



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Szerkesztette:
Monostory Iván

MATEMATIKA PÉLDATÁR
IV. kötet
VÉGTELEN SOROK

Összeállította:
Lőkös Ágnes - Pataki Béláné



Műegyetemi Kiadó, 2006.

Szerkesztette:

Monostory Iván
egyetemi adjunktus

Összeállította:

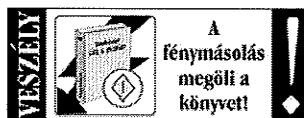
Lőkös Ágnes
egyetemi adjunktus

Pataki Béláné
egyetemi adjunktus

(Tizenkettedik utánnymás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **040803**



**A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának**
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu

Felelős vezető: Wintermantel Zsolt

Terjedelem: 11,9 (A/5) ív

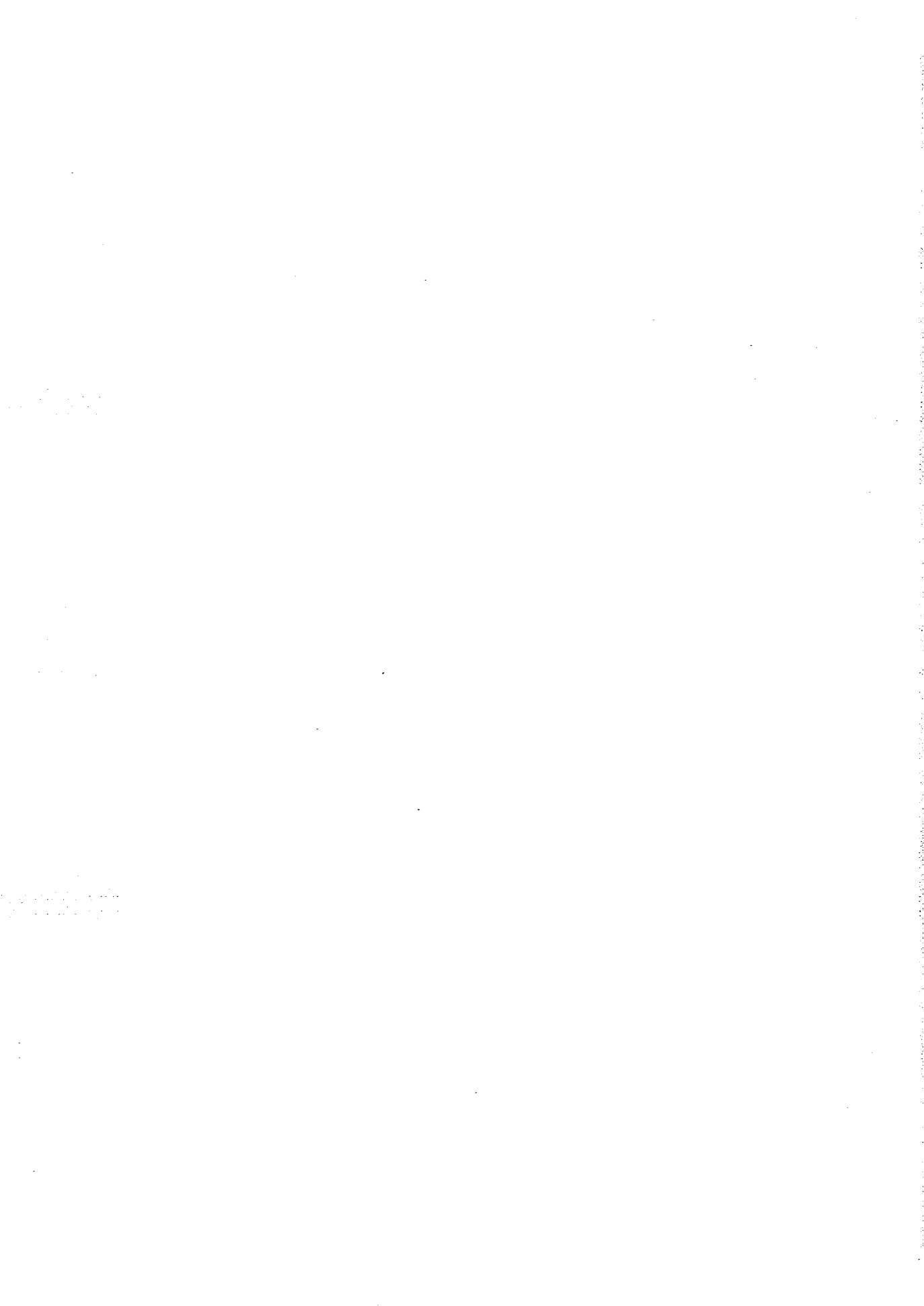
Nyomdai munkák:

Műegyetemi Nyomda

Munkaszám: 5906/06

- * A feladatok jelentős részének sorszáma előtt csillag jelzés található. Ezzel hívjuk fel a figyelmet arra, hogy a kötet második felében található megoldások között ezeknek a feladatoknak nem csupán a végeredményét közöljük, hanem a megoldás menetéhez utmutatást is adunk.
- A bekeretezett sorszámú feladatok megoldását részleteiben is kidolgoztuk, egyes esetekben több megoldást is közlünk.

A szerkesztő



Tartalomjegyzék

NUMERIKUS SOROK	Feladat sorszám	Oldal	
		Feladat	Megoldás
1. Részletösszeg. Maradékösszeg	1-22	7	49
2. Mértani sor	23-38	9	53
3. Cauchy-kritérium	39-42	11	54
4. Váltakozó előjelli sorok	43-51	12	56
5. Pozitív tagu sorok	52-95	13	60
6. Feltételes és abszolút konvergencia	96-140	16	69
7. Sorok átrendezése. Műveleti sorokkal	141-164	21	76
8. Sorok összegének közelítő meghatározása; hibabecslés	165-200	25	82
FÜGGVÉNYSOROK			
9. Függvénysorozatok	201-219	29	89
10. Függvénysorok konvergenciatarmánya. Abszolút és egyenletes konvergencia	220-261	30	96
11. Függvények hatványsorba fejtése	262-307	34	102
12. Műveletek hatványsorokkal	308-324	36	110
13. Sorfejtések alkalmazásai; hibabecslés	325-352	39	114
14. Fourier-sorok	353-392	41	118



Numerikus sorok

1. Részletösszeg. Maradékösszeg

1-10.

Írjuk fel az alábbi sorok n -edik részletösszegét: s_n -et. Vizsgáljuk meg, hogy az $\{s_n\}$ sorozat konvergens-e és amennyiben konvergens, állapítsuk meg a határértékét.

Megjegyzés: A jegyzethez hasonlóan – jelöléseink egyszerűbbé tétele céljából – azt a megállapodást tesszük, hogy ha az összegezés $k = 0$ -val kezdődik, akkor a részletösszegeket is ennek megfelelően indexeljük, vagyis nulladik, első, második stb. részletösszeg. Ebben az esetben tehát az n -edik részletösszeg $n + 1$ tagot tartalmaz.

1.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{4^k}$$

* 3.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k$$

4.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{2^{2k}}$$

* 5.
$$\sum_{k=0}^{\infty} a + kd \quad (a \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}, \quad d \neq 0)$$

6.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$* \quad 7. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$* \quad 8. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$9. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$10. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+kb)[a+(k+1)b]} \quad (a>0; \quad b>0)$$

11-14. Irjuk fel az alábbi konvergens sorok h_n maradékösszegét és adjunk meg egy olyan $N_0(\varepsilon)$ küszöbszámot, amelyre fennáll, hogy

$$n > N_0(\varepsilon) \Rightarrow |h_n| < \varepsilon$$

$$\boxed{11.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$12. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

$$13. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+kb)[a+(k+1)b]} \quad (a > 0 \quad b > 0)$$

$$14. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{3k-1}}$$

- 15-16. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket

* 15.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2k}$$

16.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2 + 3k}$$

17. Adott a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sor. Igazoljuk, hogy ha van olyan $r \in \mathbb{T}$, amelyre a $h_r = \sum_{k=r+1}^{\infty} a_k$ maradéksor konvergens, akkor bármely $n \in \mathbb{T}$ -re h_n konvergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$.

- 18-22. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak:

18. ha egy sorból zárójelek elhagyásával nyert új sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens,

19. ha egy sorból zárójelek elhagyásával nyert új sor divergens, akkor az eredeti sor is divergens,

20. ha egy sorból zárójelek beiktatásával nyert új sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens,

21. ha egy sorból zárójelek beiktatásával nyert új sor divergens, akkor az eredeti sor is divergens,

22. ha egy pozitív tagu sorból zárójelek beiktatásával nyert új sor konvergens, akkor az eredeti sor is konvergens.

Megjegyzés: A továbbiakban megállapodás szerint:

$$x^0 \equiv 1.$$

2. Mértani sor

- 23-26. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi mértani sorok konvergensek-e és a konvergenseknek határozzuk meg az összegét.

$$23. \sum_{k=0}^{\infty} 1000 \cdot 0,5^k$$

$$24. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1000 \cdot 0,5^k}$$

$$25. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^{k+3}}{5^k}$$

$$26. \sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}$$

27-30. Irjuk fel az alábbi szakaszos végtelen tizedestörteket két egész szám hányadosaként.

$$\boxed{27.} \quad 0,333\dots$$

$$28. \quad 0,25'25\dots$$

$$\boxed{29.} \quad 20,7'25'25\dots$$

$$30. \quad 0,2'321'321\dots$$

31-32. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket.

$$31. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c^2}{c^2 + 1} \right)^k \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$* \quad 32. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k + 3 \cdot 2^k}{6^k}$$

33-38. Állapítsuk meg, hogy a szereplő betűk mely értékénél konvergensek az alábbi sorok és határozzuk meg az összegüket:

$$33. \sum_{k=0}^{\infty} \sin^k \alpha$$

$$34. \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{2x} \right)^k$$

$$35. \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-u}{u-1} \right)^k$$

$$36. \sum_{k=0}^{\infty} (-2\lambda^{-1})^k$$

$$37. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{5 \cdot 3^{2k}}$$

$$* 38. \sum_{k=0}^{\infty} a \cdot \frac{b^{k+n}}{c^{k+m}} \quad (a, b, c \in \mathbb{R}; c \neq 0; n \text{ és } m \text{ egész})$$

3. Cauchy-kritérium

39. A Cauchy-kritérium (Jegyzet IV. kötet 1.1. tétel) felhasználásával igazoljuk, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \quad (|a_k| < 10) \text{ sor konvergens.}$$

40. Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában azt, hogy egy végtelen sor nem elégíti ki a Cauchy-féle konvergencia-kritériumban szereplő feltételt.

- * 41. A Cauchy-kritérium felhasználásával igazoljuk, hogy a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \text{ harmonikus sor divergens.}$$

- * 42. Igazoljuk, hogy ha $a_k \leq c_k \leq b_k$ ($k \in T$), továbbá a

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ sorok konvergensek, akkor a } \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{ sor is konvergens.}$$

4. Váltakozó előjeli sorok

43. A váltakozó előjeli $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ ($a_k > 0$) sorról tudjuk,

hogy a páros indexű részletösszegeiből alkotott sorozat monoton csökkenő. Következik-e ebből, hogy az $\{a_k\}$ sorozat monoton csökkenő?

44.

Legyen a $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ ($a_k > 0$) sor Leibniz-típusú (vagyis legyen $a_k \geq a_{k+1}$ ($k \in T$) és $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, lásd Jegyzet IV. kötet 1.19 tétel);

- igazoljuk, hogy a sor páros indexű részletösszegeiből alkotott sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos,
- jelöljük az a)-ban szereplő részletösszeg-sorozat határértékét S -sel. Mutassuk meg, hogy a sor páratlan indexű részletösszegeiből alkotott sorozat is S -hez konvergál,
- fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be azt a sorozatokra vonatkozó állítást, amelynek alapján a) és b)-ből következik a Leibniz-típusú sor konvergenciája.

45-50.

Írjuk fel az alábbi sorokat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ alakban és vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e?

Állapítsuk meg azt is, hogy Leibniz típusúak-e!

45. $0,1 - 0,1 + 0,1 - 0,1 + \dots$

46. $0,1 - 0,01 + 0,001 - + \dots$

47. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + - \dots$

48. $-0,11 + 0,101 - 0,1001 + - \dots$

49. $0,3 - 0,03 + 0,003 - + \dots$

50. $0,01 - \sqrt{0,01} + \sqrt[3]{0,01} - \sqrt[4]{0,01} + - \dots$

51. a) Irjuk fel a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{ha } k = 0 \\ \frac{-1}{k+2} & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \frac{1}{k} & \text{ha } k \text{ páros és } k \neq 0 \end{cases}$$

sor első 10 tagját.

b) Leibniz-típusu-e a sor?

*c) Konvergens-e a sor?

5. Pozitív tagu sorok

52-94. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok konvergensek, vagy divergensek!

52. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

53. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}$

54. $\sum_{l=0}^{\infty} \frac{3^l}{l!}$

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$

56. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$

* 57. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

58. $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j^2 + 50}$

* 59. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$

60. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+28)}$ * 61. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$
62. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k + 1}$ * 63. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{5^k - 1}$
64. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$ 65. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 3^k}$
66. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!}$ 67. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$
68. $\frac{1}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$
69. $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \dots$
70. $1000 + \frac{1000^2}{2!} + \frac{1000^3}{3!} + \frac{1000^4}{4!} + \dots$
71. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \frac{5}{3^5} + \dots$
72. $\frac{2 \cdot 3}{1!} + \frac{3 \cdot 4}{2!} + \frac{4 \cdot 5}{3!} + \frac{5 \cdot 6}{4!} + \dots$
73. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} \right) + \dots$
74. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

Megjegyzés: $(2n - 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 3) (2n - 1)$ "Szemi-faktoriális".

$$75. \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$$

$$76. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

$$77. \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{3}}$$

Megjegyzés: $\binom{n}{k}$ "binomiális együttható" lásd. Jegyzet I. kötet 8. §

$$78. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{n}{1}}{\binom{n}{2}}$$

$$79. \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$80. \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 k}$$

$$81. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n+1)}$$

$$82. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$$

$$83. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^k}$$

$$84. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$85. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1} \right)^n$$

$$86. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$$

$$87. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$$

$$\# 88. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} \right)^{n^2} \quad \boxed{89.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k+1} \right)^{k^2}$$

$$90. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{2k-1} \right)^{k^2} \quad \# 91. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n^2} \cdot \frac{1}{2^n}$$

$$\# 92. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}^n n}{(n+1) 2^{n-1}}$$

$$\boxed{93.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ahol} \quad a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

$$\# 94. \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{ahol} \quad a_k = \int_k^{k+1} e^{-x^2} dx$$

* 95. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

6. Feltételes és abszolút konvergencia

96-113. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorok divergenssek, feltételesen konvergenssek, vagy abszolút konvergenssek-e?

$$96. 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + + - \dots$$

$$97. 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} - + \dots$$

$$* 98. \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + - \dots$$

$$99. \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} + - \dots$$

$$* 100. \quad \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{5} - + \dots$$

$$101. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{4} + - \dots$$

$$102. \quad \frac{1}{2} - \frac{2}{2^3+1} - \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} - - + \dots$$

$$* 103. \quad \frac{1}{2} - \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} - \frac{16}{4^3+1} + - \dots$$

$$104. \quad 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16} - + \dots$$

$$105. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

$$106. \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-n} \quad (e = 2,718 \dots \text{ az Euler-féle szám})$$

$$107. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n^2}$$

$$108. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k^2}}$$

$$109. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3}}$$

$$110. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$$

$$111. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

$$112. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n}$$

$$113. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n}$$

* 114. Igazoljuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ ($|a_k| < 10$) sor konvergens.

115.

Írjuk fel egyszerűbb alakban az alábbi sor általános tagját. Igazoljuk, hogy a sor konvergens, és határozzuk meg az összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+1} \int_{\pi}^0 x \sin nx \, dx \right]$$

116-127. Vizsgáljuk meg, hogy a t paraméter mely értékeinél lesznek

a) abszolút konvergens

b) feltételesen konvergens az alábbi sorok.

$$116. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n^2}$$

$$117. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin t}{n}$$

$$118. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n t}{n}$$

$$119. \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

$$120. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{t} \right)^n$$

$$121. \sum_{n=1}^{\infty} n^t$$

$$122. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^t$$

$$123. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$$

$$124. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{n}\right)^n$$

$$* \quad 125. \sum_{n=1}^{\infty} t^n n^t$$

$$126. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{1-t}\right)^n$$

$$127. \sum_{n=0}^{\infty} \arctg^n t$$

$$128. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}\right)^n$$

129. Válasszuk ki a 116-128. feladatokban szereplő sorok közül a geometriai sorokat és állapítsuk meg az összegüket.

130-135. A $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sorról tudjuk, hogy végtelen sok pozitív és negatív tagot tartalmaz. Hagyjuk el a sorból a negatív és zérus tagokat, és jelöljük a visszamaradó új sort $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ -nel.

Tekintsük ismét az eredeti $\sum c_n$ sort és hagyjuk el belőle a pozitív és zérus tagokat. Jelöljük a visszamaradó új (negatív tagu) sort $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ -nel. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak:

* 130. Ha a $\sum c_n$ abszolút konvergens, akkor a $\sum a_n$ is és a $\sum b_n$ is konvergens.

131. Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ konvergens, akkor a $\sum c_n$ abszolút konvergens.

* 132. Ha $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül az egyik divergens és a másik konvergens, akkor $\sum c_n$ divergens.

133. Ha $\sum c_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül az egyik konvergens a másik pedig divergens.

134. Ha $\sum c_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ és $\sum b_n$ közül legalább az egyik divergens.

* 135. Ha $\sum c_n$ feltételesen konvergens, akkor $\sum a_n$ is és $\sum b_n$ is divergens.

* 136. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

137. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor is konvergens?

138. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ sor konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor is konvergens?

139. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorról tudjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és hogy a sor s_n részletösszeg-sorozatának $s_{100}, s_{200}, \dots, s_{100k}, \dots$ részsorozata konvergens. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor a konvergens?

140. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sorról tudjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ és, hogy a sor s_n részletösszeg-sorozatának van egy konvergens részsorozata. Következik-e ebből, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor is konvergens?

7. Végtelen sorok átrendezése; műveletek sorokkal

- * 141. Egy feltételesen konvergens sort átrendezünk, úgy, hogy az első tagot felcseréljük a második taggal, a harmadik tagot felcseréljük a negyedik taggal, ..., a $(2k - 1)$ -edik tagot felcseréljük a $2k$ -adik taggal.

Bizonyítsuk be, hogy az így nyert sor konvergencia és összege megegyezik az eredeti sor összegével.

- * 142. Egy konvergens sort átrendezünk úgy, hogy az átrendezés során bármely tag indexe legfeljebb 1000-rel változzék meg. Mutassuk meg, hogy ez az átrendezés sem a konvergencia tényét, sem a sor összegét nem változtatja meg.

- * 143. Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergál a $+\infty$ -

hez, akkor akármilyen nagy (rögzített) K szám esetén tetszőleges nagy n számhoz megválasztható az m értéke úgy, hogy

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m} \right| > K \text{ fennálljon.}$$

Igaz-e ez az állítás tetszőleges divergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén?

- * 144. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ feltételesen konvergens sort. Adjunk meg egy átrendezési utasítást, úgy, hogy az átrendezett sor összege $+\frac{1}{2}$ legyen.

- * 145. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ feltételesen konvergens sort. Adjunk meg egy átrendezési utasítást, úgy, hogy az átrendezett sor $(-\infty)$ -hez divergáljon.

- *146-148. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor feltételesen konvergens és S összegére fennáll, hogy

$$\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}.$$

Adjunk olyan utasítást, hogy az átrendezett sor összege az alábbiakban megadott érték legyen. Irjuk fel az ilyen módon átrendezett sor első 8 tagját.

$$\boxed{146.} \quad S_1 = 0$$

$$147. \quad S_2 = 1$$

$$\boxed{148.} \quad S_3 = +\infty$$

$$* \quad 149. \quad \text{Igazoljuk, hogy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$150. \quad \text{Igazoljuk, hogy a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \left(\frac{1}{n} \right)^n \right] \text{ és a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n} \right)^n \right] \text{ sorok konvergensek és határozzuk meg, hogy}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{5^n} + \left(\frac{1}{n} \right)^n \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{n} \right)^n \right] = ?$$

151-154. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensek és határozzuk meg az összegüket:

$$151. \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots$$

$$152. \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} - + \dots$$

$$153. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{3^n}$$

$$154. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\left(n \frac{\pi}{2}\right)}{\pi^n}$$

$$* 155. a) \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = ?$$

b) az a) feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

c) mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad \text{az} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad \text{határozott}$$

integrálnak egy alsó közelítő összege.

d) a b) és c) feladat eredményeinek felhasználásával határozzuk meg a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{konvergens sor összegét.}$$

156-158. Igazoljuk, hogy az alábbi sorok konvergensnek és – felhasználva, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 - \text{határozzuk meg az összegüket.}$$

$$156. \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \dots$$

$$157. 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \dots$$

158. $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$

159. Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sorok abszolút konvergensek és képezzük a szorzatukat.

160. Mutassuk meg, hogy az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

és az

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

sorok közül az egyik abszolút konvergens és képezzük a szorzatukat.

161. Mutassuk meg, hogy az

$$1 - \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \dots$$

sor abszolút konvergens és képezzük a négyzetét.

* 162. Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$$

sor négyzete divergens.

163. Mutassuk meg, hogy $\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$
 ($|q| < 1$) és ennek alapján határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$ sor összegét.

$$164. \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} \right) = ?$$

8. Sor összegének közelítő meghatározása; hibabecslés

165-176. Számítsuk ki az alábbi konvergens sorok kijelölt s_n részletösszegét és becsljük meg s_n -nek a sor összegétől való eltérését. (1. az 1-10 feladatnál levő megjegyzést.)

$$\boxed{165.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad s_4$$

$$166. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad s_6$$

$$167. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \quad s_4$$

$$\boxed{168.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad s_4$$

$$169. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \quad s_6$$

$$170. \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \quad s_3$$

$$171. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad s_3$$

$$172. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad s_7$$

$$173. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 2^n} \quad s_4$$

$$174. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 5^n} \quad s_3$$

$$175. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad s_4$$

$$176. \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \dots \quad s_4$$

177-179. Az alábbi pozitív tagú konvergens soroknál határozzuk meg a kijelölt indexű s_n részletösszeget, majd a hozzátartozó h_n maradéksorhoz keressünk minoráns és konvergens majoráns improprius integrálokat. Ennek alapján adjunk alsó és felső korlátot a sor összegére.

$$\boxed{177.} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad s_4$$

$$* 178. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \quad s_4$$

$$179. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad s_6$$

180-186. Határozzuk meg, hogy az alábbi konvergens sorok milyen n indexű részletösszegei közelítik meg a sor összegét a megadott $\varepsilon > 0$ -nál kisebb hibával.

$$\boxed{180.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \quad \varepsilon = \frac{1}{10}$$

$$181. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

$$\boxed{182.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^k \quad \varepsilon = 10^{-3}$$

$$\boxed{183.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

$$184. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

$$* \quad 185. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

$$186. \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \varepsilon = 10^{-2}$$

187-200. Határozzuk meg az alábbi sorok összegét 3 tizedes pontossággal.

$$\boxed{187.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}$$

211. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat egyenletesen konvergens valamely intervallumban, akkor azon az intervallumon a határfüggvénye is folytonos függvény.
212. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat határfüggvénye folytonos valamely intervallumon, akkor azon az intervallumon a konvergencia egyenletes.
123. Ha egy folytonos függvényekből álló sorozat határfüggvénye nem folytonos valamely intervallumban, akkor azon az intervallumon a konvergencia nem egyenletes.
214. Ha valamely intervallumon egy folytonos függvényekből álló sorozat konvergál, de nem egyenletesen, akkor azon az intervallumon a sorozat határfüggvénye nem folytonos.
- 215-219. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi sorozatok egyenletesen konvergensek-e a megadott intervallumon?
- * 215. $\{x^n\}$ $[0, 1]$
216. $\{x^n\}$ $(0, 1)$
217. $\{x^n\}$ $[0, C)$ ($0 < C < 1$ tetszőleges rögzített szám)
- * 218. $\{x^n - x^{n+1}\}$ $[0, 1]$
219. $\{n^x\}$ $[-1, 0]$

10. Függvénysorok konvergencia-tartománya.
Abszolút és egyenletes konvergencia

- 220-229. Állapítsuk meg az alábbi függvénysorok konvergencia-tartományát és határozzuk meg az összegfüggvényt.

* 220. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n$

221. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$

$$222. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin x} \right)^n$$

$$223. \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{tg} 5x)^n$$

$$224. \sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$$

$$225. \sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$$

$$226. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n$$

$$227. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)^n$$

$$228. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n (x^2 + 1)^n}$$

- 229-235. Állapítsuk meg az alábbi sorok
 a) konvergencia-tartományát,
 b) abszolút konvergencia-tartományát.

$$229. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}$$

$$230. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 3^n}$$

$$231. \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$$

$$232. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^n}{n}$$

$$233. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{x} \right)^n$$

$$234. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n$$

$$235. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x} \right)^n$$

- 236-240. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergensek-e a megadott intervallumban?

$$\boxed{236.} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin x}{2^n} \quad (-\infty, +\infty)$$

$$\boxed{237.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (-1, 1)$$

$$238. \quad \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-nx} \quad (0, +\infty)$$

$$* \quad 239. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} \quad [1, +\infty)$$

$$240. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 + x^2} \quad (-\infty, +\infty)$$

$$* \quad 241. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} \quad (0, 1)$$

242-243. Állapítsuk meg az alábbi függvénysorok

a) konvergencia-tartományát,

b) összegfüggvényét,

c) egyenletes konvergencia-tartományát.

$$242. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$$

$$243. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$$

$\boxed{244.}$ Igazoljuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ függvénysor egyenletesen konvergens a } (-\infty,$$

$+\infty)$ intervallumon, de nem abszolút konvergens x egyetlen értékénél sem.

245.

Igazoljuk, hogy az alábbi függvénysor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \text{ abszolút konvergens minden } x \in (-\infty, +\infty) \text{ -re,}$$

de nem egyenletesen konvergens pl. a $[0, 1]$ intervallumban.

246-257. Állapítsuk meg az alábbi hatványsorok konvergencia-tartományát!

246.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

247.

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

248.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

249.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!(x-5)^k$$

250.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$$

251.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3x)^n$$

252.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$$

253.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{n}\right)^n$$

254.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

255.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k \cdot 4^k}$$

256.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k \cdot 4^k}$$

257.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{\sqrt{k}}$$

258.

Tekintsük a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ sort. Igazoljuk, hogy ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R \text{ létezik (lehet } R = 0 \text{ vagy } R = \infty \text{ is), akkor}$$

R a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergencia intervallumának a sugara.

259-260. Állapítsuk meg az alábbi sorok konvergencia-intervallumának a sugarát:

259. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$ 260. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

261. A 259. feladat eredményének felhasználásával igazoljuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

11. Függvények hatványsorba fejtése

262-293. Állítsuk elő az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó hatványsorát – ha lehet, többféle módszerrel is – és állapítsuk meg a hatványsor konvergencia-tartományát.

262.	$\cos 5x$	* 263.	$\sin x \cos x$
264.	$\cos \sqrt{x}$	265.	$\cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
266.	$\sin(x + a)$	("a" tetszőlegesen valós szám).	
* 267.	$\sin^2 x$	268.	$\cos^2 x$
269.	e^{-x^2}	270.	$\sqrt[3]{e^x}$
271.	a^x	(a > 0, a ≠ 1)	
272.	$\operatorname{sh} 2x$	273.	$\operatorname{sh}^2 x$
274.	$\operatorname{ch}^2 x$	275.	$(1 + x)^3$

- | | | | |
|--------|-----------------------------|--------|--------------------------------|
| 276. | $(1+x)^{-3}$ | 277. | $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ |
| 278. | $\frac{1}{1+x}$ | 279. | $\frac{1}{1-x^2}$ |
| 280. | $\frac{x}{1+x^2}$ | * 281. | $\frac{1}{(1-x)^2}$ |
| 282. | $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ | * 283. | $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ |
| 284. | $\sqrt[3]{8+x}$ | * 285. | $\ln(1-x)$ |
| * 286. | $\ln(1-x^2)$ | 287. | $\ln(1+x^2)$ |
| * 288. | $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ | * 289. | $\arccos x$ |
| 290. | $\arcsin 2x$ | 291. | $\operatorname{arctg} x$ |
| 292. | $\operatorname{arsh} x$ | 293. | $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ |

294-306. Írjuk fel az alábbi függvények megadott x_0 helyhez tartozó Taylor-sorát és állapítsuk meg a sor konvergencia-tartományát.

$$294. \quad \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$295. \quad \sin x \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$296. \quad \sin x \cos x \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$$

297. e^x $x_0 = 1$
298. $\ln x$ $x_0 = 1$
299. $\ln x$ $x_0 = e$
- * 300. $2x^3 - x$ $x_0 = \frac{1}{2}$
301. $\frac{x+1}{x+3}$ $x_0 = -2$
302. $\frac{x+1}{x+3}$ $x_0 = -1$
303. $\sqrt{1+x}$ $x_0 = 3$
304. $\frac{1}{1+x}$ $x_0 = 2$
305. $\frac{1}{1+x}$ $x_0 = -2$
306. $\frac{1}{1+x}$ $x_0 = c \quad (c \neq -1)$

307.

Igazoljuk, hogy páros függvény $x_0=0$ körüli Taylor sorában x páratlan kitevőjű hatványainak együttthatói zérusok, páratlan függvény esetén pedig x páros kitevőjű hatványainak együttthatói nullák.

12. Műveletek hatványsorokkal

- 308-310. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia-tartománya $(-R, R)$. Rendezzük hatványsorba az alábbi szorzatokat és állapítsuk meg az így nyert sor konvergencia-intervallumát:

$$308. \quad (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$309. \quad (1+x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$310. \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)$$

* 311. Adjuk meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó hatványsorát. Állapítsuk meg a konvergencia-intervallumot is!

$$a) \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)^1 \quad b) \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)^n \quad c) \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)^m$$

$$d) \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(m)} \quad m \geq 2 \text{ egész}$$

$$e) \quad \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

312-316. Rendezzük hatványsorba az alábbi szorzatokat és állapítsuk meg, hogy az eredményül kapott sor milyen függvényt állít elő és milyen konvergencia-intervallumban?

$$* \quad 312. \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^2 \quad 313. \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^3$$

$$314. \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^4$$

$$* \quad 315. \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)^m \quad m \geq 2, \text{ egész}$$

$$* \quad 316. \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1}{n} x^n \right]^2$$

* 317. Igazoljuk, hogy

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{b}{k} x^k \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{a+b}{r} x^r$$

318-319. Legyen a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia-intervalluma $(-R, R)$. Fejtsük hatványsorba az alábbi függvényeket és állapítsuk meg az eredményül kapott sor konvergencia-intervallumát.

$$318. \quad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{k=0}^{\infty} x^k}$$

$$319. \quad \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{1-x}$$

320-324. Adjuk meg az alábbi függvények $x=0$ -körüli hatványsorának ötödfoku részletösszegét.

$$320. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$321. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

$$322. \quad \operatorname{tg} x \qquad \qquad \qquad 323. \quad \operatorname{th} x$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh}^3 x}{x^2} & \text{ha } x \neq 0 \\ 1 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

13. Sorfejtések alkalmazásai; hibabecslés

325-333. Állapítsuk meg az alábbi határértékeket a megfelelő hatványsorok segítségével:

$$\boxed{325.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \quad * \quad 326. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$327. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$328. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$329. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} x} \quad 330. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sh} x}{x \operatorname{sh} x}$$

$$331. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$$

$$332. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{x^2 + 1} - \operatorname{arsh} x}{x^3}$$

A hatványsorok felhasználhatók függvényértékek közelítő meghatározására:

a függvényt Taylor-sorának n -edik szeletével (Taylor-polinom) helyettesítjük. Az ily módon elkövetett hibát becsülhetjük a Lagrange-féle maradéktag segítségével, vagy a maradéksor majorizálásával. Erre vonatkozó példák megtalálhatók a Matematikai Példatár I-II. kötetében (1001-1026 feladatok).

További feladatok:

333-339. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvényeket $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorok

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) másodfoku} \\ \text{b) negyedfoku} \end{array} \right\} \text{részletösszege}$$

milyen abszolút hibakorláttal közelíti meg az $|x| < \frac{1}{2}$ intervallumon?

Adjuk meg a közelítés %-os hibáját $x_1 = \frac{1}{2}$ -nél.

333. $y = e^{x^2}$

334. $y = e^{-x^2}$

335. $y = \operatorname{sh} x$

336. $y = \ln(1+x)$

337. $y = \operatorname{arctg} x$

338-344. Határozzuk meg az alábbi függvényértékeket 3 tizedes pontossággal:

338. $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$

339. $\operatorname{arc} \sin 0,5$

340. $\frac{1}{1,02}$

341. $\frac{1}{0,98}$

342. $\sqrt[3]{1,02}$

* 343. $\sqrt[4]{80}$

344. $\sqrt[5]{30}$

* 345. Milyen x értékig közelíti meg $\sin x$ -et a $T_1(x) = x$ Taylor-polinomja

a) legfeljebb 1%-os hibával?

b) legfeljebb 0,1%-os hibával.

* 346. Milyen intervallumban közelíti meg a $\operatorname{ch} x$ függvényt $T_4(x)$ ($x_0 = 0$ körüli) Taylor-polinomja 0,1%-nál kisebb hibával?

347-350. Határozzuk meg az alábbi integrálokat 3 tizedes pontossággal: ($5 \cdot 10^{-4}$ -nél kisebb hibával!)

347. $\int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$

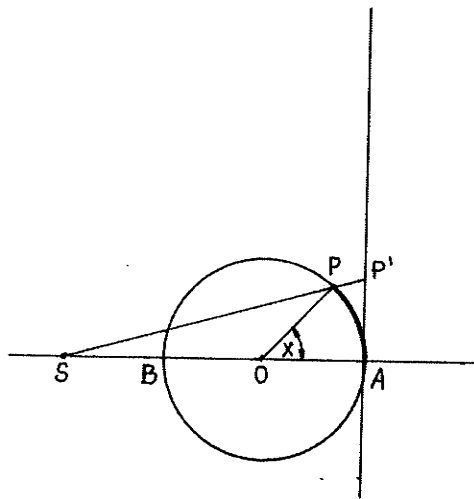
348. $\int_0^1 \sin x^2 dx$

$$349. \int_0^{0,2} \cos \sqrt{x} \, dx$$

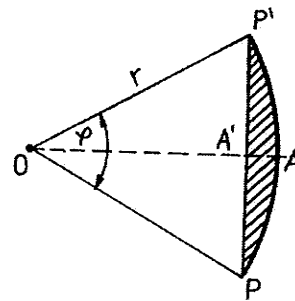
$$350. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$$

351.

Az \widehat{AP} körívvel közelítőleg egyenlő hosszúságu egyenes szakaszt szerkeszthetünk úgy, hogy a kör AB átmérőjét (l. az ábrát) egy sugárnyi távolsággal meghosszabbítjuk és a kapott S pontot P-vel összekötjük. Az SP egyenes a kör A-hoz húzott érintőjét egy olyan P' pontban metszi, amelyre $\widehat{AP} \approx \widehat{AP}'$. Becsüljük meg ezen közelítés relatív hibáját, ha az AOP $\varphi \leq 1$ radián.



351. ábra



352. ábra

352.

Adjunk a φ nyílásszögű r sugaru körszelet területére közelítő formulát és adjunk becslést a közelítés %-os hibájára.

14. Fourier-sorok

353-356.

Igazoljuk, hogy az alábbi függvények ortogonális függvényrendszer alkotnak a megadott intervallumon:

353.

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots \quad (0, \pi)$$

*

354.

$$\sin ax, \sin 2ax, \sin 3ax, \dots, \sin nax, \dots \quad \left(0, \frac{\pi}{a}\right)$$

("a" tetszőleges valós szám, $a \neq 0$).

$$355. \quad 1, \cos \frac{\pi}{p} x, \cos \frac{2\pi}{p} x, \dots, \cos \frac{n\pi}{p} x \dots \quad (0, p)$$

("p" tetszőleges valós szám, $p \neq 0$)

$$356. \quad 1, \cos \frac{\pi}{p} x, \sin \frac{\pi}{p} x, \cos \frac{2\pi}{p} x, \sin \frac{2\pi}{p} x, \dots$$

$$\dots, \cos \frac{n\pi}{p} x, \sin \frac{n\pi}{p} x, \dots$$

a $(-p, p)$ intervallumon ("p" tetszőleges valós szám, $p \neq 0$)

357.

Legyen $f(x) = x$ ha $-\pi < x \leq \pi$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$
($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

- ábrázoljuk f -et,
- írjuk fel a Fourier-sorát,
- ábrázoljuk f -nek és az

$S_2(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x$ részletösszeg függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumra való leszűkítését.

358.

Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x \leq 0 \\ \pi & \text{ha } 0 < x \leq \pi \end{cases}$ és $f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

- ábrázoljuk f -et,
- határozzuk meg f Fourier-sorát.
- ábrázoljuk f -nek továbbá az

$$S_1(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x \text{ és az}$$

$$S_2(x) = S_1(x) + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x$$

részletösszeg függvényeknek a $[-\pi, \pi]$ intervallumra való leszűkítését.

359-361.

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket és határozzuk meg a Fourier-sorukat (az alábbiakban $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ tetszőleges egész szám)

$$\boxed{359.} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi \leq x < 0 \\ x & \text{ha } 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

$$360. \quad f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{ha } -\pi < x \leq 0 \\ x & \text{ha } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

$$361. \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ -x & \text{ha } \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \quad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

362-374. Határozzuk meg az alábbi függvények Fourier-sorát ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$362. \quad f(x) = x^2 \quad \text{ha } -\pi \leq x < \pi \quad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

$$363. \quad f(x) = x^2 \quad 0 < x \leq 2\pi \quad \text{és } f(x + 2k\pi) = f(x)$$

$$364. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x \leq 0 \\ x^2 & \text{ha } 0 < x \leq \pi \end{cases} \quad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

$$365. \quad f(x) = |\sin x|$$

$$366. \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{ha } 0 \leq x < \pi \\ 0 & \text{ha } \pi \leq x < 2\pi \end{cases} \quad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

$$367. \quad f(x) = \sin^2 x$$

$$368. \quad f(x) = \sin^2 x \cos 2x \quad 369. \quad f(x) = \sin^4 x$$

$$370. \quad f(x) = e^x \quad \text{ha } 0 < x \leq 2\pi \quad \text{és } f(x + 2k\pi) \equiv f(x)$$

$$\boxed{371.} \quad f(x) = x \quad \text{ha } 0 < x \leq 1 \quad \text{és } f(x + k) \equiv f(x)$$

372. $f(x) = x^2$ ha $-1 < x \leq 1$ és $f(x + 2k) \equiv f(x)$

373. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{ha } -2 \leq x < -1 \\ x & \text{ha } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{ha } 1 \leq x < 2 \end{cases}$ és $f(x + 4k) \equiv f(x)$

* 374. $f(x) = x - [x]$

375. a) Állapítsuk meg, hogy mennyi lesz a 363. feladatban szereplő f függvény Fourier-sorának összege $x_0 = 0$ -nál.

b) az a)-beli eredmény felhasználásával határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergencia numerikus sor összegét.

376-377. Válasszuk ki a 357-374. feladatokban szereplő Fourier-sorok közül azokat, amelyek felhasználhatók az alábbi konvergencia numerikus sorok összegének megállapítására és határozzuk meg ezen sor-összegeket.

376. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$

377. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

378. Legyen $\varphi(x) = x$ ha $0 < x \leq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ -nek olyan - lehető legkisebb periódusa - $(-\infty, +\infty)$ -re való kiterjesztését, f -et, hogy f páratlan függvény legyen. Határozzuk meg f Fourier-sorát.

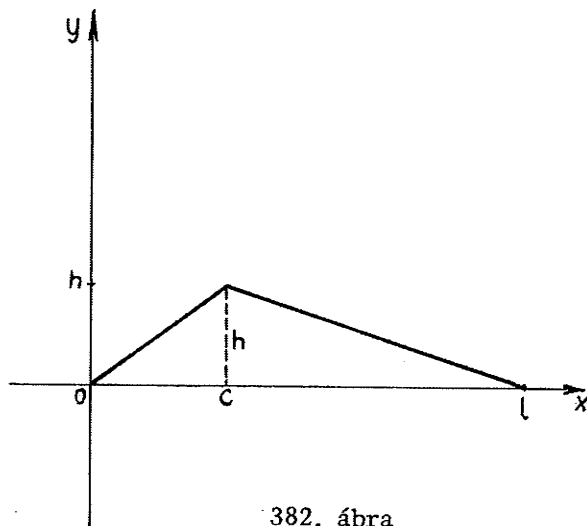
379. Legyen $\varphi(x) = x$ ha $0 < x \leq 2$. Adjuk meg és ábrázoljuk φ -nek olyan - lehető legkisebb periódusa - $(-\infty, +\infty)$ -re való kiterjesztését, f -et, hogy f páros függvény legyen. Határozzuk meg f Fourier-sorát.

380-382. Állítsuk elő az alábbi függvényeket a megadott intervallumban tiszta szinuszos Fourier-sor segítségével.

380. $\cos x$ $0 < x \leq \pi$

381. $x(\pi - x)$ $0 < x \leq \pi$

382. Az a függvény, amelynek grafikonja az ábrán látható
 $0 \leq x < l$



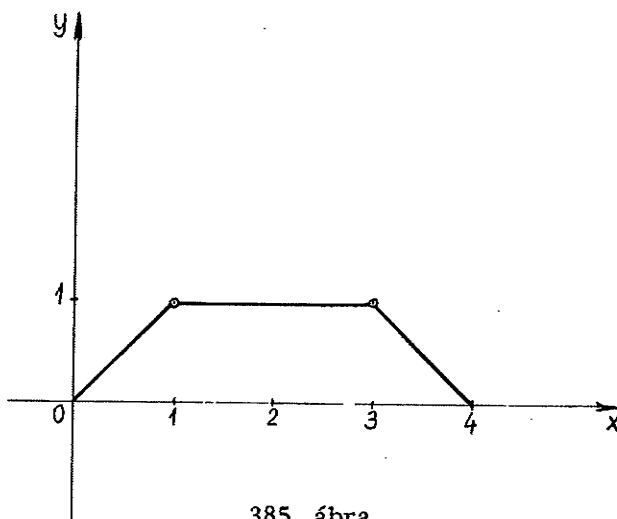
382. ábra

- 383-385. Állítsuk elő az alábbi függvényeket a megadott intervallumban tiszta koszinuszos Fourier sor segítségével.

383. $\sin x$ $0 < x \leq \pi$

384. $x(\pi - x)$ $0 < x \leq \pi$

385. az a függvény, amelynek grafikonja az ábrán látható



385. ábra

- * 386. Léteznek-e olyan $a_0, a_2, a_3, \dots, b_1, b_2, \dots, b_3, \dots$ számok, amelyekre a

$$\cos x = \frac{a_0}{2} + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \dots \text{ egyenlőség,}$$

- a) minden $0 < x < 2\pi$ -re
 b) minden $0 < x < \pi$ -re
- fennálljon?

Ha igen, úgy határozzuk meg ezen együtthatókat!

- 387.** Az $f(x)$ 2π szerint periodikus integrálható függvény Fourier együtthatói ismertek ($a_n, b_n, n \in \mathbb{Z}$). Határozzuk meg az $f(x)$ -ből eltolással származó $f(x+c)$ függvény Fourier együtthatóit.

388. Mít állíthatunk az $f(x)$ függvény Fourier-együtthatóiról, ha
 a) $f(x+\pi) \equiv f(x)$
 b) $f(x+\pi) \equiv -f(x)$

- 389.** Igazoljuk, hogy ha f 2π szerint periodikus, páratlan és görbéje szimmetrikus az $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesre, akkor Fourier-sora

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} \sin(2k+1)x \text{ alakú.}$$

390. Hogyan kell a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumon megadott integrálható f függvényt kiterjeszteni a $(-\pi, \pi)$ intervallumra, hogy Fourier-sora

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

alakú legyen?

391. Mi a kapcsolat f és g Fourier-együtthatói között, ha
 a) $f(-x) = g(x)$
 b) $f(-x) = -g(x)$

392. Határozzuk meg a b_1, b_2, b_5, \dots együtthatókat úgy, hogy az

$$x = b_1 \sin x + b_3 \sin 3x + b_5 \sin 5x + \dots$$

egyenlőség minden $x \in (0, h)$ -ra fennálljon. ($h > 0$). Állapítsuk meg a legnagyobb h értéket, amelyre a feladat megoldható.



Megoldások

1. $\frac{1}{2}$ hányadosú mértani sor:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{\underline{2}}$$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{-20}{3}}}$

3. $s_n = \frac{4}{9} + (-1)^n \frac{4}{9} \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1}$; az $\{s_n\}$ sorozatnak nincs határértéke.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{\underline{12}}$

5. Számtani sor;

$$s_n = (n+1) \left(a + \frac{n}{2} d\right) \text{ az } \{s_n\} \text{ sorozat } \underline{\underline{\text{divergens}}}$$

6. Felhasználva, hogy

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{\underline{1}}$$

7. Használjuk fel, hogy

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

8. Bontsuk $a_k = \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ -et részlet törttekre!

$$a_k = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4} \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3(k+1)+1} \right]$$

Ennek alapján

$$s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3n+4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

10. $s_n = \frac{1}{ab} - \frac{1}{b[a+(n+1)b]}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{ab}$

11-14.

Megjegyzések:

a) a megoldásokban szereplő \implies az implikáció, \iff

és \Updownarrow pedig az ekvivalencia jele

b) Definíció szerint $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^n a_k = s - s_n$.

11. $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$ (1 az 1. feladatot)

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$$



$$2^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad (\text{az } \ln x \text{ függvény monoton növekedő})$$



$$n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon}$$



$$n > \frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2}; \text{ a keresett küszöbszám ennek az } \underline{\text{egész része}}$$

vagyis

$$n > N_0 = \left[\frac{-\ln \varepsilon}{\ln 2} \right] \Rightarrow |h_n| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

12. $h_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}$ (6. feladat)

$$N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$$

13. $h_n = \frac{1}{b[a + (n+1)b]}$ (1. 10. feladatot)

$$N_0(\varepsilon) = \frac{1}{b^2 \varepsilon} - \frac{a}{b} - 1$$

14.
$$N_0(\varepsilon) = \frac{\ln 5\varepsilon - \ln 144}{\ln 3 - \ln 8} - 1$$

15. Használjuk fel, hogy

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right]$$

és mutassuk meg, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ létezik $\left(= \frac{3}{4} \right)$.

16.
$$s = \frac{11}{6}$$

17. h_r -ből h_n -et $n < r$ esetén véges számú tag hozzávételével, $n > r$ esetén véges számú tag elhagyásával nyerjük, ez pedig a konvergencia tényén nem változtat. h_r -ből az eredeti sort a véges s_r hozzáadásával nyerjük, tehát a sor konvergens és így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \quad (\text{Jegyzet IV. kötet 1.8. tétel}).$$

18. Igaz, mert az eredeti sor részletösszegei az új sor konvergens részletösszeg-sorozatának egy részsorozatát alkotják és konvergens sorozatnak minden részsorozata konvergens.

19. Nem igaz (l. 16. feladat megoldását; divergens sorozatnak lehet konvergens részsorozata).

Példa: $A(c - c) + (c - c) + (c - c) + \dots$ ($c \in \mathbb{R}$) sor konvergens, de a belőle zárójelek elhagyásával nyert $c - c + c - c + \dots$ sor $c \neq 0$ esetén divergens.

20. Nem igaz.

21. Igaz.

22. Igaz. Mivel a sor pozitív tagu, részletösszegei monoton növekednek, tehát a belőlük alkotott sorozat vagy konvergens, vagy divergál a $+\infty$ -hez. Ez utóbbi eset azonban nem állhat fenn, mert egy végtelenhez divergáló sorozatnak minden részsorozata divergens, a részletösszeg sorozatnak pedig van egy konvergens részsorozata: a zárójelek belkötésével nyert új sor részletösszegeiből alkotott sorozat.