelyek gyökökkel megoldhatók? Mivel ezek az egyenletek kommutatív helyettesítéses csoportot alkotnak, Jordan a kommutatív csoportokat *Abel-csoportok*nak nevezte.

Izelítőül megemlítjük a véges Abel-csoportok alaptételét (Fried, 1989, 4.14. szakasz).

12.2. tétel. *(Abel.) Minden véges Abel-csoport lényegében egyértelműen felbontható prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzatára.*

Ugyancsak Galois ötletét követve, Jordan *transzformációkkal reprezentált csoportokat.* Végül megemlítjük, hogy ő volt az első, aki *geometriai transzformációk végtelen csoportjá*t vizsgálta.

Cayley már 1849-ben javasolta az absztrakt csoport fogalmát, de javaslata érdektelenségbe fulladt. Jóval később visszatért a kérdéskörhöz, de ekkor nemcsak azt vette észre, hogy permutációcsoportok helyett lehet absztrakt csoportokat is vizsgálni, de a megfordítást is.

12.3. tétel. *(Cayley, 1878.) Minden véges csoport reprezentálható permutációcsoporttal.*

Dedekind 1877-ben az algebrai számokat vizsgálva megismételte az absztrakt kommutatív véges csoport definícióját. Talán ő tekinthető a (véges kommutatív) absztrakt csoport megalkotójának.

Eugen Netto (1846–1919) állította a vizsgálatok középpontjába az izomorfizmust és a homomorfizmust. Felix Klein (1849–1925) 1880 körül bevezette a végtelen transzformációcsoportokat, és erlangeni programjában ezek segítségével osztályozta a geometriákat. Az integrálható közönséges differenciálegyenleteket vizsgálva, 1870 körül Sophus Lie (1842–1899) észrevette, hogy ezek invariánsak a folytonos transzformációcsoportokra (lásd Smith, 1929, 485–523. o.).

A csoportelmélet 19. századvégi népszerűségét egy Poincaré-idézettel lehet szemléltetni: „A csoportelmélet az egész matematika – megtisztítva anyagától és tiszta formájára egyszerűsítve."

12.3. A szabályos hétszög szerkeszthetetlensége

Már az ókori görögök is foglalkoztak a szabályos sokszögek körzővel és vonalzóval történő szerkesztésével. Ismerték, hogy a triviális szabályos három- és négyszögön, valamint a felezéssel, negyedeléssel stb. kapható sokszögeken kívül az ötszög is megszerkeszthető (Hajós, 1964, 22.4. alfejezet). Nem tudták azonban, hogy megszerkeszthető-e például a szabályos hétszög. 1796-ban a 19 éves Gauss igazolta, hogy minden N-oldalszámú szabályos sokszögek megszerkeszthető, ha felírható $N = 2^\alpha p_1 \cdots p_r$ alakban, ahol $\alpha \geq 0$, $r \geq 0$ egészek és p_ik különböző Fermat-prímek (Gingyikin, 2001, 307–323. és 351–355. o.). A legkisebb új érték az $n = 17$, tehát a 17-szögű szabályos sokszög megszerkeszthető. Ezt a világra szóló felfedezést örökíti meg Gauss síremléke is. Pierre Wantzel (1814–1848) 1837-ben belátta a tétel megfordítását is. Márpedig a 7 nem ilyen szám, tehát szabályos hétszög nem szerkeszthető.

Gauss először azt látta be, hogy egy szerkeszthető szabályos sokszögnek megfelelő komplex egységgyök másodfokú irracionalitás, azaz egy egész együtthatós másodfokú egyenlet gyöke.

A szabályos hétszög szerkesztésének feladata kiemelés után visszavezethető egy hatodfokú egyenletre, mert

$$z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Alkalmazva a szerkeszthetőségben megengedett $x = z + 1/z$ helyettesítést, az

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

harmadfokú egyenlethez jutunk.

Most azt kell megmutatni, hogy ennek az egyenletnek nincs másodfokú racionalitás gyöke. Bonyolultabb meggondolásokkal belátható ugyanis, hogyha lenne, akkor racionális gyöke is lenne, például $x = p/q$, ahol p,q relatív prím. Mivel azonban

$$p^3 + p^2q - 2pq^2 - q^3 = 0$$

esetén p osztható q-val, tehát $q = 1$, azaz x egész. Innen már könnyen belátható, hogy nincs egész megoldás.

Ugyanúgy igazolható, hogy a $\pi/3$ szög sem harmadolható (vö. 4.1. példa).

12.4. A párhuzamosok posztulátuma

Már az ókori görögökről szóló 2. fejezetben említettük Eukleidész párhuzamossági posztulátumát (az axióma egyik variánsát): egy adott egyeneshez egy külső pontból egyetlenegy olyan egyenest lehet húzni, amely nem metszi az adott egyenest (Playfair, 1795). Már az ókorban is érezték, hogy ez a posztulátum különbözik a többitől, bonyolultabb azoknál, és sokáig úgy vélték, hogy bizonyítható a többi posztulátumból és axiómából. (Az egész alfejezetről lásd Lánczos, 1970 és Prékopa, 2002, valamint eredeti forrásokat idéz Fauvel–Gray, 1987, 508–537. o.)

A 17–18. században többen megkísérelték az ötödik posztulátum bizonyítását. Élete végén megjelent könyvében Gerolamo Saccheri (1667–1737) indirekt bizonyítással kísérletezett, és sikerült például kizárnia azt a lehetőséget, hogy a háromszög szögeinek összege nagyobb mint 180° (lásd Smith, 1929, 351–359. o.). Ugyanakkor tévesen azt gondolta, hogy azt a lehetőséget is sikerült kizárnia, amikor a háromszög szögeinek összege kisebb mint 180°. A számelméleti részben már említett Lambert 1766 (1786)-ban egészen közel jutott annak igazolásához, hogy lehetséges egy olyan geometria is, amelyben az ötödik posztulátum *nem* érvényes, nevezetesen egy adott egyeneshez egy külső pontból több párhuzamos egyenes is húzható, de visszariadt e forradalmi újítástól.

Csak 1830 körül, egymástól függetlenül sikerült Nyikoláj Lobacsevszkijnek (1793–1856) és Bolyai Jánosnak (1802–1860) kidolgoznia a nemeuklideszi geometriát. A forradalmi újítás lényege: feltételezve, hogy az euklideszi geometria helyes, lehet definiálni egy olyan, ugyancsak logikus (ellentmondásmentes) geometriai elméletet, amelyben az ötödik posztulátum *nem* érvényes (lásd Smith, 1929, 360–374. illetve 375–388. o.).

A részletes ismertetés helyett csupán a nemeuklideszi geometria leglényegesebb képletét közöljük: adott AB egyenestől a távolságban levő C külső pontból húzható két különböző egyenes, p és q, hogy mindkettő $\pi(a)$ kritikus szöget zár be az AB-re emelt merőlegessel. Az annál nagyobb szögű egyeneseknek nincs közös pontjuk az AB egyenessel, a kisebb szöget bezáróknak van. A kritikus szög értéke

$$\tan\frac{\pi(a)}{2} = e^{-a}.$$

Az r sugarú kör kerülete $C_r = \pi(e^r - e^{-r})$. Látható, hogy lokálisan évényes marad az euklideszi geometria: ha $a,r \approx 0$, akkor $\pi(0) = \pi/2$ és $C_r \approx 2r\pi$.

A gondolat forradalmiságát jól mutatja, hogy amikor Bolyai János apja, Bolyai Farkas egykori göttingai diáktársának 1832-ben elküldte könyvét, benne fia Függelékét, Gauss kitérően válaszolt: nem dicsérhetem fiad munkáját, mert akkor saját munkámat dicsérném. Való igaz, hogy Gauss is gondolkodott e nemeuklideszi geometria lehetőségén, de nem volt bátorsága előállni egy ilyen forradalmi elmélettel. A valójában visszautasító dicséret mindenesetre elvette az eleve magába zárkózó Bolyai János kedvét a további matematikai munkától, és megkeseredett emberként halt meg. A Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometria jelentőségét csak akkor ismerték föl, amikor Riemann 1854-ben habilitációs előadásában előállt a Riemann-geometria gondolatával (lásd Smith, 1929, 411–425. o.). Ezt a teljesítményt már az idős Gauss is elismerte. Itt említjük meg, hogy a nemeuklidészi geometria első modelljét csak jóval később, 1868-ban alkotta meg Eugenio Beltrami (1835–1900).

De még korunkban is akadnak egyébként kiváló matematikatörténészek, akik fanyalogva értékelik Bolyai és Lobacsevszkij forradalmi újításait. Mutatóban idézünk egy részt: „Bátorságukkal, amellyel egy szokatlan geometriát támogattak, Bolyai és Lobacsevszkij elnyerte számos történész elismerését. Ennek ellenére munkájuk történelmi jelentősége vitatható. Eredményeik zömét Gauss és köre már ismerte. Korábbi publikációkból és személyes kapcsolatok révén ezek az eredmények hozzáférhetők voltak, legalábbis ködös formában. Lambert (1766) és Taurinus (1814) nyomtatásban megjelentek, és Bolyai János apja, Bolyai Farkas, Gauss életre szóló barátja volt, akárcsak

Lobacsevszkij tanára, Bartels.” (Stillwell, 1989, 259. o.) A szerző mentségére szolgáljon, hogy a megfelelő fejezetet záró két részletes életrajz mégis Bolyai és Lobacsevszkijé.

Itt jegyezzük meg, hogy Gauss csillagászati mérésekkel is megkísérelte ellenőrizni az igazságot: jelentős oldal hosszúságú háromszögekre szögösszegének és a 180°-nak a különbségére a mérési hiba határán belüli értéket, 14 szögmásodpercet kapott.

Kiemeljük, hogy az 1800–1850-es félévszázadban gyökeres változások mentek végbe a matematika filozófiájában. 1800-ban még azt hitték, hogy a matematika a természetet írja le és a természet euklideszi. Immanuel Kant (1724–1804) német filozófus szerint az emberrel vele születik a tér és az idő hagyományos szemlélete. 1850-re viszont már rádöbbentek a matematikusok arra, hogy a matematika többféle valóságot is leírhat. Talán a hamiltoni kvaterniók is megingatták a matematikusok konzervativizmusát: lehetnek olyan számtestek, amelyben a szorzás nem kommutatív! Lehetnek sokdimenziós vektorterek!

12.5. Kontinuumhipotézis

A végtelen halmazok furcsa viselkedésére már Galilei (1638, 44. o.) is felfigyelt, és belátta, hogy a természetes számok és a négyzetszámok halmaza kölcsönösen egyértelműen leképezhető egymásra, tehát ugyanannyian vannak, noha a négyzetszámok valódi (és ráadásul ritka) részhalmazát alkotják a természetes számoknak. Évszázadokkal később, 1874-ben kezdte el publikálni Cantor a számosságelméletét. Átvéve Galilei felfogását, két halmazt azonos *számosságú*nak nevezett, ha létesíthető köztük egy-egy értelmű leképezés.

Mint bevezető analízis előadásokból ismert, a következő tételeket igazolta.

12.4. tétel. *(Cantor, 1874.) A racionális számok számossága azonos a természetes számokéval, halmazuk megszámlálható.*

12.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az algebrai számok számossága megszámlálható, következésképpen a transzcendens számoké nem megszámlálható.

12.5. tétel. *(Cantor, 1874.) A valós számok számossága nagyobb, mint a természetes számoké.*

Szépsége és alapvető későbbi alkalmazásai miatt az utóbbi tétel két bizonyítását mellékeljük (Fauvel–Gray, 1987, 579–580. o. és Laczkovich, 1998, 57. o.).

Bizonyítás. A kezdet közös. Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy a valós számok megszámlálhatók.

1) Kiküszöbölve a racionális valós számok felírási kétértelműségét, írjuk föl a $[0, 1)$ intervallum valós számait mint végtelen tizedes törteket, és számozzuk meg őket: a_i, $i = 1, 2, \ldots$. Belátjuk, hogy létezik legalább egy olyan a valós számot, amely nem tagja a sorozatnak. Legyen I_n egy olyan zárt részintervalluma I_{n-1}-nek, amely nem tartalmazza a_n-t. Az egymásba skatulyázott I_n intervallumoknak éppen Cantor nevezetes tétele miatt van legalább egy közös pontjuk. Ha ez a, akkor ez különbözik bármelyik a_n-től, hiszen $a \in I_n$, és $a_n \notin I_n$. Ellentmondás.

2) Érdemes bemutatni Cantor klasszikussá vált 1891-es bizonyítást, amely az ún. átlós eljáráson alapul, amelyet egyébként du Bois-Reymond már 1875-ben alkalmazott más összefüggésben. Legyen az i-edik valós szám tizedesvessző utáni j-edik jegye a_{ij}.

Egy olyan $b = (0{,}b_1 b_2 \ldots)$, 0 és 1 közti valós számot konstruálunk, amely nem szerepelt a felsorolásban: legyen $b_k = 5$, ha $a_k \neq 5$ és $b_k = 4$, ha $a_k = 5$. Valóban, ez a szám a_k-tól a k-adik jegyben különbözik, valamint 0 és 1 közé esik. Ellentmondás. ∎

Talán még meglepőbb volt a

12.6. tétel. *(Cantor, 1877.) Az egységnégyzet pontjainak a számossága megegyezik az egységszakaszéval.*

12.3. feladat. Bizonyítsuk be a 12.6. tételt!

Olyan paradox volt az eredmény, hogy Cantor azt írta barátjának, Dedekindnek: „Látom, de nem hiszem", és megkérte barátját, hogy ellenőrizze eredményét.

Cantor kiterjesztette a műveleteket, és ugyanúgy számolt a végtelen halmazokkal, mint elődei a végesekkel (vö. Hajnal–Hamburger, 1983). Felfedezte a 12.5. tétel általánosítását, szintén az átlós módszerre támaszkodva.

12.7. tétel. *(Cantor, 1891.) Minden halmaz részhalmazainak számossága nagyobb, mint a halmaz számossága.*

Cantor sokáig küszködött az ún. *kontinuumhipotézis*sel: nem létezik olyan halmaz, amelynek számossága nagyobb, mint megszámlálható, de kisebb, mint kontinuum. 1884-ben Cantor azt hitte, hogy sikerült a sejtés bizonyítása, majd azt hitte, hogy sikerült a sejtés cáfolata. Hamar rájött, hogy egyik bizonyítása sem volt helyes.

Cantor 1895-ben szembesült azzal, hogy a végtelen halmazok elemzése paradoxonokhoz vezethet, például ha az összes halmaz U halmazát tekintjük. Egyrészt ez a halmaz is halmaz, ezért eleme saját magának. Másrészt a részhalmazainak halmaza, $P(U)$ még nála is nagyobb számosságú, ezért $P(U)$ nem eleme U-nak, tehát U nem tartalmaz minden halmazt. Bertrand Russel (1872–1970)-től származik e paradoxon következő változata:

12.2. példa. (Russel, 1905). Tekintsük azoknak az x halmazoknak az A halmazát, amelyek nem elemei önmaguknak: $A = \{x,\ x \notin x\}$. Ha $A \in A$, akkor A definíciója szerint $A \notin A$. Ha $A \notin A$, akkor ugyancsak A definíciója szerint $A \in A$, ellentmondás. Vagy ahogyan 1918-ban tréfásan megfogalmazta: „a borbély csak azokat az egyéneket borotválhatja meg, akik nem maguk borotválkoznak. Mit tegyen a borbély magával?"

Sokszor a folyóirat-szerkesztők sem hitték el Cantor eredményeit, és ilyenkor késleltették a benyújtott cikk publikációját. Vélhetőleg nem segítette nézetei gyorsabb terjedését miszticizmusa. „Cantor azt hitte, hogy az Isten fedte fel előtte a halmazelméletet, és hogy a halmazok, amelyekről beszélt, Isten gondolatában létező objektumok. ...A katolikus egyházhoz fordul a helyes értelmezésért. Az egyház érdeklődött, és ... az illetékesek úgy döntöttek, hogy a halmazelmélet és a transzfinitum jó filozófia, összhangban áll az egyház nézeteivel" (Yandell, 2002, 34. o.).

Különösen Leopold Kronecker (1823–1891) támadta Cantor eredményeit, és kétségbe vonta a ténylegesen végtelen halmazok létezését. Odáig ment kétkedésében, hogy az irracionális számokat is száműzte volna a matematikából. Poincaré a római Nemzetközi Matematikai Kongresszuson, 1908-ban szintén hangot adott lesújtó véleményének: „Korábban is találkoztunk már paradoxonokkal, ... amelyek tetszettek volna az éleai

Zénónnak. ...A halmazelmélet egy érdekes patológiai eset, amelyre a későbbi nemzedékek mint egy betegségre tekintenek majd vissza, amelyből már kigyógyultak." 1907-től kezdve Luitzen Brouwer (1881–1966) a topológia egyik megteremtője továbbment, s az ún. *intuicionizmus* kezdeményezésével megpróbálta visszaszorítani a formalista irányzatot, végső soron sikertelenül.

A kiutat Ernst Zermelo (1871–1956) és Adolf Fraenkel (1891–1965) találta meg, 1908, illetve 1922 körül, megfelelően leszűkített axiómarendszert alkotva. Ez megfelelő keretet teremtett a halmazelmélet további fejlődéséhez. David Hilbert 1926-ban a következő híres kijelentésével védte meg Cantort: „Senki sem űzhet ki bennünket abból a paradicsomból, amelyet Cantor teremtett számunkra."

A matematikai logika fejlődésének új irányt adott Kurt Gödel (1906–1978) nevezetes felfedezése (1931): minden, az aritmetikát is magában foglaló axiomatikus matematikai rendszerben szükségszerűen vannak eldönthetetlen állítások. Figyelemre méltó, hogy a bizonyításban Cantor már említett átlós módszerét alkalmazta. Érdekes, hogy a 12.4. alfejezetben tárgyalt párhuzamossági axióma is a Gödel-tétel egyik nevezetes esete.

Ennek fényében kell megítélni a kontinuumsejtés sorsát. Sokáig a legtöbb matematikus azt hitte, hogy a kontinuumsejtésre igenlő a válasz: nincs közbülső számosságú halmaz. Valóban, Gödel 1940-ben igazolta, hogy a kontinuumsejtés nem cáfolható: van olyan halmazelméleti modell, amelyben a sejtés igaz. Viszont Paul Cohen (1934–) 1963-ban az „ellenkező" eredményt igazolta: van olyan halmazelméleti modell, amelyben nem igaz a kontinuumhipotézis. (Egyébként Péter Rózsa (1969) népszerűsítő könyve 19–22. fejezetében elemi szinten magyarázza el e dolgokat.)

13. MÉRTÉK ÉS FUNKCIONÁL

13.1. Bevezetés

Az analízis logikai megalapozása (8. fejezet) utat nyitott az elvontabb területek kutatása felé. A 13.2. alfejezet a hosszúság, a terület és a térfogat általánosítását megvalósító mértékelmélet kialakulását vázolja. A 13.3. alfejezet a mátrixszámítás általánosításaként létrejövő funkcionálanalízis fejlődési útját körvonalazza. Elsősorban Kline (1972) 44. és 46. fejezetére támaszkodom.

13.2. A mértékelmélet kialakulása

A határozott integrál Riemann-féle elméletének felépítése elég sokáig váratott magára (8.3. alfejezet), de annál hamarabb kiderültek elméleti hiányosságai: a) bár nem folytonos függvények is lehetnek Riemann-integrálhatók, már az egyszerű Dirichlet-függvény sem integrálható; b) bár az egyenletesen konvergens integrálható függvények sorozatának határértéke is integrálható, és az integrálja az integrálsorozat határértékével megegyezik, továbbra is nyitott maradt a hasonló átmenet helyessége a nem egyenletes konvergenciánál.

Az első jelentős lépést Giuseppe Peano (1858–1932) tette meg 1887-ben, aki bevezette egy síkbeli halmaz belső és a külső területét, mint a halmazba beleírt, illetve a halmazt lefedő véges számú sokszög területösszegének a felső, illetve alsó korlátját. (Vegyük észre a hasonlóságot a görbe alatti területet definiáló alsó és felső Riemann-összegekkel!) Ez a definíció azonban nem oldotta meg a fentebb jelzett nehézségeket.

Jelentős előrelépést tett Borel 1898-ban, amikor az általa *mérték*nek nevezett mennyiség definiálásánál megengedte, hogy a korábbi, véges sok helyett megszámlálható sok nyílt intervallum fedje le a halmazt.

A döntő lépést Borel tanítványa, Henri Lebesgue (1875–1941) tette meg 1902-ben. Újítását legegyszerűbben az egydimenziós esetben szemléltethetjük. Legyen E egy ponthalmaz az $[a,b]$ intervallumon. Fedjük le a pontokat olyan véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $\{d_i\}$ szakasszal, hogy E minden pontja valamelyik d_i szakasz belső pontja legyen, és minden szakasz az $[a,b]$ intervallumban legyen. Belátható, hogy a $\{d_i\}$ szakaszok helyettesíthetők olyan, majdnem diszjunkt $\{D_i\}$ szakaszokkal, hogy az E halmaz bármely belső pontja vagy egy D_i szakasz belső pontja vagy két szakasz közös határpontja. Legyen δ_i a D_i szakasz hossza. Ekkor az E halmaz *külső mértéké*t a lefedő halmazok összhosszának alsó határaként definiáljuk:

$$\lambda^*(E) = \inf\{\sum_i \delta_i | E \subseteq \cup_i D_i\}.$$

Hasonlóan, a halmaz *belső mértéke* a $b-a$ és az $[a,b]$ intervallumra vonatkozó kiegészítő $\overline{E}$ halmaz külső mértékének a különbsége:

$$\lambda_*(E) = (b-a) - \lambda^*(\overline{E}).$$

Nyilvánvaló, hogy $\lambda_*(E) \leq \lambda^*(E)$. Célszerű egy halmazt akkor és csak akkor *mérhetőnek* definiálni, ha a belső és a külső mértéke megegyezik: $\lambda_*(E) = \lambda^*(E)$. Ekkor a közös érték a halmaz *mértéke*: $\lambda(E) = \lambda_*(E) = \lambda^*(E)$.

Giuseppe Vitali (1875-1932) fedezte fel a következő eredményt.

13.1. példa. (Vitali, 1905.) Lehetetlen a [0, 1] intervallum összes részhalmazára egy nem nulla eltolásinvariáns mértéket kiterjeszteni. Valóban, soroljuk be egy osztályba az intervallumnak azokat a pontjait, amelyek különbsége valamilyen racionális szám. Válasszunk ki a fenti osztályok mindegyikéből pontosan egy elemet (itt felhasználtuk a kiválasztási axiómát). A kapott kontinuum-számosságú X halmaznak nem lehet mértéke (vö. 13.3. alfejezet). Indirekt: számozzuk meg az intervallum racionális számait, és legyen $r_0 = 0$. Mivel az r_n racionális eltolással az X átmegy egy másik X_n halmazba, ezért $\lambda(X) = \lambda(X_n)$. E megszámlálhatóan sok diszjunkt halmaz egyesítése az intervallum: $I = \sum_n X_n$, tehát $\lambda(I) = \sum_n \lambda(X_n)$, s ez ellentmondás.

Lebesgue eztán bevezette a mérhető függvény fogalmát: Egy $f : [a,b] \to [c,d]$ függvényt *mérhetőnek* nevezünk, ha tetszőleges A valós számra az $\{x|f(x) > A\}$ felső szinthalmaz mérhető.

Egy népszerűsítő előadásában Lebesgue a következő szemléletes példát hozta integrálfogalmára. Gondoljunk egy pénztárra, ahol összevissza vannak rakva a különböző címletű pénzek. Ahelyett, hogy ebben a véletlen sorrendben összeadnánk őket, rakjuk először egybe az azonos címletű pénzeket, számoljuk meg az egyes csoportokban lévő bankjegyek számát, szorozzuk meg ezt a címlet értékével és a részösszegeket összeadva határozzuk meg a pénztárban lévő pénz összegét.

Komolyra fordítva a szót: Tekintsünk egy $f : [a,b] \to [c,d]$ mérhető függvényt, és osszuk föl a $[c,d]$ szakaszt n részre: $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$. Legyen $E_i = \{x|y_i \leq f(x) < y_{i+1}\}$, és képezzük az

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\lambda(E_i) \qquad \text{és} \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} y_i\lambda(E_i)$$

téglányösszegeket. Az f függvényt *Lebesgue-integrálhatónak* nevezzük, ha a felosztás tetszőleges finomításával a két összeg közös értékhez konvergál:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Egy új fogalom bevezetésekor az első dolog megmutatni, hogy az új fogalom általánosítja a régit.

13.2. példa. A Dirichlet-függvény Lebesgue-integrálja létezik és értéke 0.

13.1. tétel. *(Lebesgue.) Ha egy korlátos és mérhető függvény Riemann-integrálható, akkor Lebesgue-integrálható, és a két érték azonos.*

Mostantól fogva az integrálhatóság Lebesgue-integrálhatóságot jelent.

De a Lebesgue-integrál igazi ereje a bonyolultabb esetekben mutatkozik meg, amikor végtelen függvénysorozatokról vagy függvénysorokról van szó.

13.2. tétel. *(Lebesgue, 1902.) Ha mérhető és integrálható függvények $\{f_n\}$ sorozata konvergál egy f függvényhez, és létezik egy mérhető és integrálható g függvény, amely majorálja a sorozat minden tagját: $|f_n| \le g$, akkor az f függvény is mérhető és integrálható, és integrálja egyenlő az integrálok határértékével:*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Megjegyzés. Riemann-integrálokra ez a tétel csak egy kiegészítő feltevés mellett igaz, nevezetesen ha a határértékfüggvény is Riemann-integrálható (Arzela, 1885).

Már a Riemann-integrálhatóságnál sem feltétlenül igaz a Newton–Leibniz-képlet, például $f(x) = \operatorname{sign} x$ Riemann-integrálható a $[-1{,}1]$ szakaszon, de az integrálfüggvény, $F(x) = |x| - 1$ nem deriválható $x = 0$-ban. Természetesen sokkal bonyolultabb a helyzet a Lebesgue-integrál esetében, de igaz a

13.3. tétel. *(Lebesgue, 1904.) a) Ha f integrálható az $[a{,}b]$ szakaszon, akkor*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad 0 \le x \le b$$

majdnem mindenütt deriválható, és a derivált értéke azonos az integrandussal, azaz $F'(x) = f(x)$ majdnem mindenütt.

b) Megfordítva, ha egy g függvény deriválható az $[a{,}b]$ szakaszon, és deriváltja, $g' = f$ korlátos, akkor f integrálható, és majdnem mindenütt

$$g(x) - g(a) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Lebesgue követői – például Vitali és Pierre Fatou (1878–1929) – jelentősen továbbfejlesztették a mértékelméletet, de ennek kifejtése meghaladja a jegyzet kereteit. Itt csak annyit jegyzünk meg, hogy bár Lebesgue eredményei önmagukért beszélnek, kortársai közül sokan nem értették meg (vö. a 8. fejezet végi Szőkefalvi-Nagy-idézetet).

Nemcsak a régi iskola vezetői ellenezték az új eredményeket, de még Borel sem értékelte kellőképpen tanítványa eredményeit. Emiatt a két óriás között hamarosan megszakadt a baráti kapcsolat.

13.3. A funkcionálanalízis születése

A modern mértékelmélet kialakításával párhuzamosan fejlődött a funkcionálanalízis, amely az integrálegyenletek elméletéből nőtt ki.

Integrálegyenletekkel már a közönséges differenciálegyenleteknél is találkoztunk, hiszen az

$$\dot{x} = f(t{,}x), \qquad x_0 \qquad \text{adott}$$

kezdetiérték-feladat felírható a következő alakban is:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))\,ds.$$

Vegyük észre, hogy a feladat megoldása a folytonos függvények $C[0,T]$ terén definiált $x(t)$-hez rendelt

$$y(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x(s))\,ds$$

leképezés egy fixpontja.

Hasonlóan integrálegyenletekkel találkozunk a Laplace-transzformáció esetén (9.3. alfejezet), amely a valószínűség-számításban (10. fejezet) szereplő karakterisztikus függvénnyel kapcsolatban játszik fontos szerepet. Számunkra viszont most egy másik fajta integrálegyenlet érdekes, amellyel Vito Volterra (1860–1940) 1884-től kezdve foglalkozott. Az $[a,b] \times [a,b]$ négyzeten adott K magfüggvénnyel definiált integrálegyenlet

$$f(s) = \phi(s) - \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt, \qquad \text{ahol} \qquad K(s,t) = 0, \qquad \text{ha} \qquad t > s,$$

ahol szerepcserével $f(s)$ az ismert, $\phi(s)$ az ismeretlen függvény. A *fokozatos megközelítések* módszerét alkalmazva, Volterra bevezette az

$$f_n(s) = \int_a^b K(s,t)f_{n-1}(t)\,dt$$

sorozatot, és a

$$\phi(s) = f(s) + \sum_{p=1}^{\infty} f_p(s)$$

alakban találta meg a megoldást. Ivar Fredholm (1867–1927) tovább folytatta az integrálegyenletek kutatását, és számos érdekes eredményt kapott 1900-tól kezdve.

A döntő lépést azonban Hilbert tette meg, aki először is szabatossá tette Fredholm heurisztikus megoldását (akárcsak Lagrange Eulerét, vö. a 7. fejezetet). A Volterra-félét általánosító

$$f(s) = \phi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt$$

integrálegyenletet vizsgálta, ahol a K magfüggvény folytonos.

Egy ϕ függvényt *sajátfüggvény*nek nevezünk valós vagy komplex λ *sajátértékkel*, ha

$$\phi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt.$$

A $\{\phi^p\}$ sajátfüggvényrendszert a komplex számok teste fölött *ortonormált*nak nevezzük, ha

$$\int_a^b \phi^p(s)\overline{\phi^q(t)}\,dt = \delta_{p,q},$$

ahol $\overline{x}$ az x szám komplex konjugáltja, és $\delta_{p,q}$ a Kronecker-delta: értéke 1, ha $p = q$, és 0 egyébként.

Hosszabb vizsgálatok után Hilbert a tanítványával, Erhard Schmidttel (1876–1959) a következő tételt bizonyította be.

13.4. tétel. *(Hilbert–Schmidt, 1901–1906.) Ha minden folytonos g függvényre tekintjük az*

$$f(s) = \int_a^b K(s,t)g(t)\,dt$$

leképezést, akkor f felírható egy végtelen sorként:

$$f(s) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \phi^p(s),$$

ahol $\{\phi^p\}$ ortonormált sajátfüggvény-rendszere K-nak,

$$\int_a^b \phi^p(s)\overline{\phi^q(t)}\,dt = \delta_{p,q} \qquad \text{és} \qquad c_p = \int_a^b \overline{\phi^p(s)} f(t)\,dt.$$

Megjegyzés. Más szóval, az f függvény előállítható egy ún. *általánosított Fourier-sor*ként, ahol c_p a p-edik általánosított Fourier-együttható.

A határátmenettől függetlenül Hilbert megvizsgálta a végtelen sok változós

$$K(x,y) = \sum_{p,q=1}^{\infty} k_{p,q} x_p \overline{y_q}$$

bilineáris alakot, ahol $k_{p,q}$ együtthatók, és x_p,y_q változók. Eltekintve a folytonos sajátértékek kérdésétől, tegyük föl, hogy $\sum_{p,q=1}^{\infty} |k_{p,q}| < \infty$. Ekkor a bilineáris alak a főtengely-transzformációhoz hasonló Schmidt-féle ortogonalizálással kvadratikus alakra hozható:

$$K(x,x) = \sum_{p=1}^{\infty} k_p |x_p|^2,$$

ahol k_p a p-edik sajátérték reciproka, és $\sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 < \infty$. Az ilyen sorozatok vektorterét l_2-térnek nevezik.

Ezen fogalmak segítségével Hilbert szabatossá és egyszerűbbé tette az integrálegyenletek tárgyalását.

Ezen a ponton lép be a matematikatörténetbe Riesz Frigyes (1880–1956) és Ernst Fischer (1875–1959), akik a Hilbert által vizsgált folytonos függvények helyett a *négyzetesen Lebesgue-integrálható* függvények jóval tágabb terét vizsgálta, ennek jele L^2. Talán legjelentősebb felfedezésük a

13.5. tétel. *(Riesz–Fischer-tétel, 1907.) Legyen $\{\phi_p\} \in L^2$ ortonormált rendszer az $[a,b]$ szakaszon és $\{a_p\}$ komplex számok sorozata. Ekkor $\sum_p |a_p|^2 < \infty$ szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék egy olyan $f \in L^2$ függvény, amelynek Fourier-együtthatói a_p-k, és a Fourier-sor pontonként konvergál.*

Megjegyzés. Ez a tétel egy-egy értelmű megfeleltetést (sőt, izometriát) létesít a komplex változós L^2 tér Fourier-együtthatóinak sorozata és az l^2 tér között.

Ezzel már elérkeztünk a funkcionálanalízishez. *Funkcionál*nak nevezünk egy olyan leképezést, amely egy függvényhez egy valós vagy komplex számot rendel. Általánosabban, *lineáris operátor*nak nevezünk egy leképezést, amely két függvénytér között létesít lineáris leképezést. Általában *lineáris* terekről van szó.

Hosszú kísérletek után 1907-ben vezette be Maurice Frèchet (1878–1973) az absztrakt terek és funkcionálok fogalmát. Itt csak a *metrikus teret* emeljük ki, amelyben a d távolság kielégíti a következőket: $d(x,y)$ nemnegatív valós szám, $d(x,y) = 0$ pontosan akkor, ha $x = y$; $d(x,y) = d(y,x)$ (szimmetrikus) és $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

13.3. példa. A folytonos függvények $C[a,b]$ tere metrikus tér, ha $d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| : a \leq x \leq b\}$.

Figyelemre méltó, hogy Frèchet számos érdekes tételt be tudott bizonyítani absztrakt terekre és funkcionálokra, például azzal, hogy általánosította a derivált fogalmát.

Egyetlenegy tételt emelünk ki a metrikus terekre vonatkozó tételek közül, Stefan Banach (1892–1945) kontrakciós elvét. Egy $f : X \to X$ leképezést *kontrakció*nak (zsugorításnak, összehúzásnak) nevezünk, ha létezik egy olyan $0 < q < 1$ valós szám, amelynél kisebb a képpontok és a tárgypontok távolságának a hányadosa:

$$d(f(x),f(y)) < qd(x,y).$$

13.6. tétel. *(Banach-féle fixpont-tétel, 1922?.) Legyen X egy teljes metrikus tér. Ha az $f : X \to X$ leképezés kontrakció, akkor létezik egyetlenegy fixpontja: $x^* = f(x^*)$, s e fixpont a következő természetes iterációval számítható ki: $x_{m+1} = f(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, ahol x_0 tetszőleges kezdőpont, és $x^* = \lim_{m\to\infty} x_m$.*

Bizonyítás. a) Egyszerű becsléssel belátható, hogy tetszőleges x_0 kezdőpontból indítva az iterációt, az $\{x_m\}$ sorozat Cauchy-sorozat, tehát a tér teljessége miatt konvergál egy ponthoz, például x^*-hoz, amely a függvény folytonossága miatt fixpont.

b) Nem lehet két fixpont. Indirekt: $x^* = f(x^*)$, $y^* = f(y^*)$, $x^* \neq y^*$. Ekkor $d(x^*,y^*) > 0$ miatt

$$d(x^*,y^*) = d(f(x^*),f(y^*)) < qd(x^*,y^*) < d(x^*,y^*),$$

ellentmondás. ∎

Egy feladattal és egy példával szemléltetjük az absztrakt fixpont-tétel hatóerejét.

13.1. feladat. A négyzetgyökvonás babiloni algoritmusa (2.1. példa) a négyzetgyök megfelelő környezetében kontrakció.

13.4. példa. A közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldására használt fokozatos megközelítések módszere, a kezdetiérték-feladat megoldása létezésének és egyértelműségének modern bizonyítása is absztrakt nézőpontból a fixpont-tételen alapul, a névadók Émile Picard (1856–1941) és Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946). Valóban, az alfejezet elején bevezetett leképezés a szokásos Lipschitz-feltétel mellett megfelelően kicsiny $[0,T]$ szakaszon kontrakció. Az

$$x_{m+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(s,x_m(s))\,ds, \qquad m = 0,\, 1,\, 2, \ldots$$

függvénysorozat pedig elméletileg is, és gyakorlatilag is fokozatosan, de eléggé gyorsan megközelíti a differenciálegyenlet egyértelmű megoldását. Természetesen Picard 1890-ben és Lindelöf 1894-ben a speciális tételt speciális eszközökkel bizonyította be. Valószínűleg a konkrét tétel az absztrakt tétel kimondásánál és bizonyításánál is szerepet játszott.

Visszatérünk az integrálegyenletekből kinövő elméletre. Tulajdonképpen Schmidt volt az első, aki elszakadt az integrálegyenletektől, és általánosságban definiálta a *Hilbert-ter*et. Ő vezette be a jelölést a komplex elemű $z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots)$ végtelen dimenziós vektor *normá*jára:

$$||z|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} z_j \overline{z_j}}$$

és a z és w vektorpár *skalárszorzat*ára:

$$(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \overline{w_j}.$$

1907-ben Schmidt észrevette, hogy a négyzetesen Lebesgue-integrálható függvények terének geometriája teljesen azonos a végtelen sorozatok Hilbert-terének geometriájával. Ez a tér a véges dimenziós euklideszi tér végtelen dimenziós általánosítása.

Könnyen belátható, hogy az L^2 Hilbert-térben két függvény távolságát célszerű a következőképp definiálni:

$$d(f,g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \, dx}.$$

A skalárszorzat pedig

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Két függvényt *ortogonális*nak nevezünk, ha $(f,g) = 0$. A függvény *normá*ja és a skalárszorzat közti kapcsolatot

$$||f|| = d(f,0) = \sqrt{(f,f)}$$

adja.

13.2. feladat. Legyen A az integráloperátor. Írjuk föl az integrálegyenletet operátorként és az $(I - A)^{-1}$ rezolvens segítségével oldjuk meg az egyenletet!

Frèchet azt is belátta, hogy ha $U(f)$ egy lineáris funkcionál az L^2-n, akkor létezik egy lényegében egyértelmű $u \in L^2$ függvény, amelyre

$$U(f) = \int_a^b f(x)u(x) \, dx.$$

Hamarosan kialakult a Hilbert-tér operátorainak elmélete is, amely az integrálegyenletek tárgyalását jelentősen egyszerűsítette. Például az

$$(Af)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y) \, dy$$

leképezés lineáris, hiszen tetszőleges f és g függvényre és α, β komplex számra a két függvény lineáris kombinációjának a képe megegyezik a képek lineáris kombinációjával: $A(\alpha f+\beta g) = \alpha Af+\beta Ag$. A szimmetrikusság komplex általánosítása az *önadjungáltság*, azaz $(Af,g) = \overline{(f,Ag)}$ feltétele, hogy a k magfüggvény önadjungált legyen: $k(x,y) = \overline{k}(y,x)$.

1910-ben vezette be Riesz az L^2-nél általánosabb L^p teret, azoknak a függvényeknek a halmazát, amelyeknek a p-edik hatványa L-integrálható, $(p \geq 1)$. Itt a függvény normája

$$||f||_p = \left\{ \int_a^b |f|^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Az L^2 tér operátorai helyett az általánosabb L^p tér operátorait vizsgálva felfedezte, hogy a $1/p + 1/q = 1$ esetén az L^q tér az L^p tér *duális tere* a következő értelemben: Legyen T egy olyan lineáris operátor, amelyre

$$||f||_p < \infty \qquad \text{és} \qquad ||Tf||_p < \infty.$$

Ekkor tetszőleges $g \in L^q$-ra az

$$\int_a^b T(f(x))g(x)\, dx$$

kifejezés egy funkcionált definiál L^p-n, tehát létezik lényegében egy olyan $\psi \in L^q$, amelyre

$$(Tf,g) = \int_a^b T(f(x))\overline{g(x)}\, dx = \int_a^b f(x)\overline{\psi(x)}\, dx.$$

Ekkor az $\psi = T^*g$ által definiált operátor a T operátor *adjungáltja*.

Újabb fordulatot jelentett a már említett Banach munkássága, aki 1920–1922 között a skalárszorzattal definiált normájú Hilbert-tér helyett bevezette az általánosabb, (teljes) lineáris *normált* teret, amelyet ma *Banach-tér*nek nevezünk. (A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy tőle függetlenül és vele egy időben Hans Hahn (1879–1934), Eduard Helly (1884–1943) és Norbert Wiener (1894–1964) is megtette ezt a döntő lépést.) Megmutatható, hogy az L^p terek Banach-terek, de közülük csak az L^2 tér Hilbert-tér. De a differenciálegyenletek megoldásakor említett folytonos függvények tere is Banach-tér: $||f|| = \max\{|f| : a \leq x \leq b\}$.

Kline (1972, 46.4. alfejezete) szerint a függvényterek és operátoraik elmélete az 1920-as években csak öncélú absztrakció volt, és Hermann Weyl szavai szerint „nem érdem, csak szerencsénk volt, hogy 1923-tól kezdve felfedezték, hogy a Hilbert-tér spektrálelmélete a kvantummechanika megfelelő matematikai eszköze." Schrödinger és Heisenberg fizikai elemzésére építve, és Diracot követve, a fiatal Neumann János (1903–1957) 1927-ben kidolgozta a Hilbert-tér és operátorai elméletének axiomatikus alapjait, amely könyv alakban Neumann (1932) jelent meg. Azóta is ezt az elvont fogalmat értjük *a* Hilbert-téren.

14. A TÁRSASJÁTÉKOKTÓL A GAZDASÁGI VISELKEDÉSIG

14.1. Bevezetés

Az emberek ősidők óta szeretnek játszani, és a matematikusok már több évszázada foglalkoznak a játékok matematikájával (vö. 11.1. példa). A 20. század elején a matematikusok késztetést éreztek arra, hogy minél szélesebb körre terjesszék ki a matematika hatókörét, és vélhetőleg így született meg a modern játékelmélet.

A játékelmélet a 20. század jellegzetes alkotása, és születésénél a kor nagy matematikusai, Zermelo, Borel, Neumann és Nash bábáskodtak. Rövid történeti áttekintésünkben a történeti sorrendet felborítva, a 14.2. alfejezetben a kétszemélyes nullaösszegű játékok Neumann-féle minimax-tételét vázoljuk, majd a 14.3. alfejezetben kitérünk a sokszereplős általános (nem nullaösszegű) játék Nash-egyensúlyára, és csak a 14.4. alfejezetben vázoljuk Zermelo extenzív alakú játékokra vonatkozó elméletét. Végül a 14.5. alfejezetben utalunk a további fejlődésre. Magyar nyelven jó bevezetőt ad Gibson (1992) és Forgó et al. (2006). Neumann szerepéről rövid összefoglalót ad Simonovits (2003), a Nash-történetet elmélyülten tárgyalja Nasar (1998) (vö. Simonovits, 1999), amelyről egy eléggé hiteltelen Oscar-díjas film is készült. Kiváló történeti áttekintést nyújt Leonard (1995), akitől a fejezetcímet is kölcsönöztem. Mivel a téma nem része a szokásos matematikai tananyagnak, nem tételezzük föl a játékelmélet előzetes ismeretét.

14.2. Kétszemélyes nullaösszegű játékok

Neumann János a 20. század egyik legjelentősebb polihisztora. 1926-ban elméleti fizikusként Németországban dolgozott, és éppen a kvantummechanika axiomatizálásával foglalkozott, amikor Émile Borel 1921-től kezdődő próbálkozásain túllépve, megalkotta a kétszemélyes, zéróösszegű játékok elméletét.

Neumann először bevezette a kétszemélyes játék *normálalakját.* Ebben az alakban eltekintünk a lépések időbeliségétől. Legyen s_i valós szám vagy -vektor az i-edik játékos lépéssorozata, egyszerűbben: *stratégiája*, és S_i a stratégiahalmaz, $i = 1, 2$. Figyelembe vesszük, hogy az i-edik játékos u_i *nyeresége* – valós szám – nemcsak saját, hanem ellenfele lépésétől is függ: $u_i(s_1,s_2)$, $i = 1, 2$. Nullaösszegű játékra szorítkozva, feltesszük, hogy $u_2(s_1,s_2) \equiv -u_1(s_1,s_2)$. Elhagyva a nyereségfüggvény indexét, $u(s_1,s_2)$, illetve $-u(s_1,s_2)$ az 1. és a 2. játékos nyeresége.

Neumannak mindenekelőtt definiálnia kellett egy játék egyensúlyát. A következő érveléssel az ún. *minimax*-megoldást választotta.

Gondolkodjunk az 1. játékos fejével: ha ő s_1-et lép, a 2. játékos a *legjobb válasszal* él: $s_2 = b_2(s_1)$, amelyre $-u(s_1,s_2)$ maximális, azaz $u(s_1,s_2)$ minimális:

$$u(s_1,b_2(s_1)) = \min_{s_2 \in S_2} u(s_1,s_2).$$

Hasonlóan, a 2. játékosnak az s_2 választásakor az 1. játékos legjobb válaszával kell számolnia: $s_1 = b_1(s_2)$, azaz (mivel itt nincs negatív előjel)

$$u(b_1(s_2),s_2) = \max_{s_1 \in S_1} u(s_1,s_2).$$

Most már megfogalmazhatjuk az egyensúlyt definícióját. Ha van olyan $(s_1^*,s_2^*) \in S_1 \times S_2$ stratégiapár, amelynek elemei az egymásra adott legjobb válaszok, azaz

$$u(s_1^*,b_2(s_1^*)) = \min_{s_2 \in S_2} u(s_1^*,s_2) \qquad \text{és} \qquad u(b_1(s_2^*),s_2^*) = \max_{s_1 \in S_1} u(s_1,s_2^*),$$

akkor az (s_1^*,s_2^*) stratégiapárt *egyensúly*nak nevezzük. Belátható, hogy ekkor teljesül a következő, *minimax* egyenlőség is:

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u(s_1,s_2) = \min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u(s_1,s_2),$$

sőt a két állítás ekvivalens

A jobb megértés kedvéért tekintsük a legegyszerűbb esetet, amikor mindkét játékos két-két döntés között választhat: az 1. játékos Fel (F) vagy Le (L) lép, a 2. játékos viszont Balra (B) vagy Jobbra (J). Érdemes a játék adatait az ún. *kifizetési mátrix*ba rendezni (14.1. táblázat), ahol az u_{jk} valós szám jelöli az u értékét, ha az 1. játékos a j, a második a k stratégiát választja.

14.1. táblázat. *Kifizetési mátrix*

2. játékos / 1. játékos	Bal	Jobb
Fel	u_{FB}	u_{FJ}
Le	u_{LB}	u_{LJ}

Mikor lesz az (F,B) pár minimax egyensúly? Ha $u_{FJ} \geq u_{FB} \geq u_{LB}$. Persze lehetséges, hogy más pár alkot egyensúlyt, sőt lehetséges több egyensúly is. Mit tegyünk azonban, ha nem létezik egyensúly?

14.1. példa. Fej vagy írás. Két játékos egyidejűleg és egymástól függetlenül döntve elhelyez egy asztalra 1–1 Ft-os érmét a Fej vagy az Írás oldalra fordítva. Ha azonos oldalt választanak, akkor az 1. játékos nyer; ha pedig különbözőt, akkor a 2. játékos, mindkétszer 1 Ft-ot. A fej-vagy-írás játékban nem érvényes a minimax tétel: $\max \min u = -1$ és $\min \max u = 1$.

Rövid gondolkodás után rájöhetünk arra, hogy ebben a példában miért nem létezik minimax-megoldás: a játékosok gondolatban előre kiismerik egymás szándékát. Hogyan lehetne megszabadulni a problémától? Véletlenszerűen kell választani az egyes stratégiákat. Például mindkét játékos pénzfeldobással dönt, hogy mit választ. Ez elvezet a *kevert stratégia* fogalmához: tegyük föl, hogy az i-edik játékos eredetileg véges sok ún. *tiszta* stratégiát játszhat: s_i^j, $j = 1, \ldots, J_i$, és rendeljünk $\sigma_{i,j}$ valószínűséget az s_i^j stratégiához. Ezek halmaza ΔS_i, $i = 1, 2$. (A fizikai ismeretekkel rendelkező Olvasó figyelmét felhívjuk arra a tényre, hogy a kvantummechanikába Neumann vezette be a tiszta és a kevert állapot megkülönböztetését, és ez bizonyára segítette Neumannt a játékelméleti feladat megoldásában.) A két játékos egymástól függetlenül játssza a σ_1,σ_2 stratégiát. Keverés esetén ekkor az 1. játékos várható nyeresége

$$u(\sigma_1,\sigma_2) = \sum_{j=1}^{J_1}\sum_{k=1}^{J_2} \sigma_{1,j}\sigma_{2,k} u(s_1^j,s_2^k),$$

a 2. játékosé pedig az ellentettje. Az általánosított egyensúly a kevert stratégiákra vonatkozik.

14.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 14.1. példában a $\sigma_{1,1} = \sigma_{2,1} = 1/2$ keverés általánosított minimax-egyensúlyt ad!

Neumann belátta a következő tételt:

14.1. tétel. *(Neumann, 1928.) Véges elemszámú tiszta stratégiahalmazok esetén a kétszemélyes nullaösszegű játéknak mindig van egyensúlya a kevert stratégiák között.*

Megjegyzés. Neumann bizonyítása az 1913-as Brouwer-féle fixponttételen alapult, de később kimutatták, hogy a tétel egyszerűbben is igazolható, a lineáris programozásból ismert, 1902-ben keletkezett Farkas-tétellel. Emlékeztetőül: Farkas Gyula (1847–1930) a matematikai fizika világhírű művelője volt.

14.3. A többszemélyes változó összegű játékok

Már Neumann is felismerte, hogy mennyire megszorító a kétszemélyes, nullaösszegű (vagy kissé általánosabban, állandó összegű) játék fogalma, de nem találta meg a megfelelő általánosítást. 1951-ben a 21 éves princetoni doktori hallgató, John Nash (1928–) viszont mindkét megszorítástól megszabadította a játékelméletet. (Szomorú, de igaz, hogy Neumann eléggé fanyalgott, amikor Nash elmondta neki korszakalkotó felfedezését. Szerencsére a Svéd Akadémia tagjai 43 évvel később nagyvonalúbbak voltak: 1994-ben Nash megosztott közgazdasági Nobel-díjat kapott.)

Először vázoljuk az általános keretet, majd megadjuk a Nash-egyensúly fogalmát. Legyen n természetes szám a játékosok száma, indexük $i = 1, 2, \ldots, n$. A képletek egyszerűsítése céljából jelölje a „többi" játékos *stratégiaprofil*ját $s_{-i} = (s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$. Ekkor az i-edik játékos nyereségfüggvénye a saját stratégiája és a maradék stratégiaprofil függvénye, jele: $u_i(s_i,s_{-i})$. (Figyelem: az n számú nyereségfüggvény összege általában nem 0, sőt nem is állandó.) Egy $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ stratégiavektort *Nash-egyensúly*nak nevezünk, ha adottnak véve a többi játékos stratégiáját, semelyik játékosnak sem érdemes eltérnie az egyensúlytól:

$$u_i(s_i,s_{-i}^*) \le u_i(s_i^*,s_{-i}^*), \qquad s_i \in S_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kevert stratégia esetén $s_i \in S_i$ helyett mindenütt $\sigma_i \in \Delta S_i$ szerepel.

Egy definíció akkor értékes, ha nem üres. A Nash-egyensúly fogalma márpedig nem üres:

14.2. tétel. *(Nash, 1951.) Egy véges sok tiszta stratégiájú, n-személyes játék esetén létezik legalább egy (általában kevert) Nash-egyensúly.*

Bizonyítás. Legyen $b_i(\sigma_{-i})$ halmaz az i-edik játékos legjobb válasza az $\sigma_{-i} \in \Delta S_{-i}$ lépésre. Ekkor a Nash-egyensúly definíciója átfogalmazható: $\sigma_i^* \in b_i(\sigma_{-i}^*)$, $i = 1,\ldots,n$. Hozzuk létre az egyesített legjobbválasz-leképezést: $b(\sigma) = b_1(\sigma_{-1}) \times \cdots \times b_n(\sigma_{-n})$. Feltevéseink mellett a b legjobbválasz-leképezés létezik, és a $\Delta S = \Delta S_1 \times \cdots \times \Delta S_n$ stratégiahalmazt önmagába képezi le. A Kakutani-féle fixponttétel szerint – amely pontértékű leképezések helyett halmazértékű leképezésekre általánosítja a Brouwer-féle fixponttételt – ekkor létezik legalább egy fixpont: $\sigma^* \in b(\sigma^*)$, amely nyilvánvalóan Nash-egyensúly. ∎

Megjegyzések. 1. Könnyű belátni, hogy a kétszemélyes nullaösszegű játék esetén a Nash-egyensúly a Neumann-féle minimax egyensúlyra egyszerűsödik, tehát a 14.2. tétel a 14.1. tétel általánosítása.

2. Megfelelő technikai feltevések mellett a 14.2. tételből elhagyható a véges számú tiszta stratégia feltevése (vö. Nikaido–Isoda, 1955). Erről szól a 14.2. példa.

14.2. példa. Szimmetrikus oligopol (néhány szereplős) piac. Egy homogén termék piacán n vállalat tevékenykedik, egységköltségük egyaránt c. Legyen az i-edik vállalat termelése q_i. Az összkibocsátás $Q = \sum_i q_i$. Tegyük föl, hogy ennyi termék a piacon p áron kel el, ahol $Q(p) = a - bp$. (A piac keresleti függvénye lineáris, inverze $p(Q)$.) Föltesszük, hogy $a > bc$, azaz $p = c$ önköltségi árhoz tartozó kereslet pozitív. Cournot (1838) általánosításából adódik a *Nash-egyensúly*, ahol minden i-re adottnak véve a többi vállalat döntését, minden vállalat maximalizálja a saját profitját. (Érdekes, hogy a számelméleti és valószínűségi munkája miatt már említett Bertrand 1883-ban egy alternatív elméletet dolgozott ki: a vállalatok nem mennyiségben, hanem árban versenyeznek egymással, és ezen az alapon egészen más eredményt kapott, mint Cournot.) Képletben: alkalmazva a $q = (q_i,q_{-i})$ fölbontást, legyen az i-edik vállalat profitfüggvénye $\pi_i(q_i,q_{-i}) = [p(Q) - c]q_i$. Ekkor a q^* vektor Nash-egyensúly, ha minden i-re és minden q_i-re

$$\pi_i(q_i^*,q_{-i}^*) \geq \pi_i(q_i,q_{-i}^*).$$

Esetünkben a Nash-egyensúly kiszámítható: az egyes vállalatok kibocsátása azonos, és a $Q^*(n) = nq_1^*(n)$ összkibocsátás, valamint az ár rendre

$$Q^*(n) = \frac{n(a-bc)}{n+1} \qquad \text{és} \qquad p^*(n) = \frac{a+nbc}{(n+1)b}.$$

Érdemes kiszámítani az egy vállalatra jutó profitot és az összprofitot:

$$\pi_1^*(n) = (p^*(n) - c)q_1^*(n) = \frac{(a-bc)^2}{(n+1)^2 b} \qquad \text{és} \qquad \Pi^*(n) = n\pi_1^*(n) = \frac{n(a-bc)^2}{(n+1)^2 b}.$$

A vállalatok számának korlátlan növelésével az ár tart a költséghez, és az egyéni, illetve az összprofit 0-hoz.

14.4. Az extenzív alakú játékokról

A halmazelmélettel kapcsolatban említett Zermelo 1913-ban a sakkjátékból kiindulva a következő általánosabb dinamikus játékot elemezte, amelyet később Neumann *extenzív alakú játék*nak nevezett. (Neumann János halmazelméletből írta egyetemi doktori értekezését, tehát ismerhette Zermelo – a halmazelmélet egyik atyja – úttörő játékelméleti munkásságát is.) Két játékos van, $i = 1, 2$, akik elvben felváltva lépnek. A páros időszakban az 1., páratlanban a 2. játékos lép, az i-edik t-beli lépése $s_{i,t}$, addigi lépéseinek *története* $h_{i,t} = (s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,t-1})$. Az, hogy a játékos most mit léphet, függ(het) a saját és az ellenfele történetétől: $(h_{i,t}, h_{-i,t})$, ahol $-i$ jelöli az i-edik játékos ellenfelét, és $S_i(h_{i,t}, h_{-i,t})$ a *t-ben megengedett lépések halmaza.* Feltesszük, hogy mindkét játékos tökéletesen emlékszik a saját és az ellenfele korábbi lépéseire: tökéletes információjú játékról van szó. A játék véges T lépésben véget ér, természetesen T függ(het) a játékosok által alkalmazott stratégiától. A két játékos nyeresége a két stratégiától függ: $u_i(h_{i,T}, h_{-i,T})$.

Intellektuálisan az egyik legizgalmasabb játék a sakk.

14.3. példa. Sakk. A sakkban két játékos játszik egymás ellen. Meghatározott szabályok szerint léphetnek felváltva, s az győz, aki a másiknak mattot ad. Döntetlen a játék, ha vagy a soron következő fél nem tud lépni, pedig a királya nincs sakkban; vagy egy helyzet háromszor megismétlődik; vagy 50 lépésen keresztül nincs gyalogmozgás vagy ütés. Speciálisan a sakkban a győztes 1 pontot, a vesztes 0-át, és döntetlen esetén mindkét játékos 1/2–1/2 pontot kap. Tökéletes információjú véges játékról van szó, amely azonban olyan bonyolult, hogy „eddig még" senki sem tudta meghatározni a győztes stratégiát. Azt sem tudjuk, hogy a sötétnek vagy a világosnak van-e győztes (vagy legalább döntetlent biztosító) stratégiája. Az viszont ismert, hogy valamelyiküknek van vereséget elkerülő stratégiája.

A játékot a gráfelméletből ismert véges irányított *fa* írja le. A fának van egy gyökere (ahol a játék kezdődik), és minden pontjához a gyökérből pontosan egy úton lehet eljutni. A gráf minden pontján meg van határozva, hogy melyik játékos lép, és milyen lépéseket tehet. A fa minden végpontján egy kételemű vektor szabja meg, hogy az egyes játékosok mennyit nyertek. (Ha a fa végtelen lenne, akkor nem biztos, hogy lennének végpontjai, és ekkor a játék sem fejeződne be.)

Világos, hogy a játékfán a végpontoktól a kezdőpontig visszafelé haladva, ha lépésenként optimalizálunk, akkor a stratégiákat is optimalizáljuk: *megfordított irányú indukció*t alkalmazunk. Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő tételt.

14.3. tétel. *(Kuhn, 1953.) Minden tökéletes információjú extenzív alakú véges játéknak van tiszta stratégiájú Nash-egyensúlya, amely a megfordított irányú indukcióval is meghatározható. Ha semelyik játékosnak sincs ugyanakkora haszna semelyik két végpontban, akkor egyetlenegy Nash-egyensúly létezik.*

Megjegyzés. Hagyományosan Zermelo (1913) cikkét tekintik a modern játékelmélet kezdetének. Nemrég derült csak ki, hogy mennyire fontos szerepet játszottak az elmélet továbbfejlesztésében Kőnig Dénes és Kalmár Lszló 1928 körül írt német nyelvű cikkei (vö. Schwalbe–Walker, 2001).

14.5. További fejlődés

A II. világháború alatt az éppen az atombomba és az elektronikus számítógép kifejlesztésén dolgozó Neumannak arra is volt ideje, hogy közgazdásztársával megírja a játékelmélet első monográfiáját: Neumann–Morgenstern (1944/1947). Ma már a játékelmélet a közgazdaságtan egyik legfontosabb alapozó tudománya, emellett alkalmazzák a biológiában és természetesen a hadseregben is. Itt a lehető legrövidebb ismertetésre szorítkozunk.

A kevert stratégia bevezetésénél Neumann (1928) még természetesnek vette, hogy a játékos célfüggvénye azonos a várható nyereséggel. Ha azonban a lottójátékra vagy a biztosításra gondolunk, akkor ez a feltevés nem teljesül közvetlenül: például ha egyheti lottószelvény 150 Ft-ba kerül, akkor – mondjuk –várható bruttó kifizetése mindössze 50 Ft volt, nettó kifizetése –100 Ft. Más példa: ha egy egyhavi 10 000 Ft-os Casco-biztosítás várható kifizetése 8000 Ft, akkor nettó értéke –2000 Ft. A várható pénzbeli veszteség ellenére miért lottóznak és miért kötnek mégis biztosítást az emberek? A válasz egyszerű, de a 11.2. alfejezetben említett Daniel Bernoulli, illetve Neumann és Morgenstern csak később kialakuló mély belátása kellett a megtalálásához: Tekintsük a lehetséges választásokból a konvex lineáris kombinációkkal kapható lottókat. Az ember nem a nyereménye pénzértékét maximalizálja, hanem preferenciáját követi. Ha e preferencia kielégít bizonyos logikus axiómákat, akkor található egy olyan, ún. *Neumann–Morgenstern hasznosságfüggvény*, amely reprezentálja e preferenciákat és egyben ún. *várható hasznosságfüggvény*. Kicsit pontosabban fogalmazva: (i) egy u hasznosságfüggvény *reprezentálja* a preferenciát, ha az egyén pontosan akkor részesíti előnyben az L_1 lottót az L_2-vel szemben, ha $u(L_1) > u(L_2)$; (ii) a hasznosságfüggvény kielégíti a várható hasznosság tulajdonságát, ha az egyén két lottót kombinál, akkor a kombináció hasznosságának a várható értéke a várható értékek kombinációja: $u(pL_1 + (1-p)L_2) = pu(L_1) + (1-p)u(L_2)$.

A Nash-egyensúly kellemetlen tulajdonsága, hogy csak azt garantálja, hogy egy személynek nem érdeke egyoldalúan eltérnie az egyensúlytól. Nem mond azonban semmit sem arról, hogy mi történne, ha legalább két játékos egyszerre eltérne az egyensúlytól. Erről szól a

14.4. példa. A fogolydilemma (Raiffa, 1951). Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik feltehetőleg együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő” enyhébb büntetést kap, esetleg szabadlábra kerül, sőt jutalmat is kap. Az egyszerűség kedvéért a nyereménypár az 1. egyedüli közreműködése esetén (3, –3), a 2.-é esetén (–3, 3). Ha mindkettő tagad (egymással kooperál), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, nyereménypár: (2, 2). Ha mindkettő „köp”, akkor mindketten börtönbe kerülnek, de mindketten jutalmat is kapnak, nyereménypár: (–2, –2).

Most a kifizetési mátrix számpárokból áll, amelyeket a 14.2. táblázat tartalmaz.

14.2. táblázat. *Fogolydilemma*

1. bűnöző	2. bűnöző	Köp	Tagad
Köp		(–2, –2)	(3, –3)
Tagad		(–3, 3)	(2, 2)

Mi lesz a játék egyensúlya? Most még a Nash-egyensúly fogalmára sincs szükségünk, mert akármit lép a másik játékos, az egyik játékos mindig jobban jár, ha köp, mint ha tagad, azaz a köpés *dominálja* a tagadást: például az 1. játékos szempontjából, ha a 2. köp, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($-3 < -2$); ha pedig a 2. tagad, az 1. tagadása ismét rosszabb a köpésénél (2<3). Az már más kérdés, hogy a (köp, köp) egyensúly kettőjüknek együttesen nem optimális, hiszen mindkét játékos veszít ahhoz képest, mint ha egymásban megbízva, mindkettő tagadna. ∎

Példánk végére érve, megjegyezzük, hogy a játékelmélet művelői szeretik ilyen frivol példákon megfogalmazni a problémákat, de azért vannak fontos alkalmazások is.

A Nash-egyensúly *túlzott önzést* feltételez a játékosokról. Mérő (1996) népszerűsítő könyve sok érdekes példát ismertet, amikor az emberek nem akarnak Nash-stratégiát játszani. Talán a legegyszerűbb eset erre a parlamenti szavazás, amikor a választó nyeresége (vesztesége), hogy (nem) az ő pártja vagy képviselője képviseli a parlamentben. Nagyon kicsi annak a valószínűsége, hogy egy adott egyén szavazata számít, mégis sokan veszik a fáradságot, és „önzetlenül" elmennek szavazni.

Eddig tulajdonképpen a *nemkooperatív játékok*ról beszéltünk, ahol az egyes játékosok nem tehetnek betartatható ígéreteket egy közös stratégia követésére. Számos olyan eset adódik azonban, ahol az emberek betartathatóan kooperálnak, ekkor *kooperatív játékok*ról beszélünk. Ismét a politikát véve alapul: egy modern parlamentben a képviselők zöme eleve pártok képviselőjeként jut be, és – kétpárti rendszerektől eltekintve – a parlamenti többség eléréséhez bizonyos pártok gyakran koalíciót kötnek egymással. A koalíción belüli hatalommegoszlás azonban nem szükségképpen arányos a parlamenti helyek számával. Például Németországban évtizedeken keresztül a kis pártok (a Szabad Demokraták, illetve a Zöldek) 5–10%-os súlyuk ellenére a nagyon fontos külügyi és gazdasági miniszteri tárcát kaptak a kormányban. Bizonyos axiómák alapján ki lehet számítani egy párt ún. *Shapley-érték*ét, s ez alapján meg lehet magyarázni ezeket a látszólagos aránytalanságokat (Shapley, 1953).

15. CSILLAGÁSZAT ÉS MATEMATIKA

15.1. Bevezetés

A matematika fejlődése szorosan összefonódott a csillagászatéval, ezért célszerű röviden áttekinteni a (matematikai) csillagászat történetét is. Ebben a fejezetben azt szeretném érzékeltetni, hogy még a viszonylag egyszerű Naprendszer rejtélyét is milyen nehezen tudták megfejteni az évezredek során a legnagyobb tudósok. (A rejtély: miért olyan bonyolult a bolygók mozgása az égbolton, ti. miért bolyonganak előre-hátra?) A csillagászat egyik legnagyobb teljesítményéről, a kopernikuszi fordulatról sokat beszélnek, de komplexitásáról a legtöbben alig tudnak valamit. Márpedig mindenki számára megszívlelendő az igazi történet, amelyet Kuhn (1957) könyve alapján vázolunk. Kiegészítésül ajánljuk Simonyi (1981)-t. A 15.2. alfejezet a görög hagyományról szól (durván 1500-ig), a 15.3. alfejezet a kopernikuszi fordulatról (az 1500–1700-as időszakról), végül a 15.4. alfejezet az elmélet utóéletéről (az 1700 utáni korszakról).

15.2. A görög hagyomány

A korabeli görög tudomány eredményeit általánosítva, Platón (i.e. 427 – i.e. 347) arra a meggyőződésre jutott, hogy a Természet működése nagyon egyszerű matematikai szabályokon alapul. Pusztán két példáját említjük: 1. A legszabályosabb test a gömb, tehát az égitestek gömb alakúak. 2. Öt szabályos poliéder, és emiatt öt fő elem létezik: föld, tűz, víz, levegő és a kvintesszencia (lényeg?). Az az elképzelés, hogy nem a valóság, hanem annak eszmei képe a lényeges, nyilvánvalóan téves gondolat, mindazonáltal nagyon hasznos szerepet játszott a természettudományokban.

Arisztotelész (i.e. 384 – i.e. 322) Platón tanítványa volt, de tanítójánál sokkal realistább. Hétköznapi tapasztalatai alapján dolgozta ki fizikáját. Csak utalunk e fizika néhány elemére: 1. A nehezebb testek gyorsabban esnek, mint a könnyebbek. 2. Egyenes vonalú egyenletesen gyorsuló mozgás fenntartásához állandó erőre van szükség (szekér és ló). 3. A Föld a világegyetem középpontja, amelyet az égi szférák vesznek körül, amelyeken mozognak a bolygók és a csillagok. Erre az elméletre épült a későbbi ptolemaioszi világkép. Ma gyakran azt mondjuk, hogy az arisztotelészi fizika ellentmond a tapasztalatoknak, holott helyesebb lenne úgy fogalmazni, hogy túlságosan földhözragadt.

Több próbálkozás (például az i.e. 4. századi Eudoxoszé) után, i.sz. 150 táján egy alexandriai csillagász, Klaudiusz Ptolemaiosz (i.sz. 120–160) dolgozta ki a földközpontú (geocentrikus) világképet. A mi takarékos ismertetésünkhöz elegendő a következő jegyek kiemelése: 1. A mozdulatlan Föld(gömb) van a világegyetem középpontjában. 2. A Nap és a Hold egyenletes sebességgel kering a Föld körül, a Hold kb. havonta „újjászületik”, s a Nap évente visszatér a csillagokhoz viszonyított korábbi helyére. 3. A csillagok az égi gömbfelszínre rögzítve naponta megkerülik a Földet. 4. Öt bolygó (Merkúr, Vénusz, Mars, Szaturnusz és Jupiter) különböző idő alatt az égbolton látszólag előre-hátra bolyongva kerüli meg a Földet. A továbbiak szempontjából megemlítjük, hogy i.e. 270 körül Arisztarkhosz már azt állította, hogy a Föld saját tengelye körül forogva kering a Nap körül. Ezt a helyes elméletet azonban még sokáig nem fogadták el a tudósok és az emberek.

A görög csillagászok eleve föltételezték, hogy minden mozgás kör alakú pályán, vagy ilyenek összetételén megy végbe. Ptolemaiosz – elődei, különösképpen Hipparkhosz (kb. i.e. 161–126) munkáját tökéletesítve – az Appolóniosztól származó, számos kör-hátán-kör (epiciklus) feltételezésével képes volt viszonylag jó leírást adni a bolygók és az égitestek járásáról.

A későbbiek miatt meg kell említenünk, hogy a görögöknek szellemes módon sikerült elvileg helyes becslést adni a Föld, a Hold és a Nap méreteiről és távolságáról – Simonyi (1981, 83–84. o.) ismerteti a fontosabb eredményeket. Erathoszthenész alexandriai matematikus, Arkhimédész kortársa egészen jól meghatározta a Föld sugarát, Arisztarkhosz becslésében azonban mérési hibák miatt a Föld–Nap távolság mintegy 20-szor kisebbnek adódott, mint a valóságos érték (400 Föld–Hold távolság). Ezért aztán a görögök nagyságrendekkel alábecsülték a csillagok Földtől mért távolságát.

15.1. feladat. a) Igazoljuk, hogy félhold esetén a Nap, a Föld és a Hold egy olyan NFH háromszöget alkot, amelyben az FHN-szög derékszög! b) Számítsuk ki trigonometrikus úton a Föld–Nap távolságot a Föld–Hold távolság függvényeként, ha ismert a HFN szög α)! c) Helyettesítsük be először a korabeli görög $\alpha = 87^{\circ}$-ot, majd a helyes $\alpha = 89^{\circ}52'$-et!

Russel (1946/1996, 196. o.) hívja fel a figyelmet arra a meglepő tényre, hogy Arisztarkhosz egyetlen fennmaradt könyvében maga is a földközépponti rendszerben számolta ki nagyszerű eredményeit. Ennek két oka is lehetett: a) Nem akarta elveszíteni azok jóindulatát, akik elutasították volna forradalmi elméletét, b) Csak könyve írása után jött rá a helyes elméletre.

Russel (1946/1996, 197. o.) szerint a későbbi ógörögök sokkal jobb becsléseket is adtak Föld–Nap-távolságra, de ezúttal a Föld átmérőjének arányában: Hipparkhosz és Poszioniusz (Ciceró nevelője) 1245, illetve 6545 egységet, a helyes érték 11726.

Minden erénye ellenére a ptolemaioszi rendszernek sok hibája volt. Itt csak három fogyatékosságát emeljük ki: 1. Mivel a valóságban minden bolygó, a Föld is, egy-egy Nap körüli ellipszispályán kering, a bonyolult matematikai apparátusra csak a hibás kiindulás miatt volt szükség. 2. A rendszerben csak a képzeletbeli égbolton való látszólagos mozgást lehetett leírni, viszont nem lehetett vizsgálni a bolygók pályaméreteit. Így például fel sem vetődött, hogy a Merkúr vagy a Vénusz van-e közelebb a Naphoz. 3. Mind az elmélet, mind a mérések pontatlanok voltak. 1582-ben a szintén hellén alapokon nyugvó, Julius Caesar által i.e. 45-ben bevezetett naptár már kb. két héttel eltért a helyestől. Gergely pápa vezette be a ma is használt tökéletesített naptárt, amely még a kereszténység körében is csak lassan terjedt el. (A késői igazodás miatt van két évszám is forgalomban Newton születési évéről, és győzött a Nagy Októberi Szocialista Forradalom 1917. november 7-én!)

Ptolemaiosz után kb. 1400 évig nem volt hozzá hasonlóan jelentős csillagász. A kutatók először lassan elfelejtették a ptolemaioszi tudást, majd lassan újra fölfedezték.

15.3. Kopernikusz rendszere

A csillagászat hosszú veszteglése, hanyatlása, majd emelkedése után lépett a tudomány színpadára (lengyel írásmódban) Mikolaj Kopernik (1473–1543), aki 1515-ben előzetesen, majd 1543-ban véglegesen ismertette a szakértők szűk körével új világképét, a napközpontú (heliocentrikus) rendszert. 1. A mozdulatlan Nap van a Világegyetem középpontjában. 2. A Föld, a többi bolygóval együtt körpályán kering a Nap körül, miként a Hold a Föld körül. 3. A csillagok mérhetetlen távol vannak a Naptól és a bolygóktól. (Az 1. és a 2. pont a 15. század itáliai neoplatonizmusának hatását mutatja.) Az új idők jeleként a könyv nem kéziratban, hanem nyomtatásban terjedt, és néhány száz példánya hamarosan fellelhető volt számos országban.

Ez az, amit a köznapi ember ma gondol a világról és a kopernikuszi forradalomról. Lássuk, mik ennek a világképnek az előnyei a korábbi elmélethez képest: a) Világossá teszi, hogy a Földről nézve miért bolyonganak előre-hátra a bolygók. b) Nyilvánvalóvá válik, hogy a Földhöz képest vannak a Naphoz közelebbi (Merkúr, Vénusz) és a Naptól távolabbi bolygók (Mars, Szaturnusz és Jupiter).

A kopernikuszi fordulatnak ez a leírása minőségileg helyes, de homályban hagyja az új rendszer mennyiségi pontatlanságát és fizikai megalapozatlanságát. 1. A körök mellett Kopernikusznak ugyanúgy segédkörökre volt szüksége, mint Ptolemaiosznak, és emiatt rendszere majdnem ugyanolyan önkényes volt, mint elődjéé. 2. Nem volt fizikailag megalapozva. (Miért nem repülnek le az emberek a 30 km/s sebességgel száguldó Földről? Mert a tömegvonzáshoz képest elhanyagolható a centrifugális erő!) 3. Miért nem látszanak a csillagok más helyen tavasszal, mint ősszel (parallaxis)? Például a stadion két végéből egészen más meccset látnak a nézők. (Az eredetileg Arisztarkhosznak szánt és Arkhimédésztől származó, 3. ellenvetésre Kopernikusz helyesen azt válaszolta, hogy túl távol vannak tőlünk a csillagok ahhoz, hogy az eltérés megfigyelhető legyen. Itt emlékeztetünk a 15.1. feladatbeli megállapításra, hogy csekély mérési hiba miatt mennyire alábecsülték a görögök a Föld–Nap-távolságot!) A részletesen kifejtett modellt a kortársak nem(csak) gyávaságból (a Szent Inkvizíciótól való félelem miatt) tekintették hipotézisnek, hanem mert alapjában megrendítette azt a hitet, hogy az Isten által teremtett világ központjában áll a Föld. Kopernikusz matematikai elmélete gyorsan meghódította a csillagászokat, de fizikai tartalmával eleinte nem sokat törődtek. Nem csoda, hogy a katolikus egyház 1615-ig nem sokat vacakolt a kérdéssel, s inkább a protestáns egyházak (például Luther) – a Biblia szigorú hívei –, tiltakoztak Kopernikusz „istenkáromlása” ellen.

Jellemző a kopernikuszi elmélet vegyes fogadtatására, hogy a 16. század egyik legkiválóbb csillagásza, Tycho de Brahe (1541–1601) megpróbált kompromisszumot találni a földközpontú és a napközpontú világkép között. Brahe azt mondta, hogy a bolygók valóban a Nap körül keringenek, de a Hold és a Nap a Föld körül. Belátható, hogy matematikailag a brahei és a kopernikuszi világkép kinematikailag (mozgástanilag) egymással ekvivalens, azonban Brahe elmélete nélkülözi a kopernikuszi centrális szimmetriát.

Brahe nemcsak elméletet gyártott, hanem minden korábbinál jobb méréseket végzett. (Szabad szemmel ennél jobb méréseket lehetetlen volt végezni.) Ezeket a méréseket használta tanítványa, Kepler. Johannes Keplernek (1571–1630) kiváló matematikai adottságai voltak. (Adalék: A gömbök legsűrűbb elhelyezkedéséről szóló sejtését csak 1998-ban oldotta meg Hales, számítógépes számolással, vö. Szpiro (2003).) Ezek a képességek lehetővé tették, a Brahetól örökölt pontos csillagászati mérések pedig rákényszerítették Keplert, hogy egyszer s mindenkorra elvesse a kör-hátán-kör konstrukciót. (A bolygók látszólagos helyzetére vonatkozó régi, 8 szögperces pontosságú mérésekkel sok elmélet összefért volna, de a brahei, 4 szögperces pontosságú méréseket már csak egy elmélet – Kepleré – elégítette ki.) 1609-ben publikálta két forradalmi felfedezését: 1. A bolygók nem körpályák kombinációin, hanem egyszerű ellipsziseken keringenek a Nap, mint egyik fókuszpont körül. 2. Minden bolygó pillanatnyi sebessége fordítottan arányos a Naptól való pillanatnyi távolságával. Majd 1618-ban hozzátette harmadik törvényét: 3. A Naprendszerben bármely bolygó keringési idejének négyzetét elosztva az ellipszis nagytengelyének a köbével ugyanazt az értéket kapjuk. Figyelemre méltó, hogy Kepler Platónt követve misztikus harmóniákat keresett a kozmoszban, és sok butaság mellett bukkant rá csodálatos törvényeire. (A fantáziálásra frappáns példa az öt bolygó távolsága és az öt szabályos test közti kepleri „kapcsolat”.)

Galilei két ponton lép be a történetbe. Először mint csillagász, aki holland elődöket követve, 1609-ben elkészített távcsövét az égboltra irányította. Fölfedezte, hogy a Holdon is vannak hegyek és kráterek, a Jupiternek is vannak holdjai, és Kopernikusz előrejelzésével összhangban, például a Vénusznak is vannak fázisai (sarlói), mint a Holdnak. Ezzel mindenki számára szemmel láthatóvá tette az égi és a földi fizika egységességét: a Föld ugyanolyan bolygó, mint a Jupiter (mindkettőnek holdja(i) van(nak)), a Hold ugyanolyan égitest, mint a Föld (kráterei és hegyei vannak).

Második hozzájárulása az arisztoteliánus fizika lerombolása volt, utat nyitva Newtonnak az égi és földi mechanika egyesítéséhez. (Ma már tudjuk, hogy a középkori skolasztikusok sokban megelőlegezték Galilei eredményeit, például ismerték az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő-törvényét, vö. Simonyi (1981) 125. o.)

A történelem fintora, hogy a katolikus egyház, amely a későközépkorban tulajdonképpen türelmesen viszonyult a tudományhoz, éppen akkor (1616-ban) indította meg a támadást a kopernikuszi rendszer ellen, amikorra már Galilei és Kepler nyomán az új rendszer igazsága nyilvánvalóvá vált.

Eddig csak a bolygómozgások matematikai szabályait ismertük meg. Mik az ezek mögött meghúzódó fizikai okok? Newton 1670 körül felfedezte, hogy két égitest, például a Nap és a Föld (vagy a Föld és a Hold) esetén a kisebbik test szükségképpen egy olyan ellipszispályán mozog, amelynek az egyik gyújtópontjában a két rendszer tömegközpontja áll (ez a Föld–Nap-együttesénél a Nap belsejében található, pedig a Nap sugara a Föld–Nap-távolságnak mindössze 4 ezreléke); és sebessége fordítottan arányos a nagyobbik testtől mért távolságával (Kepler I. és II. törvénye). A jó közelítést nyújtó körpályára szorítkozva, és a sokkal nagyobbik testbe helyezve az együttes tömegközpontot középiskolai feladathoz jutunk. A centripetális gyorsulás Huygens-féle képletét alkalmazva ($a = v^2/R$, ahol a a gyorsulás, v a sebesség és R a pályasugár), az általános tömegvonzás fordított négyzetes törvényének ($F = fm_1m_2/R^2$, ahol F a centripetális, illetve a neh0ézkedési erő, f egy arányossági tényező, m_1, illetve m_2 a két test tömege) föltételezésével igazolható Kepler III. törvénye is: $T^2/A^3 = k$. Simonyi (1981, 221–222. o.) részletesen is bemutatja, hogy mennyire egyszerű a modern eszközökkel a levezetés, de azt is, hogy mennyire bonyolult volt Newton számára, különösen amiatt, hogy az újonnan kovácsolt saját analitikus eszközei helyett az ókori geometriai módszerekhez nyúlt vissza a bizonyításokban. – Összeállt a kép.

15.2. feladat. Igazoljuk, hogy a Nap körüli körpályán mozgó bolygóra igaz Kepler III. törvénye!

15.4. A kopernikuszi fordulat után

A kvantumfizika atyja, Max Planck jegyezte meg szellemesen: a túlhaladott tudományos igazságokat nem az új igazságok győzik le, hanem a régiek képviselői egyszerűen kihalnak. Ez a mondás többé-kevésbé illik arra a folyamatra is, ahogyan a ptolemaioszi (és a brahei) világképet fölváltotta a korpernikuszi.

A 16. század végére minden élvonalbeli csillagász alkalmazta Kopernikusz módszereit, még ha nem is fogadta el elméletét. A 17. század végéig az egyetemeken három elméletet tanítottak: a ptolemaioszit, a kopernikuszit és a braheit, azonban az első és a harmadik elmélet fokozatosan kihalt. Már Euler és Voltaire veszekedése kapcsán (7.5. alfejezet) említettük, hogy az igazán civilizált Franciaországban a newtoni tömegvonzás fizikai törvényének elfogadása több évtizedet vett igénybe. Persze a pontos matematikai számításokat már késedelem nélkül átvették, de az azonnali távolhatást kezdetben nehezen fogadták el. 1781-ben Frederick Herschel (1738–1822) távcsővel fölfedezte a Naprendszer „új" bolygóját, az Uránuszt, s ezzel végképpen értelmetlenné tette Kepler platóni hókuszpókuszát az öt bolygó és az öt szabályos test kapcsolatáról. 1838-ban Friedrich Bessel (1784–1846) végre igazolta a parallaxist. A newtoni mechanika egyik legszebb diadala volt, amikor 1846-ban Urbain Leverrier (vagy Le Verrier) (1811–1877) francia tudós az elmélet alapján – a differenciálegyenletek numerikus módszereinek mestereként – megjósolta a még ismeretlen Neptunusz helyét, s csillagászok tényleg megtalálták a bolygót. (Igaz, Leverrier-nek szerencséje volt, mert olyan kiegészítő feltevéseket alkalmazott, amelyek éppen akkor érvényesek voltak, de máskor nem!) Végül a 20. század elején Albert Einstein (1879–1955) a newtoni fizika relativisztikus általánosításával megmagyarázta a newtoni mechanika utolsó rejtélyét: a Merkúr *perihéliumá*nak (amikor a bolygó a legközelebb van a Naphoz) tényleges mozgása periódusonként 38 szögmásodperccel eltér a newtoni elméletből adódó értéktől. (Megint csak a történelem fintora, hogy korábban Leverrier egy nem létező bolygóval próbálta megmagyarázni a rendellenességet!) A Naprendszeren kívüli valóságra vonatkozó kutatásokról elegendő azt megjegyezni, hogy csupán 2000 körül fedezték föl a Naprendszeren kívüli első bolygót!

A Naprendszer dinamikai kérdései máig nagyon fontos szerepet játszanak a matematika fejlődésében is. A bőséges irodalomból kiemeljük Diacu–Holmes (1996) könyvét, amely igényes népszerűsítő alakban tárgyalja a kérdéskör történetét. Csupán az alkalmazott matematikát lenéző egyes elméleti matematikusok kedvéért említem meg, hogy a legnagyobbak foglalkoztak a Naprendszer stabilitásának a kérdésével: Euler, Lagrange, Laplace, Gauss, Poincaré és Kolmogorov. Elméletileg a legérdekesebb felfedezés az, hogy a Naprendszer esetleg *kaotikus*an viselkedik: évmilliárdok során lassan, de jelentősen megváltozhat a szerkezete (vö. Szépfalussy–Tél, szerk., 1982; Gleick, 1988). Meglepő, hogy éppen az a Poincaré, aki a modern általános függvényfogalom ellen harcolt (vö. 8. fejezet), vezette be a kaotikus rendszerek elméletét a matematikába!

A katolikus egyház csak lassan békélt meg az új igazsággal. Csupán 1822-ben vették le Kopernikusz művét a tiltott könyvek listájáról. 2000 körül Galilei perét újratárgyalták és Galileit felmentették.

Érdekes, hogy a posztmodern korban számos tudománytörténész és népszerűsítő író hajlik arra, hogy a fejlődés zegzugos útját eltúlozva, kétségbe vonja a tudomány haladását. Koestler (1959) érdekfeszítő, de túlzó könyvében azt sugallja, hogy a csillagászat nagyjai, nevezetesen Kopernikusz, Galilei, Kepler és Newton jószerével nem is tudták, hogy mit csináltak. „Alvajárók” voltak. A neves jezsuita tudománytörténész, Duhem (1908) még ennél is tovább ment, és több szempontból elhamarkodottnak tartotta a kopernikuszi forradalmat, maximális megértéssel kezelve a katolikus egyház reagálását. Érvelésének lényege: az, hogy matematikai szempontból a kopernikuszi elmélet egyszerűbb, mint a ptolemaioszi, és jobban lehet vele számolni, még nem jelenti azt, hogy a kopernikuszi elmélet fizikailag helyes. Lehet, hogy mindkét elmélet hibás, és ezt Duhem szerint az egyháziak, beleértve magát a pápát is, jobban megértették, mint a nagy felfedezők. Remélem, hogy az olvasók számára a korábbi érvek meggyőzőbbek, mint a legutolsó.

E megközelítés végletes formája, amikor Galileit(!) hibáztatják, hogy nem volt megértő a katolikus egyház ideológiai gondjaival szemben, amelyeket a modern tudomány megjelenése okozott. Ízelítőül egy rosszhiszemű és ostoba idézet egy egyébként érdekes és szépen illusztrált matematikatörténeti könyvből: „Ahhoz, hogy [az egyháziak] elvessék az évezredes világképet és hozzáfogjanak a laikus tömegek világnézetének az átalakításához, több bizonyítékot akartak. Sok befolyásos arisztoteliánus teológus folytatott utóvédharcokat mindeme változtatásokkal szemben, és ezeket a teológusokat Galilei eléggé meggondolatlanul gúnyolta ki szarkasztikus és szenvedélyes írásaiban. Az arrogánsan magabiztos Galilei kacérkodott a gazdagsággal és a hírnévvel, de a támogatás megszűntével alig maradt barátja a tudományos körökben.” (Mankiewicz, 2000, 93–94. o.) Bár Galilei valóban nem volt hibátlan jellem (például Keplert lekezelte, a Mediciektől (sikertelenül) pénzt kért, hogy róluk nevezze el az általa felfedezett Jupiterholdakat), ezért még nem kell ellenfelei pártjára állnunk. Mindennél többet mond a Galilei-per pusztító hatásáról, hogy a pert követően Itáliában hamarosan és tartósan megszűnt mindenféle természettudományos kutatás!

FÜGGELÉK.

F.1. Az Euler–Maclaurin-összegzés

A függelék első részében a 8.2. alfejezetben tárgyalt nevezetes $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$ sor korabeli numerikus meghatározását próbáljuk meg rekonstruálni, sort kerítve az Euler–Maclaurin-összegzésre is. Először azt mutatjuk be, hogy elemi (integrál)becsléssel hogyan lehet jó felső becslést az összegre. Ezt követően pedig vázoljuk az ún. Euler–Maclaurin-képletet, amely sokkal finomabb, mint elődje, de ennek megfelelően óvatosan kell vele bánni. Eulernak e képlet segítségével 1732-ben már hét tizedesjegy pontosságig sikerült közelítenie az értéket.

Az elemi módszer. Kezdjük az egyszerűbb módszer ismertetésével. Tegyük föl, hogy a sor első n tagjának összegét pontosan (kézzel vagy számológéppel) meghatároztuk, és a maradékot becsüljük felülről az $1/x^2$ függvény $[n,\infty]$ közti integráljával, amelynek értéke $1/n$. Az F.1. táblázat mutatja a gwbasic program az egyszeres, a kétszeres pontosságú alsó (S_n, illetve T_n) és a megfelelő felső becslést, $n = 10^k - 1$-ra.

F.1. táblázat. *Alsó és felső becslések* $\zeta(2)$*-re:* $n = 10^k - 1$

k	S_n	T_n	$S_n + 1/n$	$T_n + 1/n$
1	1,53977	1,53977	1,65088	1,65088
2	1,63488	1,63488	1,64499	1,64499
3	1,64393	1,64393	1,64493	1,64493
4	1,64473	1,64483	1,64483	1,64493
5	1,64473	1,64492	1,64474	1,64493
6	1,64473	1,64493	1,64473	1,64493

Figyeljük meg, hogy az egyszeres pontosságú számolás már az $n = 10^4$-nél cserben hagy bennünket, és ezen a korrekció sem segít: az egyszeres pontosságú felső becslés 10^{-4}-nel kisebb a helyes értéknél. Ugyanez a becslés $n = 10^3$-nál még nemcsak, hogy megbízható, de véletlenül pontos is volt: 1,64493. A kétszeres pontosság már elegendő.

Az Euler–Maclaurin-képlet alkalmazása. Rátérünk a bonyolultabb módszer ismertetésére (Kline, 1972, 451–452. o. és Weil, 1983, 257–261. o.).

Induljunk ki a következő kombinatorikai eredményből (lásd Smith 1929, 85–90. o.), amelynek előzményeivel már a 4.4. tételben találkoztunk.

F.1. tétel. *(Jakob Bernoulli, 1705 előtt.) Az első n természetes szám r-edik hatványának összege zárt alakban előállítható:*

$$S_n^r = \sum_{i=1}^{n} i^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + \frac{1}{2} n^r + \sum_{k=1}^{(r-1)/2-1/2} \binom{r}{k} B_{2k} n^{r+1-2k},$$

ahol B_{2k} a k-adik páros Bernoulli-szám.

B_1 kivételével a páratlan Bernoulli-számok értéke 0, együtt rekurzíve kiszámíthatók a következő egyenletből:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{j} B_j = 0.$$

Az első néhány érték:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66} \dots .$$

Ezt a bizonyítás nélkül kimondott pontos egyenlőséget általánosította Euler és Maclaurin tetszőleges függvényekre, közelítő alakban. Legyen f egy az $[1,\infty]$-on értelmezett egyváltozós eléggé sima függvény, amelynek az $S_{m,n} = \sum_{i=m}^{n} f(i)$ összegét akarjuk közelíteni.

F.2. tétel. *(Euler, 1732–Maclaurin, 1742.) Az $S_{m,n}$ összeg $2K$-ad rendű közelítése:*

$$S_{m,n} \approx \int_m^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}[f(m) + f(n)] + \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{2k}}{(2k!)} [f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(m)].$$

Megjegyzések. 1. Ha az első n természetes szám r-hatványösszegére alkalmazzuk a képletet $2r$-ad rendben, akkor speciális esetként a F.1. tételbeli pontos egyenlőséget kapjuk.

2. Később Euler belátta, hogy a Bernoulli-számok az $f(x) = x/(e^x - 1)$ függvény Taylor-sorának együtthatói, azaz $B_i = f^{(i)}(0)$, $i = 1, 2, \dots,$.

3. A bizonyítás elemi, de eléggé technikai (vö. Wikipédia, amely a maradéktagot a Bernoulli polinomokkal segítségével megadja). A $2K$-ad rendű Taylor-formula segítségével az F.1. tételből következik az F.2. tétel. Érdekes, hogy az elsőrendű közelítés éppen az integrálás ún. trapéz-szabálya:

$$\int_m^n f(x)\,dx \approx \frac{1}{2} f(m) + \sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) + \frac{1}{2} f(n).$$

Nézzük meg, hogyan lehet használni e képletet a nevezetes $\zeta(2)$ esetében. Természetesen függvényünk $f(x) = x^{-2}$, azaz az $f'(x) = -2x^{-3}$, $f''(x) = 2 \cdot 3x^{-4}$ stb. Általánosan $f^{(i)}(x) = (-1)^i (i+1)! x^{-i-2}$; $n = \infty$-re a kisebbítendők eltűnnek, a kivonandók viszont egyszerűen $f^{(2k-1)}(m) = -(2k)!/m^{2k+1}$. Behelyettesítve:

$$\sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{i^2} \approx \frac{1}{m} + \frac{1}{2m^2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{2k}}{m^{2k+1}}.$$

Meglepetés éri az Olvasót, ha az egyébként kiváló Kline-t által sugallt, $m = 1$-től induló mechanikus módszert alkalmazzuk. Először is a képlete hibás, mert az elsőrendű tagban $f(n)$ rossz előjellel szerepel. Persze ha $n = \infty$, akkor ez a hiba ártalmatlan. De az igazi hiba mélyebben rejlik. Az F.2. táblázat 2. oszlopában szereplő számok nagyon rosszul közelítik a helyes értéket, sőt, az utolsó két érték már rosszabb, mint a korábbiak, az eljárás divergál. Az elemi közelítéshez hasonlóan, némi kísérletezés után rájöhetünk arra, hogy érdemes a sor első kilenc tagját „kézzel" összegezni (gépünk szerint $S_9 = 1{,}53977$), és csak az $S_{10,\infty}$ maradékra alkalmazni a E–M-képletet. Kiigazított becslésünket az F.2. táblázat 3. oszlopa tartalmazza, az első öt közelítésre.

F.2. táblázat. *Az Euler-Maclaurin-képlet mechanikusan és kiigazítva*

K-rendű közelítés	Mechanikus	Kiigazított
0	1,50000	1,644770
1	1,66667	1,644937
2	1,63333	1,644936
3	1,65714	1,644936
4	1,62381	1,644936
5	1,69957	1,644936

Zárásként oldjuk meg a következő feladatot.

F.1. feladat. (de Moivre–Stirling (1730)-féle képlet.)

$$n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{B_{2k}}{(2k-1)2k}\frac{1}{n^{2k-1}}\right).$$

A képletet – a $\sqrt{2\pi}$ állandó nélkül – de Moivre fedezte fel, majd James Stirling (1692–1770) 1730-ban megtalálta az állandót. Ezen alapul a 11.3. tétel, amely a valószínűségszámítás centrális határeloszlás-tételeként alapvető jelentőségű.

F.2. A Riemann-hipotézis

A függelék második részében a Riemann-féle hipotézist és a primszámtétellel való kapcsolatát vázoljuk – Riesel (1985) 2. fejezetét követve.

A zéta-függvényen alapuló módszert fejlesztette tovább Riemann (1859) nyolcoldalas zseniális cikkében, amelyben belátta az Euler által vázolt állítást, és kimondta azóta is megoldatlan sejtését.

F.1. sejtés. *(Riemann, 1859.) A zéta-függvénynek a triviális negatív gyökökön kívül csak olyan (komplex) gyöke lehet, amelynek valós része 1/2.*

A sejtés alapja a korábban már ismertetett Euler-féle rekurzió. Valóban, ha egy gyök $s = u + iv$, akkor a rekurzió szerint $1 - s = 1 - u - iv$ is gyök. Ha $u = 1/2$, akkor $1 - s = 1/2 - iv = \bar{s}$, s komplex konjugáltja. Selberg igazolta, hogy a zéta-függvény gyökeinek pozitív hányada kielégíti a Riemann-hipotézist. Riemann vázolta, hogyan lehet sejtését az akkor még (10.3.) prímszámsejtés igazolására alkalmazni. Euler munkáját folytatva, Riemann a zéta-függvényt nemcsak a $\mathbf{Re}\ z < 0$ bal félsíkra terjesztette ki, hanem a $0 < \mathbf{Re}\ z < 1$ sávra is. Elemi átalakítással adódik

$$(1 - 2 \cdot 2^{-s})\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^s}.$$

A $\zeta(s)$ és a $\pi(s)$ függvények kapcsolatát Riemann egy harmadik függvényen keresztül találta meg:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \pi(x^{1/k}).$$

A trigonometrikus soroknál bevált fogás szerint a p^r prímhatványoknál fellépő ugrásokat megfelezzük és a bal, illetve a jobb oldali határérték középértéket vesszük a függvény értékének az ugráspontban.

A 10.3. tétel segítségével igazolható a

F.3. tétel. *f és ζ között a következő kapcsolat áll fenn:*

$$\frac{\log \zeta(s)}{s} = \int_1^{\infty} f(x) x^{-s-1}\, dx.$$

Riemann hiányosan bizonyított két összefüggést, amelyet Hans Mangoldt (1854–1925) röviddel a prímszámtétel bizonyítása előtt kifogástalanul igazolt.

F.4. tétel. *(Riemann–Mangoldt, 1859–1895). Jelölje ρ a zéta-függvény egy tetszőleges komplex (nem valós) gyökét. Ekkor igaz, hogy*

$$f(x) = \mathrm{li}\ x - \sum_{\rho} \mathrm{li}\ (x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{dt}{(t^2-1)t \log t} - \log 2.$$

Ha a Riemann-sejtés igaz, akkor igaz a következő közelítés:

$$f(x) = \mathrm{li}\ x + O(\sqrt{x} \log x),$$

ahol O az ismert nagyságrend-függvény (nagy ordó).

Számelméletből ismert a Ferdinand Möbiusról (1790–1868) elnevezett Möbius-féle μ függvény (vö. Freud–Gyarmati, 2000, 226. o. és 247–249. o.). Ennek a függvénynek és a köré épülő elméletnek a segítségével $\pi(x)$ kifejezhető a Riemann-féle f függvénnyel:

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} f(x^{1/n}).$$

Végül megadjuk a Riemann-féle prímszám-képletet:

F.5. tétel. *(Riemann, 1859.) Az x-nél kisebb prímszámok száma közelítőleg*

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{li}\ (x^{1/n}).$$

Numerikus közelítő számítások esetén li x-re a $\log x$ szerinti hatványsorba fejtést célszerű alkalmazni. Például

$$\mathrm{li}\ x = \gamma + \log\log x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n!n},$$

ahol γ a híres Euler-féle állandó:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

(Megemlítjük, hogy még ma sincs bizonyítva, hogy γ racionális vagy irracionális szám!)

Hasonlóan igazolható, hogy

$$R(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n!n\zeta(n+1)}.$$

Ahhoz, hogy képet alkossunk a közelítés jóságáról, tekintsük a következő táblázatot.

F.3. táblázat. *A prímszámok számának közelítése*

x	$\pi(x)$	[li $x - \pi(x)$]	$[R(x) - \pi(x)]$
10^2	25	5	1
10^3	168	10	0
10^4	1229	17	–2
10^5	9592	38	–5

Látható, hogy a Riemann-féle R-függvény mennyivel jobban közelíti $\pi(x)$-et, mint a Gauss-féle li x.

Mi történik, ha a Riemann-sejtés mégsem igaz? Ekkor gyengébb tételt kapunk, amelyet a prímszámtétel két bizonyítója is észrevett. Valóban, ha csak azt tudjuk, hogy **Re** $\rho < \theta$, ahol $1/2 \le \theta \le 1$ egy alkalmas valós szám, akkor a szóban forgó becslés a következő alakot ölti:

$$f(x) = \mathrm{li}\ x + O(x^{\theta}).$$

A prímszámsejtés igazolói ezt az észrevételt $\theta = 1$-re alkalmazták.

Derbyshire (2004) népszerűsítő könyve izgalmas beszámolót nyújt a kérdés történetéről. Megtudjuk, hogy a nevezetes zéta függvénynek már több milliárd gyökét megtalálták, és – eddig – mindegyik eleget tett a Riemann-sejtésnek. Cikkek százai születtek, amelyek arra épülnek, hogy a sejtés igaz. Ennek ellenére vannak olyan matematikusok, akik nem bíznak a sejtés érvényességében, pedig 2002-ben már 100 milliárd Riemann-gyököt találtak. (Riemann még csak 3 gyökpárt ismert!) Ma már egy magánalapítvány 1 millió amerikai dollárt ígér a sejtés igazolójának vagy cáfolójának.

ÉLETRAJZOK DIÓHÉJBAN

Az itt következő életrajzok részben megismétlik, részben kiegészítik a főszövegben elmondottakat. A szögletes zárójelben megadott fejezet- és alfejezetszámok névmutatóként is szolgálnak.

Abel, Niels (1802–1829), norvég. Rövid élete során számos nagy felfedezést tett. Ruffini munkáját folytatva, ő bizonyította be 1826-ban az ötödfokú egyenletek algebrai megoldhatatlanságát [12.2]. Nevét viselik a kommutatív csoportok [12.2]. A hatványsorok egyenletes konvergenciáját is ő igazolta 1826-ban – az egyenletes konvergencia felfedezése előtt [8.3].

Al-Khvárizmi (meghalt kb. 850), arab, Bagdadban élt. Az algebra egyik kidolgozója, a szó könyve címéből származik [3.3], nevének eltorzításából ered az *algoritmus* szavunk.

Apollóniosz (i.e. 210 körül), görög. A hellenisztikus korban a görög Alexandriában (ma Egyiptom) dolgozott. Az ókor legnagyobb geométere, tőle származik a kúpszeletek elmélete [2.4]. Középiskolából ismert a róla elnevezett kör.

Arkhimédész (i.e. 287?–212), görög. A szicíliai Szirakúza városban született és halt meg. Az ókor legnagyobb matematikusa [2.6, 8.4], fizikusa és hadmérnöke. A róla szóló legenda a praktikum és a szórakozottság ellentmondásával terhelt: egyrészt ellenállhatatlan hadigépeivel szülővárosa védői sokáig sikerrel hárították el a római ostromot, másrészt a város elfoglalásakor is mértani feladványaiba merült, és az őt leszúrni készülő római katonának azt mondta: „Ne zavard a köreimet!” Óriási hírére jellemző, hogy az ókor nagy életrajzírója, Plutarkhosz több oldalt szentel neki (II. kötet, 60–67. o.).

Banach, Stefan (1892–1945), lengyel. A funkcionálanalízis történetének egyik főhőse, a róla elnevezett teljes normált lineáris térben igazolta a nevét viselő fixpont-tételt (1920–1932) [13.3].

Barrow, Isaac (1630–1677), angol. Newton cambridge-i tanára, a Newton–Leibniz-páros előtt talán ő jutott a legközelebb a kalkulus felfedezéséig [5.2]. 1670-ben az angol király papja lett, ezért cambridge-i posztját átadta Newtonnak.

Bayes, Thomas (1702??–1761), angol. 1750 körül fedezte fel a róla elnevezett tételt: hogyan változik egy esemény feltételes valószínűsége bizonyos kísérletek elvégzése után [11.2].

Bernoulli, Daniel (1700–1782), svájci. Született Bázelben, meghalt ugyanott. Johann Bernoulli fia. A rezgő húr egyenletének vizsgálatakor már 1753-ban rábukkant a Fourier-sorra, mintegy 60 évvel Fourier felfedezése előtt [8.3]. 1735-ben megoldotta a szentpétervári paradoxont a várható hasznosság bevezetésével [11.2, 14.5]. Áramlástani munkásságának (1738) egyik gyakorlati eredménye a jelenleg használatos szóró (spray).

Bernoulli, Jakob (1654–1705), svájci. Született Bázelben, meghalt ugyanott. Öccsével, Johann-nal együtt Leibniz legjobb tanítványa, aki analízisbeli eredményeivel

[4.3], [F1], variációszámítási 1696) [7] és valószínűség-számítási könyvével (1713) [11.3] örökre beírta nevét a matematikatörténetbe.

Bernoulli, Johann (1667–1748), svájci. Született és meghalt Bázelben. Bátyjával, Jakobbal együtt Leibniz legjobb tanítványa. Legfontosabb eredményeit a variációszámításban érte el (brachisztochron-feladat, 1696) [7.2]. Számos eredményét pénzért eladta l'Hospital márkinak, s ezért viseli a márki nevét a 0/0 határozatlan alak kiszámításának Bernoulli-féle módszere, amelyet l'Hospital a történelem első kalkuluskönyvben publikált 1696-ban.

Bertrand, Joseph (1822–1900), francia. Számelmélész (1845-ben megsejtette, hogy n és $2n$ között mindig van prím [10.3]), 1888-ban két azóta is népszerű valószínűség-számítási paradoxont fogalmazott meg [11.2] és 1883-ban kidolgozta a Cournot-féle duopólium-elmélet alternatíváját [14.3].

Bessel, Friedrich (1784–1846), német csillagász és matematikus. 1838-ban elsőként mutatta ki a bolygók parallaxisát és számos alkalmazott matematikai eredmény viseli a nevét (például Bessel-függvény).

Bolyai, János (1802–1860), magyar. Kolozsvárt született és Marosvásárhelyen halt meg. Hadmérnök korában fedezte fel, hogy az euklideszi geometria mellett egy ugyanolyan logikus, másik geometria is kiépíthető [12.4]. Három évvel Lobacsevszkij rokon tárgyú publikációja után, 1832-ben apja könyvének függelékeként jelent meg latinul műve, amelyet életében nem ismertek el, még Gauss sem, aki hasonló területen is dolgozott, csak félt megjelentetni felkavaró eredményeit.

Bolzano, Bernhard (1781–1848) német. Prágában dolgozó pap, a analízis kiemelkedő alakja, akit az egyházi cenzúra számos tudományos eredménye közlésében megakadályozott. Nevét viseli két alapvető analízistétel (1817-ből), és 1834-ben ő adott először példát mindenütt folytonos és sehol sem differenciálható függvényre [8.4].

Bombelli, Raffaello (1526–1573), olasz. A komplex számok kezdetleges elméletének kidolgozója, aki rájött arra, hogy a harmadfokú egyenletek valós gyökeit hogyan lehet konjugált komplex számok segítségével kiszámítani (1572 előtt) [4.2, 9.2].

Borel, Émile (1871–1956), francia. Lebesgue-gel együtt a modern mértékelmélet létrehozója (például Borel-halmaz) [13.2]. A Heine–Borel-tétel „társtulajdonosa" (1895). Kolmogorov előtt sikerrel alkalmazta a mértékelméletet a valószínűség-számításban (1909) [11.3]. 1921-ben elsőként elemezte a nullaösszegű kétszemélyes játékokat [14.2]. Sokáig aktív politikus, rövid ideig tengerészeti miniszter is volt.

Brouwer, Luitzen (1881–1966), holland. A róla elnevezett fixponttétel felfedezője (1913) [14.2], és a logicizmust bíráló, ún. *intuicionista* iskola feje [12.5].

Cantor, Georg (1845–1918) német. Az 1872-ben másokkal együtt szabatossá tette az analízist. 1874-től kezdve megteremti a halmazelméletet [12.5]. Forradalmi eredményei annak idején éles ellenállásba (különösen Kroneckerébe) ütköztek, közlésük gyakran éveket késett. 1884-től kezdve gyakran szenvedett idegbajban, élete egy elmegyógyintézetben ért véget.

Cardano, Girolamo (1501–1576), olasz. Több titkolózó matematikus után, 1545-ben ő közölte először a harmadfokú egyenlet megoldóképletét [4.2]. Emellett próbálkozott a valószínűség-számítás kifejlesztésével [11.2]. Zseniális technikus, nevét viseli a kardáncsukló, illetve a kardántengely, amely az autó elején elhelyezkedő motor forgását a hátul meghajtott kerekekre átviszi.

Cauchy, Augustin-Louis (1789–1857), francia. Minden idők egyik legnagyobb és legsokoldalúbb matematikusa. A komplex függvénytan kialakítása (1815-től) [9.3] és az analízis szabatossá tétele (határérték és folytonosság, 1821) [8.4] mellett a determinánselméletet (1812) [6.4] és a csoportelméletet [12.2] gazdagította alapvető eredményeivel.

Cavalieri, Bonaventura (1598–1647), olasz jezsuita. Milánóban született, Bolognában halt meg. Az analízis egyik előfutára, Cavalieri-elv és hatványösszeg (1635).

Cayley, Arthur (1821–1896) brit. A lineáris algebra (Cayley–Hamilton-tétel, 1858) [6.4], a gráfelmélet és az absztrakt csoportelmélet (1858) [12.2] egyik megalkotója.

Clairaut, Alexis Claude (1713–1765), francia matematikus. A 18. század egyik legjelentősebb analistája, egzakt differenciálegyenlet felfedezője (1740) [9.3].

Cohen, Paul (1934–) amerikai. Az ún. forszolás felfedezője, amelynek segítségével 1963-ban bebizonyította, hogy a kontinuumhipotézis és a kiválasztási axióma független a szokásos halmazelméleti axiómarendszertől [12.5].

Cotes, Roger (1682–1716), angol. A Principia második kiadásánál 1709 és 1713 között fáradhatatlanul segített Newtonnak [9.3]. Okkal mondta róla halála után a ritkán nagylelkű Newton: „Ha Cotes tovább élt volna, akkor most tudnánk valamit."

Cramer, Gabriel (1704–1752), francia. A róla elnevezett szabály egyik felfedezője (1750) [6.2], és az algebrai geometria egyik előfutára.

Csebisev, Pafnutyij (1821–1894) orosz. A Csebisev-egyenlőtlenség segítségével általánosította a nagyszámok gyenge törvényét (1867 előtt) [11.3], igazolta a prímszámtétel gyenge alakját 1848-ban, valamint a Bertrand-sejtést 1850-ben: „minden n és $2n$ között létezik legalább egy prímszám". [10.3].

d'Alembert, Jean (1717–1783) francia, született és meghalt Párizsban. A 18. század egyik legnagyobb hatású matematikusa, a határérték és különösen a differenciálhányados mint a differenciahányadosok határértékének a szorgalmazója [8.4]. 1746-ban megoldotta a rezgő húr parciális differenciál egyenletét [8.3], 1752-ben elsőként komplex függvénytani eszközöket alkalmazott hidrodinamikai feladatokra [9.3]. A nagy francia forradalomhoz vezető felvilágosodás egyik élharcosa, a Nagy Enciklopédia társfőszerkesztője.

Darboux, Gaston (1842–1917), francia analista [8.3]. Nevét viselik az olyan (nem feltétlenül folytonos) függvények, amelyek minden közbülső értéket felvesznek (deriváltak), és ő látta be a függvénysorok tagonkénti integrálásának feltételét 1875-ben.

Dedekind, Richard (1831–1916), német. Az analízis egyik axiomatizálója (1858–1872), a Dedekind-szelet felfedezője (1858–1872) [8.4], a permutaciócsoport elemzője (1858).

de Moivre, Abraham (1667–1754), francia származású angol. A nantesi ediktum 1685-ös visszavonása után protestánsként Angliában telepedett le. Legfontosabb eredménye: a standardizált binomiális eloszlás tart a normális eloszláshoz (1733–1738) [11.3], ehhez természetesen szüksége volt a Stirlingről elnevezett képlet némileg hiányos alakjára is. Nevét viseli a komplex számok hatványára vonatkozó tétel (1707–1730) [9.2] és ő fedezte fel a Fibonacci sorozat explicit képletét a generátor módszerrel 1724-ben.

Descartes, René (1596–1650), francia, meghalt Stockholmban. Nevét viseli a derékszögű koordináta-rendszer (1630 körül) [4.6]. Emellett jelentős eredményeket ért el az analízis előfutáraként, kimondta az egyszerű poliéder csúcsai, élei és lapjai közti, Euler-összefüggést. Kiváló fizikus (Snellius–Descartes-törvény, 1620 körül) [7.2], bár örvényelméletét később Newton megcáfolta [7.5]. A racionalizmus atyjaként ma is az egyik legnagyobb filozófusként tartjuk számon, mellesleg a francia nyelv mestere.

Diophantosz, 3. sz? Alexandria, hellén. A számelmélet és az algebra úttörője.

Dirichlet, Lejeune (1805–1859), francia. Ő mondta ki és bizonyította be a Fourier-sorok konvergenciájára vonatkozó első szabatos tételt 1829–1837 között [8.3]. Nevét viseli egy fontos számelméleti tétel (a nem triviális számtani sorozatokban végtelen sok prímszám létezik, 1837) és az ismert sehol sem folytonos függvény (1829) [8.4, 13.2].

Du Bois-Reymond, Paul (1831-1889), német. 1873-ban ő mutatta be az első olyan folytonos függvényt, amelynek Fourier-sora végtelen sok pontban divergál. 1875-ben ő vezette be az átlós módszert, amely Cantor kezében olyan fontossá vált.

Einstein, Albert (1879–1955), svájci születésű német, majd amerikai. A történelem egyik legjelentősebb fizikusa, egyebek között a speciális és az általános relativitáselméletben [12.4], [15.4] felhasználta a nem euklidészi tereket [12.4], [15.4]. A Brown-mozgás egyik első modellezője (1905).

Erathosztenész, hellén, Alexandria (kb. i.e. 276–i.e. 194). Arkhimédész kortársa, levelezőpartnere [2.6], a róla elnevezett prímszámszita feltalálója, viszonylag pontosan meghatározta a Föld sugarát [15.2].

Erdős, Pál (1913–1996) magyar. A valaha élt egyik legsokoldalúbb és egyik legtermékenyebb matematikus. A prímszámtétel elemi bizonyításán kívül [10.3] (amelyet Selberggel egy időben, tőle függetlenül adott 1949-ben) számos fontos eredményét említhetjük: approximációelmélet, véletlen gráfok, a centrális határeloszlás-tétel általánosítása sztochasztikus folyamatokra stb.

Eudoxosz (i.e. 370 körül) görög. Pláton barátja, az athéni matematika és csillagászat történetének kiemelkedő alakja. A határértékfogalom előfutára [2.6] és az első tudományos kozmikus modell megalkotója [15.2].

Eukleidész (i.e. 300 körül), görög, Alexandriában élt. Az Elemek című műve a geometria [2.4, 12.4] és más matematikai tárgyak, például a számelmélet [2.5] első fennmaradt és azóta is követett axiomatikus tárgyalása.

Euler, Leonhard (1707–1783), svájci. Született Bázelban, meghalt Szentpétervárott. 1727-ben Daniel Bernoullit követve ment a Leibniz tervei szerint megalakuló szentpétervári akadémiára, ahonnan hosszabb időre Berlinbe távozott (1740–1763), de aztán visszatért az akkori orosz fővárosba. Minden idők legtermékenyebb matematikusa. Végleges alakba öntötte a hagyományos analízist (1748) [8 és 9], megoldotta az első általános variációszámítási feladatot (1744) [7.3], tudománnyá tette a számelméletet [10], felfedezte a gráfelméletet. Emellett megalkotta az analitikus mechanikát, és számtalan gyakorlati munkát irányított Oroszországban.

Farkas, Gyula (1847–1930), magyar. Matematikus és elméleti fizikus, az elméleti fizikai kutatása során bukkant rá 1902-ben a róla elnevezett, és a lineáris programozásban alapvető szerepet játszó lemmára [14.2].

Fatou, Pierre (1878–1929), francia. Mértékelméleti eredményei (Fatou-lemma, 1906) mellett a fraktálok egyik felfedezője (1918).

Johann Faulhaber (1580–1635), német. 1631 előtt meghatározta az első 17 kitevőre a természetes számok hatványösszegét [4.4].

Fejér Lipót (1880–1959) magyar. A Fourier-sorok elméletének megújítója (1904) [8.3].

Fermat, Pierre (1601–1665), francia, született és meghalt Toulouse-ban. Az „amatőrök fejedelmeként” újjáalkotta és tovább fejlesztette az ókori számelméletet, és 1637-ben kimondta a róla elnevezett, 1994-ig megoldatlan sejtést [4.5]. Descartes-tal egyszerre, 1630 körül felfedezte az analitikus geometriát [4.6], Pascallal egy időben (1654-ben) kezdeményezte a valószínűség-számítást [11.2]. 1630 körül elsőként kiszámította a hatványfüggvény deriváltját és integrálját [4.7]. Életében semmit sem publikált, eredményei levelezés útján terjedtek.

Ferrari, Ludovico (1522–1566), olasz. Cardano segédje, a negyedfokú egyenlet megoldóképletének felfedezője 1545 előtt.

del Ferro, Scipione (1465–1526), olasz. A bolognai egyetem matematika professzora, valószínűleg ő fedezte fel elsőként a harmadfokú egyenlet megoldóképletét (1510?) [4.2].

Fibonacci (kb. 1180–1250), más néven Leonardo Pisano, olasz. Pisában született és halt meg. 1202-től kezdve ő honosította meg Európában az arab matematikát, ezen belül az arab (helyesebben a hindu) számokat [3.3]. A Fibonacci-sorozat névadója.

Fischer, Ernst (1875–1959), német. 1907-ben Riesz Frigyessel együtt fedezte fel a funkcionálanalízis egyik alapvető eredményét.

Fourier, Joseph (1768–1830), francia. Elsősorban fizikai meggondolások vezették a róla elnevezett függvénysorok végleges (Euler és Daniel Bernoulli utáni) felfedezéséhez 1807-ben [8.4, 13.3]. Emellett kiváló ókortudós volt.

Fraenkel, Adolf (1891–1965), német–izraeli. 1922-ben továbbfejlesztette Zermelo halmazelméleti axiómarendszerét [12.5].

Frèchet, Maurice (1878–1973) francia. 1906.ban megalkotta az absztrakt tér fogalmát, s ennek segítségével számos tételt fedezett fel [13.3].

Fredholm, Ivar (1867–1927), svéd. A róla elnevezett integrálegyenletek kutatója (1900) [13.3].

Galilei, Galileo (1564–1642), olasz. Tőle származik a mondás, hogy a természet a matematika nyelvén van megírva, s ő volt az egyik első természettudós, aki a matematikát termékenyen alkalmazta a fizikában: A lejtő, az inga [5.5] és a ferde hajítás [4.6] elemzése, valamint variációszámítási feladatok kitűzése, összegezve 1638-ban [7.2]. A végtelen halmazok első elemzője [12.5]. A kopernikuszi elmélet kísérleti igazolója és fáradhatatlan terjesztője, az inkvizíció azonban 1632-ben tanai visszavonására kényszerítette [15.3]. Talán az első modern tudós volt, aki anyanyelvén írt – ez is vádpont volt ellene.

Galois, Evariste (1811–1832), francia. A róla elnevezett elmélet felfedezője, amely pontosan megállapítja, hogy milyen algebrai egyenletek oldhatók meg a négy alapművelet és gyökvonás segítségével [12.2]. Hiába nyújtotta be többször is korszakalkotó felfedezését a párizsi akadémiára, újdonsága és nehezen érthető volta miatt elutasították. Huszonegy évesen, gyanús körülmények közt, politikai okokból kiprovokált párbajban halt meg.

Galton, Francis (1822–1911) brit. A Galton-deszka feltalálója, a biometria egyik atyja, a fajnemesítés bajnoka [11.2].

Gauss, Carl F. (1777–1855), német. Braunschweigben született és Göttingenben halt meg. A „matematika fejedelme”, minden idők egyik legnagyobb matematikusa. Számelméleti [10.3], algebrai [6.2, 12.2, 12.3], analízisbeli [9.2], statisztikai [11.3] és geometriai [12.4] eredményei egyaránt páratlanok. Emellett jelentős fizikus (a mágnesesség egysége is a nevét viseli), csillagász [15.4], térképész, és a távíró egyik feltalálója volt. Első jelentős eredményét 18 évesen érte el: megszerkesztette a 17-oldalú szabályos sokszöget.

Girard, Albert (1590–1639) flamand. 1629-ben elsőként megfogalmazta az algebra alaptételét, és bevezette a negatív félegyenest [4.2].

Goldbach, Christian (1690–1764), német. 1727 táján ő keltette föl Euler érdeklődését az akkoriban szinte teljesen elfeledett számelmélet iránt. Nevét egy ma is megoldatlan, 1742-ben megfogalmazott sejtése tette örökké ismertté [10.2].

Gödel, Kurt (1906–1978), német majd amerikai. A 20. század legnagyobb matematikai logicistája, aki 1931-ben belátta, hogy minden, az aritmetikát is magában foglaló matematikai rendszer ellentmondásmentessége saját axiómarendszerében nem dönthető el. 1940-ben igazolta, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondásmentes, akkor a kontinuumsejtés új axiómakénti hozzávétele után is ellentmondásmentes marad [12.5].

Grassmann, Hermann Günther (1809–1877), német. Autodidakta matematikus. A modern vektoralgebra egyik atyja (1832), de kora nem értette meg [6.3].

Grégoire de Saint Vincent (1584–1667), flamand. Ő oldotta meg a végtelen mértani sor összegével Zénon paradoxonát és ő határozta meg a hiperbola alatti területet 1622–1647 között [4.7].

Gregory, James (1638–1675), skót. Meghalt Aberdeenban. A kalkulus egyik előfutára, a Gregory–Leibniz-sor első felfedezője, mellesleg a Taylor-sor „hivatalos" felfedezése előtti ismerője és alkalmazója (1670) [5.3, 5.4].

Hadamard, Jacques (1865–1963), francia. 1896-ban de la Vallée-Poussain-nal együtt igazolta prímszámtételt [10.3]. Sok újítása közül kiemeljük a folytonos függvények terét (1897).

Hahn, Hans (1879–1934) osztrák. A funkcionálanalízis egyik úttörője, például a Hahn–Banach-tételt 1927-ben igazolta.

Hamilton, William Rowan (1805–1865), ír. Az n-dimenziós térelmélet egyik kidolgozója. A kvaterniókat 1843-ban fedezte fel [6.4]. Elméleti mechanikában és optikában is alapvető eredményeket ért el 1833-tól kezdve.

Heine, Eduard (1821–1881), német. Az analízis egyik axiomatizálója (1872) [8.4], az egyenletes folytonosságról szóló Heine–Borel-tétel „társtulajdonosa" [8.3].

Hermite, Charles (1822–1901), francia. Neves analista: az e transzcendenciája (1873) [10.3] mellett fontos eredményeire utalnak a nevét viselő ortogonális polinomok és a szimmetrikus kvadratikus alakok általánosítása.

Helly, Eduard (1884–1943), brit. A funkcionálanalízis egyik úttörője.

Héron (i.sz. 1. század), görög, Alexandria. A stagnáló, majd hanyatló hellén matematika egyik legnevesebb alakja, a nevét viselő háromszög területképletet tévesen fűzik a nevéhez [3.2]. Játékos gőzgépe a templomajtót nyitotta ki.

Hilbert, David (1862–1943), német. A 19–20. század egyik legnagyobb matematikusa. Első nagyhatású munkája az euklideszi geometria végleges axiomatizálása. 1900-ban a párizsi nemzetközi matematikai kongresszuson ismertette a matematika megoldatlan problémáinak hilberti listáját (vö. Yandell, 2002), amelyen vannak még ma is megoldatlan feladatok (például a Riemann-sejtés). Ő kezdeményezte és róla nevezték el az euklideszi tér végtelen-dimenziós általánosítását, a Hilbert-teret a 20. század elején [13.3]. Az 1920-as években a halmazelmélet paradoxonjainak megoldását az ún. formalista megközelítésben kereste, azonban reményeit 1931-ben romba döntötte Gödel felfedezése az axiomatikus rendszerek teljességének a hiányáról [12.5].

Hipparkhosz (kb. i.e. 161–126), görög, Alexandria. Az ókor legnagyobb csillagásza.

Ő dolgozta ki a rendszeres trigonometriát, ő becsülte meg a holdhónap hosszát hihetetlenül pontosan, 1 másodperces hibával, és ő alkotta meg az epiciklusok elméletét, amellyel követői – mindenekelőtt Ptolemaiosz – úrrá lettek a korábbi elmélet nehézségein [15.2].

Hincsin, Alekszandr J. (1894–1959): A szovjet valószínűség-számítási iskola óriása, az iterált logaritmus tételének felfedezője (1923) és a nagy számok gyenge törvényének általánosítója [11.3].

Huygens, Christiaan (1629–1695), holland. Az ingaóra elméleti és gyakorlati megalkotója, a centripetális gyorsulás felfedezője [15.3], a hullámelmélet atyja [7.2], az első valószínűség-számítási könyv (1657) írója [11.2] és Leibniz mestere (1673–1676) [5.2].

Ibn-Sina (980–1037), más néven Avicenna, arab. Elsősorban orvosként és filozófusként híres, de említésre méltó Eukleidész-fordítása (görögről arabra) [3.3].

Ibn-al-Haitham (kb. 965–1039) más néven Alhazen, arab. A fizikai és geometriai optika kiemelkedő kutatója [3.3].

Jacobi, Carl G. J. (1804–1851) német. Az elliptikus függvények elméletének egyik felfedezője (1834) és a determinánselmélet egyik megalapozója (1833) [6.3] .

Jordan, Camille (1838–1922), francia. A csoportelmélet egyik kidolgozója (1870) [12.2], a mátrixok normálalakjának felfedezője (1870) [6.3]. Ő mondta ki a folytonos zárt görbékre vonatkozó Jordan-tételt (1887), de bizonyítása hiányos volt.

Kepler, Johannes (1571–1630) német, meghalt Regensburgban. 1609–1618 között felállította a bolygómozgások három pontos törvényét, ezzel szilárd matematikai alapokra helyezve a csak kvalitatíve megfelelő kopernikuszi rendszert [15.3]. Emellett kiszámította számos, görbe vonalakkal határolt test (például hordók) térfogatát. Megsejtette a gömbök legsűrűbb térkitöltését, amelyet csak 1998-ban bizonyított Tom Hales.

Khájjám, Omár (kb. 1050–1123), perzsa. Kiváló matematikus, aki ismerte a klasszikus binomiális tételt [4.4], és foglalkozott a harmadfokú egyenlet analitikus geometriai megoldásával [3.3]. Költeményei, a Rubbáját, máig a világirodalom részét alkotják.

Klein, Felix (1849–1925), német. Sophus Lie-vel és Poincaréval együtt 1870 után alakította ki a folytonos csoportok elméletét. 1872-ben az erlangeni programjában javasolta: a transzformációcsoportok segítségével kell osztályozni a geometriákat.

Kolmogorov, Andrej N. (1903–1987), orosz. A 20. század egyik legnagyobb matematikusa. 1933-ban axiomatikus alapokra helyezte a valószínűség-számítást [11.3]. Emellett számos más terület kialakítása fűződik a nevéhez: például az információelmélet és a bonyolultságelmélet. Arnolddal és Moserrel együtt az ún. KAM-elmélet társszerzője, amely a Naprendszer stabilitásának kérdését oldotta meg (1954) [15.4].

Kopernik, Mikolaj vagy Kopernikusz (1473–1543) Torun, lengyel–német? Csillagász, aki 1400 évvel Ptolemaiosz után, 1543-ban meggyőző érveléssel megcáfolta a földközpontú világképet, és helyére a napközpontú világrendszert állította [15.3].

Kronecker, Leopold (1823–1891), német. Neves algebrista, aki szenvedélyesen küzdött a végtelen cantori matematikája ellen [12.5].

Kummer, Ernst (1810–1893), német. 1844-től kezdve megalkotta az ideál fogalmát, s ezzel jelentősen kiterjesztette a Fermat-sejtés bizonyítottsági tartományát [10.3].

Lagrange, Louis-Joseph (1736–1813), olasz–francia. Torinóban született és Párizsban halt meg. 19 évesen szabatossá tette Euler variációs egyenletének heurisztikus levezetését (Euler–Lagrange differenciálegyenlet) [7.4, 7.5]. 1760-tól kezdve, analitikus mechanikáján dolgozva, variációszámítási alapra helyezte a mechanikát. 1788-ban megalkotta a feltételes szélsőértékszámítás róla elnevezett módszerét. Az ötödfokú egyenlet megoldóképletét keresve, 1770-ben megalapozta a csoportelméletet [12.2].

Lambert, Johann H. (1728–1777), svájci–német. 1770-ben elsőként bizonyította be a π szám irracionalitását [10.2]. A nemeuklideszi geometriák előfutárai közül ő került legközelebb a célhoz (1766) [12.4].

Laplace, Pierre-Simon (1749–1827), francia. Napóleon tanára egy vidéki tiszti iskolában. Az alkalmazott matematika, például a Laplace-transzformáció [9.3], az égi mechanika [15.4] korszakalkotó művelője (1799–1825); és a valószínűség-számítás egyik óriása (1812) [11.3]. Rövid ideig Napóleon belügyminisztere.

Lebesgue, Henri (1875–1941), francia. 1902-től kezdve létrehozta a a modern mértékelméletet. Többek között a Lebesgue-mérték és -integrál viseli a nevét [13].

Legendre, Adrien-Marie (1752–1833) francia. Az analízis, a számelmélet területén számos felfedezés viseli a nevét: például a variációszámítás Legendre-feltétele (1788) [7.3], a Legendre-polinom, a prímszámtétel egyik megfogalmazója [10.3], és a legkisebb négyzetek elvének egyik felfedezője (1800 körül) [11.3].

Leibniz, Gottfried W. (1646–1716) német. Született Lipcsében, meghalt Hannoverben. Minden idők egyik legnagyobb polihisztora és az általános módszerek kutatója. Már 1666-ban felvázolta a matematikai logika alapgondolatát. 1672-ben a Royal Society tagjává választotta a Pascal-féle számológép tökéletesítéséért. 1673–1676 között Huygens tanítványaként, Newton után, de tőle függetlenül felfedezte és 1684-től kezdve sikerrel elterjesztette a kalkulust [5]. Ő bocsátotta útjára a determinánselméletet (1683) [6.2]. A valaha élt legnagyobb filozófusok egyike. Elsőrangú tudományszervezőként megszervezte a berlini akadémiát, valamint elindította a bécsi és a szentpétervári akadémia szervezését. A Newtonnal való prioritásvita veszteseként, elfeledve halt meg.

Leverrier, Urbain (1811–1877), francia csillagász. Hatékony matematikai módszerével 1846-ban sikerrel megjósolja a Neptun létezését.

l'Hospital, Guillaume (1661–1704), francia márki. Pénzért megvette Johann Bernoulli számos eredményét, s ez alapján az első kalkuluskönyvet publikálta 1696-ban. Ezért viseli a márki nevét a $0/0$ határozatlan alak kiszámításának Bernoulli-féle módszere.

Lindelöf, Ernst Leonard (1870–1946), svéd származású finn. A fokozatos megközelítésről szóló Picard–Lindelöf tétel egyik felfedezője (1894).

Lindemann, Ferdinand (1852–1939), német. Ő igazolta 1882-ben elsőként, hogy a π szám transzcendens [10.3].

Liouville, Joseph (1809–1882), francia. Számelméleti munkásságán kívül (1844) [10.3] alapvető eredményeket ért el a komplex függvénytan és az analitikus mechanika terén. Ő szolgáltatott igazságot Galoisnak 1846-ban [12.2].

Lobacsevszkij, Nyikolaj (1793–1856), orosz. A kazanyi egyetem professzoraként 1829-ben, három évvel Bolyai előtt közölte forradalmi eredményeit Eukleidész ötödik posztulátumának bizonyíthatatlanságáról [12.4].

Maclaurin, Colin (1698–1746) skót matematikus, a Taylor–(Maclaurin)-sor népszerűsítője [5.2], és az Euler-Maclaurin-féle összegzési képlet társfelfedezője 1742-ben [F1].

Mangoldt, Hans (1854–1925) német. 1895-ben kifogástalanul igazolta Riemann heurisztikus formuláját a prímszámtétellel kapcsolatban [F.2].

Mersenne, Marin (1588–1648), francia pap. Kiváló tudományszervező, aki levelezéseivel kapcsolatot teremtett Fermat, Descartes, Pascal és számtalan más matematikus között. [4.5]

Möbius, Ferdinand (1790–1868), német. A róla elnevezett számelméleti függvény fontos szerepet játszik az analitikus számelméletben [F.2]. Egyik felfedezője és névadója annak a topológiában fontos egyoldalú felületnek (1858).

Napier, John (1550–1617) skót. Főúr, műkedvelő matematikus, aki falusi birtokán a 16–17. század fordulóján felfedezte a természetes logaritmust, a négy alapműveleten túlmutató függvényt. Ezzel egyszerre alkotta meg az egyik legfontosabb függvényt és fedezte fel az egyetemes számolástechnika évszázadokig alapvető eszközét [4.3].

Nash, John (1928–) amerikai. 1951-ben, doktori hallgatóként megalkotta a nem kooperatív játékok egyensúlyfogalmát és az alkumodell axiomatikáját, mindkét megoldás már évtizedek óta a nevét viseli [14]. 1960 körül topológiai eredményei alapján a Fields-érem egyik esélyese volt, de végülis mégsem kapta meg a remélt kitüntetést. Kiemelkedő munkásságát kettétörte a skizofrénia, amelyből csak több évtizedes kezelés után gyógyult ki. Játékelméleti eredményeiért 1994-ben megosztva közgazdasági Nobel-díjat kapott.

Eugen Netto (1846–1919) német. A modern algebra egyik előfutára [12.2], aki emellett analistaként 1879-ben belátta, hogy az egyenes szakasz és a négyzet között nem létezik invertálható és mindkét irányban folytonos leképezés. (Ezzel előre „helyre tette" Cantor és Peano konstrukcióit, ez utóbbi 1890-ben született.)

Neumann János (1903–1957), magyar születésű amerikai, Budapesten született, és Washingtonban halt meg. A 20. század egyik kiemelkedő polihisztora: a Neumann-algebrák feltalálója, a kvantummechanika axiomatizálója (1932) [13.3], a játékelmélet atyja (1928–1944) [14], az atombomba egyik megalkotója, a mai elektronikus számítógép elvének kigondolója, hogy csak a legfontosabb eredményeit említsük.

Newton, Isaac (1643–1727), angol. Született Lincolnshire-ben, meghalt Londonban. 1665-től kezdve a differenciál- és integrálszámítás felfedezője [5], a klasszikus fizika atyja [15], főműve a Principia (1687) a modern tudomány legjelentősebb műve (általános tömegvonzás: árapály, kozmikus szökési sebesség; fényelmélet: szivárvány), a tükrös távcső feltalálója. Emellett rövid ideig parlamenti képviselő, huzamosabb ideig a pénzverde sikeres igazgatója. Hooke-kal való korai összecsapása miatt a későbbiekben kerülte a tudományos vitákat, gyakran még a publikációkat is. 1700 körül robbant ki áldatlan prioritási vitája Leibniz-cel, amelyet – a Royal Society teljhatalmú elnökeként – megnyert.

Pacioli, Luca (1445–1509), olasz. A valószínűség-számítás egyik előfutára [11.2], a kettős könyvelés megalkotója (1494).

Parseval, Marc-Antoine (1755–1836) francia. 1799-ben felfedezte a róla elnevezett tételt [8.3] és [13.3].

Pascal, Blaise (1622–1662), francia. Született Clermont-Ferrandban és meghalt Párizsban. Tizenhat éves korában felfedezte a projektív geometria egyik alaptételét. Húsz éves volt, amikor feltalálta az (egyik) első mechanikus számológépet. 1648-ben kísérletileg igazolta, hogy egy magas hegyen a légnyomás kisebb, mint a síkságon. 1654-ben Fermat-val együtt helyesen megoldotta a valószínűség-számítási feladatok egész sorát, s ezzel elindította e tudomány fejlődését [11.2]. Nevéhez fűződik a Pascal-háromszög [4.4]. A ciklois területének kiszámításakor közel állt a kalkulus felfedezéséhez [4.7]. Emellett a filozófia és a francia esszéírás nagymestere.

Peano, Giuseppe (1858–1932) olasz. A természetes számok axiómarendszerének megalkotója (1889), a négyzetet kitöltő Peano-görbe konstruktőre (1890) és a mértékelmélet előfutára (1887) [13.2].

Picard, Émile (1856–1941), francia matematikus. A fokozatos megközelítésről szóló Picard–Lindelöf tétel egyik felfedezője (1890).

Poincaré, Henri (1852–1912), francia. A 19–20. századforduló egyik óriása. A differenciálegyenletek kvalitatív elméletének kidolgozója (1890 körül), ezzel kapcsolatban a modern topológia egyik atyja. A Naprendszer (in)stabilitásáról szóló eredményei a káoszelmélet felé mutattak [15.4]. Mellesleg Einstein mellett (mögött) a relativitáselmélet matematikai elméletének egyik megalkotója és az intuicionizmus támogatója, a modernizmus ellensége [8.4, 12.5].

Poisson, Siméon-Denis (1781–1840) francia. A valószínűségszámítás egyik megteremtője (1837) [9.3], a Poisson-eloszlás felfedezője és a matematikai fizika (potenciálelmélet) egyik legnagyobb alakja.

Ptolemaiosz (i.sz. 120–160), görög, Alexandriában élt és alkotott. Az ókor legnagyobb hatású földrajztudósa, csillagásza: Algameszt (i.sz. 150 körül) [15], és az alkalmazott matematika jelese [2.7]. Csak 1400 évvel később, Kopernikusz múlta felül.

Püthágorasz (kb. i.e. 550), görög (Dél-Itália). Nemcsak matematikus, hanem zenetudós, filozófus és egy titkos társaság szellemi vezetője is volt. Talán a leghíresebb matematikai tétel névadója [2].

Riemann, Bernhard (1826–1866), német. Mennyiségileg szerény, ám mélységében párját ritkító a munkássága. Nevét viseli a Riemann-integrál (1854) [8.4], a Riemann-tér (1854) [12.4] és a Riemann-féle zéta-függvény gyökeire vonatkozó Riemann-sejtés (1859) [F.2], ez utóbbi talán a legfontosabb megoldatlan matematikai feladat. Kiválóságát még a dicséretekben általában szűkmarkú Gauss is elismerte, és habilitációs értekezését magasan átlagon felülinek nevezte.

Riesz Frigyes (1880–1956) magyar. A funkcionálanalízis egyik megteremtője, többek között nevét viseli a Riesz–Fischer-tétel (1907) [13.3].

Ruffini, Paolo (1765–1822), olasz. Az ötödfokú egyenlet algebrai megoldhatatlanságának egyik felfedezője (1799) [12.4].

Russel, Bertrand (1872–1970): angol logicista, csillagász, filozófus és békeharcos. Leghíresebb matematikai eredménye a Russel-paradoxon (1905). [12.5]

Saccheri, Gerolamo (1667–1737) olasz. A nemeuklideszi geometria egyik előfutára (1733) [12.4].

Schmidt, Erhard (1876–1959), német. Hilbert tanítványa, a Hilbert-tér geometriájának egyik kidolgozója (1901–1906) [13.3].

Seidel, Philipp (1821–1896), német. Az egyenletes konvergencia egyik felfedezője (1848) [8.3], a lineáris egyenletek iteratív megoldásának egyik tökéletesítője (Gauss–Seidel- eljárás).

Selberg, Atle (1917–), norvég. A prímszámtétel elemi bizonyításán [10.3] kívül (amelyet 1949-ben, Erdőssel egy időben, tőle függetlenül adott) számos jelentős eredménye van, például a következő: a zéta-függvény gyökeinek pozitív hányada kielégíti a Riemann-hipotézist. Többek között ezért az eredményéért kapta meg 1950-ben a négy évente a négy legjelentősebb matematikai felfedezésért járó kitüntetést, a csak 40 évesnél fiatalabb matematikusoknak adható Fields Medalt.

Stirling, James (1692–1770) brit. Kiváló analista és kombinatorikus. 1730-ban meghatározta de Moivre-tól származó, Stirlingről elnevezett képletben az állandót [11.3].

Sylvester, James (1814–1897) brit. A modern lineáris algebra egyik megalkotója, például a kvadratikus alakok tehetetlenségi tétele (1852) [6.4].

Tartaglia, Niccolo (kb. 1500–1557) olasz. 1535 körül másodikként felfedezi aA harmadfokú egyenlet megoldóképletét. 1539-ben csak azzal a feltétellel közölte Cardanóval a nagy titkot, hogy az nem publikálja, de Cardano 1545-ben megszegte az ígéretét [4.2].

Taylor, Brook (1685–1731) brit. Az analitikus függvények hatványsora (1715) az ő nevét viseli [5.3], bár jóval előtte már többen – Gregory, Newton és Leibniz –, megtalálták.

Thalész (i.e. 6. sz. eleje), görög. A kisázsiai Milétoszban élt, állítólag járt Egyiptomban, ahol tanul(hatot)t az ottani bölcsektől [2.4]. Ő az első olyan matematikus, akiről tételt neveztek el, és az első olyan filozófus, akinek ismerjük a nevét. (Székely Gábor hívta föl a figyelmem, hogy Thal sémi nyelveken harmatot jelent.)

Tschirnhaus, Ehrendfried (1651–1708) szász gróf. 1683-as transzformációja általánosította a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldási módszerét [12.2].

de la Vallée Poussain, Charles-Jean (1866–1962), belga. 1896-ban de Hadamarddal együtt igazolta prímszámtételt [10.3].

Vandermonde, Alexandre Theophile (1735–1796) francia. Bár nem is hallott a róla elnevezett determinánsról, a determinánsok önálló területének első elemzője (1772–1776) [6.4]. Lagrange-zsal együtt a csoportelmélet előfutára (1771) [12.2].

Viète, Francois (1540–1603), francia. Algebrai, analízisbeli és trigonometriai felfedezéseivel egyike volt az újkori európai matematika úttörőinek [4.2]. Nevét viselik a gyökök és együtthatók közti összefüggések.

Vitali, Giuseppe (1875-1932) olasz, a modern analízis egyik úttörője: nevét viseli a Vitali-féle lefedési tétel, s tőle származik az eltolásinvariáns mérték korlátozott értelmezhetősége (1905) [13.2].

Volterra, Vito (1860–1940) olasz. Az integrálegyenletek egyik úttörője (1884–1897) [13.3], és a Lotka–Volterra-féle ragadozó–zsákmány populációs modell egyik kidolgozója (1931).

Wallis, John (1616–1703), angol. 1655-ben induktív módon felfedezte azokat az integrálképleteket (például a Wallis-formulát), amelyek Newtont a klasszikus binomiális képlet általánosítása felé terelték [5.3]. Ő javasolta először a képzetes tengely bevezetését [9.2].

Wantzel, Pierre (1814–1848) francia. 1837-ben szabatosan bebizonyította a Gauss-féle szerkeszthetőségi tétel megfordítását.

Weierstrass, Karl (1815–1897), német. Tőle származik az analízis axiomatikus felépítése és az epszilontika az 1860-as évektől kezdve [8.4]. A komplex függvénytanban a hatványsoros megközelítést hatalmas sikerrel alkalmazta [9.3]. Sokáig középiskolai tanárként kereste kenyerét, és kiváló pedagógiai képességeit egyetemi tanárként rendkívüli mértékben hasznosította: számos híres tanítványa volt. Nevét sok tétel viseli.

Wiener, Norbert (1894–1964), amerikai. Neumann Jánoshoz hasonló polihisztor, aki azonban ellenzi a kormányzat és a tudomány szoros kapcsolatát. A modern elméleti és alkalmazott matematika egyik óriása, nevét viseli a biológiából ismert Brown mozást modellező Wiener-folyamat. Az 1940-es években elindítja a kibernetikát (irányításelméletet).

Wiles, Andrew (1953–), brit. Ő igazolta 1994-ben a Fermat-sejtést, bár az eredeti bizonyítás hézagos volt [10.3]. A felfedezés fontosságára való tekintettel 1996-ban annak ellenére megkapta a Fields Medalt, hogy már elmúlt 40 éves.

Zermelo, Ernst (1871–1956), német. Elsőként alkotta meg a halmazelmélet axiómarendszerét 1908-ban [12.5], amelyet Fraenkel és mások továbbfejlesztettek. 1909-ben bebizonyította a kiválasztási axióma segítségével, hogy minden halmaz jólrendezhető [12.5]. Emellett tőle származik a modern játékelmélet első tétele 1913-ból [14.4].

Matematikai felfedezések és a történelem

–3000 Egyiptomi számhieroglifák	Kerekes járművek, piramisok
–2400 Helyérték-rendszer, Mezopotámia	Sumér-akkád Birodalom
–1850 Moszkvai papirusz	Hammurabi törvénykönyve
	–1350 főníciai ábécé
	–753 Róma alapítása
–585 Thalész	
–550 Püthagorász	
–460 Éleai Zénón	–490 Marathoni csata
–370 Eudoxosz: kimerítés	
	–332 Alexandria alapítása, hellenizmus
–300 Eukleidész: Elemek	
–260 Arisztarkhosz: Nap a központ	I. pun háború vége
–212 Arkhimédész halála	II. pun háború
–210 Appollóniosz: Kúpszeletek	
–140 Hipparkhosz: trigonometria	Karthagó lerombolása
	–45 Julius Caesar naptárreformja
150 Ptolemaiosz: Almageszt	160 Marcus Aurelius trónra lép
250? Diophantosz: Aritmetika	285 Diocletianus
	313 Konstantin császár, kereszténység
	476 Róma bukása
628 ? Brahmagupta	622 Mohamed futása
	711 Az arabok elfoglalják Ibériát
775 Hindu matematika arabul	
	814 Nagy Károly halála
830 Al Khwárizmi: Algebra	
1037 Avicenna halála	
1123 Omár Khájjám halála	
1202 Fibonacci: Liber abaci	1204 a keresztesek Bizáncban
1270 Arkhimédész latinul	mechanikus óra + szemüveg
1360 Oresme: exponenciális függvény?	1364 Petrarca halála
1436 Al Kasi halála	1437 Zsigmond halála
	1440 Gutenberg nyomdája
1494 Pacioli: Summa	1492 Columbus Amerikában
	1517 Luther 95 pontja
1543 Kopernikusz: Égitestek...	1541 Budát elfoglalja a török
1545 Cardano: Ars Magna	
1572 Bombelli: Algebra	Szt. Bertalan éjszakája Párizsban
1579 Viète: Canon Mathematicus	
1585 Stevin: A tizedestört	
1609 Kepler: Astronomia nova	Galilei távcsöve
1614 Napier logaritmusa	1616 Shakespeare halála
1629 Fermat lokális maximuma	Bethlen Gábor halála
1637 Descartes: A módszerről	1632 Galileit elítéli a Szent Inkvizíció
1640 Pascal: Kúpszeletek	1618–1648 Harmincéves háború

1640 Kis Fermat-tétel	
1654 Fermat és Pascal: Levelek a valószínűségről	
1657 Huygens: Valószínűség-számítás	
	1662 Royal Society alapítása
1665 Gregory: Geometria pars universalis	1664 Zrínyi halála
1666 Newton csodálatos éve	Académie de Science alapítása
1684 Leibniz I. kalkulus-cikke	1686 Budáról kiűzik a törököket
1687 Newton: Principia	1688 A dicsőséges forradalom Angliában
1696 Bernoulliak és a brachisztochron	
1713 A Royal Society Leibnizt elmarasztalja plágiumban	
1713 Jakob Bernoulli: Ars conjectandi	Utrechti béke
1718 de Moivre: Doctrine of Chances	
1733 Saccheri: Euclides	
1733/38 de Moivre: normális eloszlás	
1735 Daniel Bernoulli: szentpétervári paradoxon	II. Rákóczi F. halála
1737 Berkeley: The Analyst	1738 Daniel Bernoulli: Hidrodynamica
1742 Goldbach-sejtés	1740–1748 Osztrák örökösödési háború
1743 d'Alembert: Traité de dynamique, rezgő húr egyenlete	
1743 Euler: n-edrendű lineáris d.e.	
1748 Euler: Introductio...	
1750 Cramer szabály	1751 A Nagy Francia Enciklopédia I. k.
1755 Lagrange variációszámítása	A moszkvai egyetem létesítése
	1760 Az ipari forradalom kezdete
1765 Lagrange: lineáris d.e. rendszer	1763 A hétéves háború vége
1770 Euler: Fermat-sejtés $n = 3$-ra	
	1781 Herschel felfedezi az Uránuszt
1788 Lagrange: Mécanique analytique	1789 A Nagy Francia Forradalom
	Nagy Iskolák létesülnek Párizsban
1796 Laplace: Système du Monde	Bonaparte hadseregparancsnok
1797 Komplex számsík dánul	1799 A metrikus rendszer bevezetése
1801 Gauss: Disquisitiones arithmeticae	Gauss megtalálja a Ceresz kisbolygót
1815 Cauchy: determinánsok	Napóleon a Szt. Ilona szigeten
	1815–1848: Szent Szövetség
1817 Bolzano: Analízis	
1821 Cauchy: Analízis tankönyv	
1822 Fourier-sorok	
1827 Cauchy: Komplex fügvénytan	1825 Stevenson: gőzmozdony
1829 Lobacsevszkij abszolút geometriája	
1832 Bolyai: Appendix	
Galois végrendelete	
1843 Hamilton: kvaterniók	
1844 Liouville transzcendens száma	1846 Leverrier előrejelzi a Neptunt

1848 Seidel: Egyenletes konvergencia	Népek tavasza
	Marx és Engels: Kommunista kiáltvány
1854 Riemann-terek, -integrál	
1855 Gauss utódja Dirichlet Göttingenben	
1858 Dedekind: permutációcsoport	
1859 Riemann-sejtés	Darwin: A fajok eredete
1861 Weierstrass szabatos előadásai	
	1867: Kiegyezés
1872 Az analízis axiomatizálása	
1873 Hermite: e transzcendens	Maxwell: Electicity and Magnetism
1874 Cantor: halmazelmélet	1876 Bell: telefon
1882 Lindemann: π transzcendens	1884? Belsőégésű motor
1889 Peano axiómai N-ről	II. Internacionálé megalakulása
Poincaré: Égi mechanika	
1891 Cantor-féle átlós eljárás	
1896 A prímszámtétel	Magyar millenium
Hadamard és de la Vallée-Poissain	
1899 Hilbert: A geometriai alapjai	1898 Madame Curie: rádium
1900 Hilbert problémái	Planck: Kvantumelmélet
1903 Lebesgue-integrál	Motoros repülés
	1905 Einstein: Relativitáselmélet
1906 Fréchet: funkcionálanalízis	Ady: Új versek
1907 Riesz–Fischer-tétel	
1909 Nagy számok Borel-féle törvénye	
1914 Hausdorff: Topológia	I. világháború kitörése
	1917 Az orosz forradalom
	1918 I. világháború vége
1923 Banach-terek	1925: Heisenberg–Schrödinger:
	kvantummechanika
1928 Neumann: játékelmélet–minimax	
1931 Gödel nem-teljességi tétele	Neumann: Kvantummechanika axiómái
1933 Kolmogorov axiomatizálja	Hitler – kancellár
a valószínűség-számítást	zsidó ellenes törvények
1939 Bourbaki I. kötet	–1945 II. világháború
	Neumann: számítógép
1951 Nash: játékelméleti egyensúly	
1954 A Naprendszer KAM-elmélete	1953 Sztálin halála
Kolmogorov–Arnold–Moser	
1963 Cohen: kontinuumhipotézis OK	1961 Berlini fal felépítése
1976 A négyszíntétel számítógépes	
bizonyítása	
	1980 Személyi számítógép
1994 Wiles: Fermat-sejtés bizonyítása	1990 A szovjet rendszer bukása
1998 Hale: A Kepler-sejtés	
számítógépes bizonyítása	

Forrás: Boyer (1968/1991) ritkítva és kiegészítve

FELADATMEGOLDÁSOK

2.1. feladat. $(L+I)\times(L-I)=L^2-I^2=MMID$.

2.2. feladat. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint $n\geq 1$-re $x_n>\sqrt{\beta}$. Az $x_{n+1}<x_n$ egyenlőtlenségbe behelyettesítve a képletet, rendezéssel adódik az $x_n>\sqrt{\beta}$ feltétel. A sorozat x határértéke létezik, kielégíti az $x=f(x)$ egyenlőséget, azaz $x=\sqrt{\beta}$.

2.3. feladat. (Hajós, 1965, 42.1. tétel.)

2.4. feladat. (Freud–Gyarmati, 2000, 5.3.2. tétel, 168. o.) Útmutatás: Indirekt. $A=4p_1p_2\cdots p_r-1$, és ha nem prím, akkor nem lehet mindegyik prímosztója $4k+1$-alakú, mert ezek szorzata is $4k+1$-alakú.

2.5. feladat.

2.4. táblázat. *A szabályos $4\cdot 2^k$ oldalú sokszögekbe beírt és körül írt körök sugara*

	Beírt	Körül írt
	kör sugara	
k	r_n	R_n
1	0,25000	0,35355
2	0,30178	0,32664
3	0,31421	0,32036
4	0,31729	0,31882
5	0,31805	0,31844
6	0,31825	0,31834
7	0,31829	0,31832
8	0,31831	0,31831
9	0,31831	0,31831

2.6. feladat. a)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}.$$

d) (Vö. Laczkovich–T. Sós, 2005, 9–10. o.)

3.1. feladat. Legyenek a négyszög csúcsai rendre A, B, C, D, az A-nál lévő szög α, és a köztük futó szakaszok hossza rendre a,b,c,d. Írjuk föl az ABC, illetve a BCD

háromszög területét! $2T_A = ad\sin\alpha$ és $2T_C = bc\sin\alpha$. Összeadva majd négyzetre emelve:

$$4T^2 = (ad+bc)^2\sin^2\alpha = (ad+bc)^2(1-\cos^2\alpha).$$

Felírva két koszinusz-tételt a BD átlóra!

$$\overline{BD}^2 = a^2+d^2-2ad\cos\alpha = b^2+c^2+2bc\cos\alpha,$$

azaz

$$a^2+d^2-b^2+c^2 = (ad+bc)^2\cos\alpha.$$

Átalakítva és behelyettesítve:

$$4T^2 = (ad+bc)^2 - (a^2+d^2-b^2+c^2)^2/4,$$

ahonnan elemi átalakításokkal adódik az állítás.

3.2. feladat. A függvénytáblából $x = 7°05'$ és $y = 42°45'$, azaz $x+y = 49°50'$ és $x-y = -35°40'$, a koszinuszokat meghatározva a táblázatból: $\cos(49°50') = 0{,}6450$ és $\cos 35°40' = 0{,}8124$, a különbség fele 0,0837, és ezt 10^9-vel szorozva: 83 700 000. Az abszolút, illetve a relatív hiba –110 205, illetve –0,0013.

3.3. feladat. a) A Cauchy-féle $f(x+y) = f(x)+f(y)$ függvényegyenletnek skalárszorzótól eltekintve egyetlen folytonos megoldása van: $f(x) = f(1)x$. Valóban, minden m természetes számra igaz, hogy $f(mx) = mf(x)$. Következésképp $f(x) = f(n(x/n)) = nf(x/n)$, azaz $f(x/n) = f(x)/n$, azaz $f(m/n) = f(1)m/n$. Folytonosság miatt minden valós számra igaz $f(x) = f(1)x$. b) Transzformálva: $y = \log_a x$, azaz $y = a^x$, azaz $V(y) = yV(a)$, a) szerint $V(y) = V(1)y$ stb.

3.4. feladat. Írjuk föl a sor tagjait a következő felsőháromszög-mátrix alakban: a j-edik sor k-adik tagja $(k \geq j)$ q^k, $j = 1, 2, \ldots$. Adjuk össze a j-edik sorban álló tagokat: $s_j = q^jG$, ahol $G = 1+q+q^2+\cdots = 1/(1-q)$ a végtelen mértani sor. Összeadva a végösszegeket függőlegesen: $(q+q^2+\cdots)G = qG^2$, azaz $S = q/(1-q)^2$.

4.1. feladat. a) Bár a határátmenet csak rögzített tagszámra és fix k-ra lenne jogos, mégis működik a közelítés:

$$e_n(1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!} \approx \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e_n(2)$$

b) A két közelítés összehasonlítása táblázatban:

4.1. táblázat. *Az e kétféle közelítése*

n	$e_n(1)$	$e_n(2)$
1	2,00000	2,00000
2	2,25000	2,50000
3	2,37037	2,66667
4	2,44141	2,70833
5	2,48832	2,71667
6	2,52163	2,71806
7	2,54650	2,71825
8	2,56578	2,71828
9	2,58118	2,71828

A második módszer nemcsak gyorsabb, mint az első, de jóval kevesebb számolást is igényel, mert az $n+1$-tagú összegnek csak az utolsó tagját kell az n-edik lépésben kiszámítani, és hozzáadni a már az előző lépésben kiszámított n-tagú összeghez.

4.2. feladat. $n = 1$-re a képlet

$$\sum_{j=1}^{r} \binom{r+1}{j} 1 = (1+1)^{r+1} - (1+1)$$

a binomiális tételre egyszerűsödik. Az n-ről $n+1$-re lépéskor elég azt ellenőrizni, hogy a bal és a jobb oldal azonos értékkel nő. A bal oldal növekménye $\sum_{j=1}^{r} \binom{r+1}{j}(n+1)^{r+1-j}$, amely a binomiális tétel értelmében, a $h = r$ szereposztásban és figyelembe véve az első és az utolsó tagot, $(n+2)^{r+1} - (n+1)^{r+1} - 1$, és ez éppen a jobb oldal növekménye is.

4.3. feladat. Az $f(x) = x^3 + ax - b$ függvényt deriválva: $f'(x) = 3x^2 + a$. Szélsőértékhelyek: $\bar{x}_{1,2} = \sqrt{-a/3}$, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ az első a lokális maximum, a második a lokális minimum. Ha $f(\bar{x}_1) > 0 > f(\bar{x}_2)$, akkor 3 valós gyök van, különben 1.

4.4. feladat. a) A felső ágra szorítkozva, és az egyszerűség kedvéért $p = 1/2$-t véve, a 4.4. tételhez hasonlóan levezethető, hogy az $y = \sqrt{x}$ függvény deriváltja az x_0 abszcisszájú T pontban $y'(x_0) = 1/(2\sqrt{x_0})$. Az (x_0, y_0) ponton átmenő érintő egyenlete $y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$, az $x = 0$-ban $\bar{y} = y_0 - y'(x_0)x_0 = \sqrt{x}_0 - x_0/(2\sqrt{x_0}) = \sqrt{x}_0/2 = y_0/2$.

b) Legyen a T érintési pontbeli érintő vízszinteshez mért hajlásszöge α, és legyen az érintő és a tengely metszéspontja Q, illetve a fénysugár és a tengely metszéspontja P. A fényvisszaverődés törvénye szerint a PQT és a QTP szög egyenlő, tehát QTP szög 2α. A $P = F$ állításhoz azt kell igazolni, hogy az $F = (1/4,\ 0)$ koordinátájú fókuszpontot a T érintési ponttal összekötő FT egyenes m meredekségű szög is 2α. Definíció szerint

$$m = \frac{y_0}{x_0 - 1/4} = \frac{\sqrt{x_0}}{x_0 - 1/4}.$$

Másrészt

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \frac{2 \cdot 1/(2\sqrt{x_0})}{1 - 1/(4x_0)} = m.$$

4.5. feladat. Az egyszerűség kedvéért legyen $a = 0$ és $b = 1$, és hála Pascal tételének, most a szemléletesebb egyenletes beosztást is alkalmazhatunk: $x_i = i/n$. A téglányösszeg most

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^r}{n^r}.$$

Kifejezve a 4.4. tételből S_n^r-et, és leosztva n^{r+1}-gyel, adódik az $1/(r+1)$ szorzó.

4.6. feladat. Legyen $x_i = aq^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $b = aq^n$, azaz $\log b = \log a + n\log q$.

$$S_n = n(q-1) = \frac{q-1}{\log q}(\log b - \log a).$$

A $q \to 1$ határátmenetben a $\log b - \log a$ együtthatója 1.

5.1. feladat. $y = x^{p/q}$-et egészítsük ki dy-nal és dx-szel: $y + dy = (x + dx)^{p/q}$, és alkalmazzuk a törtkitevős binomiális tételt 1 helyett x körül. Elhagyva a magasabb rendű tagokat:

$$y + dy = x^{p/q} + \frac{p}{q}x^{p/q-1}dx.$$

Elhagyva $y = x^{p/q}$-t, és osztva mindkét oldalt dx-szel, adódik

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}.$$

5.2. feladat. Tagonként behelyettesítve az

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

összefüggést, az egymást követő $\pm$ tagok kiejtik egymást, marad az első tag: 1.

5.3. feladat. Tekintsük az $F(q) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^k$ függvénysort, és vegyük észre, hogy q kiemelése után $qkq^{k-1} = q(q^k)'$ értelmében $F(q) = q[qG(q)]' = q/(1-q)^2$ (vö. 3.2. feladat).

5.4. feladat. $f'(x) = 2x$ szerint

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - \beta}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\beta}{x_n}\right).$$

5.5. feladat.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{12}\right)^2 = 1 - 0{,}0343 = 0{,}966;$$

mert már az x^4-es tag is nagyon kicsiny, azaz elhanyagolható. Szögfüggvény-tábla szerint $\cos 15^\circ = 0{,}9659$.

5.6. feladat. A gondot az okozza, hogy $x = 1$ esetén a konvergenciakör határán vagyunk. Érdekes, hogy a GWBASIC program egyszeres pontossággal képtelen a végtelen sort akár 4 tizedes jegy pontossággal megállapítani: a Taylor-sor $S_{4000} = 0{,}69305$ fölé nem tudni menni, pedig a pontos eredmény $\log 2 = 0{,}693147$. A dupla pontosságot megkövetelve már 6 tizedes jegy pontossággal is működik a program. A $\log 2 = -\log(1/2)$

közelítés viszont már $n = 100$-ra is majdnem pontos (U_n). c) A konvergencia gyorsítható a $z = (1+x)/(1-x)$ helyettesítéssel. Ekkor a

$$\log z = \log(1+x) - \log(1-x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

5.2. táblázat. *A logaritmus-sor közelítése*

n	S_n	S_{n-1}	$-U_n$
10	0,645635	0,645635	0,693065
100	0,688172	0,688172	0,693147
1000	0,692643	0,692647	0,693147
10000	0,693050	0,693097	0,693147
100000	0,693050	0,693142	0,693147
1000000	0,693050	0,693147	0,693147

5.7. feladat. Törtalak: $dx/dt = \lambda x$, átalakítva: $dx/x = \lambda dt$, integrálva: $\log x - \log x_0 = \lambda t$, invertálva: $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$

6.1. feladat. A rendszer karakterisztikus egyenlete: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, a sajátértékek: $\lambda_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5})/2$. A megoldás $F_t = \xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t$ alakú. A kezdeti feltételekből ξ_1 és ξ_2 meghatározható: $F_0 = \xi_1 + \xi_2 = 1$ és $F_1 = \xi_1\lambda_1 + \xi_2\lambda_2 = 1$. $\xi_{1,2} = (5 \pm \sqrt{5})/10$.

6.2. feladat. a) Középiskolai fizikából ismert az egyenes vonalú egyenletes mozgás út–idő-függvénye. b) Síkbeli differenciálegyenletünk van:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

s ez a Jordan-alak, sajátértéke $\lambda_{1,2} = 0$, és csak egy független sajátvektora van. N-nel jelölve az együtthatómátrixot, könnyű belátni, hogy

$$e^{Nt} = I + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

azaz $x_1(t) = x_1^0 + x_2^0 t$.

6.3. feladat. Legyen $A = (a_{ij})$ egy 2×2 mátrix. Felhasználva, hogy az A mátrix karakterisztikus polinomja $p(\lambda) = \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A$, és bevezetve a $P = (p_{ij}) = p(A)$ jelölést, egyszerű számolással adódik az eredmény. Például

$$p_{11} = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}^2 - a_{22}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

és

$$p_{12} = a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} - a_{11}a_{12} - a_{22}a_{12} = 0.$$

7.1. feladat. Legyen T a tárgypont, K a képpont és X a tükrözési pont. Tükrözzük a K pontot a tükörre: K', és ekkor a TXK törött vonal hossza egyenlő a TXK'

hosszával. A háromszög-egyenlőtlenség miatt ez utóbbi akkor minimális, ha TX és XK' egy egyenest alkot.

7.2. feladat. Legyen a víz-levegő határ az x-tengely, a szem az y-tengely $(0,a)$ és a tárgy a alsó félsík (b,d) pontja. Legyen $(x,0)$ a törési pont, valamint u a levegőbeli és v a vízbeli terjedési sebesség reciproka. A levegőben és a vízben töltött idő összege adja minimumfeladat célfüggvényét:

$$u\sqrt{x^2+a^2}+v\sqrt{(b-x)^2+d^2}.$$

Deriválva x szerint: $u[x^2+a^2]^{-1/2}x-v[(b-x)^2+d^2]^{-1/2}(b-x)=0$, ahonnan adódik a szóban forgó törvény.

7.3. feladat. $f(t,y,y')=\sqrt{1+y'^2}$. E–L d.e. Mivel $f'_y=0$, ezért

$$f'_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c.$$

Négyzetre emelve és rendezve: $y'=k$, azaz $y(t)$ egy egyenes.

7.4. feladat. (Kósa, 1973, 21–22 és 48–50. o.) Induljon a görbe a $(0,\ 0)$ pontból, és végződjön az (x_2,y_2) pontban. A célfüggvény:

$$T[y]=\int_0^{y_2}\frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)+\alpha}},\qquad \text{ahol}\qquad \alpha=\frac{v_1^2}{g}.$$

Az Euler–Lagrange-differenciaegyenlet a független változó hiánya miatt az

$$\frac{1}{\sqrt{y(x)+\alpha}\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{2b}}$$

alakra egyszerűsödik, ahol b egy alkalmas állandó. Átrendezve és deriválva:

$$y''(x)=-\frac{1}{4b}(1+y'^2(x))^2.$$

Az $y'(x)=\cot(t/2)$ helyettesítéssel adódik a ciklois egyenlete: $y+\alpha=b(1-\cos t)$ és $x+\beta=b(1-\sin t)$.

7.5. feladat. Itt a 7.2. tétel segítségével határozzuk meg az optimumot. Legyen a (x,y) sík $(0,0)$ és $(0,1)$ pontja a szóban forgó szakasz két végpontja, és $(x,y(x))$ a kerítés tetszőleges pontja. Ekkor $f(x,y(x),y'(x))=y(x)$ (a terület integrandusa) és $g(x,y(x),y'(x))=\sqrt{1+y'(x)^2}$ (a kerület, azaz az ívhossz integrandusa).

A Lagrange-függvény $L=y-p\sqrt{1+y'^2}$, tehát a rá vonatkozó egyenlet

$$1=-\frac{d}{dx}\frac{py'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Integrálva a két oldalt és bevezetve a k integrációs állandót,

$$x=-\frac{py'}{\sqrt{1+y'^2}}+k.$$

Megoldjuk az egyenletet algebrailag y'-ra:

$$y' = -\frac{x-k}{\sqrt{p^2-(x-k)^2}}.$$

Legyen $v = p^2 - (x-k)^2$, azaz $dv = -2(x-k)dx$. Ekkor (bevezetve a c integrációs állandót)

$$y(x) = \int_0^x y'(s)\,ds = -\int v^{-1/2}dv/2 + c = -\sqrt{v} + c,$$

azaz

$$(y-c)^2 + (x-k)^2 = p^2,$$

amely egy körív egyenlete. A befejezést az Olvasóra hagyjuk.

8.1. feladat. Legyen $x_k = 1/\beta_k^2$, és alkalmazzuk a

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)^2 - 2\sum_{1\le k<l\le\infty} x_k x_l$$

azonosságot. $(1/6)^2 - 2/120 = 1/90$ stb.

8.2. feladat. Osszuk n egyenlő részre a $[0,x]$ intervallumot, és írjuk föl a koszinuszfüggvényhez tartozó a Riemann-féle jobb oldali téglányösszeget a Dirichlet-formula segítségével. Emlékeztetünk arra, hogy e formula levezetésében is a Newton–Leibniz-formula bizonyításából ismert teleszkopikus összeg játssza a főszerepet.

8.3. feladat. a) Például kétszeres parciális integrálással

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{\pi k^2}\int_0^{2\pi} f''(x)\sin kx\,dx,$$

azaz $M_2 = \max_{0\le x\le 2\pi}|f''(x)|$ jelöléssel $|b_k| \le 2M_2/k^2$. b) A formális Fourier-sor (m,n)-es Cauchy-szelete abszolút értékben majorálható a következő sorral:

$$\sum_{k=m}^{n} |b_k| \le 2M_2 \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

8.4. feladat. A 2.1. feladatból kiolvasható, hogy a babiloni négyzetgyökvonási algoritmust tetszőleges, az $\sqrt{2}$-nél nagyobb racionális számból indítva egy újabb racionális számot kapunk, amely kisebb az előzőnél, de nagyobb $\sqrt{2}$-nél.

9.1. feladat. Egyelőre eltekintünk az $1/2i$ együtthatótól. A két oldal határozott integrálját véve 0 és x között, és a logaritmusokban hányadosokra térve, a jobb oldal

$$\log(x-i) - \log(x+i) - \log(-i) + \log(i) = \log\frac{-x+i}{x+i}.$$

Legyen $\psi = \arctan x$. Most figyelembe véve az elhagyott együtthatót, vegyük mindkét oldal antilogaritmusát:

$$e^{2\psi i} = \frac{-x+i}{x+i}.$$

A jobb oldali tört nevezőjét valóssá téve:

$$\frac{-x+i}{x+i}=\frac{1-x^2+2xi}{1+x^2}.$$

A szokásos tangens fél helyettesítést elvégezve, a jobb oldali tört valós része éppen $\cos 2\psi$, a képzetes része pedig $-\sin 2\psi$.

10.1. feladat. Parciális integrálással.

10.2. feladat. A 10.4. tétel bizonyításához hasonlóan

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\prod_{i=0}^{\infty}(1+x^{2^i}).$$

10.3. feladat. Freud–Gyarmati (2000, 9.5.1. tétel, 396. o.).

11.1. feladat. a) Legyen $0 \le z \le 1$ annak a valószínűsége, hogy egy fiú utód hajszíne mondjuk szőke. Feltéve, hogy az egyes utódok hajszíne egymástól független esemény, a teljes valószínűség tétele szerint $g(z)$ éppen annak a valószínűsége, hogy minden fiúgyermek hajszíne szőke. Ebből teljes indukcióval adódik a függvényrekurzió.

b) $q_n = g_n(0) = g(g_{n-1}(0)) = g(q_{n-1})$. Egy $q_n = g(q_{n-1})$ iteráció $q = g(q)$ fixpontja lokálisan stabil, ha $0 < g'(q) < 1$. A generátorfüggvény definíciója miatt $g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k z^{k-1}$, azaz ha $g'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = m > 1$, akkor $0 < g(0) = p_0 < 1$ miatt van $0 < q < 1$ fixpont, sőt, $0 < g'(q) < 1$, tehát stabil.

11.2. feladat. Rényi (1966, 17.1. tétel és korhű bizonyítása). A nagyon szellemes Markov-egyenlőtlenségen alapuló általános bizonyítással ellentétben itt a binomiális eloszlásra ki kell számolni a Csebisev-egyenlőtlenség konkrét alakját.

12.1. feladat. a) Legyen e és f két egység. Ekkor $e = ef = f$. b) Ha G véges elemű csoport, akkor tetszőleges 1-től különböző g elemére is a g^i sorozat véges, azaz létezik olyan n pozitív egész, amelyre $g^n = 1$. Ekkor $g^{n-1} = g^{-1}$.

12.2. feladat. Egy algebrai szám egy alkalmas n-re egy egész együtthatós $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinom gyöke, és e polinomnak legfeljebb n különböző gyöke lehet. Mivel az ilyen polinomok halmaza megszámlálható számosságú, a gyököké is.

12.3. feladat. Heurisztikusan, legyen $x = 0{,}x_1{,}x_2, \ldots$ és $y = 0{,}y_1{,}y_2, \ldots$ az egységnégyzet tetszőleges pontjának abszcisszája és ordinátája. Fésüljük össze a két tizedes törtet: $z = 0{,}x_1{,}y_1{,}x_2{,}y_2, \ldots$ és az egységszakasz egy tetszőleges pontját kapjuk.

13.1. feladat. Egy skalár-skalár függvény kontrakció egy korlátos zárt szakaszon, ha $|f'(x)| < 1$ a szakaszon. $f(x) = 0.5(x+a/x)$ függvény deriváltja $f'(x) = 0.5(1-a/x^2)$ mindig kisebb, mint 1, és nagyobb mint –1, ha $x > \sqrt{a/3}$.

13.2. feladat. $f = \varphi - A\varphi = (I - A)\varphi$. Invertálva és hatványsorba fejtve: $\varphi = (I - A)^{-1} f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f$, ahol $(I - A)^{-1}$ az A mátrix rezolvense.

14.1. feladat. Valóban, legyen rendre ξ és η a két játékos F választásának a valószínűsége. Ekkor az 1. játékos várható nyeresége a négy elemi esemény nyereségének a várható értéke, azaz $u(\xi,\eta) = \xi\eta - \xi(1-\eta) - (1-\xi)\eta + (1-\xi)(1-\eta)$. Deriválva ξ szerint és 0-vá téve a deriváltat, adódik: $\eta^* = 1/2$. Itt vált u ξ szerinti deriváltja pozitívból negatívba, tehát u-nek lokális és globális maximuma van. Hasonlóan $\xi^* = 1/2$.

Azaz mindkét játékos földobja a saját pénzét, és „ahogy esik, úgy puffan”. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 0. Ha azonban az 1. játékos eltér e szabálytól, például $\xi > 1/2$, akkor a 2. játékos ezt kihasználhatja, s mindig I-t tesz: $\eta = 0$, tehát az érmék különbözőségének valószínűsége 1/2 fölé kerül, s a 2. játékos nyer.

15.1. feladat. a) Nyilvánvaló. b) $FN = FH/\cos\alpha$. c) $1/\cos 87^\circ = 1/0{,}052 = 19{,}23$ és $1/\cos 89^\circ 52' = 1/0{,}0023 = 430$.

15.2. feladat. A centripetális gyorsulás képlete $a = v^2/R$, a sebesség, a pályasugár és a keringési idő kapcsolata $v = 2\pi R/T$, azaz $a = 4\pi^2 R/(T^2)$. Az általános tömegvonzás miatt ez a gyorsulás fordítottan arányos a bolygónak a Naptól mért távolságának a négyzetével (R^2), azaz $a = 4\pi^2 R/T^2 = k/R^2$, azaz $R^3/T^2 = k^*$.

F.1. feladat. Vegyük a szorzat logaritmusát: $\log n! = \sum_{i=1}^{n} \log i$, és alkalmazzuk az E–M módszert az $f(x) = \log x$ függvényre. A konstans pontos meghatározásához finomabb módszerekre van szükség.

IRODALOMJEGYZÉK

AIGNER, M.–ZIEGLER, G. M. (2004): *Bizonyítások a könyvből*, 3. kiadás, angol kiadás fordítása, Budapest, Typotex, 2004.

ARNOLD, V. I. (1984): *Közönséges differenciálegyenletek*, (a 3. orosz kiadás fordítása) Budapest, Műszaki Könyvkiadó 1987.

ATTALI, J. (2000): *Blaise Pascal ou le Génie Francais*, Paris, Libraire Artheme Fayard, francia kiadás fordítása: Blaise Pascal avagy a francia szellem, Európa Budapest. 2003.

BELL, E. T. (1937): *Men of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, 1986.

BOLYAI, J. (1832): *Appendix, a vagy a tér tudománya*, latin eredeti (Kárteszi, F. előszavával és megjegyzéseivel), Budapest, Akadémiai Kiadó, 1952.

BOYER, C. B. (1968): *A History of Mathematics*, Princeton, Princeton University Press. Kiegészített kiadás: Revised by Uta C. Merzbach (1991), Wiley.

COURNOT, A. (1838): *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, angolul: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, New York, Macmillan, 1897.

COXETER, H. S. M. (1969): *A geometriák alapjai*, angol kiadás fordítása, 2. kiadás, Budapest, Műszaki, 1973.

CSIRMAZ, L. (1999): *Nemsztenderd analízis*, Budapest, Typotex.

DERBYSHIRE, J. (2004): *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unresolved Problem in Mathematics*, New York, Penguin.

DIACU, F.–HOLMES, PH. (1996): *Égi találkozások*, Budapest, Akkord, 2003.

DUHEM, P. (1908): *A jelenségek megőrzése: Értekezés a fizikaelmélet fogalmáról Platontól Galileiig*, 1990-es francia kiadás fordítása, Budapest, Kairosz, 2005.

EUKLIDÉSZ, *Elemek*, görög kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, Szabó Árpád előszavával, 1983.

FAUVEL, J.–GRAY, J. (1987): *The History of Mathematics: A Reader,*, Houndsmill, Palgrave.

FORGÓ, F.–PINTÉR, M.–SIMONOVITS, A.–SOLYMOSI, T. (2005): Játékelmélet. `http://www.uni-corvinus.hu/ pmiklos/Works/PDF/forgo_jatekelmelet.pdf`

FREUD, R. szerk. (1981): *Nagy pillanatok a matematika történetében*, Budapest, Gondolat.

FREUD, R. (1996): *Lineáris algebra*, Budapest, ELTE Eötvös Kiadó.

FREUD, R.–GYARMATI, E. (2000): *Számelmélet*, Budapest, Nemzeti Tankönyviadó.

FRIED, E. (1981): *Általános algebra*, Budapest, Tankönyvkiadó, újabb kiadás, 1989.

FRIED, K.–SIMONOVITS, M. (2005): *A gondolkodás számítógépes iskolája*, Budapest, Typotex.

GALILEI, G. (1638): *Matematikai érvelések és bizonyítások két új tudomány, a mechanika és a mozgások köréből.* Latin? kiadás fordítása: Budapest, Európa, 1986.

GIBSON, R. (1992): *Bevezetés a játékelméletbe*, Budapest, Nemzeti Tankönyvkiadó, 2005.

GINGYIKIN, SZ. G. (2001): *Történetek fizikusokról és matematikusokról*, 3. orosz kiadás fordítása. Budapest, Typotex, 2003, javított kiadás, 2004.

GLEICK, J. (1988): *Káosz: Egy új tudomány születése*, Budapest, Göncöl, 1999.

HAJNAL, A.–HAMBURGER, P. (1983): *Halmazelmélet*, Budapest, Tankönyvkiadó.

HAJÓS, GY. (1964): *Bevezetés a geometriába*, Budapest, Tankönyvkiadó.

HARDY, G. (1949): *Divergent Series*, Oxford, Oxford University Press.

HODGKIN, L. (2005): *A History of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press.

HORVATH, J., szerk. (2006): *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twenthieth Century*, Berlin, Springer.

JUSKEVICS, A. P. (1961): *A középkori matematika története*, orosz kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1982.

KLEIN, F. (1924): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte I.* (Elemi matematika felsőbb nézőpontból), Berlin, Springer, 3. kiadás.

KLINE, M. (1972): *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, Oxford University Press.

KÓSA, A. (1970): *Variációszámítás*, Budapest, Tankönyvkiadó.

KOESTLER, A. (1959): *Alvajárók*, angol kiadás fordítása, Budapest, Európa, 1996.

KOLMOGOROV, A.N. (1933): *A valószínűség-számítás alapfogalmai,* német eredeti 1974-es orosz kiadásának fordítása, Budapest, Gondolat, 1982.

KUHN, H. W. (1953): „Extensive Games and the Problem of Information", *Kuhn–Tucker, eds.* 193–216.

KUHN, H. W.–TUCKER, A. eds. (1953): Contributions to the Theory of Games, Vol. II. *Annals of Mathematical Studies 28*, Princeton, Princeton University Press.

KUHN, T. S. (1957): *The Copernican Revolution*, Cambridge, MA, Harvard University Press.

LACZKOVICH, M. (1998): *Sejtések és bizonyítások,* Budapest, Typotex.

LACZKOVICH, M.–T. SÓS V. (2005): *Analízis I.*, Budapest Nemzeti Tankönyvkiadó.

LAKATOS, I. (1976): *Bizonyítások és cáfolatok.* Angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1981.

LÁNCZOS, K. (1970): *A geometriai térfogalom fejlődése*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1976.

LAROCHE, F. (2004): *Promenades mathematiques: histoire, fondements, applications,* (Matematikai séták: történelem, alapok, alkalmazások.) Paris, Ellipses.

LEONARD, R. I. (1995): „From Parlor Games to Social Science: von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory: 1928–1944", *Journal of Economic Literature 33* 730–769.

LÉVÁRDI, L.–SAIN, M. (1982): *Matematikatörténeti feladatok*, Budapest, Tankönyvkiadó.

MANKIEWICZ, R. (2000): *A matematika históriája*, angol kiadás fordítása, Budapest, HVG.

MÉRŐ, L. (1996): *Mindenki másképp egyforma*, Budapest, Tericum.

NASAR, S. (1998): *Egy csodálatos elme*, angol kiadás fordítása, Budapest, GABO, 2002.

NASH, J. (1951): „Non-Cooperative Games”, *Annals of Mathematics 54* 289–295.

NEUGEBAUER, O. (1970): *Egzakt tudományok az ókorban*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1984.

NEUMANN, J. (1928): „A társasjátékok elméletéhez,” német kiadás fordítása, *Neumann (1965)* 121–156.

NEUMANN, J. (1932): *A kvantummechanika matematikai alapjai*, német kiadás fordítása, Budapest, Akadémia Kiadó, 1980.

NEUMANN, J. (1965): *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK, új kiadás: Budapest, Typotex 2004?.

NEUMANN, J.–MORGENSTERN, O. (1947): *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 2. kiadás.

NIKAIDO, H.–ISODA, K. (1955): „Note on Noncooperative Convex Games”, *Pacific Journal of Mathematics 5* 807–815.

PATAKI, J. (2003): „Az algebra és a geometria házassága”, *Élet és Tudomány 58*, Diákoldal XLIV-XLVII.

PÉTER, R. (1969): *Játék a végtelennel*, Budapest, Tankönyvkiadó, 4. kiadás.

PLUTARKHOSZ (i.sz. 100 körül): *Párhuzamos életrajzok*, latin kiadás fordítása, Budapest, Magyar Helikon, 1978.

PÓLYA, GY. (1968): *Indukció és analógia: A matematikai gondolkodás művészete I.* Angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1988.

PRASZOLOV, V. V. (1994): *Lineáris algebra*, Budapest, angol kiadás fordítása, Budapest, Typotex, 2005.

PRÉKOPA, A. (2002): „Bolyai János forradalma”, *A Természet Világa 133*, június–augusztus.

RÉNYI, A. (1966): *Valószínűség-számítás*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.

RÉNYI, A. (1967): *Levelek a valószínűség-számításról,* Budapest, Akadémia Kiadó.

RÉNYI, A. (2005): *Ars mathematica: Rényi Alfréd összegyűjtött írásai*, Budapest, Typotex.

RIBNYIKOV, K. A. (1960): *A matematika története*, Budapest, Tankönyvkiadó, 1974, második kiadás.

RIESEL, H. (1985): *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, Birkhaeuser.

RIESZ, F.–SZŐKEFALVI NAGY B. (1965): *Funkcionálanalízis.* Francia kiadás fordítása, Budapest, Tankönyvkiadó, 1988.

ROBINSON, A. (1966): *Nonstandard Analysis*, Princeton, Princeton University Press, legújabb kiadás: 1996.

RUDIN, W. (1964): *A matematikai analízis alapjai.* Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1976.

RUSSEL, B. (1946, 1961): *A nyugati filozófia története*, angol kiadás fordítása, Budapest, Vince, 1996.

SAIN, M. (1986): *Nincs királyi út*, Budapest, Gondolat.

SCHWALBE, U.–WALKER, P. (2001): „Zermelo and the Early History of Game Theory”, *Games and Economic Behavior 34* 123–137.

SHAPLEY, L. S. (1953): „A Value for n-Person Games”, *Kuhn–Tucker, eds.*, 307–317.

SMITH, D. E. (1929): *A Source Book in Mathematics*, N.Y. Dover, 1959.
SIMONOVITS, A. (1998): *Matematikai módszerek a dinamikus közgazdaságtanban*, Budapest, KJK.
SIMONOVITS, A. (1999): „Egy csodálatos elme", *Természet Világa 130* 558–560.
SIMONOVITS, A. (2003): „Neumann János és a játékelmélet", *Természet Világa 134 Neumann különszáma*, 56–60.
SIMONYI, K. (1981): *A fizika kultúrtörténete*, Budapest, Gondolat, 2., bővített kiadás.
SINGH, S. (1997): *A nagy Fermat-sejtés*, angol kiadás fordítása, Budapest, Park Kiadó, 1999.
STEWART, I. (1987): *A matematika problémái*, angol kiadás fordítása, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1991.
STILLWELL, J. (1989): *Mathematics and its History*, New York, Springer.
STRUIK, D. J. (1948): *A matematika rövid története*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1958.
SZABÓ, Á. (1978): *A görög matematika kibontakozása,* Budapest, Magvető.
SZABÓ, Á.–KÁDÁR, Z. (1984): *Antik természettudomány*, Budapest, Gondolat.
SZÉKELY, J. G. (1982): *Paradoxonok a valószínűségszámításban*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 2. kiadás, Budapest, Typotex, 2004.
SZÉPFALUSSY, P. és TÉL, T., szerk. (1982): *Véletlenszerű jelenségek nem lineáris rendszerekben: a káosz*, Budapest, Műszaki Könyvkiadó.
SZŐKEFALVI-NAGY, B. (1965): *Valós függvények és függvénysorok*, Budapest, Tankönyviadó.
SZPIRO, G. G. (2003): *Kepler's Conjecture*, Hoboken, NJ, John Wiley and Sons.
VAN DER WAERDEN, B. L. (1954): *Egy tudomány ébredése*, angol kiadás fordítása, Budapest, Gondolat, 1977.
WEIL, A. (1983): *Number Theory: An Approach through History. From Hammurapi to Legendre*, Boston, Birkhauser.
YANDELL, B. H. (2002): *The Honor Class, Hilbert's Problems and Their Solvers*, Natick MA, Peters.