BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKA PÉLDATÁR

I. kötet

FELADATOK

Szerkesztő:
Csató Tamásné

Műegyetemi Kiadó, 2004.

(Kilencedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **050667**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 26,6 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 099/04

TARTALOMJEGYZÉK

1. ALGEBRA

11. EGYENLŐTLENSÉGEK

Oldjuk meg a következő algebrai egyenlőtlenségeket, és ábrázoljuk a megoldást a számegyenesen.

1101. $5x + 3 \leqq 2 - 4x$

1102. $\frac{x - 5}{2} - \frac{5}{6} \leqq 1 - \frac{2 - 5x}{3}$

1103. $4 - 3\left(\frac{2 - 5x}{4} - 2\right) < x$

1104. $\frac{x - a}{3} + 4 > 1 - a$

1105. $0 < 4 - 7x < 1$

1106. $\frac{5x - 1}{4} \leqq x + 1 < -2 + 2x$

1107. $(x - 4)(x - 6) < 0$

1108. $(3x + 6)(5 - 3x) \leqq 0$

1109. $(2x - 3)(4x - 7) > 0$

1110. $-3(x + 1)(x + 2) > 0$

1111. $x^2 - 5x + 6 > 0$

1112. $(5x - 1)(3x - 1) < (6x + 1)(3x - 1)$

1113. $a^2x^2 - 2x - 5 \leqq 0$

1114. $x^4 - 5x^2 + 4 > 0$

1115. $(x + 1)(x + 2)(x + 3) > 0$

1116. $(x - 3)(x^2 - 4x - 12) > 0$

1117. $(5x + 1)(-x^2 + 9) < 0$

1118. $(x - 2)^2 (x^2 - 5x - 6) < 0$

1119. $-(3x - 2)^{2n} (x^3 - 4x^2 - 21x) \geqq 0$ ($n \geqq 0$ egész)

1120. $1 < x^2 < 4$

1121. $4 < (2x + 3)^2 < 9$

1122. $\frac{5}{4x+3} < 0$

1123. $\frac{5}{4x - 8} < 2$

1124. $\frac{4x - 1}{4x + 1} < -1$

1125. $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x + 3} < x - 2$

1126. $-3 < \frac{5}{4 - x} < -1$

1127. $-1 < \frac{x - 1}{3 - 2x} < 2$

1128 $\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 6x - 7} > 0$

<u>Oldjuk meg a következő exponenciális és logaritmikus egyenlőtlenségeket</u>

1129 $\frac{1}{3^x} \geqq 9$

1130. $3^x > 4^x$

1131. $2^{x+1} - 5 \cdot 2^{x-2} < 3$

1132. $4^{x+1} + 4^{-x+2} < 65$

1133. $(3^x + 2)(5 - 2^x) < 0$

1134. $0 < 10 - 5^x < 9$

1135. $0 < \frac{2^x}{1-2^x} < 1$

1136. $\lg(x+1) > 1$

1137. ${}^{2}\log(3x-1) \leq -1$

1138. ${}^{5}\log\frac{4x-1}{3-2x} > 0$

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenlőtlenségeket

1139. $\sin x > \frac{1}{2}$

1140. $\cos x < -\frac{1}{2}$

1141. $\operatorname{tg} x \geq 1$

1142. $\sin x . \operatorname{tg} x > \frac{3}{2}$

1143. $0 < \sin 2x < 1$

1144. $-1 < \cos\frac{x}{3} \leq 0$

Oldjuk meg a következő vegyes feladatokat

1145. $|2x+3| < 2$

1146. $|2-x^2| > 3$

1147. $|(2x-6)(3x-3)| < 6$

1148. $|x+1| + |4-x| < 5$

1149. $x + |x| < 4$

1150. $x - |2x-3| < 0$

1151. $\sin|2x-4| < \frac{\sqrt{3}}{2}$

1152. $\left|\frac{5^x}{5-5^x}\right| < 5$

1153. $-3 < \lg\left|\frac{x}{x+1}\right| < -2$

1154. $\frac{1}{2} < |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

12. VEKTORALGEBRA

I. Oldjuk meg a következő feladatokat anélkül, hogy a bennük szereplő vektorokat koordinátákra bontanánk.

1201. Határozzuk meg szükséges és elégséges feltételét annak, hogy az α és β számok minden értékére fennálljon:

$$\alpha \bar{a} + \beta \bar{b} \perp \beta \bar{a} - \alpha \bar{b} .$$

1202. Mi jellemzi azokat a $\bar{b}$ vektorokat, melyeknek $\bar{a}$-ra való vetülete egyenlő $\bar{a}$-nak $\bar{b}$-re való vetületével?

1203.* Igazoljuk, hogy

$$|\bar{a} + \bar{b}| \leq |\bar{a}| + |\bar{b}| \text{ (geometriailag).}$$

1204. Bizonyitsuk be a háromszögekre vonatkozó szinusz-tételt.

1205. Bizonyitsuk be a háromszögekre vonatkozó koszinusz-tételt.

1206. Igazoljuk az

$$(\bar{a} \times \bar{b})^2 + (\bar{a} \cdot \bar{b})^2 = \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2$$

azonosságot.

1207. Igazoljuk, hogy

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = 2\bar{a}^2 + 2\bar{b}^2 .$$

1208. Bizonyitsuk be az alábbi összefüggést:

$$|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}| \leq |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}| .$$

Milyen esetben érvényes az egyenlőség?

1209. Mutassuk ki, hogy ha

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c} \times \bar{d} \quad \text{és}$$

$$\bar{a} \times \bar{c} = \bar{b} \times \bar{d}, \quad \text{akkor}$$

$$\bar{a} - \bar{d} \parallel \bar{b} - \bar{c} .$$

1210. Igazoljuk, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást.

1211.* Bizonyitsuk be, hogy a háromszög sulyvonalai egy pontban metszik egymást és ez a pont (sulypont) mindegyik sulyvonalat 2:1 arányban osztja.

1212. Bizonyitsuk be, hogy egy tetszőleges háromszög sulyvonalaival, mint oldalakkal háromszög szerkeszthető.

1213. Igazoljuk, hogy a háromszög sulyvonalainak négyzetösszege ugy aránylik az oldalak négyzetösszegéhez, mint 3:4.

1214. Fejezzük ki a háromszög területét a csucsaiba mutató helyvektorokkal.

1215. Mutassuk ki, hogy bármely háromszögben

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4t}$$

ahol t a háromszög területének, a, b, c a háromszög oldalainak, α, β, γ a megfelelő szembenfekvő szögeknek mérőszáma.

1216. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a tetraéder magasságai egy ponton menjenek át?

1217. Irjuk fel a kör egyenletét, ha ismerjük egyik átmérője két végpontját. $[A(\bar{r}_1)\,;\ B(\bar{r}_2)]$.

1218. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(\bar{r}_1)$ ponton és egyenlő távol van a $B(\bar{r}_2)$ és $C(\bar{r}_3)$ pontoktól.

1219. Adva van két pont: $A(\bar{r}_1)$ és $B(\bar{r}_2)$. Keressük meg azon $P(\bar{r})$ pontok mértani helyét, amelyekre nézve az $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ skalárszorzat értéke c (konstans).

13. ANALITIKUS GEOMETRIA

1301. Számitsuk ki a $P_1(2,\ 0,\ 3)$ pontnak a $P_2(-5,\ 1,\ 7)$ ponttól vett távolságát.

1302. Határozzuk meg azt a pontot, amely a $P_1(2,\ 0,\ 3)$, és $P_2(-5,\ 1,\ 7)$ pontokat összekötő egyenesszakaszt 7:2 arányban osztja.

1303. Határozzuk meg a $P_1(2,\ 0,\ 3)$ pontnak a $P_2(-5,\ 1,\ 7)$ pontra vett tükörképét.

1304. $P_1(1,\ 1)$; $P_2(2,2)$; $P_3\ (3,\ -1)$ egy paralelogramma három egymás után következő csucsa. Keressük meg a negyedik csucspont koordinátáit.

1305. $$\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$$

$$\bar{b} = 5\bar{i} - \bar{j} + z\bar{k}$$

Határozzuk meg z értékét ugy, hogy $\bar{a}$ és $\bar{b}$ merőlegesek legyenek egymásra.

1306. Határozzuk meg az

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k} \quad \text{és}$$

$$\bar{b} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$$

vektorok bezárta szöget, továbbá $\bar{a}$ vetületét $\bar{b}$-re.

1307. Adottak A(3, 5); B (6, -2) pontok. Számitsuk ki az $\overrightarrow{AB}$ vektor vetületét a koordinátatengelynek az első negyedében fekvő szögfelezőjére.

1308. Adott négy pont: A (1, -2, 3); B (4, -4, 3); C(2, 4, 3) és D (8, 6, 6). Határozzuk meg az $\overline{AB}$ vektornak a $\overline{CD}$ irányába eső vetületét.

1309. Határozzuk meg az $\bar{a} = 5\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$ vektor irányába mutató egységvektort és az $\bar{a}$ vektor irányszögeit.

1310. Irjuk fel az

$$\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 8\bar{k} \quad \text{és}$$
$$\bar{b} = \bar{i} - 9\bar{j} + 3\bar{k}$$

vektorok egymásra eső vetületét.

1311. Mikor egyenlő két vektornak egymásra eső vetülete?

1312. Bontsuk fel az

$$\bar{a} = \bar{j} + 6\bar{k} \quad \text{vektort}$$
$$\bar{c} = 3\bar{i} + 4\bar{k} \quad \text{irányu}$$

és $\bar{c}$-re merőleges komponensekre.

1313.* Bontsuk fel a

$$\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k} \quad \text{vektort.}$$
$$\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k},$$
$$\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k},$$
$$\bar{c} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$$

vektorok irányába eső összetevők összegére.

1314. Bontsuk fel a

$$\bar{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k} \quad \text{vektort}$$

$$\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k},$$
$$\bar{b} = -2\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k},$$
$$\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{k} \quad \text{vektorok}$$

irányába eső összetevők összegére.

1315. Az alábbi vektor-párok közül melyik lehet rombusznak, vagy téglalapnak két szomszédos oldalát megadó vektora

A: $\bar{a}\,[3,\ 5,\ -4]$, $\bar{b}\,[2,\ -10,\ -11]$

B: $\bar{c}\,[1,\ -10,\ -7]$, $\bar{d}\,[2,\ 5,\ -11]$

1316. Irjunk fel egy olyan 4 egységnyi hosszuságu vektort, amely párhuzamos az $\bar{a} = 3\bar{j} + 5\bar{k}$ vektorral.

1317. Határozzuk meg az

$$\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k} \quad \text{és}$$
$$\bar{b} = 4\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$$

vektorok által kifeszitett paralelogramma területét.

1318. Számitsuk ki a

$$\bar{v}_1 = 3\bar{i} + 4\bar{j} + 12\,\bar{k},$$
$$\bar{v}_2 = 10\bar{i} + 5\bar{j} - 5\bar{k},$$
$$\bar{v}_3 = -9\bar{i} + 2\bar{j} + 6\bar{k}$$

vektorok által kifeszitett paralelepipedon köbtartalmát.

1319. Számitsuk ki az

A (5, 4, 0)

B (0, 5, -1)

C (2, 0, -2)

csucspontu háromszög területét.

1320. Egy háromszög csucspontjai:

A (1, 5, 6)
B (-2, -1, 0)
C (2, 2, 1).

Számitsuk ki az AC oldalhoz tartozó magasságot.

1321. Mekkora a háromszög kerülete, ha két csucspontja: P_1 (2, 3, 5); P_2 (4, -3, 0), sulypontja pedig: S (3, 2, 1) ?

1322. A koordinátarendszer kezdőpontját kössük össze a P_1 (10, -5, 10); P_2(-11, -2, 10); P_3 (-2, -14, -5) pontokkal. Bizonyitsuk be, hogy ezek egy kocka élei, és számitsuk ki a kocka térfogatát.

1323. Számitsuk ki a tetraéder térfogatát, ha csucspontjaink koordinátái:

A (3, -1, -1)
B (5, -2, 3)
C (4, 0, -2)
D (5, 0, 1).

1324. Egy sikban van-e a következő négy pont?

P_1 (2, 0, 0)
P_2 (3, -5, -5)
P_3 (4, 4, 3)
P_4 (7, 3, 1)

1325. Egy tetraéder csucspontjai: P_1 (5, 4, -2); P_2 (-1, 5, 1); P_3 (2, 2, 4); P_4 (3, 1, -2).

a) Mennyi a tetraéder $\overrightarrow{P_1P_2}$ élének hossza?
b) Mennyi a tetraéder térfogata?
c) Mennyi a $P_1P_2P_3$ háromszög területe?
d) Milyen irányu a P_2-ből huzott magasság?

1326. Milyen szög alatt hajlik az

$$x = 2t - 5$$
$$y = -t + 1$$
$$z = 3t - 6$$

egyenes a

$$2x + y - 3z + 5 = 0$$

sikhoz?

1327. Mi a hajlásszöge a következő egyeneseknek?

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2y}{5} = -\frac{z+1}{3} \quad \text{és}$$

$$x = t$$
$$y = 2t - 3$$
$$z = -5$$

1328. Mekkora távolságra van a $P(2, 4, -3)$ pont az

$$\frac{x-1}{5} = \frac{2-y}{3} = -z \quad \text{egyenestől?}$$

1329. Mi annak az egyenesnek az egyenletrendszere, amely átmegy a $P_0(2, -3, 5)$ ponton és párhuzamos a $\bar{v}(4, 1, -2)$ vektorral?

1330. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a $P_0(5, 1, -8)$ ponton megy át és párhuzamos a z tengellyel.

1331. Állapitsuk meg a

$$\frac{2x+3}{5} = -y = \frac{1-4z}{7}$$

egyenes egy irányvektorát, valamint egy pontjának koordinátáit.

1332. Határozzuk meg a $P_0(5, -2)$ pontra illeszkedő és a

$$2x - 3y = 4$$

egyenesre merőleges [XY] sikban fekvő egyenes egyenletét.

1333. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P_0(5, 7, 1)$ pontra illeszkedik és párhuzamos a következő két sikkal?

$$2x + y - z + 7 = 0$$
$$x - 8y + 2z - 3 = 0.$$

1334. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P_0(2, 4, -3)$ pontra illeszkedik és merőleges az alábbi pontokkal megadott sikra?

$$P_1\ (4, 7, -2)$$
$$P_2\ (1, 0, 9)$$
$$P_3\ (0, 0, 1).$$

1335. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely az origón megy át; és az [xy] koordináta-sikhoz 45^{0}, az [yz] koordináta-sikhoz 30^{0} szög alatt hajlik.

1336.* Határozzuk meg a következő sikok metszésvonalának egyenletrendszerét:

$$2x + y - 5z + 3 = 0 \quad \text{és}$$
$$x - y + 2z = 0.$$

1337. Mik az egyenletrendszerei azoknak az egyeneseknek, amelyek benne vannak a

$$-3x + 2y - 5z + 3 = 0 \quad \text{sikban}$$

és merőlegesek az

$$\frac{1 - 2x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{5z}{4} \quad \text{egyenesre?}$$

1338. Egy paralelepipedon egyik csucsa $P_0(4, 3, 1)$, az ebből kiinduló három élvektorai:

$$\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$$
$$\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}$$
$$\bar{c} = -2\bar{i} + \bar{j} + 5\bar{k}$$

Irjuk fel a testátlók egyenletrendszereit.

1339.* Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely a $P_1(-1, 0, 2)$ pontra illeszkedik, az

$$\frac{x - 10}{3} = -\frac{y + 1}{6} = \frac{z - 7}{2}$$

egyenesre merőleges és attól 7 egység távolságra halad?

1340. Mi az egyenletrendszere az

$$x = 4 + t$$
$$y = -1 - t$$
$$z = 10 + 6t$$

egyenes vetületének a

$$3(x - 2) - 2(y - 1) + 4(z + 2) = 0 \quad \text{sikon?}$$

1341. Igazoljuk, hogy az

$$x - 3 = \frac{y - 8}{3} = \frac{z - 3}{4} \quad \text{és}$$

$$4 - x = \frac{9 - y}{2} = \frac{9 - z}{5}$$

egyenesek egy sikban vannak és határozzuk meg metszéspontjuk koordinátáit.

1342. Mi az egyenletrendszere annak az egyenesnek, amely benne fekszik

az $$x = \frac{y + 13}{5} = \frac{5 - z}{3} \quad \text{és}$$

az $$\frac{1 - x}{5} = \frac{y + 8}{3} = z - 2$$

egyenesek sikjában, átmegy metszéspontjukon és felezi hajlásszögüket.

1343. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, mely az origóra illeszkedik és a következő egyeneseket metszi.

$$x - 4 = -\frac{y + 7}{3} = \frac{z - 2}{2} \quad \text{és}$$

$$\frac{5 - x}{3} = \frac{9 - y}{5} = z + 9.$$

1344. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a

$$2x + 4y - z + 5 = 0$$

sikra merőleges és a következő egyeneseket metszi.

$$\frac{x}{2} = -y = z$$

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{5} = \frac{z}{3}.$$

1345. Határozzuk meg λ értékét ugy, hogy a következő egyenesek messék egymást:

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{1 - 2y}{3} = -z$$

$$\frac{x+3}{\lambda} = \frac{2y-3}{4} = 1+z .$$

1346.* Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges és illeszkedik a következő egyenesekre (normáltranszverzális):

$$x = 3 + 2t \qquad x = -1 - 3t$$
$$y = -2t \qquad y = 2 + t$$
$$z = -2 - t \qquad z = 4 + t$$

és határozzuk meg a normáltranszverzális azon szakaszának hosszát, amely az adott egyenesek közé esik.

1347. Egy háromszög csucspontjai: $P_1(1, 1, 1)$; $P_2(5, 1, 4)$; $P_3(3, 3, 2)$. Irjuk fel a P_1 csucsnál levő szög felező egyenesének egyenletrendszerét.

1348. Egy háromszög csucspontjai: $P_1(5, 1, -2)$; $P_2(1, 0, 3)$; $P_3(3, 5, -1)$. Irjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely merőleges a háromszög sikjára és átmegy a háromszög sulypontján.

1349. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a koordinátarendszer kezdőpontját tartalmazza és normálvektora: $\bar{n}[1, 2, 4]$?

1350. Mi az egyenlete annak a siknak, amelynek egy pontja $P_0(-2, 3, 7)$ és amely merőleges az $x = y = z$ egyenesre?

1351. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a $P_0(5, -\frac{3}{2}, 0)$ pontra illeszkedik és párhuzamos a

$$3x - y + \frac{5}{3}z - 1 = 0 \qquad \text{sikkal?}$$

1352. Mi az egyenlete az $[y, z]$ koordinátasiknak?

1353. Határozzuk meg a következő sik metszéspontját:

$$x + y + z = 0$$
$$2x - y + z = 3$$
$$x + y - z = 0.$$

1354. Irjuk fel a $P_1(2, 3, 1)$; $P_2(-4, 2, -5)$; $P_3(0, 1, 0)$ pontokra illeszkedő sik egyenletét.

1355. Mi az egyenlete a $P_0(0, 2, -5)$ pontra illeszkedő és az

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{1-z}{4} \quad \text{és}$$

$$\frac{2x-1}{3} = 2 - y = \frac{z}{2}$$

egyenesekkel párhuzamos siknak?

1356.* Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely illeszkedik a

$$2x + y - 2z + 4 = 0 \quad \text{és}$$

$$2x - 3y + 6z - 5 = 0$$

sikok metszésvonalára és felezi e sikok hajlásszögét.

1357. Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely a $P_1(2, 7, -3)$ pontra és az

$$x = 2t - 1$$

$$y = t + 4$$

$$z = -3t + 2$$

egyenesre illeszkedik.

1358. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a $P_0(2, 1, 6)$ pontra illeszkedik és merőleges a

$$2x + 5y - 3z + 8 = 0$$

$$x - 2y + z - 5 = 0$$

sikokra?

1359. Határozzuk meg a $P_0(2, -1, -2)$ pontra illeszkedő és az

$\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = \frac{5z-1}{6}$ egyenesre merőleges sik egyenletét.

1360. Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely az

$$x = 2 + 3t$$

$$y = -3 + t$$

$$z = 5 - 2t$$

egyenesre merőleges és a döféspont koordinátái: D (-1, -4, 7).

1361. Mi az egyenlete annak a siknak, amely merőleges az $5(x-1)+4y-(z+1)=0$ sikra és tartalmazza a következő sikok metszésvonalát:

$$2x - y + z + 3 = 0$$

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

1362. Határozzuk meg azoknak a sikoknak az egyenletét, amelyek az

$$\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{5} = \frac{z+2}{5}$$

egyenest a koordinátasikokra vetitik.

1363. Mi az egyenlete annak a siknak, amely a $P_1(5, 4, 2)$ és $P_2(1, 3, 4)$ pontokra illeszkedik és egyenlő hosszu darabokat vág le az Y és Z koordinátatengelyek pozitiv feléből.

1364. Egy tetraéder csucspontjai:

A (1, -2, 0)

B (2, 3, 1)

C (-1, 2, 2)

D (3, 1, 4).

Irjuk fel:

a) BCD sik egyenletét,

b) BC élen átmenő, AD éllel párhuzamos sik egyenletét,

c) az A csucspontra illeszkedő és BCD sikkal párhuzamos sik egyenletét.

1365. Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely az X, Y, Z koordinátatengelyeket rendre -4, 5, ill. -7-ben metszi.

1366. Mi az egyenlete annak a siknak, amelyben a következő egyenesek benne vannak?

$$x = 9 + 2t \qquad x = 1 - 5t$$

$$y = 14 + 3t \qquad y = 2 + 4t$$

$$z = -5 - t \qquad z = -1 - 2t.$$

1367. Adva van két egyenes

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z$$

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{2} = -\frac{z}{3}$$

Irjuk fel azoknak a sikoknak az egyenletét, amelyek egy-egy egyenesre illeszkednek és párhuzamosak egymással.

1368. Mi az egyenlete annak a siknak, amely az X tengelyre illeszkedik és amelyből az

$$x + y = 1$$

$$x - z = 1$$

$$2x + y - z = 1$$

sikok egyenlő szárú háromszöget metszenek ki? Hány ilyen sik van?

1369. Az $x + 2y - z + \lambda = 0$ sik egyenletében határozzuk meg λ értékét ugy hogy a sik tartalmazza a

$$2x - y + z = 0$$

$$26x + 2y + 4z + 3 = 0$$

sikok metszésvonalát.

1370. Igazoljuk, hogy az

$$x - 1 = 4 - y = \frac{z-3}{2} \quad \text{és az}$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{7-y}{3} = 4 - z$$

egyenesek egy sikban vannak és irjuk fel a sik egyenletét.

1371. Irjuk fel a $P_1(1, -3, 0)$ és $P_2(3, 7, -4)$ pontokat összekötő egyenesszakaszt merőlegesen felező sik egyenletét.

1372. Irjuk fel az

$$x = 1,$$

$$y = 3 + 3t,$$

$$z = 4 + t,$$

egyenesre illeszkedő és a $P_1(2, 1, 3)$ ponttól egységnyi távolságra haladó sikok egyenleteit.

1373. Határozzuk meg az

$$x + y + z - 7 = 0,$$
$$2x - 3y - z + 3 = 0,$$
$$x - y + z - 5 = 0$$

sikok metszéspontjának a $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(4, 5, 6)$, $P_3(7, 8, 0)$ pontokon átfektetett siktól vett távolságát.

1374. Határozzuk meg a $P_1(1, 5, -3)$ és $P_2(2, 3, -5)$ pontokat összekötő egyenesdarabnak az

$$2x + 3y - 6z = 0$$

sikra való merőleges vetületét.

1375. Határozzuk meg annak a tetraédernek a térfogatát, amelynek egyik csucspontja $P_1(2, 1, 2)$, a többiek pedig a P_1-ből a következő sikokra bocsátott merőlegesen döféspontjai:

$$x - 3y + z - 2 = 0,$$
$$x + y - 3z + 4 = 0,$$
$$x - y + 2z - 6 = 0.$$

1376. Határozzuk meg a következő párhuzamos sikok közti távolságot:

$$2x + y - 3z + 6 = 0$$
$$4x + 2y - 6z - 5 = 0.$$

1377.* Egy háromszög csucspontjainak koordinátái:

$$A(1, 7, 2);\ B(3, 8, 0);\ C(-2, -1, 5).$$

Mik a koordinátái:
a) a magassági pontnak,
b) a körülirható kör középpontjának,
c) a beirható kör középpontjának?

1378. Egy háromszög csucspontjainak koordinátái:

$$A(1, 7, 0);\ B(2, -5, 3);\ C(6, 2, -9).$$

Mi a mértani helye az AB alapon álló, az adott háromszög sikjában fekvő $\underline{k}$-szor akkora területü háromszögek harmadik csucsainak?

1379. Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, amelyek egyenlő távolságra vannak a következő három ponttól:

$$P_1\,(2,\ 2,\ 1)$$
$$P_2\,(8,\ 6,\ 2)$$
$$P_3\,(6,\ 3,\ 5)\ ?$$

1380. Bontsuk fel a $\bar{v}[10,\ 6,\ -8]$ vektort a következő egyenesekkel párhuzamos összetevőkre:

$$\frac{x-1}{2} = y = \frac{1-2z}{3}\ ,$$

$$2x = \frac{1-y}{5} = \frac{1+z}{2}\ ,$$

$$\frac{2x+3}{-3} = \frac{y+5}{4} = -z\ .$$

1381. Határozzuk meg λ értékét ugy, hogy az

$$\bar{r} = \bar{r}_o + \bar{v}_o t \qquad \text{és} \qquad \bar{r}' = \bar{r}_1 + \bar{v}_1 t$$

egyenesek messék egymást:
Az adatok: $\bar{r}_o[1,\ 2,\ 3]$, $\bar{r}_1[4,\ 1,\ -3]$,
$\bar{v}_o[3,\ -1,\lambda]$, $\bar{v}_1[2,\ 0,\ -1]$.

1382. Számitsuk ki a következő egyenesek egymástól való távolságát:

$$\frac{2x-1}{2} = \frac{3-y}{3} = \frac{5z-6}{4} \quad \text{és}$$

$$x = y = z.$$

1383. Adva van három sik:

$$2x + 4y + 3z = 1\ ,$$
$$x + 7y + 4z = 3\ ,$$
$$3x - 5y - z = 2.$$

Van-e olyan vektor, amely mindhárom sikkal párhuzamos és ha igen, melyik az?

1384. Határozzuk meg az X tengelynek azt a pontját, amely egyenlő távol van a következő sikoktól:

$$3(x-1)+2(y+2)-z+6=0,$$
$$-x+2y+3z-1=0.$$

1385. Melyik az $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} = z + 1$ egyenesnek az a pontja, mely egyenlő távolságra van a következő sikoktól?

$$4x + 2y - z + 6 = 0,$$
$$2x - 4y + z - 5 = 0.$$

1386. Mekkora az a távolság, melynek vetülete az

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = -\frac{z}{6}$ egyenesre 2 egység, az

$x = \frac{y-1}{4} = \frac{1-z}{8}$ egyenesre 3 egység, az

$\frac{1-2x}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z+1}{4}$ egyenesre 1 egység?

1387. Tükrözzük a $P_1\,(2, 4, -3)$ pontot a

a) $Q\,(1, 3, 7)$ pontra, az
b) $x = 2y = 2z$ egyenesre és az
c) $x - 2y + 5z = 0$ sikra
és állapitsuk meg a négy pont által meghatározott tetraéder térfogatát.

1388. Adva van a $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ sikban négy pont:

$P_1\,(0, 0\ 3)$; $P_2\,(0, 4, 0)$; $P_3(-6, 0, 0)$; $P_4(-2, 0, 2)$.

Határozzuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely a P_4 ponton megy át és felezi a $P_1P_2P_3$ háromszög területét.

1389.* Egy háromszög csucspontjai:

$P_1(1, 1, 1)$; $P_2(2, 2, 2)$; $P_3(-1, 2, 0)$.

Határozzuk meg annak a siknak az egyenletét, mely az X tengelyre illeszkedik és amelyre nézve a háromszög vetületének területe az eredetinek fele.

1390. Egy tetraéder csucsponjai: $P_1(1, 1, 1)$; $P_2(-1, 1, 1)$; $P_3(1, -1, 1)$; $P_4(1, 1, -1)$. Irjuk fel annak a siknak az egyenletét, amely a $P_2P_3P_4$ sikkal párhuzamos és a tetraédert egyenlő térfogatu részekre osztja.

14. DETERMINÁNSOK

Az alábbi feladatok közül többen előfordul a j betű. Jelentése mindig $\sqrt{-1}$.

Számitsuk ki a következő determinánsok értékét:

1401. $$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

1402. $$\begin{vmatrix} j & j & j \\ j & 2+2j & j \\ j & j & 1+3j \end{vmatrix}$$

1403. $$\begin{vmatrix} 1 & 1+j & 1+2j \\ -1 & -1+j & -1+2j \\ 3 & 3+j & 3+2j \end{vmatrix}$$

1404. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3+j & 4+3j \\ 1 & 3 & 5+j & 7+3j \\ 1 & 4 & 7+j & 10+3j \\ 1 & 1 & 1+j & 1+3j \end{vmatrix}$$

1405. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & 0 \end{vmatrix}$$

1406. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & j & 0 \end{vmatrix}$$

1407. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1-j & j & 1+j \\ -2j & -1 & 2j \end{vmatrix}$$

1408. $$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

1409. $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

1410. $$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$$

1411. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$

1412. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

1413. $\begin{vmatrix} -j & 2j & 2j \\ 2j & -j & 2j \\ 2j & 2j & -j \end{vmatrix}$

Igazoljuk a következő azonosságokat:

1414. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = -2\,(x^3+y^3)$

1415. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = ab$

Számitsuk ki a következő determináns értékét:

1416. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+j & 1 \\ 1 & 1 & 1+3j \end{vmatrix}$

Igazoljuk a következő azonosságokat:

1417. $\begin{vmatrix} b & a & a & a & a & a \\ a & b & a & a & a & a \\ a & a & b & a & a & a \\ a & a & a & b & a & a \\ a & a & a & a & b & a \\ a & a & a & a & a & b \end{vmatrix} = (b+5a)\,(b-a)^5$

1418. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix} = 1 + ab + ad + cd + abcd$

1419. $\begin{vmatrix} a+d & 3a & b+2a & b+d \\ 2b & b+d & c-b & c-d \\ a+c & c-2d & d & a+3d \\ b-d & c-d & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$

1420 $\begin{vmatrix} 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 \\ 4^3 & 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 \\ 5^3 & 6^3 & 7^3 & 8^3 & 9^3 \end{vmatrix} = 0$

1421. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} = -3\,(4-x^2)\,(1-x^2)$

1422. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = bcd + acd + abd + abc + abcd$

1423. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = abc - a - c$

1424. $\begin{vmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

1425. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (a+c)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2\,abc\,(a+b+c)^3$

1426. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y).$

(Az itt szereplő determinánst az x, y, z elemek által generált Vandermonde determinánsnak nevezzük. Jelölés: $V_3(x, y, z)$.)

1427. $\begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \sin 3a & \sin 3b & \sin 3c \\ \sin 5a & \sin 5b & \sin 5c \end{vmatrix} = 64 \sin a \sin b \sin c (\sin^2 a - \sin^2 b)(\sin^2 a - \sin^2 c)(\sin^2 b - \sin^2 c)$

1428. $\begin{vmatrix} \sin^3 a & \sin^2 a \cos a & \sin a \cos^2 a & \cos^3 a \\ \sin^3 b & \sin^2 b \cos b & \sin b \cos^2 b & \cos^3 b \\ \sin^3 c & \sin^2 c \cos c & \sin c \cos^2 c & \cos^3 c \\ \sin^3 d & \sin^2 d \cos d & \sin d \cos^2 d & \cos^3 d \end{vmatrix} =$

$= \sin(a - b) \sin(a - c) \sin(a - d) \sin(b - c) \sin(b - d) \sin(c - d)$

1429. $\begin{vmatrix} \sin 2t & \cos 2t & 1 \\ \sin t & \cos t & \cos t \\ \cos t & -\sin t & \sin t \end{vmatrix} = 0$

1430. $\begin{vmatrix} \cos(a - b) & \cos(b - c) & \cos(c - a) \\ \cos(a + b) & \cos(b + c) & \cos(c + a) \\ \sin(a + b) & \sin(b + c) & \sin(c + a) \end{vmatrix} =$

$= -2 \sin(a - b) \sin(b - c) \sin(c - a)$

1431. $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \sin 2a \\ \sin b & \cos b & \sin 2b \\ \sin c & \cos c & \sin 2c \end{vmatrix} = \sin 2a \sin(b - c) + \sin 2b \sin(c - a) + \sin 2c \sin(a - b)$

1432. Számitsuk ki a következő determinánsok értékét:

$\begin{vmatrix} 0{,}1 & 1 & 0 \\ 0{,}01 & -0{,}1 & 1 \\ 0{,}001 & 0{,}01 & -1 \end{vmatrix}$

1433. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2+j & 1-2j & 3+2j & 4j \\ (2+j)^2 & (1-2j)^2 & (3+2j)^2 & (4j)^2 \\ (2+j)^3 & (1-2j)^3 & (3+2j)^3 & (4j)^3 \end{vmatrix}$

1434. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

1435. Számitsuk ki az alábbi determináns négyzetét önmagával való szorzása utján.

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix}^2 = ?$$

1436. Végezzük el négyféleképpen az alábbi szorzást, az eredményt a determinánsok értékének kiszámitásával is ellenőrizzük.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 \\ j & j & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & j & -j \\ j & 1 & j \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

1437. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}^2 = ?$

1438. Számitsuk ki a következő determináns értékét négyzetének meghatározása utján:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

1439. Bizonyitsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ 0 & u_1 & 0 & u_2 & 0 \\ b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 \\ 0 & v_1 & 0 & v_2 & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

1440. Számitsuk ki a következő determináns reciprok determinánsát és ellenőrizzük a számitást. A reciprokának nevezzük és A^{-1}-gyel jelöljük az olyan determinánst, melyre $A \cdot A^{-1} = 1$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

1441.* Bizonyitsuk be, hogy a

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

determináns reciproka eggyel egyenlő, ha $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} + 1 = 0$

1442. Oldjuk meg a determináns kifejtése nélkül az alábbi egyenleteket:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & a \\ b & b & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & x \end{vmatrix} = 0$

1443. Bizonyitsuk be:

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1444.* Diszkutáljuk a

$$\begin{vmatrix} b-x & a \\ a & c-x \end{vmatrix}=0 \quad \text{egyenletet!}$$

1445. Határozzuk meg az

$$\begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ 3 & 2-x & 1 \\ 0 & 5 & 1-x \end{vmatrix}=0 \quad \text{egyenlet összes megoldását!}$$

1446. Határozzuk meg A értékét ugy, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & A & 9 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{legyen.}$$

1447.

$$D(t)=\begin{vmatrix} y_1(t) & \dots\dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots\dots & y_n'(t) \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots\dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Irjuk fel a $\frac{d}{dt}D(t)$ függvényt!

1448.* Számitsuk ki a következő un. Vandermonde determináns értékét

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots\dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1449. Számitsuk ki azon D_n és D_{n+1} determinánsok értékét, amelyeket az előző determinánsból kapunk ugy, hogy benne az utolsó sor kitevőit n-re, ill. (n+1)-re változtatjuk.

1450.* Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \dots\dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{1!\,2!\,\dots\dots\,(n-1)!}$$

Ahol $V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ az $x_1, x_2, \dots x_n$ elemek által generált Vandermonde-determináns.

1451. Bizonyitsuk be:

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots\dots & n^2 \\ 2^2 & 3^2 & \dots\dots & (n+1)^2 \\ \vdots & & & \\ n^2 & (n+1)^2 & \dots\dots & (2n-1)^2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ha} \quad n > 3.$$

1452. Bizonyitsuk be, hogy ha $n \geq 3$, akkor

$$\begin{vmatrix} a + a_1b_1 & a + a_1b_2 & \dots\dots & 1 + a_1b_n \\ 1 + a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \dots\dots & 1 + a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + a_nb_1 & 1 + a_nb_2 & \dots\dots & 1 + a_nb_n \end{vmatrix} = 0$$

1453. Bizonyitsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ 1 & 1+\lambda_2 & 1 & \dots\dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda_3 & \dots\dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n + \sum_{i=1}^{n} \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{i-1}\lambda_{i+1}\cdot\lambda_n$$

1454.* Igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = f(x) - x\frac{d\,f(x)}{dx} \quad \text{ahol}$$

$$f(x)=(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)$$

1455.* Igazoljuk hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots\dots & a_1 \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots\dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(x_1)\dots f(x_n),$$

ahol $f(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1}$ és x_i az $x^n = 1$ egyenlet gyöke.

1456. Bizonyitsuk be, hogy

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & a_n \end{vmatrix} = a_n A_{n-1} + A_{n-2}$$

ahol A_{n-1} és A_{n-2} ugyanolyan tipusu $(n-1)$-ed, ill. $(n-2)$-ed rendü determináns mint A_n.

1457.* Bizonyitsuk be, hogy az n-ed rendü determináns kifejtésében egyik tagként szerepel a mellékátlóban álló elemek szorzata is, éspedig pozitiv előjellel, ha n-nek néggyel való osztásakor a maradék 0 vagy 1, minden más esetben az előjel negativ.

1458. Bizonyitsuk be, hogy ha egy determinánsban a fő átló fölött (vagy alatt) álló minden elem 0, akkor a determináns értéke megegyezik a főátlóban álló elemek szorzatával.

1459. Bizonyitsuk be, hogy ha a determináns valamennyi elemét ugyanazzal a c számmal szorozzuk, akkor a determináns értéke c^n-nel szorzódik.

1460. Bizonyitsuk be, hogy ha a determináns első r oszlopában az r-ik soron tul csupa 0 elem áll, akkor a determináns értéke megegyezik a bal felső sarokban álló r-rendü aldetermináns és az eredeti determinánsból ezen aldetermináns sorainak és oszlopainak törlése után visszamaradó aldetermináns (kiegészitő aldetermináns) szorzatával.

1461.* Bizonyitsuk be, hogy ha a másodrendü determináns második sorában álló elemek a fölöttük álló elem komplex konjugáltjai, akkor a determináns értéke vagy nulla vagy pedig tiszta képzetes szám.

1462.* Bizonyitsuk be, hogy ha egy determináns elemeinek komplex konjugáltjából képezünk determinánst (ugyanabban az elrendezésben) akkor az eredeti determináns konjugáltját kapjuk.

1463.* Igazoljuk, hogy ha az $|a_{ik}|$ determinánsban a_{ik} és a_{ki} komplex konjugáltak, akkor a determináns értéke valós.

1464.* Bizonyitsuk be, hogy ha egy n-edrendü determinánsban $a_{ji} = -a_{ij}$ és n páratlan, a determináns értéke nulla.

1465.* Legyen az $|a_{ik}|$ n-edrendü determinánsban $a_{ii} = 0$ $a_{ik} = j\,a_{ki}$ ahol a_{ki} valós (ha $i > k$)

1. Melyek n azon értékei, amelyek mellett bármely a_{ki} választás esetén valós értékü a determináns és
2. melyek mellett lesz tiszta képzetes szám?
3. Bizonyitsuk be, hogy páratlan n esetén a determináns értéke $A\,(1 \pm j)$ ahol A valós.

1466.* Bizonyitsuk be, hogy ha a harmadrendü determináns soraiban ugyanavval a differenciával biró elsőrendü számtani sorozatok állnak, akkor a determináns értéke 0. Igaz-e a tétel általánositása negyedrendü determinánsra és ugyanazzal a második differenciával biró másodrendü számtani sorozatra?

1467.* Bizonyitsuk be, hogy a $z_1\ z_2\ z_3$ pontok akkor, és csak akkor fekszenek egy egyenesen a komplex számsikban, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} = 0$$

1468. Számitsuk ki az

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

determináns értékét, melynek elemei az uj koordináta tengelyeknek a régiekkel bezárt szögeinek irány cosinusai. A koordináta-rendszerek itt derékszögüek.

15. MÁTRIXOK

Jelölés:

1. $\underline{\underline{A}}$ transzponálja $\underline{\underline{A}}'$, ahol $a'_{ik} = a_{ki}$. $\underline{\underline{A}} = (a_{ik})$

2. $\underline{\underline{A}}$ algebrai adjungáltja adj.$\underline{\underline{A}}$, ugy kapjuk hogy $\underline{\underline{A}}'$ elemei helyére a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánst irjuk.

3. Inverz mátrix $\underline{\underline{A}}^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}\underline{\underline{A}}}{\det\underline{\underline{A}}}$ akkor és csak akkor létezik, ha $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$

4. Mátrix nyoma $\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

5. Derivált mátrix $\dfrac{d\,\underline{\underline{A}}}{dx} = \left(\dfrac{d\,a_{ik}}{dx}\right)$

6. Konjugált mátrix $\overline{\underline{\underline{A}}} = \left(\overline{a}_{ik}\right)$, ahol $\overline{a_{ik}}$ a_{ik} komplex konjugáltját jelenti.

7. Adjungált mátrix $\underline{\underline{A}}^{*} = \overline{(\underline{\underline{A}}')}$ (transzponált konjugáltja).

8. Def. $\underline{\underline{A}}$ unitér mátrix, ha $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{*} = \underline{\underline{E}}$

9. Def. $\underline{\underline{A}}$ valós elemü mátrix ortogonális, ha $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$

10. Adjungált mátrix inverze $\breve{\underline{\underline{A}}} = (\underline{\underline{A}}^{*})^{-1}$

11. Mátrix rangja: rang $\underline{\underline{A}}$, a lineárisan független oszlop ill. sorvektorok maximális száma.

12. $j = \sqrt{-1}$

1501. Végezzük el a következő müveleteket:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = ?$$

1502. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} = ?$$

1503. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad 3\underline{\underline{A}} = ?$$

1504. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad 3\underline{\underline{A}} + 2\underline{\underline{B}} - 4\underline{\underline{C}} = ?$$

1505. $$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1-j \\ 2j & 3 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4j & 1+2j \\ 4 & 3-j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} -2j & 1 \\ 1 & 1+j \end{pmatrix}, \quad j\underline{\underline{A}} - 2\underline{\underline{B}} + 3\underline{\underline{C}} = ?$$

1506. Végezzük el az alábbi müveleteket:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1507. $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1508. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1509. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1510. $$(5,\ 1,\ 0,\ -3) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1511. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1512. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

1513. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

1514. $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2$

1515. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^2$

1516. $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}^k$

1517. $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}^k$

1518. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

1519. Számitsuk ki $\underline{\underline{AB}} - \underline{\underline{BA}}$ értékét:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

1520. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1521. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Számitsuk ki az $\underline{\underline{A}}^2$, $\underline{\underline{A}}^3$, $\underline{\underline{A}}^{-1}$, $\underline{\underline{A}}^{-2}$ mátrixokat.

1522. Számitsuk ki $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}$, majd $\underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{A}}$ értékét.

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1523. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1524. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 2j & 3j \\ 2j & j & 4j \end{pmatrix}$ $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1525. $\underline{\underline{A}} = (1 \quad 4j \quad 3)$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2j \\ 3 \\ j \end{pmatrix}$

1526. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{D}} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$

Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}\ \underline{\underline{B}}\ \underline{\underline{C}}\ \underline{\underline{D}}$ mátrixot.

1527. Vizsgáljuk meg az

$$\underline{\underline{X}}\ \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$$

egyenletet, ahol $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{X}}$ másodrendü négyzetes mátrix, $\underline{\underline{0}}$ null mátrix.

1528. Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{0}}$ egyenlet megoldását, ahol $\underline{\underline{A}}$ másodrendü négyzetes mátrix.

1529. Határozzuk meg a következő mátrixok transzponáltját:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

1530. $$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

1531. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Határozzuk meg $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})'$ mátrixot.

1532. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ -j & j \\ 1 & 1-j \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2j & 4 \\ 0 & -j \\ 2 & 1+j \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})'$ mátrixot!

1533. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})'$ mátrixot.

1534. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ -j & j \\ 1 & 1-j \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & -j & 0 \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})'$ mátrixot.

1535. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j & j & -j \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Határozzuk meg $\underline{\underline{\acute{A}}}'$ és $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\acute{A}}}'$ mátrixokat!

1536. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -j & -2 & j \end{pmatrix}$ Határozzuk meg $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{\acute{A}}}'$ mátrixot!

1537. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{\acute{A}}}'$ mátrixot)

1538. Bizonyitsuk be, hogy minden kvadratikus mátrix előállitható, mint egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus mátrix összege.

1539. Számitsuk ki a következő inverz mátrixokat:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$$

1540. $$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

1541. $$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$$

1542. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

1543. $$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}$$

1544. Legyen $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Oldjuk meg a $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$, $\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}$ mátrix-egyenleteket.

1545. Legyen az (a_{ik}) mátrix determinánsa 1. Számitsuk ki az (A_{ik}) mátrix determinánsának értékét, ahol A_{ik} az a_{ik} elemhez tartozó előjeles aldetermináns.

1546. Bizonyitsuk be a következő összefüggéseket; (feltéve, hogy a kijelölt müveletek elvégezhetők)

1. $(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{B}}'$ 2. $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})' = \underline{\underline{B}}'\,\underline{\underline{A}}'$ 3. $(\underline{\underline{A}}^{-1})' = (\underline{\underline{A}}')^{-1}$

4. $\det \underline{\underline{A}} = \det \underline{\underline{A}}'$ 5. $(\underline{\underline{A}}')' = \underline{\underline{A}}$

1547.* Bizonyitsuk be, hogy szimmetrikus mátrix inverze is szimmetrikus.

1548. Bizonyitsuk be, hogy páros rendü antiszimmetrikus mátrix inverze is antiszimmetrikus.

1549. Null - osztó-e vagy sem a 3x3-as mátrixok körében az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ mátrix?}$$

($\underline{\underline{A}}$ null osztó ha lehet találni hozzá egy olyan $\underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{0}}$ mátrixot, hogy vagy $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{0}}$ vagy $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$.)

1550. Null-osztó-e vagy sem a 4 x 4-es mátrixok körében

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ -8 & 12 & -7 & 4 \\ 6 & -7 & 5 & 1 \end{pmatrix} ?$$

1551. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ kvadratikus mátrix és det $\underline{\underline{A}} = 0$, akkor $\underline{\underline{A}}$ adj $\underline{\underline{A}}$ = adj $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$. Vagyis adj $\underline{\underline{A}}$ két oldali nullosztó, ha adj $\underline{\underline{A}} \neq \underline{\underline{0}}$.

1552. Vizsgáljuk meg az $\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ alaku mátrixokat!

a) Két ilyen alaku mátrix szorzata is ilyen alaku-e?
b) Kommutativ-e az ilyen alaku mátrixok szorzata?
c) Van-e köztük olyan, amellyel bármely ilyen alaku mátrixot jobbról szorozva a bal oldali tényezőt kapjuk vissza?
d) Van-e köztük olyan, amellyel balról szorozva a jobb oldali tényezőt kapjuk vissza?
e) Van-e köztük olyan, amellyel bármely ilyen alaku mátrixot jobbról, ill. balról szorozva nulla mátrixot kapunk?

1553. Vizsgáljuk meg az $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ alaku mátrixokat!

a) Ilyenek szorzata is ilyen alaku-e?
b) Kommutativ-e az ilyen alaku mátrixok szorzata?
c) Irjuk fel az M(a,b) jelöléssel az $[M(1,0)]^2$, $[M(0,1)]^2$, $M(a,b)\cdot M(c,d)$, $M(a,b)\cdot M(a,-b)$ szorzatokat.
d) Irjuk fel az előbbi szorzatokat az $\underline{\underline{E}}_1 = M(1,0)$ $\underline{\underline{E}}_2 = M(0,1)$ mátrixokkal kifejezve.

1554. Keressük meg az összeadás, kivonás és szorzás müveletének szabályait a $q = a\,e + b\,i + c\,j + d\,k$ alaku un. hiperkomplex számok körében, ahol

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

és a, b, c, d tetszőleges komplex számok.

1555.* $\underline{\underline{D}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Mutassuk meg, hogy az $a\underline{\underline{E}} + b\underline{\underline{D}}_1$ alaku mátrixokra, ahol a és b skalár számok, ugyanazok a müveleti szabályok érvényesek, mint az $a + bj$ alaku komplex számokra.

1556.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{P}}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{M}}_{32}(W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix},$$

$$\underline{\underline{X}}_{33}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Mivel egyenlők a $\underline{\underline{P}}_{23}\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{P}}_{23}$, $\underline{\underline{M}}_{32}(w)\,\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\,M_{32}(w)$, $\underline{\underline{X}}_{33}(x)\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}_{33}(x)$ mátrixok?

1557. Ha $\underline{\underline{P}}_{ik}$ az a mátrix, amelyik az $\underline{\underline{E}}$ mátrixból ugy keletkezik, hogy $\underline{\underline{E}}$-ben az i-edik sort a k-adikkal felcseréljük, akkor mi jellemzi a $\underline{\underline{P}}_{ik}\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{P}}_{ik}$ mátrixokat? ($\underline{\underline{E}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n x n-es mátrixok.)

1558. Ha $i \neq k$, jelöljük $\underline{\underline{M}}_{ik}(t)$-vel azt az n x n-es mátrixot, amelyik az egység mátrixtól csak annyiban különbözik, hogy i-edik sorának k-adik eleme nem 0, hanem t. Ha $\underline{\underline{B}}$ tetszés szerinti n x n-es mátrix, hogyan lehet jellemezni az $\underline{\underline{M}}_{ik}(t)$. $\underline{\underline{B}}$ és a $\underline{\underline{B}}\,M_{ik}(t)$ szorzatokat?

1559. Bizonyitsuk be, hogy egy négyzetes mátrixhoz mindig találhatunk olyan mátrixot, amellyel az adott mátrixot balról megszorozva a szorzat mátrix fő átlója alatt csupa nulla áll.

1560. Hogyan jellemezhető az a mátrix, amely egy adott mátrixból egy diagonális mátrixszal jobbról ill. balról szorozva keletkezik.

1561. Bizonyitsuk be, hogy bármely négyzetes mátrixhoz találhatunk két másikat ugy, hogy az elsővel balról szorozva és a kapott szorzatot a másodikkal jobbról szorozva a fő diagonális alatt is és fölött is csupa nulla áll. (Nem biztos, hogy a főátlóban álló minden elem zérustól különböző lesz.)

1562. Keresendő véges számu mátrix, amelyek lineár-kombinációival bármely n x n-es mátrix előállitható.

1563. Melyek azok a mátrixok, amelyek valamennyi n x n-es mátrixszal felcserélhetők?

1564. Határozzuk meg az alábbi mátrixok rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1565. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 18 \end{pmatrix}$

1566. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

1567. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 22 & 6 \end{pmatrix}$

1568. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1569. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1570. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

1571. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1572. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 & 8 & -2 & -3 \\ 5 & 0 & -2 & 3 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -3 & -5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

1573. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

1574. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -4 & 18 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

1575. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -5 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ -1 & -2 & -7 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1576.* Bizonyitsuk be, hogy ha egy mátrix rangja r, akkor előállitható r db. 1 rangu mátrix összegeként.

1577.* Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-edrendü kvadratikus mátrixok, és $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, $\det \underline{\underline{B}} \neq 0$, akkor $\operatorname{rang} \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \operatorname{rang} \underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}} = \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}$

1578.* Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-ed rendü kvadratikus mátrixok és $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$, akkor $\operatorname{rang} (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) \leq \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}$, és $\operatorname{rang} (\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}) \leq \operatorname{rang} \underline{\underline{A}}$

1579. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+3j & 3+4j \\ 2+2j & 4+j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2+j & 4+2j \\ 1+2j & 3+4j \end{pmatrix}$

Számitsuk ki az $\overline{(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})}$, $\overline{\underline{\underline{A}}}\,\overline{\underline{\underline{B}}}$, és $(\overline{\underline{\underline{A}}})^{-1}$ mátrixokat.

1580. Bizonyitsuk be, a következő összefüggéseket, feltéve hogy a kijelölt müveleteket elvégezhetők:

1. $\overline{(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})} = \overline{\underline{\underline{A}}} + \overline{\underline{\underline{B}}}$ 2. $\overline{\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}} = \overline{\underline{\underline{A}}}\,\overline{\underline{\underline{B}}}$ 3. $\overline{(\underline{\underline{A}}^{-1})} = (\overline{\underline{\underline{A}}})^{-1}$

4. $\overline{\det \underline{\underline{A}}} = \det \overline{\underline{\underline{A}}}$ 5. $\overline{\overline{\underline{\underline{A}}}} = \underline{\underline{A}}$

1581. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1+3j & 3+4j \\ 2+2j & 4+j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2+j & 4+2j \\ 1+2j & 3+4j \end{pmatrix}$

Határozzuk meg az $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})^{*}$, $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{*}$, és $\breve{\underline{\underline{A}}}\,\breve{\underline{\underline{B}}}$ mátrixokat.

1582. Oldjuk meg a következő mátrix-egyenleteket;

$(\underline{\underline{A}}^{-1})^{*}\,\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{Y}}\,(\underline{\underline{A}}^{-1})^{*} = \underline{\underline{B}}$, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & j \end{pmatrix}$$

1583. Oldjuk meg az $(\underline{\underline{A}}^{*})^{-1}\cdot\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{Y}}\,(\underline{\underline{A}}^{*})^{-1} = \underline{\underline{B}}$ mátrix egyenleteket, ahol

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} j & 1 & -j \\ 1 & 0 & 1 \\ -j & -2 & j \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} j & -j & j \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1584. Számitsuk ki $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{*}$ mátrixot ha

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ j & 0 & 1 & 1 \\ j & j & 0 & 1 \\ j & j & j & 0 \end{pmatrix}$$

1585. Bizonyitsuk be a következő összefüggéseket, feltéve, hogy a kijelölt müveletek elvégezhetők.

1. $(\underline{\underline{A}}+\underline{\underline{B}})^{*} = \underline{\underline{A}}^{*}+\underline{\underline{B}}^{*}$, 2. $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{*} = \underline{\underline{B}}^{*}\cdot\underline{\underline{A}}^{*}$,

3. $(\underline{\underline{A}}^{-1})^{*} = (\underline{\underline{A}}^{*})^{-1}$, 4. $\det\underline{\underline{A}}^{*} = (\det\underline{\underline{A}})^{*}$,

5. $(\underline{\underline{A}}^{*})^{*} = \underline{\underline{A}}$.

1586. Igazoljuk, hogy ha $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}}$ és $\breve{\underline{\underline{A}}}$, $\breve{\underline{\underline{B}}}$, $\breve{\underline{\underline{C}}}$ létezik, akkor $\breve{\underline{\underline{A}}}\,\breve{\underline{\underline{B}}} = \breve{\underline{\underline{C}}}$.

1587. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{U}}$ unitér mátrix, akkor $\underline{\underline{U}}^{-1}$, $\underline{\underline{U}}'$, és $\underline{\underline{U}}^{*}$ és $\overline{\underline{\underline{U}}}$ is unitér.

1588.* Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{U}}_1$ és $\underline{\underline{U}}_2$ unitér mátrixok, akkor $\underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{U}}_2$ és $\underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1$ is unitér.

1589.* Bizonyitsuk be, hogy unitér mátrix determinánsa +1 vagy -1.

1590. Legyen $\underline{\underline{A}}$ tetszés szerinti, $\underline{\underline{U}}$ pedig unitér mátrix és $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{U}}^{-1} \underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{U}}$. Mivel egyenlő a $\underline{\underline{B}}^*$ mátrix?

1591.

$$\underline{\underline{U}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}}j \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}j & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{U}}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}\,j \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}\,j & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Mivel egyenlők az $\underline{\underline{U}}_1^{-1}$, $\underline{\underline{U}}_2^{-1}$, $(\underline{\underline{U}}_1 \underline{\underline{U}}_2)^{-1}$ és $(\underline{\underline{U}}_2 \underline{\underline{U}}_1)^{-1}$ mátrixok?

1592. Bizonyitsuk be, hogy ha $\underline{\underline{D}}_1$ és $\underline{\underline{D}}_2$ ortogonális mátrixok, akkor $(\underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{D}}_2)$ is ortogonális.

1593.* Bizonyitsuk be, hogy ortogonális mátrix determinánsa +1 vagy -1.

1594.

$$\underline{\underline{D}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Kiszámitandók a $(\underline{\underline{D}}_1 \underline{\underline{D}}_2)^{-1}$, det $\underline{\underline{D}}_1$ és det $\underline{\underline{D}}_2$!

1595.* Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ két n-edrendü kvadratikus mátrix. Bizonyitsuk be, hogy $\mathrm{Sp}\,(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}} + \mathrm{Sp}\,\underline{\underline{B}}$

1596. Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ n-edrendü kvadratikus mátrix, továbbá det $\underline{\underline{A}} \neq 0$. Határozzuk meg az $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$ mátrix nyomát.

1597.* Legyen $\underline{\underline{A}}$ és $\underline{\underline{B}}$ két olyan mátrix, hogy $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ létezzenek, és kvadratikus mátrixok legyenek. Bizonyitsuk be, hogy ekkor $\mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = \mathrm{Sp}\,(\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}})$.

1598.

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Határozzuk meg $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$ és $\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{A}}$ nyomát.

16. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZEREK

INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZEREK

Megoldhatók-e a következő egyenletrendszerek? Ha igen oldjuk meg.

1601.

$(1-j)x_1 + (2+j)x_2 = 1 - j,$

$(1+j)x_1 + (1-j)x_2 = 1 + j.$

1602.

$j\,x_1 + x_2 = 1,$

$-x_1 + (1+j)x_2 = 2 + j.$

1603.

$2\,x_1 + 5\,x_2 - x_3 = 7,$

$3\,x_1 - 4\,x_2 - 3\,x_3 = 1,$

$x_1 + 14\,x_2 + x_3 = 2.$

1604.

$2\,x \qquad - z = 1,$

$2x + 4y - z = 1,$

$-x + 8y + 3z = 2.$

1605.

$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 1,$

$(1-j)x_1 + 2\,x_2 + (1-j)x_3 = j,$

$-2j\,x_1 + (1+j)x_2 + 3\,x_3 = -j.$

1606.

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$

$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$

$3x_1 + (4+j)x_2 + 7\,x_3 = -2 + 2j.$

1607.

$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$

$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = -2 + 2j,$

$3x_1 + (1+3j)x_2 + (-2+2j)x_3 = -2.$

1608.

$x_1 + jx_2 - x_3 = -j,$

$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = -2 + 2j,$

$x_1 + (1-j)x_2 - 2j\,x_3 = -2 - 2j.$

1609.

$jx_1 + (1+j)x_2 + (1-j)x_3 = 1,$

$-x_1 + 2j\,x_2 - 2j\,x_3 = j,$

$-jx_1 + (-2+2j)x_2 + (-2-2j)x_3 = 1+j.$

1610.

$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 8,$

$x_1 + jx_2 - x_3 = -j.$

$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = -2 + 2j.$

1611.

$$x_1+(1+j)x_2+2j\,x_3 = 1$$
$$(1-j)x_1+2x_2+(1-j)x_3 = j,$$
$$(3-2j)x_1+(5+j)x_2+2x_3=1+2j.$$

1612.

$$x_1+(1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 1,$$
$$(1-j)x_1+2x_2+(1-j)x_3 = j,$$
$$-jx_1 +(1-j)x_2+(1-3j)x_3=1+j.$$

1613.

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1,$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7,$$
$$3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8,$$
$$x_2 - x_3 - x_4 = -1.$$

1614.

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 2,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 3,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

1615.

$$x_1 + x_2 \quad + 4x_4 = 3,$$
$$x_2 - x_3 + 3x_4 = 1,$$
$$x_1 -2x_2 + 3x_3 -5x_4 = 0,$$
$$3x_1 -x_2 + 4x_3 = 5,$$

1616.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2,$$
$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2,$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0,$$

1617.

$$4x_1+x_2 - 2x_3 + x_4 = 3,$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2,$$
$$2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1,$$
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1.$$

1618.

$$2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8,$$
$$x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9,$$
$$2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5,$$
$$x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0.$$

1619.

$$5x + 4z + 2t = 3,$$
$$x - y + 2z + t = 1,$$
$$4x + y + 2z = 1,$$
$$x + y + z + t = 0.$$

1620.

$$x_1 +2x_2+3x_3+4x_4+5x_5 = 13,$$
$$2x_1+x_2+2x_3+3x_4+4x_5 = 10,$$
$$2x_1+2x_2+x_3+2x_4+3x_5 = 11,$$
$$2x_1+2x_2+2x_3+x_4+2x_5 = 6,$$
$$2x_1+2x_2+2x_3+2x_4+x_5 = 3.$$

1621.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 = 9,$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$
$$x_4 + x_5 + x_6 = -3,$$
$$x_5 + x_6 + x_7 = -9,$$
$$x_6 + x_7 + x_8 = -6,$$
$$x_7 + x_8 + x_1 = -2,$$
$$x_8 + x_1 + x_2 = 2.$$

1622.

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$jx_1 + x_3 + x_4 = j,$$
$$jx_1 + jx_2 + x_4 = -1,$$
$$jx_1 + jx_2 + jx_3 = -j,$$

1623.

$$7x_1 + 3x_2 = 2,$$
$$x_1 - 2x_2 = -3,$$
$$4x_1 + 9x_2 = 11.$$

1624.

$$x_1 - 8x_2 = 3,$$
$$2x_1 + x_2 = 1,$$
$$4x_1 + 7x_2 = -4.$$

1625.

$$x_2 + x_3 + x_4 = 1,$$
$$jx_1 + x_3 + x_4 = j,$$
$$jx_1 + jx_2 + x_4 = -1,$$
$$jx_1 + jx_2 + jx_3 = -j,$$
$$jx_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1.$$

1626.

$$x_1 + x_2 + x_3 = j,$$
$$x_1 + (1+j)x_2 + x_3 = 1,$$
$$-x_1 + (-1+j)x_2 - x_3 = 1 - 2j,$$
$$-jx_1 + (1-j)x_2 - jx_3 = -j.$$

1627.

$$x_1 + (1+j)x_2 + 2j\,x_3 = 1,$$
$$2j\,x_1 + (-2+2j)x_2 - 4x_3 = -j.$$

1628.

$$(1+j)x_1 + (2-j)x_2 + j\,x_3 = 2 + j,$$
$$2x_1 + j\,x_2 - j\,x_3 = -1 - j.$$

1629.

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 3,$$
$$4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4,$$
$$-7x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5,$$
$$x_1 - 5x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -2.$$

1630.

$$5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7,$$
$$2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1,$$
$$x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0.$$

1631.

$$\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3-x_4+x_5 &= 1,\\ 3x_1-x_2+x_3+4x_4+3x_5 &= 4,\\ x_1+5x_2-9x_3-8x_4+x_5 &= 0. \end{aligned}$$

1632.

$$\begin{aligned} 3x_1-x_2+2x_3-x_4+5x_5 &= 28,\\ x_1+x_3+4x_4-2x_5 &= 10,\\ 2x_1+7x_2-3x_3+6x_5 &= 37,\\ -8x_2+4x_3-5x_4+x_5 &= -19. \end{aligned}$$

1633.

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= 7,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5 &= -2,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5 &= 23,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5 &= 12. \end{aligned}$$

1634.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+\ldots+nx_n &= 1,\\ x_2+2x_3+3x_4+\ldots+nx_1 &= 2,\\ &\vdots\\ x_n+2x_1+3x_3+\ldots+nx_{n-1} &= n. \end{aligned}$$

1635.

$$\begin{aligned} x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n &= 1,\\ x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n &= 2,\\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+x_n &= 3,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1} &= n. \end{aligned}$$

1636.

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+\ldots+x_n &= 1,\\ x_1+2x_2+\ldots+x_n &= 2,\\ &\vdots\\ x_1+x_2+\ldots+2x_n &= n. \end{aligned}$$

1637.

$$\binom{0}{0}x_0 + \binom{1}{0}x_1 + \binom{2}{0}x_2 + \ldots + \binom{n}{0}x_n = \binom{n+1}{n},$$

$$\binom{1}{1}x_0 + \binom{2}{1}x_1 + \binom{3}{1}x_2 + \ldots + \binom{n+1}{1}x_n = \binom{n+2}{2},$$

$$\binom{2}{2}x_0 + \binom{3}{2}x_1 + \binom{4}{2}x_2 + \ldots + \binom{n+2}{2}x_n = \binom{n+3}{3},$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n}x_0 + \binom{n+1}{n}x_1 + \binom{n+2}{n}x_2 + \ldots + \binom{2n}{n}x_n = \binom{2n+1}{n+1}$$

1638.*

$$1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0,$$

$$1 + 2x_1 + 4x_2 + \ldots + 2^n x_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$1 + n x_1 + n^2 x_2 + \ldots + n^n x_n = 0.$$

1639.

$$\frac{x_1}{a_1 - b_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_1 - b_n} = 1,$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_1}{a_n - b_1} + \ldots + \frac{x_n}{a_n - b_n} = 1,$$

ahol $a_i \neq b_k$ $(i, k = 1, 2, \ldots\ldots n)$

1640. Diszkutáljuk a következő egyenletrendszert:

$$x + y + z = a,$$

$$x + (1+a)y + z = 2a, \qquad \text{ahol } \underline{a} \text{ konstans}$$

$$x + y + (1+a)z = 0.$$

1641. Diszkutáljuk az

$$ax + y + z = 1,$$

$$x + ay + z = a,$$

$$x + y + az = a^2, \qquad \text{egyenletrendszer megoldását.}$$

1642. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$uv - 3vw + w = -13,$$
$$-3uv + 4vw - 2w = 12,$$
$$2uv + vw = 10.$$

1643. Határozzuk meg az

$$x + y + 2z = 0,$$
$$2x - y + z = 0,$$
$$x + y + z = t,$$
$$2x - 2y + z = u,$$ egyenletrendszerből u-t, mint t függvényét.

1644.

$$x_1 + x_2 = a_1 a_2,$$
$$x_1 + x_3 = a_1 a_3,$$
$$x_1 + x_4 = a_1 a_4,$$
$$x_2 + x_3 = a_2 a_3,$$
$$x_2 + x_4 = a_2 a_4,$$
$$x_3 + x_4 = a_3 a_4.$$

Milyen feltételeknek kell az a_i-k-re teljesülni, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen? Oldjuk meg az egyenletrendszert.

1645. Meghatározandó u és v ugy, hogy az egyenletrendszer megoldható legyen. Oldjuk is meg az egyenletrendszert.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14,$$
$$x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 44,$$
$$x_1 + 8x_2 + 27x_3 = 134,$$
$$-x_1 - 6x_2 - 15x_3 = u,$$
$$x_1 - 2x_2 - 15x_3 = v.$$

Határozzuk meg a és c értékét ugy, hogy a következő egyenletrend-szereknek

1. csak egy megoldása legyen
2. végtelen sok megoldása legyen
3. ne legyen megoldása