BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

MATEMATIKAI FELADATTÁR
III.

Valós többváltozós függvények differenciál és integrálszámítása

Szerkesztette:

Antos Péter

Műegyetemi Kiadó, 2000.

Szerkesztette:

Antos Péter

Szerzők:

Stubnya Gusztávné dr.
dr. Tóth Judit

(Negyedik utánnyomás)

Azonosító: **051401**

A **Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem**
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 7,7 (A/5) ív
Nyomtatta és kötötte:
Műegyetemi Nyomda
Felelős vezető: Frigy Ottó
Munkaszám: 0082/00

Tartalomjegyzék

I. VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁSA

1. Ponthalmazok az m-dimenziós térben

1.1 Távolság

1. Vizsgáljuk meg, hogy távolságot definiál-e a $d(x,y)$ függvény az adott térben.

   1. $d(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ R-ben.

   $\boxed{2.}$ $d(x,y) = |x-2y|$ R-ben.

   $\boxed{3.}$ $d(x,y) = |x_1^2-y_1^2| + |x_2^2-y_2^2|$ R^2-ben.

   $\boxed{4.}$ $d(x,y) = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2$ R^2-ben.

   ! 5. $d(x,y) = \max\limits_{1 \leq i \leq m} |x_i-y_i|$ R^m-ben.

1.2 Pontsorozatok

2. Határozzuk meg az $a_n \in R^m$ (m rögzitett) pontsorozat limesz-pontját, ha létezik!

   1. $a_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n}{n+2}, \dots, \frac{n}{n+m}\right)$.

   2. $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{n}{n+1}, \frac{n^2}{n+2}, \dots, \frac{n^{m-1}}{n+m-1}\right)$.

   3. $a_n = \left(\sqrt[n]{n}, \sqrt[n]{n+1}, \dots, \sqrt[n]{n+m-1}\right)$.

   4. $a_n = \left(n(\sqrt[n]{2}-1), n(\sqrt[n+1]{2}-1), \dots, n(\sqrt[n+m-1]{2}-1)\right)$

1.3 Ponthalmazok

3. Vizsgáljuk meg az adott térben az alábbi halmazokat nyíltság, zártság, korlátosság és ívszerűen összefüggőség szempontjából.

$\boxed{1.}$ $A = \left\{ x:\ x = \frac{1 \pm n}{n},\quad n \in N \right\}$ R-ben.

2. $A = \left\{ x:\ x = \frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ n, m \in N \right\}$ R-ben.

3. $A = \left\{ x:\ a < x < b \right\}$ R-ben.

4. $A = \left\{ (x, y):\ a < x < b,\quad y = 0 \right\}$ R^2-ben.

5. $A = \left\{ (x, y):\ x \geq 0,\ y \in R \right\}$ R^2-ben.

6. $A = \left\{ (x, y):\ |x| = |y| \right\}$ R^2-ben.

7. $A = \left\{ (x, y):\ x,\ y \text{ egész} \right\}$ R^2-ben.

8. $A = \left\{ (x, y):\ x, y \in Q \right\}$ R^2-ben.

9. $A = \left\{ (x, y):\ x^2 - y^2 < 1 \right\}$ R^2-ben.

10. $A = \left\{ (x, y):\ x = \frac{1}{n},\ y = \frac{1}{m},\ n, m \in N \right\}$ R^2-ben.

11. $A = \left\{ (x, y):\ x \neq 0,\quad x, y \in R \right\}$ R^2-ben.

12. $A = \left\{ P_1, P_2, \ldots \right\}$ és $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = P_o$ R^n-ben.

4. Legyen $E \subset R^2$ nyílt halmaz. Igaz-e, hogy E minden pontja torlódási pontja E-nek? Válaszoljunk ugyanerre a kérdésre R^2-beli zárt halmazok esetén.

5. Legyen $E \subset R^n$. Jelölje $\bar{E}$ az E komplementumát és $[E]$ az E lezárását. Bizonyitsuk be, hogy

1. intE nyílt,
2. E nyílt $\Leftrightarrow$ E = intE,
3. $G \subset E$ és G nyílt $\Rightarrow G \subset \text{int}E$,
4. $\boxed{4.}$ $\overline{\text{int}E} = [\bar{E}]$.

Igazak-e az alábbi állítások?

5. $E = \mathrm{int}E$

6. $E = [\mathrm{int}E]$

6. Jelöljük E'-vel az $E \subset R^n$ halmaz torlódási pontjainak halmazát. Bizonyítsuk be, hogy

$\boxed{1.}$ E' zárt,

$\boxed{2.}$ $[E] = E \cup E'$;

$\boxed{3.}$ E és $[E]$ torlódási pontjai megegyeznek. Vizsgáljuk meg, megegyeznek-e mindig E és E' torlódási pontjai?

2. A többváltozós függvények általános tulajdonságai

2.1 Értelmezési tartomány

7. Adjuk meg az f függvény értelmezési tartományát! Az értelmezési tartomány zárt-e, nyílt-e, korlátos-e, ívszerűen összefüggő-e?

1. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$

2. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

3. $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$

4. $f(x,y) = \arcsin \dfrac{y}{x}$

5. $f(x,y) = \ln(x+y-1)$

6. $f(x_1, x_2) = \ln \sqrt{x_1 + x_2}$

7. $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{\ln(x_1^2 + x_2^2)} + \dfrac{x_1^3 \cdot \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}}{x_1^2 + x_2^2}$

8. $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4}$

9. $f(x_1, x_2, x_3) = \ln(x_1 x_2 x_3)$

10. $f(x_1,\dots,x_m) = -\dfrac{1}{1-x_1^2-\dots-x_m^2}$

11. $f(x_1,\dots,x_m) = e^{-\frac{1}{x_1^2+\dots+x_m^2}}$

8. Határozzuk meg az alábbi függvények szintvonalait! Vizsgáljuk meg, hogy a szintvonal pontjaiból álló R^2-beli halmaz zárt vagy nyílt!

1. $f(x,y) = x\cdot y$
2. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
3. $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1$
4. $f(x_1,x_2) = 4x_1 + 8x_2^2$

9. Határozzuk meg az alábbi függvények szintfelületeit!

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{2}$
2. $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$
3. $f(x_1,x_2,x_3) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2)$

2.2 Határérték

10. Létezik-e határértéke az

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

függvénynek a (0, 0) pontban az $A = \{(x,y) : y=x\}$ és a $B = \{(x,y): y = x^2\}$ R^2-beli halmazokra vonatkozóan?

11. Határozzuk meg az alábbi határértékeket, ha léteznek!

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-2y}{3x+y}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

$\boxed{3.}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{x}{x+y}$

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, $\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$,

$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$

10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

11. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{x}$

12. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$,

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$.

13. $\lim\limits_{(x,y\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$

14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(y\cdot\sin\frac{1}{x} + x\cdot\sin\frac{1}{y}\right)$

16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x\cdot y}$

! 17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sin(x\cdot\ln y^2)$

18. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1-0)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}$

19. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sqrt{x^2+y^2-4y+5}-1}{x^2+y^2-4y+4}$

20. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{xy}{x^2-y^2}}$

21. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \frac{1}{x^2+y^2+1}$

22. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \dfrac{1}{1+x^2-y}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^2-y}$

$\lim\limits_{y\to+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+x^2-y}$

! $\boxed{23.}$ $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)\, e^{-(x+y)}$

2.3 Folytonosság

12. Hol folytonosak az alábbi függvények?

1. $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } y \geqq x \\ 0 & \text{ha } y < x \end{cases}$$

2. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{3.}$ $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4y^2}{x^2+16y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{xy} & \text{ha } xy \neq 0 \\ 1 & \text{ha } xy = 0 \end{cases}$$

5. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sin x\cdot \sin y} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. $$f(x,y) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{y} & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}$$

7. $$f(x,y) = \begin{cases} (2x+3y) \cdot \ln(x^2+y^2) & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

8. $$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

9. $$f(x,y) = \frac{x+y}{x^3+y^3}$$

10. $$f(x,y) = \sin\frac{1}{xy}$$

11. $$f(x,y,z) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z}$$

12. $$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

13. Folytonos-e az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{xy} & \text{ha} \quad xy \neq 0 \\ 1 & \text{ha} \quad xy = 0 \end{cases}$$

függvény a $(0, 0)$ pontban a $A = \{(x,y): y = 2x\}$ és a $B = \{(x,y): y = -x\}$ R^2-beli halmazokra vonatkozóan?

14. Korlátos-e az

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

függvény az értelmezési tartományán?

15. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények egyenletesen folytonosak-e az $A \subset D_f$ ponthalmazon.

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$A = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}.$$

2. $f(x,y) = \sin \dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\quad A = \left\{ (x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1 \right\}.$

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\quad A = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leqq 1 \right\}.$

4. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. $\quad A = \left\{ (x,y) : 1 \leqq x^2 + y^2 \right\}.$

3. A többváltozós függvények differenciálhatósága

3.1 Parciális deriváltak

16. Határozzuk meg az alábbi függvények parciális deriváltfüggvényeinek értelmezési tartományát és a parciális deriváltfüggvényeket!

1. $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$

2.
$$f(x,y) \begin{cases} \dfrac{[illegible]}{x^2 [illegible]} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin [illegible] y)}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

5. $f(x,y) = x \cdot y + \frac{x}{y}$

6. $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

7. $f(x,y) = x \cdot \sin(x+y)$

8. $f(x,y) = x^y$

9. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

10. $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

11. $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

12. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$

3.2 Totális differenciálhatóság

17. Mely pontokban differenciálható az f függvény?

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $$f(x,y) \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

4. $$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x^2 y^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

6. $$f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{ch} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7. $$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3.3 Összetett függvények differenciálhatósága

18. Legyen $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$, $x = t$, $y = t + t^2$. Differenciálható-e az $f(x(t), y(t))$ függvény a $t = 0$ pontban?

19. Legyen $f(x,y,z) = xy^2\sqrt{z}$, $x = \cos\frac{\pi}{2}t$, $y = 2\sin\frac{\pi}{2}t$, $z = t^2$. Differenciálható-e az $f(x(t), y(t), z(t))$ függvény a $t = 0$ és a $t = 1$ pontokban?

20. Határozzuk meg az alábbi deriváltakat!

1. $f(x,y) = \ln(xy)$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sqrt{t}$. $\dfrac{df}{dt} = ?$
2. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2} - 2y^2x^2$, $x = \ln(1+t)$, $y = \operatorname{ch}2t$. $\dfrac{df}{dt} = ?$
3. $f(x,y) = \operatorname{sh}\sqrt{x^2+y^2}$, $x = 2t^3-1$, $y = e^t$. $\dfrac{df}{dt} = ?$

21. Határozzuk meg az alábbi parciális deriváltakat.

1. $f(x,y) = 3xy$, $x = \sin(u+v)$, $y = \cos(u+v)$. $f_u = ?$ $f_v = ?$
2. $f(x,y,z) = xyz$, $x = \ln(u+v)$, $y = u^2 + 3v$, $z = 2uv$. $f_u = ?$ $f_v = ?$
3. $f(x,y) = \arcsin(xy)$, $x = w \cdot e^{uv}$, $y = 2u - 3wv$, $f_u = ?$ $f_v = ?$ $f_w = ?$

3.4 Magasabbrendű parciális deriváltak

22. Legyen
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + xy^3}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$!

!23. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5y - xy^5}{x^4 + y^4} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Igazoljuk, hogy $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$!

24. Határozzuk meg azt a ponthalmazt, amelynek minden pontjában igaz az adott f függvényre vonatkozó egyenlőség!

1. $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$, $f_{xx} + f_{yy} = 4(x^2 + y^2 + 1) \cdot f$
2. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$, $f_{xy} = f_{yx}$
3. $f(x,y) = \operatorname{arth} \dfrac{y}{x}$, $f_{yy} - f_{xy} = \dfrac{1}{(x-y)^2}$
4. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x \cdot f_x + y \cdot f_y = -f$
5. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2-y^2}$, $f_{xx} - f_{yy} = 0$
6. $f(x,y) = x^2 \ln\sqrt{xy}$, $f_{xy} - f_{yx} = 0$
7. $f(u)$ differenciálható függvény és $u = x^2 + y^2$, $y \cdot f_x - x \cdot f_y = 0$

3.5 Iránymenti derivált

25. Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját a megadott pontban és irányban!

1. $f(x,y) = x^2 + 3y^2$, $P_0(-2,1)$, $\underline{v}$ az $\underline{i}$ vektorral 30^o-os szöget zár be az XY síkban.
2. $f(x,y) = x^2y + \operatorname{sh}(2x + y)$, $P_0(0,0)$, $\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j}$.
3. $f(x,y) = x + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y^2}$, $P_0(2,1)$, $\underline{v} = 4\underline{i} + 3\underline{j}$.

4. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $P_0(2,-1)$, $\underline{v}$ az $\underline{i}$ vektorral 120°-os szöget zár be az XY síkban.

5. $f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$, $P_0(1,0)$, $\underline{v} = 3\underline{i}+4\underline{j}$.

6. $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $P_0(1,-1)$, $\underline{v}$ a maximális iránymenti deriválthoz tartozó irány.

7. $f(x,y) = x^2-xy+y^2$, $P_0(1,1)$, $\underline{v}$ a maximális iránymenti deriválthoz tartozó irány.

8. $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$, $P_0(0,0)$, $\underline{v}=\underline{i}$.

9. $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, $P_0(\frac{1}{2},0,0)$, $\underline{v}=\underline{i}-\underline{j}$.

10. $f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2}-z$, $P_0(1,0,1)$, $\underline{v}=3\underline{i}+2\underline{j}-5\underline{k}$.

26. Határozzuk meg azon pontok összességét, amelyekben minden irányban az

$$f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

függvény iránymenti deriváltjának abszolut értéke kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{1}{2}$.

27. Határozzuk meg azon pontok összességét, amelyekben minden irányban az

$$f(x,y,z) = \sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}$$

függvény iránymenti deriváltjának abszolut értéke kisebb, mint $\frac{1}{3}$.

4. A többváltozós differenciálszámítás alkalmazása

4.1 Differenciálok, Taylor-polinom

28. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi kifejezések egy többváltozós függvény teljes differenciáljai-e?

$\boxed{1.}$ $(6xy - 2y^2)\,dx + (3x^2 - 4xy)\,dy$

2. $(1+x^2)\,ydy + (y^2 - 3)\,xdx$

3. $y\sin 2x \cdot dx + \sin^2 x \cdot dy$

4. $\dfrac{y-x}{y^2}\,dy + \dfrac{1}{y}\,dx$

29. Határozzuk meg az alábbi kifejezésekben α értékét ugy, hogy teljes differenciálokat kapjunk!

1. $xydx + \alpha \cdot x^2 dy$
2. $e^{-x} \cdot ydx + \alpha \cdot e^{-x} dy$
3. $\dfrac{1}{1+(x-y)^2}\,dx + \dfrac{\alpha}{1+(x-y)^2}\,dy$

30. Határozzuk meg az alábbi magasabbrendü differenciálokat!

$\boxed{1.}$ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, df, d^2f.

2. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, d^2f.

3. $f(x,y) = x\ln(xy)$, d^2f, d^3f.

4. $f(x,y,z) = xyz$, d^2f.

31. Irjuk fel az f függvény $P_0(x_0, y_0)$ ponthoz tartozó $T_n(x,y)$ Taylor-polinomját!

$\boxed{1.}$ $f(x;y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$, $P_0(1,-2)$, $T_2(x,y)$.

$\boxed{2.}$ $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $P_0(0,0)$, $T_2(x,y)$.

3. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $P_0(1,1)$, $T_3(x,y)$

4.2 Hibaszámítás

32. Hibaszámítási feladatok.

$\boxed{1.}$ Egy bikonvex lencse fókusztávolságát az $\frac{1}{f}=(n-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$ képlettel számoljuk. Legyen $r_1 = 8$ cm $\pm$ 0,02 cm, $r_2 = 10$ cm $\pm$ 0,02 cm, $n = 1{,}5 \pm 0{,}03$.
Mekkora legfeljebb a kiszámított fókusztávolság hibája?

2.) Egy egyenáramu körben U = 110 V feszültség hatására I = 15 A erősségű áram folyik. A feszültségmérő leolvasásánál $\pm\frac{1}{20}$ V, az ampermérőnél pedig $\pm\frac{1}{10}$ A az elkövethető hiba. Mekkora az Ohm törvény alapján számitott ellenállás abszolút és relativ hibakorlátja?

3.) Megmértük egy háromszög két oldalát és az általuk bezárt szöget. Mérési eredményeink 27 m, 34 m, és 73°. A mérési hibák $\pm$0,04 m-nek, illetve $\pm$0,07°-nak vehetők. Mekkora a harmadik oldal számított értékének maximális hibája?

4.) Az ingaóra járását szabályozó ingát fizikai ingának kell felfognunk, melynek lengésideje:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{Mgs}}$$

Tegyük fel, hogy K 2‰-kel, M 5‰-kel kisebb a kelleténél. Milyen pontatlanságot okoz ez az inga járásában?

5. Egy elektromos rezgőkör rezonáns körfrekvenciáját az $\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ összefüggéssel számítjuk. Mekkora a rezgőkör számított frekvenciájának százalékos hibakorlátja, ha $\left|\frac{\Delta L}{L}\right| \leqq 0{,}03$ és $\left|\frac{\Delta C}{C}\right| \leqq 0{,}02$?

4.3 Érintősík

33. Írjuk fel az alábbi felületek érintősíkjának az egyenletét a megadott helyhez tartozó pontban!

$\boxed{1.}$ $z = x^2 + 2y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = -1$.

2. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}+z^2=1,\quad x_0=1,\quad y_0=1.$

3. $z=x^2y^2-3x+2y,\quad x_0=2,\quad y_0=1.$

4. $z=\arcsin\frac{y}{x},\quad x_0=2,\quad y_0=1.$

$\boxed{34.}$ Határozzuk meg az $x^2+3y^2+2z^2=9$ felületnek a $2x+3y+2z=0$ síkkal párhuzamos érintősíkjait!

35. Határozzuk meg az $xyz=1$ felületnek az $x+y+z=3$ síkkal párhuzamos érintősíkját!

36. Határozzuk meg az $f(x,y,z)=\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}$ függvény $P_0(e,0,0)$ ponton átmenő szintfelületének P_0 pontbeli érintősíkját!

37. Határozzuk meg az $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+2y^2+3z^2}$ függvény $P_0(2,0,1)$ ponton átmenő szintfelületének az $x+2y+3z=0$ síkkal párhuzamos érintősíkjait!

38. Határozzuk meg az $x^2+y^2+z^2=9$ felület $P_0(1,2,2)$ pontbeli érintősíkjának a koordináta-rendszer tengelyeivel bezárt szögeit!

$\boxed{39.}$ Határozzuk meg a $z=x^2+y^2-2x$ felület azon pontjait, amelyekben az érintősík normálisa a koordináta-rendszer tengelyeivel azonos szöget zár be!

40. Igazoljuk, hogy az $xyz=a^3$ $(a>0)$ felület érintősíkjai a koordinátasíkokkal állandó térfogatu tetraédereket alkotnak!

41. Igazoljuk, hogy a $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ felület érintősíkjai a koordinátatengelyekből állandó összegű darabokat vágnak le!

42. Igazoljuk, hogy a $z=x\cdot\cos\frac{y}{x}$ felület érintősíkjai a $P_0(0,0,0)$ ponton haladnak keresztül!

4.4 Szélsőérték

43. Határozzuk meg az f függvény lokális szélsőértékeit.

$\boxed{1.}$ $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

2. $f(x,y)=x^3y^2(4-x-y)$

3. $f(x,y)=x^4-4x+2y^2-2y$

4. $f(x,y) = e^{3x^2 + y^2}$

5. $f(x,y) = e^{-x^2 - 3y^2 + 3xy}$

6. $f(x,y) = (x - 2y) \cdot e^{-x^2 - y^2}$

7. $f(x,y) = \operatorname{ch}(x^2 + y^2)$

8. $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

$\boxed{9.}$ $f(x,y) = (1 + e^y) \cos x - y \cdot e^y$

10. $f(x,y) = (y - x^2) \cdot (y - 3x^2)$

44. Határozzuk meg az f függvény szélsőértékeit az adott halmazon.

1. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27,$
$T = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 4, \quad 0 \leqq y \leqq 4\}$

2. $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 5x + 2y - 1,$
$T = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 2, \quad 0 \leqq y \leqq 1\}$

3. $f(x,y) = x^3 + y^3 + x + y,$
$T = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1 - x\}$

4. $f(x,y) = \operatorname{ch}(x^2 + y^2)$
$T = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1 - x\}$

5. $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-(x^2+y^2)},$
$T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq 1\}$

6. $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y),$
$T = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq 2\pi, \quad 0 \leqq y \leqq 2\pi - x\}$

7. $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2) \cdot x^2,$
$T = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leqq 1\}$

8. $f(x,y) = (x - y + 1)^2$,
$T = \{ (x,y): -1 \leqq x \leqq 0,\ 0 \leqq y \leqq x + 1 \}$

9. $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$,
$T = \{ (x,y): 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 - x \}$

$\boxed{10.}$ $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
$T = \{ (x,y): x^2 + y^2 \leqq 1 \}$

!11. $f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$,
$T = \{ (x,y): x^2 + y^2 \leqq 1 \}$

!12. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$,
$T = \{ (x,y): |x| + |y| \leqq 1 \}$

13. $f(x,y,z) = xyz$,
$T = \{ (x,y,z): x + y + z = 3,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \}$

45. Határozzuk meg az f függvény szélsőértékeit a megadott feltételek mellett!

$\boxed{1.}$ $f(x,y) = x^2 + xy + 1, \quad x + 2y = 3.$

2. $f(x,y) = x^3 + 3xy + 4y^2, \quad 2x + y = 1$

3. $f(x,y) = x^m + y^m, \quad m = 2, 3, \ldots \quad x + y = 2c, \quad c > 0$ állandó.

$\boxed{4.}$ $f(x,y) = x + y, \quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}.$

5. $f(x,y) = xy, \quad x^2 + y^2 = 1.$

!6. $f(x,y,z) = xy + xz + yz$,
$x + y + z = 1, \quad x + 2y - z = 2.$

!7. $f(x,y,z) = xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3.$

46. Adott körbe írható háromszögek kerülete mikor a legnagyobb?

47. Adott körbe irható háromszögek területe mikor a legnagyobb?

48. Adott körbe irható háromszögek közül határozzuk meg azt, amely oldalainak a négyzetösszege a legnagyobb.

49. Egy adott ponton áthaladó síkok közül melyik van legmesszebb az origótól?

50. A $z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloidnak a $z = 5$ sík által kimetszett szeletébe írjuk be a legnagyobb térfogatú, koordinátatengelyekkel párhuzamos élű, derékszögű hasábot.

51. Határozzuk meg a $z = 4x^2 + 9y^2$ elliptikus paraboloid azon pontjait, amelyeknek a $P_0(0, 0, 2)$ ponttól vett távolsága lokális szélsőértéket mutat!

52. A $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 0)$, $P_3(0, 1)$ csúcspontokkal adott háromszöglap mely pontjaiban legnagyobb, illetve legkisebb a csúcsoktól mért távolságok négyzetösszege?

53. Az R^3 tér n különböző pontjában legyen egy-egy tömegpont. Határozzuk meg a tér azon pontját, amelyre a tömegpont-rendszer másodrendű nyomatéka minimális!

4.5 Implicit függvények

54. Legyen $F(u, v)$ differenciálható függvény, a és b állandó. Igazoljuk, hogy az $F(x - az,\ y - bz) = 0$ egyenletet kielégítő $z(x, y)$ függvényre fennáll az $a \cdot z_x + b \cdot z_y = 1$ összefüggés!

55. Legyen $F(x, y) = y^2 - \frac{x + y}{x - y}$, és $F(\frac{10}{3}, 2) = 0$. Igazoljuk, hogy az $F(x, y) = 0$ egyenlet az $x_0 = \frac{10}{3}$ környezetében differenciálható $y(x)$ függvényt határoz meg! Adjuk meg $y'(x_0)$ értékét!

56. Legyen $F(x, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} + e^{xz} - z - \frac{\pi}{4}$, és $F(0, 1, 1) = 0$. Igazoljuk, hogy az $F(x, y, z) = 0$ az $(x, y) = (0, 1)$ pont környezetében differenciálható $z(x, y)$ függvényt határoz meg! Adjuk meg $z_x(0, 1)$, $z_y(0, 1)$ értékét!

57. Legyen $F(x, y, z) = \frac{x}{z} - \ln \frac{z}{y}$, és $F(e, 1, e) = 0$. Igazoljuk, hogy az $F(x, y, z) = 0$ az $(x, y) = (e, 1)$ pont környezetében differenciálható $z(x, y)$ függvényt határoz meg! Adjuk meg $z_x(e, 1)$ és $z_y(e, 1)$ értékét!

58. Határozzuk meg az $f(x, y)$ függvény parciális deriváltjait az $(1, 0)$ pontban, ha $f = \dfrac{x+z}{y+z}$ és $z \cdot e^z = x \cdot e^x + y \cdot e^y$!

! 59. Határozzuk meg az

$$x \cdot u - y \cdot v = 0$$
$$y \cdot u - x \cdot v = 1$$

egyenletek által definiált $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvények parciális deriváltjait!

! 60. Mely pontokban határozza meg a $z(x, y)$ függvényt az

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3 \quad (u, v \in R)$$

egyenletrendszer? Határozzuk meg z_x-t és z_y-t!

II. JORDAN MÉRTÉK

1. Állapitsuk meg, hogy az alábbi halmazoknak létezik-e külső mértéke, belső mértéke, illetve mértéke! Amelyik létezik, azt határozzuk meg!

1. Az $A = \{1/n : n \in N\}$ halmaz R-ben.
2. A $B = \{1-1/n : n \in N\} \cup \{-1 + \frac{1}{n} : n \in N\}$ halmaz R-ben.
3. Az egy torlódási pontu korlátos $C = \{a_n : n \in N\}$ valós számhalmaz R-ben.
4. A természetes számok N halmaza R-ben.
5. A $[0, 1]$ intervallum racionális pontjainak Q_1 halmaza R-ben.
6. A $[0, 1]$ intervallum irracionális pontjainak I_1 halmaza R-ben.
7. A véges sok torlódási pontu korlátos $D = \{b_n : n \in N\}$ valós számhalmaz R-ben.
8. Az $A_1 = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n}) : n \in N\}$ halmaz R^2-ben.
9. Az egy torlódási pontu, korlátos $A_2 = \{(a_n, b_n) : n \in N\}$ halmaz R^2-ben.
10. A $B = \{(x, 1/m) : x \in [0, 1],\ m \in N\}$ halmaz R^2-ben.
11. A $C = \{(x, y) : x, y \in [0, 1] \cap Q\}$ halmaz R^2-ben.
12. A $D = \{(x, y) : x, y \in [0, 1],\ x, y \text{ irracionális}\}$ halmaz R^2-ben.
13. Az $E = \{(n, o) : n \in N\}$ halmaz R^2-ben.
14. Az $F = \{(x, y) : x \in [0, 1],\ x \neq 1/n,\ y \in [0, 1]\}$ halmaz R^2-ben.
15. A $G = \{(x, y) : x \in [0, 1] \cap Q,\ y \in [0, 1]\}$ halmaz R^2-ben.

$\boxed{16.}$ A $H = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) : n, m \in N \right\}$ halmaz R^2-ben.

17. Az $I = \left\{ (x_i, y_i) : i \in N \right\}$ véges sok torlódási pontu korlátos halmaz R^2-ben.

18. A $J = \left\{ (x, x^2) : x \in [0,1] \right\}$ halmaz R^2-ben.

19. A $K = \left\{ (x, o) : x \in [0, 1] \cap Q \right\}$ halmaz R^2-ben.

20. Az $L = \left\{ (x, y, z) : x^2+y^2+z^2 = 4 \right\}$ halmaz R^3-ban.

2. Igazak-e az alábbi állitások? Bizonyitsuk be azt amelyik igaz és adjunk ellenpéldát arra, amelyik hamis!

1. Ha A_i $(i = 1, \dots, n)$ mérhető halmazok, akkor $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ is mérhető halmaz.

$\boxed{2.}$ Ha A_i $(i = 1, 2, \dots)$ mérhető halmazok, akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető.

3. Ha A_i $(i = 1, 2, \dots)$ mérhető halmazok, akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető.

4. Ha $t(A_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots n)$, akkor $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ és $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ is mérhető és $t(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = t(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = 0$.

5. Ha $t(A_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots)$, akkor $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető és $t(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

$\boxed{6.}$ Ha $t(A_i) = 0$ $(i = 1, 2, \dots)$, akkor $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ is mérhető és $t(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.

3. Additiv függvény-e a külső mérték?

4. Bizonyitsuk be, hogy ha A és B mérhető és $A \subset B$, akkor $t(B - A) = t(B) - t(A)$.

5. Legyen $f(x, y)$ folytonos a mérhető és zárt $A \subset D_f$ halmazon. Határozzuk meg az $\left\{ (x, y, z) : z = f(x, y), (x, y) \in A \right\}$ halmaz R^3-beli mértékét!

6. Mutassuk meg, hogy R^m-beli hipersík minden korlátos része nullmértékű R^m-ben! (R^m-ben hipersíknak nevezzük az

$$A = \left\{ (x_1, \dots, x_m) : \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = c, \ c, c_i \in R, \ i = 1, \dots, m; \text{ és van olyan } j, \text{ amelyre } c_j \neq 0 \right\}$$

halmazokat.)

III. VALÓS TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLSZÁMÍTÁSA

1. Integrálfogalom, integrálhatóság

$\boxed{1.}$ Számitsuk ki az

$$\iint\limits_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1}} (x+y)\,dx\,dy$$

integrál értékét, mint közelitő összegek sorozatának határértékét, a következő módon: az integrációs tartományt négyzetekre osszuk fel és reprezentáns pontoknak a jobb felső sarokba eső pontokat válasszuk.

$\boxed{2.}$ Osszuk fel az $1 \le x\ \ 2$; $1 \le y \le 3$ tartományt az $x = 1 + i/n$; $y = 1 + 2j/n$ $(i, j = 1, 2, \dots n-1)$ egyenesekkel téglalapokra. Számitsuk ki az

$$\iint\limits_{T} (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

integrálnak ehhez a felosztáshoz tartozó alsó és felső összegét, valamint az integrál értékét!

$\boxed{3.}$ Integrálható-e az $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)$ függvény az $x^2 + y^2 \le 4$ tartományon? Ha igen, számitsuk ki az értékét!

4. Vizsgáljuk meg, léteznek-e az alábbi függvény kétszeres integráljai és kettősintegrálja az értelmezési tartományon:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 0 \le y \le 1/2 \text{ és } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } 1/2 \le y \le 1 \text{ és } x \text{ racionális} \\ 0 & \text{ha } 0 \le y \le 1/2 \text{ és } x \text{ irracionális} \\ 1 & \text{ha } 1/2 \le y \le 1 \text{ és } x \text{ irracionális!} \end{cases}$$

5. Legyen $T = \{(x, y) : |x| \le 4,\ |y| \le 4\}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x+y, & \text{ha } |x| \le 4,\ |y| \le 4 \text{ és } |y| \text{ nem egész szám} \\ -1, & \text{ha } |x| \le 4,\ |y| \le 4 \text{ és } |y| \text{ egész szám.} \end{cases}$$

Létezik-e $\iint\limits_{T} f(x, y)\,dxdy$?

6. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 + \frac{1}{n}, & \text{ha } x = \frac{1}{n}, \text{ vagy } y = \frac{1}{n}, \quad n \in N \\ 2 & \text{különben} \end{cases}$$

a) integrálható-e f a $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ négyzeten?

b) integrálható-e f az $A = \left\{ (x,y):\ 0 \le x \le 1,\ x \ne \frac{1}{n}, \right\} 0 \le y \le 1$, $y \ne \frac{1}{n}$ halmazon?

$\boxed{7.}$ Legyen $f(x,y) = F''_{xy}(x,y)$. Fejezzük ki az

$$\iint\limits_{\substack{a \le x \le b \\ c \le y \le d}} f(x,y)\, dxdy$$

integrált az $F(x,y)$ függvény segitségével!

2. Kettősintegrál kiszámítása, transzformációk alkalmazása az integrálás sorrendjének felcserélése

8. Számitsuk ki az alábbi kettősintegrálokat!

$\boxed{\text{a)}}$ $\iint\limits_T (x+y)\, dxdy$, T az $A(2,0)$, $B(0,0)$ és $C(0,1)$ csucspontu háromszög.

b) $\iint\limits_T e^{x+y}\, dxdy$, $T = \left\{ (x,y) :\ 0 \le x \le 8 - 2y,\ 0 \le y \le 2 \right\}$

c) $\iint\limits_T x\, y\, dxdy$, $T = \left\{ (x,y) :\ \sqrt{\frac{y}{2}} \le x \le \sqrt{y},\ 2 \le y \le 4 \right\}$

d) $\iint\limits_T \sin(x+y)\, dxdy$, $T = \left\{ (x,y) :\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 1 \right\}$

$\boxed{\text{e)}}$ $\iint\limits_T (x+y)\, dxdy$, $T = \left\{ (x,y) :\ x^2 + y^2 \le 1 \right\}$

f) $\iint\limits_T$ [illegible] $dxdy$, $T = \left\{ (x,y) :\ (x-2)^2 + y^2 \le 4 \right\}$

g) $\iint\limits_T xy\,dxdy$, T az $(x-1)^2+y^2=1$ és $(x-2)^2+y^2=4$ körök által határolt sikrész.

h) $\iint\limits_T y\sin x\,dxdy$, T a $2x=y$, $x=4$, $y=0$ és $y=2$ egyenesek által határolt sikrész.

i) $\iint\limits_T (y^2-2x)\,dxdy$, T az $y^2=x+3$ és $x=0$ görbék által határolt tartomány.

j) $\iint\limits_T (3x-y^2)\,dxdy$, T az $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(2,1)$ és $D(1,1)$ csucspontu trapéz.

9. Számitsuk ki az alábbi tartományok területét!

$\boxed{a)}$ $T = y=x/3$ és $y=\sqrt{x}$ görbék által határolt tartomány.

b) $T = \{(x,y) : x\leq y\leq 2x;\ 0\leq x\leq 1\} \cap \{(x,y) : x^2+y^2\leq 1\}$.

c) $T = \{(x,y) : (x-1)^2+y^2\geq 1\} \cap \{(x,y) : (x-2)^2+y^2\leq 1\}$.

10. Határozzuk meg az
$$\iint\limits_{\substack{1\leq x^2+y^2\leq 4\\ x\geq 0}} \frac{x-y}{x^2+y^2}\,dxdy$$
integrál értékét!

11. Milyen T tartományok esetén kapunk a polárkoordinátás helyettesités után, állandó integrációs határokat?

Határozzuk meg a következő kettős integrálok értékét!

12. $\iint\limits_T y^2\,dxdy$, $T = x = a\,(t-\sin t)$, $y = a\,(1-\cos t)$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ egyenlető ciklois első ivével és az X tengellyel határolt tartomány.

13. $$\iint\limits_{\substack{|x|\leq 1\\ 0\leq y\leq 2}} \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$$

14. $$\iint\limits_{\substack{0\leq x\leq \pi\\ 0\leq y\leq \pi}} |\cos(x+y)|\,dxdy$$

15. $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dxdy$

16. Bizonyitsuk be, hogy

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} x^m y^n \, dxdy = 0,$$

ha az m és n természetes számok közül legalább az egyik páratlan!

17. Milyen arányban osztjaketté az $y^2 = 2x$ parabola az $x^2 + y^2 = 8$ kör területét?

18. Számitsuk ki az alábbi 4-4 görbével határolt tartományok területét!

a) $y^2 = x, \ y^2 = x/2, \ y = x/2, \ y = x/3$

b) $xy = 1, \ xy = 4, \ y = x, \ y = 2x$ $\quad (x \ 0, > y > 0)$

c) $xy = 1, \ xy = 4, \ y = x^2, \ y = x^2/2$

d) $x^2 = ay, \ x^2 = by, \ x^3 = cy^2, \ x^3 = dy^2$ $\quad (0 < a < b, \ 0 < c < d)$

e) $y^2 = 2x, \ y^2 = 4x, \ x^2 = y, \ x^2 = 2y$

19. Határozzuk meg az $\iint (x^2+y^2)\, dxdy$ integrál értékét, ha

$T = x^2 - y^2 = 1,$

$x^2 - y^2 = 9,$

$y = 1/2x,$

$y = 2/x$ görbék által határolt első siknegyedbeli tartomány.

20. Legyen T origóközéppontu, egységnyi és R sugaru körökkel határolt körgyürü. Határozzuk meg R értékét ugy, hogy

$$\iint\limits_T \frac{dx\,dy}{x^2+y^2} = 3$$ teljesüljön!

21. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét az alábbi feladatokban!

a) $\int_{-1}^{0}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} f(x,y)\,dydx$

b) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x^2} f(x,y)\,dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{2} f(x,y)\,dydx + \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x} f(x,y)\,dydx$

c) $\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x^2} f(x,y)\,dydx + \int_{\sqrt{2}}^{4}\int_{0}^{2} f(x,y)\,dydx.$

22. Számitsuk ki a következő integrálok értékét!

$\boxed{a)}$ $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1} y\,e^{-x^2}\,dxdy$

b) $\int_{0}^{1}\int_{3\sqrt{y^2}}^{1} y\cos x^2\,dxdy$

c) $\int_{0}^{1}\int_{x}^{1} \frac{x\sin y}{y}\,dydx$

d) $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{y}}^{1} \sqrt{1+x^3}\,dxdy$

23. Határozzuk meg a következő kettős integrál értékét!

$$\iint_{|x|+|y|\le 1} dx\,dy$$

$\boxed{24}$ Számitsuk ki az alábbi kettős integrál értékét!

$$\iint_T x^2 y\,dxdy, \qquad T = \left\{ (x,y) :\ -3 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \right\}$$

3. Az integrálszámítás középérték tételének alkalmazása kettős integrálok becslésére

25. Adjunk alsó, illetve felső becslést az alábbi integrálokra!

a) $\iint_T \left[(x^2+y^2-1)^2-6x^2\right] dxdy, \quad T=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le 4\right\}$

b) $\iint_T \left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdy, \quad T=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le 1, \quad 0 \le x \le 1\right\}$

c) $\iint_T (xye^{-x+y}\, dxdy, \quad T=\left\{(x,y): 0 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 0\right\}$

26. Számitsuk ki az $f(x,y)=\sin^2 x \cdot \sin^2 y$ függvény $T=\left\{(x,y): 0 < x \le \pi, \quad 0 \le y \le \pi\right\}$ tartományra vonatkozó integrál középértékét!

Mutassuk meg, hogy teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek!

27. $$-\frac{\ln 4}{2} \le \iint_T \ln \frac{x^2+y^2}{2}\, dxdy \le 0,$$

ahol $T=\left\{(x,y): x=1 \wedge y=1 \wedge y=1-x\right\}$

28. $$\frac{1}{5e} \le \int\limits_{0 \le x \le 1} \int\limits_{1 \le x \le 2} \frac{1}{e^x (x^2+y^2)}\, dx \le 1$$

29. Mekkora hibát követünk el, ha az alábbi integrál valódi értéke helyett, az integrálszámitás középérték tételéből adódó alsó és felső becslések számtani közepével számolunk?

$$\iint_T x^2(1-x^2-y^2)\, dxdy, \quad T=\left\{(x,y): x^2+y^2 \le 1\right\}$$

4. Hármasintegrálok kiszámítása, transzformációk alkalmazása, az integrál sorrendjének cseréje, becslések

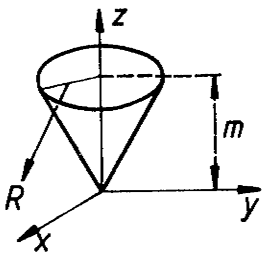
30. Számitsuk ki az alábbi hármasintegrálok értékét!

a) $\iiint_V z\,y\,x^2\,dxdydz$, $\quad V = \{(x, y, z):\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$

b) $\iiint_V e^{x+y+z}\,dxdydz$, $\quad V = \{(x, y, z):\ 0 \leq z \leq x + y,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1\}$

c) $\iiint_V (y^2 + z^2)\,dxdydz$, $\quad V$ az $x^2 + y^2 \leq 4$ alapkörű egyeneshengernek a $z = 0$ és $z = 8$ síkok közé eső része.

d) $\iiint_V (x^2 + y^2)\,dxdydz$, $\quad V$ az ábrán látható egyenes körkup, amelynek magassága m, alapkörének sugara R.



e) $\iiint_V x\,y^2\,z^3\,dxdydz$, $\quad \{V = (x, y, z) :\ 0 \leq z \leq xy,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1\}$

f) $\iiint_V \dfrac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$, $\quad V$ az $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$ és $z = 0$ síkokkal határolt tartomány.

g) $\iiint_V x\,y\,z\,dxdydz$, $\quad V$ az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ része.

h) $\iiint_V \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, $\quad V = \left\{(x, y, z):\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}$

i) $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, V az $x^2+y^2-z^2$, $z=1$ felületekkel határolt tartomány.

31. Fejezzük ki egyetlen hármasintegrállal az alábbi 2-2 hármas integrál összegét!

a) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^x \int\limits_0^{1-y} f(x,y,z)\,dydzdx + \int\limits_0^1 \int\limits_x^1 \int\limits_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\,dydzdx$

b) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^1 f(x,y,z)\,dydzdx + \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^{x^2+1} \int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)\,dydzdx$

32. Határozzuk meg az $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ függvény integrál középértékét az $x^2+y^2+z^2 \leqq x+y+z$ tartományon, ahol $x+y+z \geqq 0$.

33. Adjunk alsó és felső becslést az alábbi integrálra!

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<R} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}},$$

ahol $a^2+b^2+c^2>R^2$.

5. A kettős és hármas integrál alkalmazásai

(térfogatszámitás, mechanikai alkalmazások - tömeg, sulypont, nyomatékok stb.)

34. Számitsuk ki az alábbi felületekkel határolt testek térfogatát!

$\boxed{\text{a)}}$ $z = x^2 - y^2$ nyeregfelület $z>0$ része,
$z = 0$ sik,
$x^2+y^2 = 1$ alapkörü egyenes körhenger.

b) $z = x^2+y^2$ paraboloid,
$z = 0$ sik,
$(x-2)^2+y^2 = 4$ alapkörü egyenes körhenger.

c) $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kup,
$z = 0$ sik, $(x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4$ alapkörü henger.

d) $2x = y^2 + 4z^2$ elliptikus paraboloid,
$x = 1$ sik.

e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kup,
$z = 6 - x^2 - y^2$ forgásparaboloid.

f) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb,
$x^2 + y^2 - x = 0$ alapkörü egyenes körhenger. (Viviani féle test)

g) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ (ellipszoid térfogata)

35. Határozzuk meg a $\{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2 - x - y,\ x^2 + y^2 = 1\}$ test térfogatát!

36. Számitsuk ki az R sugaru $2\pi/3$ nyilásszögü gömbcikk térfogatát!

37. Határozzuk meg a $z = Ax^2 + By^2$; $A > 0$, $B > 0$, elliptikus paraboloid által a $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ alapu négyszögre állitott hasább $z \geq 0$ részéből levágott test térfogatát!.

$\boxed{38.}$ Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ felület $z > 0$ része, a $z = 0$ sik által határolt homogén test sulypontjának koordinátáit!

39. Számitsuk ki az $y^2 = x$ vezérgörbéjü, z tengellyel párhuzamos alkotóju hengerből az $x = 1$, $z = 0$ és $5x + 4y = 20$ sikokkal lemetszett homogén térrész sulypontjának koordinátáit!

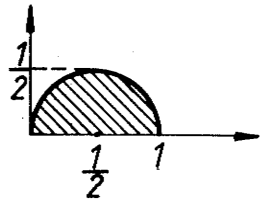
40. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2/4$,
$z = \sqrt{(x^2 + y^2)/3}$ felületekkel határolt homogén tömegeloszlásu test sulypontjának koordinátáit!

41. Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ nyeregfelület $z > 0$, $y > 0$ része, az $x^2 + y^2 = 1$ vezérgörbéjü egyenes körhenger és az $y = 0$, $z = 0$ sikok által bezárt homogén test sulypontját!

42. Határozzuk meg az $r = \phi$ egyenletű archimedesi spirális és a $\phi = 0$, $\phi = \pi/2$ egyenletű félegyenesekkel határolt egységnyi sűrűségű lemez sulypontját és centrális tehetetlenségi nyomatékát!

43. Számitsuk ki egy kockának a testátlóira vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát homogén sűrűség esetén!

44. Számitsuk ki az ábrán látható lemezszerű test centrális tehetetlenségi nyomatékát, ha sűrűsége: $\rho = xy + 1$!



45. Határozzuk meg a $z = 4 - y^2$, $z > 0$ parabolikus henger, az $x^2 + y^2 = 1$ alapkörű egyenes körhenger és a $z = 0$ sik által határolt egységnyi sűrűségű test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

6. Kettős és hármas improprius integrálok

46. Határozzuk meg a $z = 0$ sik, az $x^2 + y^2 = 1$ alapkörű egyenes körhenger és a $z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ felület által határolt térrész térfogatát!

47. Számitsuk ki az $\iint_T \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$ $T = \{(x, y) : x \geq y^2\}$ integrál értékét!

48. Milyen kitevők mellett konvergens a $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^n}}$ integrál, ha a V tartomány:

a) a $z \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 0$ térnyolcadból kivágott $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ térrész;

b) origó körüli egységsugaru gömb?

49. Határozzuk meg az $\iint_T e^{-(x+y)} dxdy$ integrál értékét, ha T

a) az $x > 0, > y > 0$ siknegyed;
b) az $x < 0, > y > 0$ siknegyed!

50. Számitsuk ki az $\iiint_V e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dxdydz$ integrál értékét ha az integrációs tartomány a három dimenziós tér!

51. Határozzuk meg a $z = e^{-(x^2+y^2)}$ felület és az (x, y) sik által adott egységnyi sürüségü test z tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát!

7. Paraméteres integrálok

(folytonosság, határérték képzés, differenciálás, integrálás, impropriuś paraméteres integrálok.)

52. Tegyük fel, hogy $f(x)$ folytonos az $[a,b]$ intervallumon. Bizonyitsuk be, hogy

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\alpha}^{x}\left[f(t+h) - f(t)\right]dt = f(x) - f(\alpha).$$

53. Ábrázoljuk az $F(y) = \int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)\,dx$ függvényt!

54. Számitsuk ki a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{t\to 0}\int_t^{1+t}\frac{1}{1+x^2+t^2}\,dx$

b) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+t^2}\,dx$

c) $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^2 x^2 \cos tx\,dx$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+(1+\frac{x}{n})^n}$

55.

55. Oldjuk meg a $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-n \sin x} \, dx$ határérték feladatot!

56. Határozzuk meg az alábbi $F(x)$ függvények derivált függvényét!

a) $F(x) = \int\limits_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) \, dt$

b) $F(x) = \int\limits_0^{x^2} \sqrt{1 + t^2} \, dt$

c) $F(x) = \int\limits_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

d) $F(x) = \int\limits_x^{x^2} e^{-xt^2} \, dt$

e) $F(x) = \int\limits_{\sin x}^{\cos x} e^x \sqrt{1-t^2} \, dt$

57. Legyen $f(x)$ differenciálható függvény és

$$F(x) = \int\limits_0^x (x+t) f(t) \, dt.$$

Határozzuk meg az $F''(x)$ függvényt!

58. Legyen $F(x) = \int\limits_0^x f(t) (x-t)^{n-1} \, dt.$

Határozzuk meg az $F^{(n)}(x)$ függvényt!

59. Igazoljuk a $\frac{d}{du} \int\limits_u^v \sin x^2 \, dx + \frac{d}{dv} \int\limits_u^v \sin x^2 \, dx = \int\limits_{u^2}^{v^2} \cos x \, dx$

egyenlőtlenséget! (u és v egymástól független változók)

60. Legyen $f(x) \geq 0$ folytonos függvény. Bizonyitsuk be, hogy $x \geq 0$ esetén

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t\, f(t)\, dt}{\int_0^x f(t)\, dt}$$ monoton növekedő függvény!

61. Határozzuk meg az $\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$ impropriius paraméteres integrál konvergencia tartományát!

62. Felcserélhető-e az integrálás és a határértékképzés sorrendje a

$$\lim_{t \to +0} \int_0^{+\infty} t\, e^{-tx}\, dx$$

kifejezésben?

MEGOLDÁSOK

I. Valós többváltozós függvények differenciálszámítása

1. Az R^m tér bármely két x és y pontjához hozzárendelt $d(x,y)$ függvény távolság, ha rendelkezik az

1. $d(x,y) \geqq 0, \ \forall\ x,y \in R^m$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x), \ \forall\ x,y \in R^m$
4. $d(x,y) \leqq d(x,z) + d(z,y), \ \forall\ x,y,z \in R^m$

tulajdonságokkal.

1. Igen. Az 1., 2., 3. tulajdonságok teljesülése a $\sqrt{x}$ és az $|x|$ definiciójából következik. A 4. tulajdonság, azaz $\sqrt{|x-y|} \leqq \sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}$ is teljesül, mert

$$|x-y| \leqq |x-z| + |z-y| \leqq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z||z-y|} = \left(\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|}\right)^2.$$

2. Nem. A 2. tulajdonság nem teljesül. Például:

$x = 2,\ \ y = 1,\ \ x \neq y,\ \ |x - 2y| = |2 - 2| = 0.$

3. Nem. A 2. tulajdonság nem teljesül. Példa:

$(x_1, x_2) = (1,1),\ (y_1, y_2) = (-1,-1),\ (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2),$

$|x_1^2 - y_1^2| + |x_2^2 - y_2^2| = 0.$

4. Nem. A 4. tulajdonság nem teljesül. Példa:

$(x_1, x_2) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}),\ \ (y_1, y_2) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),\ \ (z_1, z_2) = (1,1),$

$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 2,\ \ (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 = \frac{1}{2},$

$(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 = \frac{1}{2},\ \ $ és $\ 2 \nleq 1.$

5. Igen. Az 1., 2., 3. tulajdonság teljesülése nyilvánvaló. A 4. tulajdonság is teljesül, mert

$$\max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i| = \max_{1 \leq i \leq m} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq m} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \leq \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - z_i| +$$

$$+ \max_{1 \leq i \leq m} |z_i - y_i| .$$

2. 1. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = (1, 1, \ldots, 1)$, mert $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+k} = 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

2. Az (a_n) sorozat divergens $m \geq 3$ esetén, mert

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^k}{n+k} = +\infty \text{ , ha } k \geq 2. \; m = 2 \text{ esetén}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = (0, 1), \quad m = 1 \text{ esetén } \lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = (1, 1, \ldots, 1)$.

4. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = (\ln 2, \ln 2, \ldots, \ln 2)$.

3. $\boxed{1.}$ Az A halmaz korlátos, mert

$$\left| \frac{1 \pm n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} + 1 \leq 2 \quad \forall \; n \in N.$$

Nem nyílt: Az A halmaznak nincs belső pontja.
Nem zárt: Tekintsük az $x_n = 1 + \frac{1}{n} \in A$ és $x'_n = -1 + \frac{1}{n} \in A$ sorozatokat. $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$ és $\lim\limits_{n \to +\infty} x'_n = -1$. Az A halmaz torlódási pontjai $1 \notin A$ és $-1 \notin A$. Nem ívszerűen összefüggő: Az $x_1 = 2 \in A$ és $x_2 = \frac{3}{2} \in A$ nem köthető össze A-beli pontokból álló folytonos görbével.

2. Korlátos, nem nyílt (pl. az $x_0 = 2 \in A$ nem belső pont), nem zárt ($x_n = \frac{2}{n} \in A$, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0 \notin A$ és torlódási pont), nem ívszerűen összefüggő.
3. Korlátos, nyílt, nem zárt, ívszerűen összefüggő.
4. Korlátos, nem nyílt, nem zárt, ívszerűen összefüggő.
5. Nem nyílt ($(0,0) \in A$ és nem belső pont), zárt (minden határpont $\in A$), nem korlátos $\forall P > 0$, $\exists a_1(x_1, 0) \in A$, $x_1 > 0$, melyre $d(0, a_1) = x_1 > P$), ívszerűen összefüggő.
6. **Nem nyílt ($(0,0) \in A$ és nem belső pont), zárt (minden határpont $\in A$), nem korlátos, ívszerűen összefüggő.**
7. Nem nyílt, zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
8. Nem nyílt, nem zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
9. Nyílt, nem zárt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.
10. Nem nyílt ($(1,1) \in A$ és nem belső pont), nem zárt ($a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \in A$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = (0,0) \notin A$ és torlódási pont), korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
11. Nyílt, nem zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.
12. Ha $P_0 \in A$, akkor A zárt halmaz. Az A halmaz nem lehet nyílt.

4. Nyílt halmaz esetén igaz, zárt halmaz esetén nem.

a) Legyen $E \subset R^2$ nyílt halmaz, és $x_0 \in E$ tetszőleges pont. Mivel x_0 belső pont, $\exists \delta > 0$, hogy $K(x_0, \delta) \subset E$. Ebből következik, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra $\dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$, tehát x_0 torlódási pont.

b) Van olyan zárt halmaz, melynek nem minden pontja torlódási pont. Pl.: $E = \{(1,1)\} \subset R^2$. E zárt halmaz és $(1,1) \in E$ nem torlódási pont.

5. 1. int E és a nyílt halmaz definíciójából következik.

3. $\forall x_0 \in G$-re, x_0 az E belső pontja $\Rightarrow x_0 \in$ int E.

$\boxed{4.}$ a) $\overline{\mathrm{int}\ E} \subset [\overline{E}]$. Ugyanis, legyen $x \notin \mathrm{int}\ E$ tetszőleges pont. Két eset lehetséges:
vagy $x \notin E \Rightarrow x \in \overline{E} \Rightarrow x \in [\overline{E}]$, vagy $x \in E \Rightarrow x$ az $\overline{E}$ torlódási pontja $\Rightarrow x \in [\overline{E}]$.
b) $[\overline{E}] \subset \overline{\mathrm{int}\ E}$. Ugyanis, legyen $x \in [\overline{E}]$. Ha x belső pontja $[\overline{E}]$-nak, akkor $x \notin E$; tehát $x \notin \mathrm{int}\ E$. Ha x határpontja $\overline{E}$-nek, akkor $x \notin \mathrm{int}\ E$.

5. Nem.

(6.) Nem. Pl.: $E = \{1\}$, $\mathrm{int}\ E = \phi$, $[\mathrm{int}\ E] = \phi$, $[\mathrm{int} E] \neq E$.

6. $\boxed{1.}$ Jelölje x_0 az E' tetszőleges torlódási pontját.

$\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\dot{K}(x_0, \frac{\varepsilon}{3}) \cap E' \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ x_1 \in \dot{K}(x_0, \frac{\varepsilon}{3})$, melyre $x_1 \in E' \Rightarrow \dot{K}(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow$ $x_0 \in E'$. Ezzel beláttuk, hogy E' minden torlódási pontját tartalmazza, tehát E' zárt.

$\boxed{2.}$ a) $[E] \subset E \cup E'$; ugyanis legyen $x_0 \notin E$ és $x_0 \in [E] \Rightarrow$
$\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_0$ az E torlódási pontja $\Rightarrow x_0 \in E' \Rightarrow x_0 \in E \cup E'$.

b) $E \cup E' \subset [E]$; ugyanis legyen $x_1 \in E'$ és $x_1 \notin E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$-ra $\dot{K}(x_1, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_1$ az E határpontja $\Rightarrow x_1 \in [E]$.
Tehát $[E] = E \cup E'$.

$\boxed{3.}$ Legyen x_0 az E torlódási pontja. $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap$ $\cap E \neq \emptyset \Rightarrow \dot{K}(x_0, \varepsilon) \cap [E] \neq \emptyset$. Tehát x_0 az $[E]$-nak is torlódási pontja.
Legyen x_1 az $[E]$ torlódási pontja. Ekkor $x_1 \in [E]$.
Ha $x_1 \in E'$, akkor x_1 az E torlódási pontja. Ha $x_1 \in E$ akkor $\forall\ \varepsilon > 0$-ra $\dot{K}(x_1, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow x_1$ az E torlódási pontja.
E és E' torlódási pontjai nem mindig egyeznek meg. Pl.:
$E = \{x : x = \frac{1}{n},\ n \in N\}$ R-ben, $E' = \{0\}$, $(E')' = \emptyset$.

7. 1. $D_f = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ zárt, korlátos, ívszerűen összefüggő.

2. $D_f = \{ (x,y) : x^2 + y^2 > 1 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.

3. $D_f = \{ (x,y) : 2k\pi \leqq x^2 + y^2 \leqq (2k+1)\pi \; , \; k = 0, 1, 2, \dots \}$ zárt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.

4. $D_f = \{ (x,y) : |y| \leqq |x| \; , \; x \neq 0 \}$ nem zárt, nem nyílt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.

5. $D_f = \{ (x,y) : x + y > 1 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.

6. $D_f = \{ (x_1, x_2) : x_1 + x_2 > 0 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.

7. $D_f = \{ (x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leqq 4, \; x_1^2 + x_2^2 \neq 1, \; x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \}$ nem zárt, nem nyílt, korlátos, nem ívszerűen összefüggő.

8. $D_f = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geqq 4 \}$ zárt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.

9. $D_f = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 > 0 \}$ nyílt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.

10. $D_f = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 \neq 1 \}$ nyílt, nem korlátos, nem ívszerűen összefüggő.

11. $D_f = \{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1^2 + \dots + x_m^2 \neq 0 \}$ nyílt, nem korlátos, ívszerűen összefüggő.

8. (1.) Szintvonalak: $x \cdot y = c$. $c = 0$ esetén $x = 0$ és $y \in R$ vagy $x \in R$ és $y = 0$; $c \neq 0$ esetén az $x \cdot y = c$ feltételt kielégítő pontok összessége hiperbola.
A szintvonal pontjaiból alkotott R^2-beli halmaz zárt.

(2.) Szintvonalak: $e^{x^2 + y^2} = c \geqq 1$; $x^2 + y^2 = \ln c$. $c = 1$ esetén $\{(0,0)\}$; $c > 1$ esetén $\{ (x,y) : x^2 + y^2 = \ln c \}$, azaz $\sqrt{\ln c}$ sugarú, $(0, 0)$ középpontú körvonal. E halmazok zártak.

(3.) $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 = c$; $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = c + 1$. $c = -1$ esetén $\{(1,0)\}$; $c > -1$ esetén $\{ (x_1, x_2) : (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = c + 1 \}$, azaz $\sqrt{c+1}$ sugarú, $(1, 0)$ középpontú körvonal. E halmazok zártak.

4. $\{(x_1, x_2) : 4x_1 + 8x_2^2 = c\}$, azaz parabola. E halmaz zárt.

9. 1. A szintfelület $c = 0$ esetén az $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 0$ kúp, $c \neq 0$ esetén az $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = c$ egy- vagy kétköpenyű hiperboloid.

2. A szintfelület $x + y^2 + z^2 = c$ egyenletű paraboloid.

3. A szintfelület $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = e^c$ $(c \in R)$ egyenletű ellipszoid.

10. Igen. $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = 0$, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) = \frac{1}{2}$.

11. 1. Nem létezik.

2. Nem létezik, mert $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x + x^2}{x} = 1$, míg

$\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y + y^2}{y} = -1$.

$\boxed{3.}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$. A definiciót felhasználva és az

$x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ helyettesitést elvégezve kapjuk, hogy $\forall \varepsilon > 0$-ra

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = r \cdot \cos^2\varphi \left| \sin\varphi \right| \leqq r < \varepsilon, \text{ ha}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta(\varepsilon) = \varepsilon.$$

4. Nem létezik; 0; 0.

5. -1.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nem létezik, mert $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$,

míg $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$. Az iterált határértékek léteznek, és értékük 0.

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left[(x^2 + y^2) - \frac{2x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right] = 0,$

mert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2y\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

(Lásd 11.3. feladat).

8. Nem létezik, lásd 10. feladat.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} = 0$, mert az $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ függvény korlátos, $\lim\limits_{y\to 0} y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} = 0$.

10. $+\infty$ 11. 0 12. 0; nem létezik; nem létezik.

13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y\cdot\frac{\sin(xy)}{xy} =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,2} y\cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 2\cdot 1 = 2.$

14. Nem létezik.

15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (y\cdot\sin\frac{1}{x} + x\cdot\sin\frac{1}{y}) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0} y\cdot\sin\frac{1}{x} +$

$+ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\sin\frac{1}{y} = 0 + 0 = 0.$

16. 0

17. Nem létezik, mert $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y\to 0} \sin 0 = 0$, míg

$\lim\limits_{x\to +0} f(x, \frac{1}{2^{1/x}}) = \lim\limits_{x\to +0} \sin (x\cdot \ln\frac{1}{2^{2/x}} = \lim\limits_{x\to +0} \sin\ln\frac{1}{4} =$

$= -\sin(2\ln 2).$

18. $\lim\limits_{(x,y)\quad(0,1-0)} \frac{x+y-1}{\sqrt{x}-\sqrt{1-y}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-y}} =$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,1-0)} (\sqrt{x}+\sqrt{1-y}) = 0.$

19. 0,5

20. Nem létezik. 21. 0

22. $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \frac{1}{1+x^2-y}$ nem létezik, mert $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n,n) =$

$= \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+n^2-n} = 0$, míg $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n, n^2) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1} = 1$

Az iterált határértékek léteznek, és értékük 0

23. Egyrészt $x>0$, $y>0$ esetén $x^2+y^2 < (x+y)^2$, másrészt $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} (x+y)^2 e^{-(x+y)} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{u^2}{e^u} = 0$. Ezért a

$0 < (x^2+y^2) \cdot e^{-(x+y)} < (x+y)^2 e^{-(x+y)}$ egyenlőtlenségből $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} (x^2+y^2) \cdot e^{-(x+y)} = 0$ következik.

12. 1. Ha $y \neq x$, akkor a függvény folytonos.

2. Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor a függvény folytonos.

3. Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor a függvény folytonos, mert ekkor $x^2+16y^2 \neq 0$ és folytonos függvények hányadosa mindenhol folytonos, ahol a nevező nem nulla. Most vizsgáljuk meg a folytonosságot a $(0,0)$ pontban.

$\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = \lim \frac{-4y^2}{16y^2} = -\frac{1}{4}$, és $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) =$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$, ezért $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ nem létezik $\Rightarrow (0,0)$ pontban a függvény nem folytonos.

4. Ha $xy \neq 0$, akkor a függvény folytonos.

5. Ha a nevező, $\sin x \cdot \sin y \neq 0$, azaz $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ és $y = \ell\pi$ $(\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, akkor a függvény biztosan folytonos. A $(0,0)$ pontban: $f(0,0) = 1$,

$\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{y}{\sin y} = 1 \Rightarrow$ a $(0,0)$ pontban a függvény folytonos. A többi pontban nem folytonos.

6. Ha $y \neq 0$, akkor a függvény folytonos. Az $(a, 0)$, $a \neq 0$ pontokban nem létezik határérték, a függvény nem folytonos. A $(0, 0)$ pontban $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} = 0 = f(0, 0)$, tehát a függvény folytonos ebben a pontban.

7. R^2-ben folytonos. A folytonosságot csak a $(0, 0)$ pontban kell külön vizsgálni. $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy

$$|(2x+3y)\ln(x^2+y^2) - 0| = |2x+3y| \cdot |\ln(x^2+y^2)| =$$
$$= r\,|2\cos\varphi + 3\sin\varphi| \cdot |\ln r^2| \leqq 5r\,|\ln r^2| < \varepsilon,$$ ha

$r = \sqrt{x^2+y^2} < \delta(\varepsilon)$. Ilyen $\delta(\varepsilon)$ létezik, mert $\lim\limits_{r\to 0} r\ln r = 0$.

8.. R^2-ben folytonos.

9. Ha $x + y \neq 0$, akkor $x^3 + y^3 \neq 0$, tehát a függvény folytonos. (Folytonos függvények hányadosa folytonos, ha a nevező nem nulla.)

10. Ha $xy \neq 0$, akkor a függvény folytonos.

11. Ha $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z \neq 0$, azaz $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, $y \neq l\pi$ $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ és $z \neq n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, akkor a függvény folytonos.

12. A $(0, 0, 0)$ pontot kivéve a függvény folytonos.

13. Az A halmazra vonatkozóan nem, a B halmazra vonatkozóan folytonos a függvény.

14. A függvény nem korlátos az értelmezési tartományán. $D_f = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a D_f torlódási pontja

és $\lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x, x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^2}{\sqrt{1-2x^2}} = +\infty$.

15. 1. Az A halmaz korlátos és zárt, $f(x, y)$ folytonos A - n $\Rightarrow f(x, y)$ egyenletesen folytonos A-n.

2. Nem. Legyen $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\forall \delta > 0$-hoz $\exists\ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ úgy, hogy $\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} < \delta$ és $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \geqq \varepsilon_0$. Válasszuk meg $k \in N$ érté-

két úgy, hogy az $(x_1, y_1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}}, 0\right)$ és $(x_2, y_2) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}, 0\right)$ pontok távolságára $\left|\dfrac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}} - \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}\right| < \delta$ teljesüljön. Ekkor $\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - \sin k\pi\right| = |1 - 0 =| \; 1 > \varepsilon_0$.

3. Az $f(x,y)$ függvény folytonos az A korlátos és zárt halmazon. Ebből következik, hogy a függvény egyenletesen folytonos A-n.

4. Igen. $\left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| \leqq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ miatt $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ jó.

16. 1. $D_{f_x} = D_{f_y} = \{(x,y) : x + y > 0\}$, $f_x = \dfrac{3x^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + y^3}}$,

$$f_y = \frac{3y^2}{2 \cdot \sqrt{x^3 + y^3}}.$$

2. $D_{f_x} = D_{f_y} = \{(x,y) : |x| \neq |y|,\quad x, y \in R\} \cup \{0, 0\}$

$$f_x = \begin{cases} \dfrac{-3yx^2 - 3y^3}{(x^2 - y^2)^2} & \text{ha } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} \dfrac{3x^3 + 3xy^2}{(x^2 - y^2)^2} & \text{ha } |x| \neq |y| \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

3. $D_{f_x} = D_{f_y} = R^2$

$$f_x = \begin{cases} \dfrac{2xy\,(x^2 + y^2)\cos(x^2 y) - 2x\sin(x^2 y)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$