BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR

KIEGÉSZÍTŐ MATEMATIKAI PÉLDATÁR

Összeállította:
KERTÉSZ VIKTOR
SZABÓ GYÖRGY
ZIBOLEN ENDRE
Szerkesztette:
KERTÉSZ VIKTOR

Műegyetemi Kiadó, 1994.

Összeállította:

Kertész Viktor egyetemi docens (I - VIII., valamint IX.1 - IX.5.)
Szabó György egyetemi tanársegéd (X.)
Zibolen Endre egyetemi tanársegéd (IX. 6.)

Jegyzet azonosító: **41057**

A Budapesti Műszaki Egyetem Gépészmérnöki Kar megrendelése alapján kiadja a **Műegyetemi Kiadó**.

Felelős vezető: Veress János
Terjedelem: 18,75 A/5 ív
Készült az **Új Élet Mg. Termelő és Szolgáltató Szöv., Magyaralmás**
Nyomdaipari Önelszámoló részlegében
Felelős vezető: Frigy Ottóné
Munkaszám: 93/311

Ez a példatár a Dr. Farkas Miklós egyetemi tanár szerkesztésében megjelent Matematika c. 8 kötetes jegyzet, valamint Dr. Kertész Viktor egyetemi docens Funkcionálanalízis c. jegyzet anyagára épül és szervesen illeszkedik Dr. Farkas Miklós ugyancsak 8 kötetes Matematika Példatár c. jegyzetéhez. A Matematika Példatár első kiadásai óta eltelt hosszú idő, és az újabb, Funkcionálanalízis jegyzet tett szükségessé jelen kiegészítés kiadását.

Valamennyi feladat megoldása a könyv végén megtalálható. A feladat sorszáma előtti * jelzés arra utal, hogy a megoldáshoz megoldási útmutatást is közlünk. A bekeretezett sorszámú feladatokat pedig részletesen kidolgoztuk.

Végezetül néhány javaslat, megjegyzés e példatár használóinak.

A példatár feltételezi a nappali gépészmérnök képzés matematika előadásainak és gyakorlatainak a látogatását, mivel néhány olyan ismeretet is feltételez, amelyről ott szó esik, a nyolckötetes jegyzetben azonban nem szerepel. Egy-két feladat, vagy annak megoldási módszere megsérti a szigorú tematikus rendet (lásd pl. a I.4/2 feladatot, ahol a sorozatoknál szerepel a később tanulandó deriválás). E feladatok nem az évközi gyakorlásra, hanem a vizsgákra, illetve a szigorlatra való felkészülésre készültek. Ez azonban nem okozhat problémát, mert e kötet használatát amúgy is a gyakorlatvezetők útmutatásával együtt képzeljük el.

A használó figyelmét arra is fel kell hívnunk, hogy jelöléseink egy-egy feladaton belül ugyan egyértelműek és következetesek, azonban az egész kötetet tekintve ez a következetesség nincs mindenhol meg (például a vektorokat aláhúzás nélkül, egy ill. két aláhúzással is jelöljük). Véleményünk szerint helyes, ha a hallgatók, akik néhány év múlva nemzetközi szakirodalmat olvasó, gyakorló mérnökök lesznek, már most megszokják, hogy a jelölésrendszerben semmiféle merev kötöttség nincsen.

A kidolgozott feladatoknál a szövegben esetleg nem szembetűnő végeredményt ahol csak lehetséges volt, bekereteztük, hogy ezzel segítsük a kötet használatát. Ezt kívántuk segíteni továbbá a lapok tetején a szakaszok sorszámának a feltüntetésével is.

A szerkesztő

TARTALOM

	Feladatok	Megoldások
I. A matematika alapjai	7	100
I.1. Halmazok és függvények	7	100
I.2. Matematikai logika	8	102
I.3. Valós számok	9	103
I.4. Sorozatok	10	104
II. Egyváltozós valós függvények	13	108
II.1. Egyváltozós valós függvények elemi tulajdonságai	13	108
II.2. Határérték, folytonosság	14	112
II.3. Deriválás és alkalmazásai	15	114
II.4. Integrálszámítás	19	135
III. Algebra	21	145
III.1. Komplex algebra	21	145
III.2. Mátrixok	21	146
III.3. Másodrendű felületek	23	152
IV. Végtelen sorok	25	155
IV.1. Hatványsorok	25	155
IV.2. Függvénysorozatok	26	159
IV.3. Fourier-sorok	27	161
V. Többváltozós valós függvények	30	167
V.1. Felületek szemléltetése, határérték, folytonosság	30	167
V.2. Többdimenziós tartományok	31	168
V.3. Többváltozós függvények deriválása	31	169
V.4. Szélsőérték számítás	33	173
V.5. Implicit megadású függvényrendszerek. Inverz függvényrendszerek	34	177
V.6. Többes integrálok	37	193
VI. Vektoranalízis	38	196
VI.1. Tenzorok	38	196
VI.2. Potenciálelmélet	39	198
VI.3. Integrál átalakító tételek	39	200
VII. Komplex függvények	41	202
VII.1. Komplex numerikus sorok	41	202
VII.2. Elemi függvények	41	203
VII.3. Valós változós komplex értékű függvények deriváltjai	42	203
VII.4. Komplex függvények integrálása	42	204

	Feladatok	Megoldások
VIII. Differenciálegyenletek	44	207
VIII.1. Szukcesszív approximáció	44	207
VIII.2. Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek	44	210
VIII.3. Stabilitás	46	218
VIII.4. Parciális differenciálegyenletek..	47	223
IX. Funkcionálanalízis	49	228
IX.1. Lineáris terek	49	228
IX.2. Normált terek	51	244
IX.3. Operátorok normált terekben	52	246
IX.4. Hilbert-terek	55	257
IX.5. Fourier-sorok	57	259
IX.6. Laplace-transzformáció	59	267
1. Laplace-transzformáció (elemi) tulajdonságai	59	267
2. A Laplace-transzformáció alkalmazásai	72	278
2.1 Állandó együtthatós differenciálegyenletek	72	278
2.2 Speciális egyenletek	74	281
2.3 Állandó együtthatós differenciálegyenlet-rendszerek...	74	284
2.4 Integrálegyenletek és integrálegyenlet-rendszerek	75	285
X. Gyakorlati számítási eljárások	77	287
X.1. Egyismeretlenes egyenletek megoldása.	77	287
X.2. Empirikus képletek előállítása	82	292
X.3. Determinánsok és mátrixok	92	296
X.4. Véges differenciák és alkalmazásaik..	97	299

I. A MATEMATIKA ALAPJAI

I. 1. HALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK

$\boxed{1.}$ Rendezzük sorba az $(a_1+\ldots+a_n)(b_2+\ldots+b_n)$ szorzat tagjait!

$\boxed{2.}$ Számláljuk meg a pozitív egész számokból képezett rendezett párok halmazát!

$\boxed{3.}$ Számláljuk meg a racionális számokat!

*4. Tekintsük azt a H_1 halmazt, amelynek elemei az

$x \mapsto c \sin n x$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}$ alakú függvények.
Az alábbi állítások közül melyek igazak?

a) $f \in H_1$, ahol $f(x) = 3 \sin^2 x$

b) $g \in H_1$, ahol $g(x) = 3 \sin x \cos x$

c) $h \in H_1$, ahol $h(x) = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$

d) $k \in H_1$, ahol $k(x) = 1 - \cos 2x$

e) $l \in H_1$, ahol $l(x) = 2\cos^2 x - 2 \sin^2 x$

5. Legyen H_2 az a halmaz, amelynek elemei az $x \mapsto c \cos n x$; H_1 az előző feladatban szereplő halmaz; $x \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$; $c \in \mathbb{R}$ alakú függvények. Legyen továbbá $H = H_1 \cup H_2$. Akkor az előző példában szereplő f, g, h, k és l függvények közül melyek elemei H-nak?

6. Legyen K az a halmaz, amelynek elemei az

$f(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, $f_i \in H, \leq 1 \leq i \leq n$

alakú f függvények; H az előző feladatban szereplő halmaz. Akkor a 4. példában szereplő f, g, h, k és l függvények közül melyek elemei K-nak?

$\boxed{7.}$ Legyen H az $\mathbb{R}$-n értelmezett egyváltozós valós függvények halmaza. Tekinstük azt az $F: H \mapsto \mathbb{R}$ funkcionált, amely bármely $f \in H$-hoz az $f(0)$ valós számot rendeli, vagyis $f \mapsto f(0)$.
Mi e funkcionál értékkészlete? Létezik-e inverze?
Adjuk meg F egy leszűkítését és egy kiterjesztését!

8. Legyen G_τ az az operátor ($\tau \in \mathbb{R}$ valamely rögzített szám), amelyre $G_\tau: H \mapsto H$ (ahol H a 7. feladat szerinti halmaz) és G_τ H minden f eleméhez azt az $\tilde{f} \in H$ függvényt rendeli, amelyre $\tilde{f}(x) = f(x-\tau)$. (Más szóval G_τ f-t τ-val "jobbra eltolja".)
Mutassuk meg, hogy
a) G_τ-nak létezik inverze (adjuk is meg az inverz operátort!);
b) $G_{\tau_1} \circ G_{\tau_2} = G_{\tau_1+\tau_2}$
c) $(F \circ G_\tau)(f) = f(-\tau)$, ahol F a 7. feladat szerinti funkcionál.

9. Legyen G_g az az operátor ($g \in H$ valamely rögzített függvény; H a 7. feladat szerinti), amelyre $G_g: H \mapsto H$ és G_g H minden f eleméhez az $\tilde{f} = f \circ g \in H$ függvényt rendeli $f \mapsto f \circ g$.
Mutassuk meg, hogy
a) G_g-nek általában nem létezik inverze
b) $G_g \circ G_h = G_{h \circ g}$
c) Ha $e: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ az identitás függvény ($x \mapsto x$), akkor
$G_e = E$
az identitás operátor: $f \mapsto f$.

10. Legyen Φ az $x \mapsto ax+b$; $a,b \in \mathbb{R}$; alakú függvények halmaza. Mutassuk meg, hogy $\varphi \in \Phi$ esetén G_φ (ld. a 9. feladatot) Φ-t önmagára képezi le. G_φ Φ-re való leszűkítésének milyen esetben létezik inverze?

I.2 MATEMATIKAI LOGIKA

1. Tagadjuk az alábbi formalizált ítéleteket olyan módon, hogy a negáció $\neg$ jele csak közvetlenül a betűkkel jelölt elemi ítéletek előtt fordulhat elő! Mondjunk olyan konkrét ítéleteket, amelyeket éppen az alanti sémák valamelyike szerint lehet formalizálni! Állapítsuk meg, hogy az adott ítélet vagy a tagadása igaz-e?
a) $A \wedge \neg B$
b) $\neg A \to B$
c) $\forall x (A(x) \to B(x))$
d) $\forall x \exists y (A(x,y) \to B(x,y))$
e) $\exists x (A(x) \vee B(x))$
f) $\forall x \exists y \forall z (A(x,y,z) \to B(x,y,z))$

2. Az alábbi formalizált ítéletek közül melyek bizonyíthatók példával? Az adott példa milyen állításnak tegyen eleget? Mondjunk olyan konkrét ítéleteket, amelyeket éppen az alanti sémák valamelyike szerint lehet formalizálni!

a) $\exists x\ A(x)$

b) $\exists x\ \forall y\ A(x,y)$

c) $\neg\exists x\ \forall y\ A(x,y)$

d) $\forall x\ A(x)$

e) $\forall x\ \exists y\ A(x,y)$

f) $\neg\forall x\ \exists y\ A(x,y)$

$\boxed{3.}$ Legyen A C-nek szükséges feltétele, B pedig elégséges feltétele. Akkor A V B milyen feltétele C-nek?

4. Legyen B C-nek elégséges feltétele és A pedig B-nek elégséges feltétele. Akkor A milyen feltétele C-nek?

5. Legyen C-nek B, B-nek pedig A az elégséges feltétele. Akkor A milyen feltétele C-nek?

6. Legyen A C-nek szükséges feltétele, A V B pedig C-nek elégséges feltétele. Szemléltessük A-t, B-t és C-t Venn diagrammal! Milyen feltétele B C-nek?

7. Mondjunk konkrét példákat a 3. - 6. feladatokra!

I. 3. VALÓS SZÁMOK

*1. Igazoljuk az alábbi becsléseket:

a) $1 \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}; \quad x \geq 0$

b) $1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 1+x; \quad x \geq 0$

c) $|a| \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq |a| + \frac{1}{2}\frac{b^2}{|a|}$.

$\boxed{2.}$ Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(1+\varepsilon)^n < 1 + 2n\varepsilon,$$

ha $\frac{1}{2n} > \varepsilon > 0; \quad n \geq 1$.

Vessük össze ezt az egyenlőtlenséget a Bernoulli egyenlőtlenséggel!

3. A 2. feladat felhasználásával adjunk alsó és felső becslést az alábbi kifejezésekre:
   a) $1{,}0023^{10}$
   b) $2{,}0011^{10}$
   c) $(a + b)^3$; $a > 10b$

$\boxed{4.}$ Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(p - q)^2 \geq \frac{c}{c + 1} p^2 - cq^2,$$

ahol $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $c > -1$.

*5. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$av^2 + b(u - v)^2 \geq \frac{ab}{a + b} u^2,$$

ahol $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$; $a > 0$; $b > 0$.

*6. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$ax^2+2bxy+cy^2 \leq (a+|b|)\ x^2+(c+|b|)y^2,$$

ahol $a,b,c \in \mathbb{R}$.

*7. A 6. feladat felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$-5x^2 + xy - 3y^2 \leq 0.$$

Mi az egyenlőség feltétele?

I. 4. SOROZATOK

1. Határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\overline{\lim}\, a_n$ és $\underline{\lim}\, a_n$ értékeket, továbbá a sorozat legnagyobb és legkisebb elemét, végül a sorozat elemeiből képzett halmaz supremumát és infimumát, ha
   a) $a_n = 1 + (-1)^n$
   b) $a_n = \sqrt[n]{n!}$; $n > 0$
   c) $\cos n \frac{\pi}{4}$
   d) $\frac{n + (-1)^n}{n + 2}$

e) $\sqrt[n]{n}$; $n > 0$

f) $\dfrac{n^2 + 1}{n^2 + 2}$

g) $\log \frac{1}{n}$; $n > 0$

h) $a_n = (-1)^n$

i) $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)$

j) $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n + 1}$

k) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n + 1}$

l) $a_n = \cos n\pi + \dfrac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n + 1}$

m) a_n a racionális számok egy megszámlálásában az n-edik racionális szám (l. az I.1./3. feladatot!)

*2. Legyen $a_o = 1$ és

$$a_{n+1} = 2 + \frac{3}{a_n},$$

továbbá $b_o = 1$ és

$$b_{n+1} = 1 + \frac{6}{b_n}$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ és $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ határértékeket! Melyik sorozat konvergál gyorsabban?

$\boxed{3.}$ Mutassuk meg, hogy az $a_n = (n^2+1)/(n^2+k)$ sorozat gyorsabban konvergál a $b_n = (n+1)/(n+2)$ sorozatnál, ahol $k > 0$ tetszőlegesen nagy szám.

$\boxed{4.}$ Legyen a_n és b_n olyan két sorozat, hogy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0,$$

és a_n gyorsabban kovergál, mint b_n és $b_n \neq 0$.

Mit mondhatunk ekkor az $\frac{a_n}{b_n}$ sorozatról?

5. Tekintsük az alábbi a) és b) rekurzív megadású sorozatokat:

a) $x_0 = 4$ b) $x_0 = 4$

$$x_{n+1} = \frac{21}{10 - x_n} \qquad x_{n+1} = \frac{81}{30 - x_n}$$

Hova konvergálnak ezek a sorozatok? Melyik konvergál gyorsabban?

$\boxed{6.}$ Mihez konvergál az alábbi rekurzív megadású sorozat:

$$x_{n+1} = p + \frac{A - p^2}{x_n + p},$$

ahol $A > p^2$; $p > 0$ és az x_0 kezdő elemről feltesszük, hogy $x_0 > -p$?

Hogyan függ a konvergencia sebessége p-től?

II. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

II. 1. EGYVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK ELEMI TULAJDONSÁGAI

1. Vázoljuk az

$$x \mapsto \sin 10x + \sin 9x\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

függvény grafikonját! Harmonikus rezgést ír-e le ez a függvény?

$\boxed{2.}$ Vázoljuk az

$$x \mapsto \sin 10x + \sin 3\pi x$$

függvény grafikonját! Mi a lebegés jelensége?

3. Vázoljuk az

$$x \mapsto \sin 10x + \sin x$$

függvény grafikonját!

$\boxed{4.}$ Linearizáljuk a $\sin^3 2x$ kifejezést

a) a szögösszegező képletek felhasználásával,

b) komplex algebrai eszközökkel (az Euler összefüggés felhasználásával).

*5. Fejezzük ki tg x segítségével az alábbi függvényeket:

a) $\sin 2x$
b) $\cos 2x$
c) $\operatorname{ctg} 2x$
d) $\operatorname{tg} 2x$
e) $\sin 4x$

*6. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x = 0 \\ x\left(2+\sin \frac{1}{x}\right), & \text{ha } x \neq 0 \end{cases}$$

függvény az x = 0 helyen lokálisan növekedő, de bármilyen kicsiny is $\delta > 0$, a $[-\delta, \delta]$ intervallumban nem monoton növekedő! Vázoljuk a függvény grafikonját! Melyek a függvény monoton szakaszai?

$\boxed{7.}$ Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}$-n értelmezett függvényre, amely egyetlen pontban lokálisan növekedő. Ezen kívül e függvény egyetlen pontban sem lokálisan növekedő, sem lokálisan csökkenő. Következik-e ebből, hogy a függvény nem monoton?

$\boxed{8.}$ Mutassunk példát olyan $\mathbb{R}$-n értelmezett függvényre, amely teljesíti a 7. feladat feltételeit, azonkívül sehol sem monoton!

$\boxed{9.}$ Konstruáljunk olyan $\mathbb{R}$-n értelmezett függvényt, amelynek az $x = 0$ helyen abszolút maximuma (ill. minimuma van), és a függvény itt nem monoton növekedőből monoton csökkenőbe (ill. monoton csökkenőből monoton növekedőbe) megy át!

10. Igaz-e az az állítás, hogy ha $f(x)$ periodikus, akkor $|f(x)|$ is az? Határozzuk meg a következő függvények lekisebb periódusát:

a) $\sin x$ és $|\sin x|$

b) $\operatorname{tg} x$ és $|\operatorname{tg} x|$

11. Periodikus-e a $\sin|x|$ ill. a $\cos|x|$ függvény?

12. Periodikus-e a $\sin \frac{1}{x}$ ill. az $\frac{1}{\sin x}$ függvény?

II. 2. HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

$\boxed{1.}$ Bizonyítsuk be, hogy ha f homogén lineáris, akkor $f(x) = c\,x$ valamely $c \in \mathbb{R}$-re.

x2. Legyen $y = mx + b$, ahol $b \neq 0$ és legyen $u = x - x_0$, $v = y - y_0$, ahol $y_0 = mx_0 + b$. Bizonyítsuk be, hogy y nem homogén lineáris függvénye x-nek, azonban v homogén lineáris függvénye u-nak!

x3. Az alábbi függvények közül melyek folytonosak és melyek egyenletesen folytonosak?
Adott $0 < \varepsilon$-hoz határozzuk meg a folytonosság definíciójában szereplő δ-t. Ha a függvény egyenletesen folytonos, akkor δ legyen x-től független.

a) $x \mapsto 2x$; $x \in \mathbb{R}$

b) $x \mapsto x^2$; $x \in \mathbb{R}$

c) $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \geq 0$

d) $x \mapsto x^2$; $x \in [0;1]$

e) $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \in [0;1]$

f) $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x > 0$

g) $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \geq \delta_0 > 0$

4. Mutassuk meg ellenpéldákkal, hogy a

a) Bolzano (speciális eset)
b) Weierstrass I.,II.

tételek valamennyi feltétele lényeges!

II. 3. DERIVÁLÁS ÉS ALKALMAZÁSAI

*1. Határozzuk meg az alábbi függvények derivált függgvényeit, majd ábrázoljuk az eredeti függvények grafikonjait!

a) $x \mapsto \operatorname{arc\,tg}(1 + x^2) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1 + x^2}$; $x \in \mathbb{R}$

b) $x \mapsto \operatorname{arc\,tg}(1 + x) + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1 + x}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

c) $x \mapsto \operatorname{arc\,ctg}\, g(x) + \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{g(x)}$; $x \in \mathbb{R}$,

ahol $g(x) > 0$ és g deriválható minden $x \in \mathbb{R}$-re.

d) $x \mapsto \operatorname{arc\,ctg}\, g(x) + \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{g(x)}$; $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

ahol $g(x) > 0$, ha $x > 0$, $g(0) = 0$; $g(x) < 0$, ha $x < 0$; g folytonos és deriválható minden $x \in \mathbb{R}$-re.

*2. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az

$$x \mapsto x\,\big|\,|\ln x| - 0{,}1\,\big| \quad , \; x > 0$$

függvényen!

*3. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az f függvényen:

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2| & , \text{ ha } x \leq 3 \\ \big||x - 4| - 1\big| & , \text{ ha } 3 < x < 10 \\ x\,e^x & , \text{ ha } x \geq 10 \end{cases}$$

*4. Rendezzük át az $(x - 2)^3 - (x - 2)$ polinomot

a) $x + 1$
b) $x - 1$
c) x

hatványai szerint!

[5.] Legyen $n>0$ rögzített természetes szám. Az $(x+1)^n$ polinomot írjuk fel x hatványai szerint, olymódon, hogy meghatározzuk e polinom $x_o = 0$-hoz tartozó n-edfokú Taylor-polinomját. Mutassuk meg, hogy a binomiális tétel ilymódon is bizonyítható!

[6.] Ellenőrizzük, hogy az $x^7 - x^4 - 112$ polinomnak az $x_o = 2$ gyöke. Emeljük ki az ehhez tartozó gyöktényezőt olymódon, hogy az eredeti polinomot $(x-2)$ hatványai szerint átrendezzük!

[7.] Oldjuk meg a következő differenciál egyenlőtlenségeket $(x>0)$:

a) $y' < y$
b) $y' > 2y$
c) $y' < y+1$
d) $y' > xy$

[8.] Az x és y változók polár koordinátás átírásával oldjuk meg a következő differenciálegyenlet rendszert:

$$\dot{x} = -x + x^2 y + y^3$$

$$\dot{y} = -y - xy^2 - x^3$$

(Útmutatás:

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$$

$$y(t) = r(t)\sin\varphi(t) \quad).$$

[9.] Az alábbi függvények szélsőérték helyeinek és inflexiós pontjainak környezetét írjuk le a függvény adott helyhez tartozó, megfelelő fokszámú Taylor polinomja segítségével. (Megfelelő fokszámon azt a páros (szélsőérték esetén), ill. páratlan (inflexiós pont esetén) fokszámot értjük, amelyhez tartozó Taylor-polinom legmagasabb fokszámú tagjának együtthatója nem zérus).

a) $x \mapsto x \ln x^2, \quad x>0$

b) $x \mapsto x e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$

c) $x \mapsto \dfrac{1-x}{x^2}; \quad x>0$

*10. Határozzuk meg az alábbi függvények derivált függvényeit és magasabb rendű derivált függvényeit:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

b)
$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

c) $f(x) = |x|^3$

d) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}$

e) $f(x) = \sin \arcsin x$

f) $f(x) = |x|^4$

g)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

x11. Határozzuk meg a következő függvények bal, és jobb oldali deriváltjait az x_o helyen:

a) $x \mapsto (1 - x^2)^{3/2}$; $x_o = 1$

b) $x \mapsto \arcsin x$; $x_o = 1$

c) $x \mapsto |x|$; $x_o = 0$

d) $x \mapsto x^2 \operatorname{sg} x$; $x_o = 0$

e) $x \mapsto \operatorname{sg} x$; $x_o = 0$

f) $x \mapsto [x]$; $x_o = 0$

g) $x \mapsto x + \sqrt{1 - 2x + x^2}$; $x_o = 1$

h)
$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x > 0 \\ 2x^2, & \text{ha } x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad x_o = 0$$

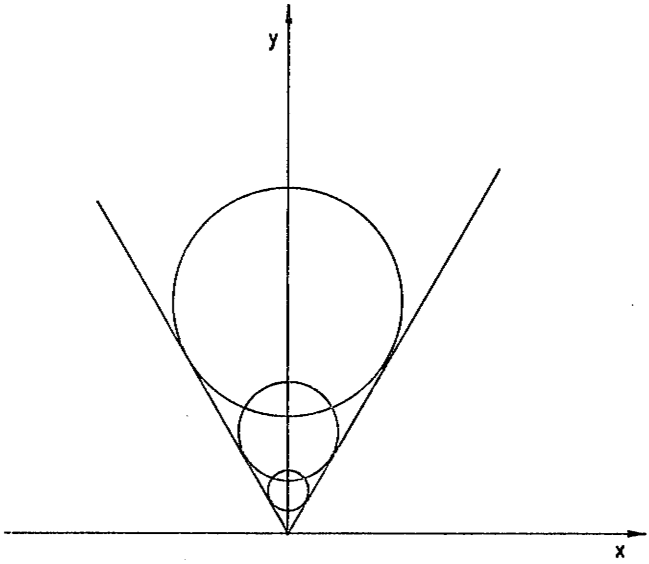
$\boxed{12.}$ Mutassuk meg ellenpéldákkal, hogy a Rolle-tétel valamennyi feltétele lényeges!

$\boxed{13.}$ Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényen:

$$x - \ln|1 + x| - \frac{x^2}{c} \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

II.3.

14. Tekintsük az $x \mapsto |x|$ függvényt. Ez az $x = 0$ helyen nem deriválható, így a görbület sem értelmezhető. Ha a görbületet úgy értelmeznénk, mint azon maximális sugarú kör sugarának a reciproka, amelyet a függvény grafikonjának "két ága közé ejtve" legalább elsőrendben érinti a grafikont az $x = 0$ helyen (ld. az ábrát!), akkor a görbület ∞ nagy lenne.



1. ábra

Létezik-e olyan pozitív, páros $f(x)$ függvény, amely szigorúan monoton csökkenőből szigorúan monoton növekedőbe megy át az $x = 0$ helyen, $f(0) = 0$, $f'(0)$ létezik (természetesen $f'(o) = 0$) és az $x = 0$ helyen ∞ görbületű olyan értelemben, hogy $\lim\limits_{x \mapsto 0} g(x) = \infty$, ahol $g(x)$ a görbület x függvényében?

$\boxed{15.}$ Mikor ad jó közelítést a Bernoulli-egyenlőtlenség?

$\boxed{16.}$ Végezzünk teljes függvényvizsgálatot az x^x függvényen!

II. 4. INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:

a) $$\int_{-10}^{10} \big||x+1|-2\big|\,dx$$

b) $$\int_{-3}^{4} \big||x^2-1|-2\big|\,dx$$

c) $$\int_{-2}^{\sqrt{3}-1} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\frac{1}{(1+x)^2}}\,dx$$

d) $$\int_{-1}^{2} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\,dx$$

e) $$\int_{0}^{35} |\sin x|\,dx$$

2. Számítsuk ki az alábbi határozatlan integrálokat próbafüggvények segítségével:

a) $\int e^{-x}\sin 2x\,dx$

b) $\int (e^{2x}\sin x + e^{x}\cos x)\,dx$

c) $\int (x\,e^{x}\sin x + e^{x}\cos x)\,dx$

d) $\int x^3 e^{-x}\sin x\,dx$

e) $\int xe^{x}(\cos x + \cos 2x)\,dx$

3. Tekintsük az $\left\{e^{-x},\ e^{-x}\cos kx,\ e^{-x}\sin kx\right\};\ k=1,2,\dots$ függvényhalmazt. Mutassuk meg, hogy ezek az e^{2x} súlyfüggvénnyel a $[0;2\pi]$ intervallumon ortogonális függvényrendszert alkotnak!

$\boxed{4.}$ A p_o, p_1, p_2,... nulladfokú, elsőfokú, másodfokú stb. normál polinomok ortogonális függvényrendszert alkotnak a $[0;1]$ intervallumon. Határozzuk meg e függvényrendszer első néhány elemét, ha $p_o \equiv 1$!

5. A felsorolt halmazalgebrai relációk közül melyek igazak és melyek hamisak ($I = [a,b]$):

a) $\Sigma_I \subset C_I^o$

b) $C_I^o \subset \Sigma_I$

c) $C_I^o \cap \Sigma_I = \emptyset$

d) $C_I^k \subset \Sigma_I$

e) $\Sigma_I \subset C_I^\infty$

f) $C_I^\infty \subset \Sigma_I$

III. ALGEBRA

III. 1. KOMPLEX ALGEBRA

×1. Határozzuk meg az alábbi komplex sor összegét:

a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^k$

b) $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^k$

2. Határozzuk meg az alábbi kifejezés kanonikus alakját:

$$(x^3 . i\ x)e^{(1+i)x}; \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Az

$$x\ e^x \cos x + e^x \sin x$$

kifejezést írjuk át $\operatorname{Re} p(x)e^{\alpha x}$ alakra, ahol $p(x)$ megfelelő fokszámú komplex együtthatós polinom, $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\boxed{4.}$ A 3. feladat szerinti átírással és komplex próbafüggvény keresésével, végül kanonikus alakra való visszaírással számítsuk ki a következő határozatlan integrált

$$\int (x\ e^x \cos x + e^x \sin x)dx$$

$\boxed{5.}$ Linearizáljuk a $\sin^4 x$ kifejezést! (l. II.1./4. feladatot!)

III. 2. MÁTRIXOK

×1. Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) A mátrix 15x15-ös méretű, diagonális mátrix, amelynek főátlójában felülről lefelé haladva sorrendben a következő elemek vannak:

1;1;1;-1;2;-1;2;1;0;5;2;-2;1;3;3;1.

e) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & -8 & -12 & -14 & -15 & -7 & -3 \end{bmatrix}$$

f) Tételezzük fel, hogy ismerjük az A,B és C mátrixokat, valamint az A^{-1} és C^{-1} mátrixokat.
Mi az $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$ mátrix inverze? (0 a zérus mátrix)

g) $\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ T & I_2 \end{bmatrix}$, ahol I_1 nxn-es, I_2 mxm-es egység mátrix, 0 nxm-es zérus mátrix és T mxn-es mátrix.

*2. Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit, sajátvektorait!

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Az A 3x3-as mátrix sajátértékei λ_1, λ_2, és λ_3 sajátvektorai pedig s_1, s_2 és s_3. A B ugyancsak 3x3-as mátrixé pedig μ_1, μ_2 és μ_3, ill. r_1, r_2 és r_3. Akkor mit modhatúnk az $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ mátrixról?

c) ld. 1.a) feladat mátrixát

d) ld. 1.b) feladat mátrixát

e) ld. 1.d) feladat mátrixát

f) ld. 1.e) feladat mátrixát, ahol $\lambda = 0$

g) ld. 1.g) feladat

h) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

*3. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} -1 & p \\ -p & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad p^2 \neq \frac{1}{4}$$

mátrix sajátértékeit, sajátvektorait a p paraméter függvényében!

III. 3. MÁSODRENDŰ FELÜLETEK

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletű felületek egyenletének kanonikus alakját és ábrázoljuk a felületeket az eredeti koordináta-rendszerben:

a) $y^2 + x - 2z = 1$

b) $\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz)+\frac{1}{\sqrt{6}}(-\sqrt{3}-1)x+(\sqrt{3}-1)y+2z)=0.$

c) $2z^2 + 2z + x - 3y = 6$

*2. Melyek az alábbi felületnek az origóhoz legközelebbi pontjai:

a) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy = 6$

b) $3x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 2xy = 6$

c) $4xy + z = 1$

IV. VÉGTELEN SOROK

IV. 1. HATVÁNYSOROK

$\boxed{1.}$ Határozzuk meg $\frac{1}{1 + \ln(1 + x)}$ Maclaurin sorának első 5 tagját!

$\boxed{2.}$ Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$ sor kielégíti az $xy' + (x+1)y = 1$ differenciálegyenletet!

*3. Határozzuk meg az $y' + xy = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ differenciálegyenlet megoldásainak Maclaurin sorát!

4. Határozzuk meg az $y' + y = x^4 - 1$ differenciálegyenlet megoldásainak Maclaruin sorát!

5. Határozzuk meg az

$$y' - y + \frac{(x-1)^5}{5!} = 0 \quad \text{differenciálegyenletnek}$$

azt a megoldását hatványsor alakjában, amelyre $y(1) = 0$.

*6. Határozzuk meg az $y' + ay = f(x)$ differenciálegyenletnek azt a megoldását, amelyre $y(0) = y_o$, ahol

a) $a = 1$; $f(x) = e^{x^2}$; $y_o = 0$

b) $a = -1$; $f(x) = e^{-x^2}$; $y_o = 0$

c) $a = 2$; $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$; $y_o = 0$

d) $a = 1$; $f(x) = e^{(x-1)^2}$; $y_o = 1$

IV. 2. FÜGGVÉNYSOROZATOK

$\boxed{1.}$ Legyen

$$f_n(x) = \frac{-n}{\left(x + \frac{n-1}{\pi}\right)^2} \cos \frac{n}{x + \frac{n-1}{\pi}},$$

ahol $x \geq 1/\pi$ és $n = 1,2,3,\ldots$.
Határozzuk meg az $I : [1/\pi,\infty) \mapsto R$ függvényt, ahol

$$I(x) = \lim_{n\mapsto\infty} \int_{1/\pi}^{x} f_n(t)\,dt.$$

Keressük meg azt az N küszöbindexet, amelyre $N < n$ esetén $\int_{1/\pi}^{x} f_n(t)\,dt$ eltérése $I(x)$-től, bármely x-re adott $0 < \varepsilon$ -nál kisebb lesz! Mit tapasztalunk, mi a jelenség oka? (Ld. IV.Kötet, Végtelen sorok 4.2. Definícióját)

$\boxed{2.}$ Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n(x)$ határfüggvényt, a $\lim\limits_{n\mapsto\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ határértéket, valamint az $\int_a^b \lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n(x)\,dx$ integrált!
Mit tapasztalunk, mi a jelenség oka? (Ld. IV.Kötet, Végtelen sorok 5.3 Tételét)

a) $a = 0;\ b = 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} n & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & , \text{ ha } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

b) $a = 0\ b = 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1-1/n \\ 2n^2x-2n^2+2n & , \text{ ha } 1-1/n \leq x \leq 1 - \frac{1}{2n} \\ -2n^2x+2n^2 & , \text{ ha } 1 - \frac{1}{2n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$\boxed{3.}$ Legyen $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin \dfrac{1/n}{x - \frac{n-1}{n\pi}}$, ahol $x \geq 1/\pi$ és $n=1,2,\ldots$. Határozzuk meg az $f(x) = \lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n(x)$ függvényt, ennek $f'(x)$ deriváltját, valamint a $\lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n'(x)$

határfüggvényt! Mit tapasztalunk, mi a jelenség oka? (Ld. IV.Kötet, Végtelen sorok 5.1 Tétele)

$\boxed{4.}$ Legyen

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sin x \frac{n\pi}{2}, & \text{ha } |x| \leq 1/n \\ \frac{1}{n} \operatorname{sg} x, & \text{ha} \leq \frac{1}{n} |x| \leq |x_o|, \end{cases}$$

ahol $x_o \in \mathbb{R}$, adott szám, $n=1,2,\ldots$.

Igaz-e a

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

reláció?

IV. 3. FOURIER-SOROK

*1. Határozzuk meg az alábbi függvények komplex Fourier-sorát:

a) $|\sin x|$

b) $|\cos x|$

c) $\cos x \sin^2 x$

d) $\operatorname{sg} \sin x$

e) $\int_0^x \operatorname{sg}(\operatorname{sg} u \sin u)\,du$

2. Határozzuk meg a következő két függvény Fourier-sorát:

a) $|\sin \pi x|$;

b) $$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{ha } -1/2 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & \text{ha } 1/2 \leq x \leq 1+1/2 \end{cases}$$

$f(x+2) = f(x)$

*3. Végezzük el a következő integrálást (az integrandust tekintsük véges Fourier-sornak):

$$\int_0^x \sin^2 u \cos^2 2u \, du$$

*4. Mutassuk meg, hogy a megadott (véges vagy végtelen, valós vagy komplex) Fourier-sorok kielégítik a megadott differenciálegyenleteket:

a) $$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(1-k^2)} \sin k x \; ; \quad y'' + y = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin k x}{k}$$

b)

$$a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{a_k}{(1+k^2)} \cos k x + \frac{b_k}{(1+k^2)} \sin k x\right)$$

$$-y'' + y = \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq 1}}^{\infty} (a_k \cos k x + b_k \sin k x)$$

c) $$-\frac{1}{3} e^{i2x}$$

$$y'' + y = e^{i2x}$$

d) $$\frac{1}{1-k^2} e^{ikx} \; ; \quad k^2 \neq 1$$

$$y'' + y = e^{ikx}$$

e) $$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq \pm 1}}^{\infty}{}^{*} \frac{c_k}{1-k^2} e^{ikx}$$

$$y'' + y = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq \pm 1}}^{\infty}{}^{*} c_k e^{ikx}$$

f) $$\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}^{*} \frac{c_k}{2-k^2+ik} e^{ikx}$$

$$y'' + y' + 2y = \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}^{*} c_k e^{ikx}$$

x5. Adjuk meg az alábbi differenciálegyenlet periodikus megoldását /használjuk fel az előző feladatokban alkalmazott eredményeket és módszereket!):

a) $y'' + 3y' + 4y = \sin x \cos^3 x$

b) $y'' + 2y' + y = |\sin x|$

c) $y' + 2y = \cos x \sin^2 x$

d) $y' - 3y = \sin^2 x \cos^2 2x$

e) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sg} \sin x$

f) $y'' + 3y' + 4y = \sin^3 x$

g) $y'' - 3y' - 3y = \cos^3 x$

V. TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK

V. 1. FELÜLETEK SZEMLÉLTETÉSE, HATÁRÉRTÉK, FOLYTONOSSÁG

*1. A koordináta-síkokkal párhuzamos metszetgörbék vizsgálata alapján szemléltessük az alábbi egyenletű felületek térbeli képét. Ennek alapján mutassuk meg, hogy az $(x,y) \mapsto z$ függvény hol nem folytonos. Mit modhatunk ezeken a helyeken a határértékekről?

a) $$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

b) $$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

c) $$z = \frac{1}{x + y}$$

d) $$z = \frac{xy}{x + y}$$

e) $$z = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

2. Jellemezzük az $f(x)$; $x \in \mathbb{R}^n$ függvény (hiper)-szintfelületeit!

a) $n = 3$; $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

b) $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$

c) $f(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$

d) $f(x) = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right|$

e) $f(x) = d^T x$, ahol $d \in \mathbb{R}^n$ adott vektor

f) $f(x) = x^T V x$, ahol V nxn-es pozitív definit mátrix.

3. Mik lesznek az alábbi felületek szintvonalai:

a) sík
b) körhenger
c) körkúp
d) ellipszoid

V. 2. TÖBBDIMENZIÓS TARTOMÁNYOK

*1. Milyen tartományon értelmezhetők az alábbi függvények? Jellemezzük ezeket a tartományokat a tanult szempontok szerint (korlátosság, összefüggés stb.)!

a) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto \ln (x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)$

b) $x \longmapsto \sqrt{1 - \|x\|}$; $x \in \mathbb{R}^n$

c) $x \longmapsto \ln(1 - \|x\|)$; $x \in \mathbb{R}^n$

d) $x \longmapsto \dfrac{1}{1 - |x_1 + \ldots + x_n|}$; $x \in \mathbb{R}^n$

*2. Jellemezzük korlátosság, összefüggés, zártság szempontjából az alábbi egyenlőtlenségekkel megadott tartományokat:

a) $1 \leq |x_k| < 2$; $k=1,\ldots,n$

b) $x_k \geq 0$; $k=1,2,3,4$

c) $x_4 \leq x_1 + x_2 + x_3$

V. 3. TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK DERIVÁLÁSA

1. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egyenletű felület tetszőleges pontjában az érintősík egyenletét!

*2. Határozzuk meg az alanti függvények első és másodfokú Taylor-polinomjait a megadott helyeken:

a) $(x,y,z) \mapsto \sin(xy + z)$; $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$(x_o, y_o, z_o) = (0,0,0)$

b) $x \mapsto \dfrac{1}{1 - \|x\|^2}$; $\|x\| < 1$

$x_o = 0$

c) $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto 2x_1x_2 + x_3 + 3x_3x_4 - x_2x_4$

$x_{10} = 0$

$x_{20} = 1$

$x_{30} = -1$

$x_{40} = 2$

3. Határozzuk meg a megadott függvények n-edrendű Taylor-polinomjait a megadott helyeken:

a) $(x,y) \mapsto \sin(xy)$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(x_o, y_o) = (0,0)$

b) $(x,y,z) \mapsto (x + y + z)^3$; $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; $(x_o, y_o, z_o) = (0,0,0)$

c) $(x,y) \mapsto x^2y + xy$; $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $(x_o, y_o) = (1;-1)$

4. Legyenek adottak a g négyváltozós, x,y és z egyváltozós függvények. g parciális, valamint x, y és z közönséges deriváltjainak ismeretében határozzuk meg a $g(t, x(t), y(t), z(t))$ összetett függvény deriváltját!

$\boxed{5.}$ Vázoljuk a $\varphi : D \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \int_0^{1/x} \frac{\sin xy}{y} \, dy$$

függvény grafikonját!

*6. Számítsuk ki az alábbi deriváltat az $x = 1$ helyen:

$$\frac{d}{dx} \int_{-\sin x}^{2} \frac{e^{xy}}{y} \, dy$$

V. 4. SZÉLSŐÉRTÉK-SZÁMÍTÁS

1. Határozzuk meg az

$$(x,y)\mapsto ||x|+|y|-1|$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőérték helyeit:

a) $(x,y,z)\mapsto ||x|+|y|+|z|-1|$

b) $(x,y)\mapsto |1-x^2-y^2|$

c) $(x,y)\mapsto (1-x^2-y^2)^2$

d) $(x,y,z)\mapsto |x+y+z|$

$\boxed{3.}$ Adjunk módszert az alábbi függvény lokális szélsőérték helyeinek a meghatározására

a) $(x,y,z)\mapsto ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+iz$

b) $x\mapsto x^TAx+b^Tx+c$, ahol $x\in\mathbb{R}^n$; $c,b\in\mathbb{R}^n$; A $n\times n$-es mátrix

*4. Határozzuk meg az alábbi függvény lokális szélsőértékét:

a) $(x,y,z)\mapsto 7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz+x-2y+1$

b) $(x,y,z)\mapsto x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz+x+z+8$

c) $(x,y,z)\mapsto 2y^2+z^2-3x^2-4xy-8xz+12yz+x+y-13z+3$

*5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit:

a) $(r,\varphi)\mapsto r^2(2\sin^2 2\varphi-1)$

b) $(r,\varphi)\mapsto r^2(2\sin^2 2\varphi+1)$

V. 5. IMPLICIT MEGADÁSÚ FÜGGVÉNYRENDSZEREK. INVERZ FÜGGVÉNYRENDSZEREK

1. Tekintsük a

$$\cos x\,y - \frac{y}{x} = 0$$

egyenletet! Meghatározható-e y, mint x függvénye az $x_o=1$ pont egy elég kis környezetében? Ha igen, akkor adjunk lineáris közelítést az $y(x)$ függvényre az $x_o=1$ pont környezetében! Létezik-e itt $y(x)$ inverze, és ennek mi a lineáris közelítése?

2. Az $(x^2+y^2)^2 - 4(x^2-y^2) = 0$ egyenlet esetében vizsgáljuk meg az előző feladatban felvetett problémát, ha $x_o \cong 1{,}7978$; $y_o \cong 0{,}4817$. Mit mondhatunk a $(0;0)$; $(-2;0)$ és $(2;0)$ pontok környezetében?

*3. Tekintsük az $y-\ln y+x-\ln x-a = 0$; $y \geq 1$ egyenletet! Adjunk líenáris közelítést, ahol lehetséges az $y(x)$ függvényre az x_o pont környezetében. E pont környezetében adjunk lineáris közelítést $y(x)$ inverzére, ha lehetséges.

a) $x_o = 1$ $a = 10$

b) $x_o = 1$ $a = 3$

c) $x_o = 12$ $a = 10$

d) $x_o = 2$ $a = 10$

e) $x_o = 3$ $a = 9$

f) $x_o = 0{,}5$ $a = 11$

g) $x_o = 0{,}3$ $a = 3$

h) $x_o = 12{,}19911$ $a = 10$

4. A $(\sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{9};\ -3)$ pont környezetében meghatározható-e z, mint x és y egyértelmű függvénye, ha az x,y és z változók között az alábbi összefüggés érvényes:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3z = 0\ ?$$

Ha létezik e függvénykapcsolat, akkor linearizáljuk!

$\boxed{5.}$ Tekintsük az

$$u - u^2v^2 - \frac{xy}{w} = -4$$

$$\frac{1}{u\,v\,w} + \frac{x}{y} = 0$$

egyenletrendszert! Létezik-e a $g(u,v,w)$, $f(u,v,w)$ függvényrendszer, amely $x = g(u,v,w)$ és $y = f(u,v,w)$ esetén kielégíti a fenti egyenletrendszert és amelyre

$$2 = g(1,-1,1),$$

$$2 = f(1,-1,1)?$$

Ha igen, akkor határozzuk meg e függvényrendszer $(1,-1,1)$ pontbeli lineáris közelítését!

*6. Az (x_o,y_o,u_o,v_o) pontban határozzuk meg az $F(u,v,x,y) = 0$; $G(u,v,x,y) = 0$ egyenletek által definiált $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$ függvényrendszer lineáris közelítését, valamint ugyanebben a pontban az inverz függvényrendszer lineáris közelítését!

$$F(u,v,x,y) = uv^2 - \frac{x}{u^2v} - e^{xy}v^2 - av^2$$

$$G(u,v,x,y) = uv - xv\sin(x + y) - \frac{x}{y} - by$$

a)	$x_o = 0$	$y_o = 1$	$u_o = 2$	$v_o = -1$	$a = 1$	$b = -2$
b)	$x_o = 1$	$y_o = -1$	$u_o = 2$	$v_o = -1$	$a = 1{,}882$	$b = 1$
c)	$x_o = -3$	$y_o = 1$	$u_o = 1$	$v_o = 2$	$a = 1{,}325$	$b = -0{,}456$
d)	$x_o = 3$	$y_o = -2$	$u_o = -1$	$v_o = 1$	$a = -4{,}002$	$b = 1{,}012$
e)	$x_o = 3$	$y_o = -2$	$u_o = 2$	$v_o = -1$	$a = 2{,}748$	$b = -1{,}012$
f)	$x_o = -2$	$y_o = -2$	$u_o = 1$	$v_o = 3$	$a = -53{,}52$	$b = -3{,}27$
g)	$x_o = -2$	$y_o = 3$	$u_o = -1$	$v_o = 3$	$a = -0{,}928$	$b = 0{,}905$

7. A 6. feladatban határozzuk meg x és y lineáris közelítését, ha

a) $u = 2{,}001$ $\quad v = -1{,}002$

b) $u = 2{,}002$ $\quad v = -0{,}998$

c) $u = 1,999$ $v = -0,998$

d) $u = 1,998$ $v = -1,002$

$\boxed{8.}$ Tekintsük az

$$Ax + By = 0 \; ; \; x \in \mathbb{R}^m \; ; \; y \in \mathbb{R}^n ;$$

A $n \times m$-es és B $n \times n$-es mátrixok

egyenletet. Mi a feltétele annak, hogy y x függvényében egyértelműen meghatározható legyen? Hogyan alkalmazható erre az implicit függvénytétel? Ha az $y(x)$ függvény létezik, akkor ennek mi a lineáris közelítése?

$\boxed{9.}$ Határozzuk meg a

$$7x^2+6y^2+5z^2-4xy-4yz-6x-24y+18z-18 = 0$$

egyenlet által meghatározott felület merőleges vetületeit az (x,y) síkra és a z koordináta tengelyre!

$\boxed{10.}$ Az $x\,e^{-x}$ függvénynek létezik inverze az

a) $x_o = 1$

b) $x_o = 2$

pont elég kis környzetében? Ha igen, akkor adjuk meg az inverz függvény e pontbeli lineáris közelítését!

$\boxed{11.}$ Az

$$x = e^{-u} \, v \cos v$$
$$y = e^{u} \sin v$$

egyenletrendszert nyilvánvalóan kielégítik az $u_o = 0$, $v_o = \pi$, $x_o = -\pi$, $y_o = 0$ értékek. Adjunk jó közelítést (közelítsünk lineárisan!) arra, hogy milyen u_1 és v_1 értékek mellett lesz $x_1 = -\pi + 0,01$, $y_1 = -0,02$?

$\boxed{12.}$ Tekintsük az $x^2 + 2y^2 - xy = 1$ egyenletet!

a) Határozzuk meg annak a $g(x)$ függvénynek a maximális értelmezési tartományát, amely $y = g(x)$ helyettesítéssel kielégíti az egyenletet, és amelyre $g(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$!

b) Határozzuk meg annak az $f(y)$ függvénynek a maximális értelmezési tartományát, amely $x = f(y)$ helyettesítéssel kielégíti az egyenletet, és amelyre $f(0) = -1$!

V. 6. TÖBBES INTEGRÁLOK

*1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat

a)

$$\iint_D (1-|x|-|y|)\,dx\,dy;$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+|y| \le 1\right\}$$

b)

$$\int_V dV \;;\; V = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x_k| \le a;\ k=1,\dots,n\right\}$$

c)

$$\int_0^1 \int_0^{x_4} \int_0^{x_3} \int_0^{x_2} x_1\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$$

$\boxed{2.}$ Írjuk fel az alábbi integrálok határait:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\;; \qquad \iint_D f(x,y)\,dy\,dx$$

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 6y^2 - xy \le 3\right\}.$$

VI. VEKTORANALÍZIS

VI. 1. TENZOROK

*1. Legyenek $\underline{\underline{a}}$ és $\underline{\underline{b}}$ adott vektorok. Határozzuk meg annak a tenzornak a koordináta mátrixát, amely az $\underline{\underline{r}} \mapsto \underline{\underline{b}} \times (\underline{\underline{a}} \times \underline{\underline{r}})$ leképezést valósítja meg. Melyek a tenzor sajátvektorai és sajátértékei?

*2. Határozzuk meg annak a tenzornak a koordináta mátrixát, amely az alábbi - koordinátáival adott - vektorokat rendre az - ugyancsak koordinátával adott - képvektorokba képezi le:

a) $$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}-2\\0\\-2\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}$$

*3. Határozzuk meg annak a tenzornak a koordináta mátrixát, amelynek sajátvektorai és sajátértékei rendre a következők (a sajátvektorokat koordinátáikkal adjuk meg):

a) $$\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\0\\3\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix};\ 5;\ -5;\ 1$$

b) $$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix};\ 3;\ 3;\ 1$$

VI.1.,VI.2.,V.3.

c) $\begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1\\-i\\0\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$; $1+i$; $1-i$; 2

d) $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$; -1; -1; 3

$\boxed{4.}$ Határozzuk meg egy adott tengely körül adott szöggel való elforgatás, majd adott síkra való vetítés tenzorának koordináta mátrixát!

VI. 2. POTENCIÁLELMÉLET

$\boxed{1.}$ Tekintsük a $\underline{v}$ vektormezőt. Legyen adott a térben két pont A és B, amelynek koordinátái rendre x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2, ahol $x_1^2+y_1^2 \neq 0$ és $x_2^2+y_2^2 \neq 0$.

Mekkora lehet az $\int_\gamma \underline{v}\, d\underline{r}$ integrál értéke, ahol γ az A pontból induló és B pontban végződő, a z tengelyt nem metsző reguláris görbe?

a)
$$\underline{v} = \frac{y\,\underline{i} - x\,\underline{j}}{x^2 + y^2}$$

b)
$$\underline{v} = \frac{x\,\underline{i} + y\,\underline{j}}{x^2 + y^2}$$

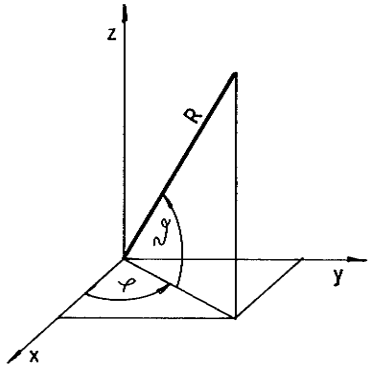
VI. 3. INTEGRÁL ÁTALAKÍTÓ TÉTELEK

$\boxed{1.}$ Tekintsük a gömbfelőlet alábbi paraméterezését:

$$r = R,$$
$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi,$$
$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

ahol R a gömb sugara és ϑ valamint φ értelmezését az ábrán láthatjuk.
Szemléltessük a Gauss-Osztrogradszkij-tételt a $\underline{v} = \underline{r}$ vektormező gömbfelületen vett felületi integrálja, ill. divergenciájának megfelelő integrálja kiszámításával!

VI.3.



2. ábra

*2. Számítsuk ki a $\underline{v} = -3\underline{r}$ vektormezőnek a

$$z^2 = 2 - x^2 - y^2 \;;$$

$$z \geq 0$$

egyenletű felületre vett integrálját, a $\underline{k}$ vektorral hegyesszöget bezáró irányítottság mellett!

*3. Számítsuk ki a $\underline{v} = \underline{r}/|\underline{r}|^3$ vektormező integrálját a

$$5x^2+6y^2+10z^2-xy + \frac{1}{2}\,xz+zy+x-20=0$$

felületre. Az $x = y = 0$, $z = \sqrt{2}$ pontban a felület normálvektora a $\underline{k}$ vektorral hegyesszöget zárjon be.

*4. Számítsuk ki a $\underline{v} = \underline{r}/|\underline{r}|^3$ vektormező integrálját a

$$6x^2+5y^2+5z^2-xz-yz+28=0$$

felületre!

*5. Számítsuk ki a $\underline{v}=(x-z)\underline{i}+(y+2xz)\underline{j}+(2z-xy)\underline{k}$ vektor-vektor függvény integrálját az

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y+10z+34=0$$

egyenletű zárt felületre kifelé irányuló normális mellett!

VII. KOMPLEX FÜGGVÉNYEK

VII. 1. KOMPLEX NUMERIKUS SOROK

*1. Az alábbi sorok közül melyik konvergens? A konvergens sornak határozzuk meg az összegét:

a) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} i \left(\frac{3i}{2}\right)^k$

b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} i \left(\frac{2i}{3}\right)^{k+1}$

c) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \left(\frac{i+1}{3}\right)^k$

d) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{i-1}{2}\right)^{k+2}$

e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i-2}{2}\right)^k$

f) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} (i + 2)\left(\frac{i+3}{4-i}\right)^{k+1}$

VII. 2. ELEMI FÜGGVÉNYEK

*1. A definíciós képletek felhasználásával linearizáljuk az alábbi függvényeket:

a) $\sin^2 z \cos z$

b) $\cos^2 z \sin z$

c) $\sin^3 \omega z$

d) $\cos^3 \omega z$

e) $\sin^2 2z + \cos^2 3z$

VII.3 VALÓS VÁLTOZÁS KOMPLEX ÉRTÉKŰ FÜGGVÉNYEK DERIVÁLTJAI

1. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait:

   a) $[(1 + i)t + (1 - i)] \exp((1 + 2i)t)$

   b) $t(it^2 + 2 - i)\exp(it)$

   c) $(2it^3 + t^2 - 1 - i) \exp((1 - i)t)$

2. Legyen $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ adott komplex függvény. Nyilvánvalóan teljesül a

$$\mathrm{Re}\,\frac{d\,f(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\,\mathrm{Re}\,f(t) = \frac{d\,u(t)}{dt}$$

reláció. Szemléltessük ezt az 1. feladat függvényeinél!

VII.4 KOMPLEX FÜGGVÉNYEK INTEGRÁLÁSA

*1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

a)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} \;;\gamma :\; z(t) = t + t^3 i \;;\; 1 \le t \le 3$$

b)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2} \;;\gamma :\; z(t) = t - t^4 i \;;\; 1 \le t < \infty$$

c)

$$\int_\gamma (z^2 + 2z)dz \;;\gamma :\; z(t) = \sin t + i\cos t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

d)

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} \;;\gamma :\; z(t) = 2\cos t + (1 + 2\sin t)i \;; \quad 0 \le t \le 4\pi$$

e)

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz \;;\gamma :\; z(t) = \cos t - i \sin t; \; 0 \le t \le 2\pi$$

f)

$\int_\gamma e^z \sin z \, dz$; ahol γ az $1 + i$ pontból az $1 - i$ pontig haladó egyenes szakasz és az utóbbi pontból a $3i$ pontba haladó egyenes szakasz egyesítése.

g)

$\int_\gamma e^{-2z} \cos z \, dz$; ahol γ az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű görbe $x \leq -1$ szakasz és az irányítás megegyezik x csökkenésének irányával.

VIII. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

VIII. 1. SZUKCESSZÍV APPROXIMÁCIÓ

$\boxed{1.}$ Mutassuk be a szukcesszív approximáció alkalmazását az alábbi differenciálegyenleteken

a) $y'' + y = 0$

b) $y^{IV} + y = 0 \quad y(0) = 1; \; y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

c) $y'' + y^2 = 0 \quad y(0) = 2; \; y'(0) = 0$

VIII. 2. ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

*1. Határozzuk meg az alábbi diferenciálegyenletek periodikus megoldásait, az amplitudó viszonyt és a fáziskülönbséget!

a) $y' + 3y = 2\cos(\omega x + \varphi)$, ahol

$\omega = 1 \quad \varphi = 0$

$\omega = 0{,}1 \quad \varphi = -\pi/2$

$\omega = 3 \quad \varphi = \pi/3$

b) $y'' + 4y' - y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{7}\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $y''' - 2y'' + y' - y = \frac{9}{4}\sin(2x + 1)$

e) $y^{VI} - 2y''' + y = 4\cos 5x$

f) $y^{IV} - y''' - y'' + y' + 3y = \sin(6x - 2)$

g) $y^{V} - 3y'' + y = 7\cos(2x + 2)$

*2. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek periodikus, illetve kváziperiodikus megoldásait ($\omega > 0$):

a) $y'' + y' + y = \sin \omega t$, ahol

$= 0,1;\ 0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 1;\ 1,5;\ 2;\ 3;\ 10$

b) $y'' + 2y' + 3y = \sin^2 x \cos x + \sin^3 x$

c) $y''' - y = \cos^3 4x$

d) $y^{VI} - y^{V} + y = \cos \omega t - 2\sin \omega t$

$\omega = 0,1;\ 0,3;\ 1;\ 3;\ 10$

e) $y^{V} - 2y^{IV} = \cos^2 2x - \cos^3 x - 3$

f) $y^{VI} - 3y^{IV} + y'' + 2y = \cos^2 \pi x - \cos^2 x \sin x$

g) $y^{IV} + y^{III} - y'' + 3y = \sin \frac{\pi}{2} x + \cos x - 2$

h) $y' - 10y = \cos^3 x \cos 3x$

i) $y'' + y = \cos^{\pi} x$

*3. Az alábbi differenciálegyenletekről döntsük el, hogy van-e periodikus megoldásuk. Válaszunkat indokoljuk!

a) $y'' + y = \sin \pi x - \cos x$

b) $y^{VI} + y^{V} + y^{IV} + 2y''' + y'' + y' = \sin 7x - \cos x$

c) $y''' + y'' - y = \sin 2x$

d) $y'' + ay = \sin \omega x$

e) $y^{V} - 3y'' + y = \sin 5x$

f) $y^{VI} - 3y^{IV} + y'' - y = \sin \frac{13}{17} x - \mathrm{xos} \frac{19}{23} x$

g) $y''' - 2y'' + y = \sin \frac{12}{19} x - \cos \frac{\pi}{e} x$

h) $y'' + y' + y = |\sin x|$

i) $y' + y = 2 + \sin^7 x \cos 3x$

j) $y'' + y = \sin 3x - \sin \pi x$

k) $y^{IV} - y = \sin x - \cos \frac{\pi}{2} x$

l) $y' + y = 3 - \sin \sqrt{2} x$

$\boxed{4.}$ Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

ahol $p > 0$; $q > 0$ és f egy 2π szerint periodikus, Fourier-sorba fejthető függvénynek a $[0, \infty)$ intervallumra való leszűkítése. Mi a megoldás állandósult (periodikus) és tranziens komponense?

$\boxed{5.}$ Mi a feltétele annak, hogy az

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

differenciálegyenletnek létezzen

- periodikus megoldása,
- állandósult periodikus megoldása, illetve
- rezonancia lépjen fel?

($p \geq 0$; $q \geq 0$; f Fourier-sorba fejthető periodikus függvény)

*6. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek egy partikuláris megoldását a komplex próbafüggvény módszerével:

a) $y'' - y' + y = x \sin x - \cos x$

b) $y' + y = x^2 \cos 2x + x \sin x$

VIII. 3. STABILITÁS

*1. Keressük meg az alábbi differenciálegyenletek egyensúlyi helyzeteit, állítsuk elő az egyensúlyi helyzetekhez tartozó első variációs rendszereket, majd ezek alapján - ahol lehet - határozzuk meg az egyensúlyi helyzetek jellegét. Végül rajzoljuk meg a trajektóriák képét!

a) $\dot{x} = x + x^2$

$\quad \dot{y} = xy$

b) $\dot{x} = x + 2xy$

$\quad \dot{y} = y - xy$

c) $\dot{x} = x + y + a$; $a \in \mathbb{R}$

$\quad \dot{y} = xy + b$; $b \in \mathbb{R}$

d) $\dot{x} = yx^2 - x$
$\dot{y} = xyz - y$
$\dot{z} = x^2y + x^2z - z - 2x$

e) $\dot{x} = x - x^2$

f) $\dot{x} = x - x^3$

$\boxed{2.}$ Tekintsük az

$$\dot{x} = y + x - x^3 - xy^2$$
$$\dot{y} = y - x - yx^2 - y^3$$

egyenletet! Hajtsuk végre ezen az 1. feladat szerinti vizsgálatot, majd írjuk át a differenciálegyenletet polár koordinátákba az

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

egyenletek felhasználásával! Mit tudunk megállapítani?

VIII. 4. PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

*1. Oldjuk meg az alábbi lineáris hővezetési problémákat:

a) $u'_t = u''_{xx}$; $0 \leq x \leq \pi$; $u(x,0) = 1 + \dfrac{x^2}{\pi^2}$;

$u(0,t) = 1$; $u(\pi,t) = 2$

b) $u'_t = u''_{xx}$; $0 \leq x \leq h$; $u(x,0) = \cos^3 \dfrac{\pi}{h}x$;

$u'(0,t) = u'(h,t) = 0$

$\boxed{2.}$ Az 1. feladatban állapítsuk meg az állandósult megoldásokat! Magyarázzuk meg minél több oldalról az eredményt!

*3. Adjunk közelítő megoldást az alábbi hővezetési problémára:

$u'_t = u''_{xx}$; $0 \leq x \leq 1$; $u'(0,t) = u'(h,t) = 0$;

$u(x,0) = x^3 - 3x + 2$

VIII.4.

*4. Határozzuk meg az $u''_{tt} = c^2 \Delta u$ térbeli hullámegyenlet stacionárius megoldását

a) hengerszimmetrikus
b) gömbszimmetrikus

esetekben!

$\boxed{5.}$ Tekintsük az alábbi azonosságokat:

$$\sin(x - vt) + \sin(x + vt) = 2\sin x \cos vt,$$

$$\cos(x - vt) + \cos(x + vt) = 2\cos x \cos vt.$$

Ezek felhasználásával milyen magyarázatot tudunk adni arra a tényre, hogy két merőben eltérő fizikai képet szolgáltató matematikai módszer (a Fourier- és a d'Alambert-féle módszer) egyaránt alkalmas a hullámegyenlet megoldására? (ld. Pt.VIII.kötet 260. feladatát is!)

IX. FUNKCIONÁLANALÍZIS

IX. 1. LINEÁRIS TEREK

1. Állapítsuk meg a Pt.III.351-361. feladataiban szereplő lineáris terek dimenzióját! Ezek valós vagy komplex lineáris terek?

2. Legyen $\mathbb{R}^n$-ben $(n \geq 3)$ egy bázis $\underline{\underline{e}}_1, \dots, \underline{\underline{e}}_n$. Ebben a bázisban az $\underline{\underline{r}} \in \mathbb{R}^n$ vektor koordináta oszlopvektora legyen $\underline{r}$. Legyen most $\tilde{\underline{\underline{e}}}_1, \dots, \tilde{\underline{\underline{e}}}_n$ egy $\mathbb{R}^n$-beli másik bázis, akkor ebben a bázisban mennyi $\underline{\underline{r}}$ koordináta oszlopvektora $\tilde{\underline{r}}$? (Ellenőrizzük, hogy jól adtuk-e meg a bázisokat!)

   a) $\underline{\underline{e}}_1 = (1;0;\dots;0)$; $\underline{\underline{e}}_2 = (0;1;0;\dots;0)$; ...

   $\underline{\underline{e}}_n = (0;0;\dots;0;1)$;

   $\tilde{\underline{\underline{e}}}_1 = (1;1;0;\dots;0)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_2 = (0,;1;1;0;\dots;0)$; ...

   $\tilde{\underline{\underline{e}}}_{n-1} = (0;0;\dots;0;1;1)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_n = (1;0;\dots;0;1)$.

   b) $\underline{\underline{e}}_1 = (0;1;\dots;1)$; $\underline{\underline{e}}_2 = (1;0;1;\dots;1)$; ...

   $\underline{\underline{e}}_n = (1;1;\dots;1;0)$;

   $\tilde{\underline{\underline{e}}}_1 = (0;0;1;\dots;1)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_2 = (1;0;0;1;\dots;1)$; ...

   $\tilde{\underline{\underline{e}}}_{n-1} = (1;1;\dots;1;0;0)$; $\tilde{\underline{\underline{e}}}_n = (0;1;\dots;1;0)$.

3. Tekintsük a valós polinomok P lineáris terét! Nyilvánvaló, hogy P-ben az x^n; $n \in \mathbb{N}$ polinomok lineárisan független rendszert alkotnak. Hasonlóképpen egyszerű belátni, hogy az $(x - x_o)^n$; $n \in \mathbb{N}$ polinomok ugyancsak lineáris független rendszert képeznek, ahol $x_o \in \mathbb{R}$ valamely rögzített szám.

   a) Valamely $p \in P$ polinomnak a kétféle rendszerben érvényes koordináta oszlopvektora között milyen mátrix teremt kapcsolatot?

   b) Adjuk meg az $(x + 1)^2(x - 2)$ polinom koordináta oszlopvektorait a kétféle koordináta-rendszerben, ha $x_o = 1$.

$\boxed{4.}$ Nézzük meg a "Funkcionálanalízis" c. kötet 6.1 Definícióját! Bizonyítsuk be, hogy

a) L_{1T} valóban lineáris tér

b) L_{1T}-ből a t-szerinti deriválás valóban nem vezet ki

c) L_{1T}-ből a $[T,t]$; $t \geq T$ intervallumon a t-szerinti integrálás valóban nem vezet ki

d) L_2 valóban lineáris tér

e) $\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{(z - a_i)^{n_i+1}} \in L_2$, ahol $a_i \in \mathbb{C}$; $n_i \in N$

5. Tekintsük az $1; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \cos 3x; \sin 3x; \ldots$ függvények lineáris kombinációiból felépülő lineáris teret! Állapítsuk meg az alábbi függvényekről, hogy elemei-e ennek a térnek és ha a válasz igen, akkor adjuk meg koordinátáit a fenti lineárisan független rendszerben.

a) $\sin^3 x$

b) $|\sin x|$

c) $2 - |\cos x|^2$

d) $|3 + \sin^3 x|$

e) $\cos^2 x \sin 2x$

f) $\operatorname{tg} x$

g) $\arcsin x$

h) $\arcsin x + \arccos x$

$\boxed{6.}$ Mutassuk meg, hogy a

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x); \; n \in N; \; x \in [-1;1]$$

formulával definiált függvény n-edfokú polinom! Mutassuk meg továbbá, hogy a $T_n(x)$; $n \in N$ polinomok (ezek az alkalmazásokban igen fontos szerepet játszó, ún. elsőfajú Csebisev-polinomok) a polinomok lineáris terében lineárisan független rendszert alkotnak. Határozzuk meg e rendszerben az alábbi polinomok koordinátáit:

a) x^2

b) x^3

c) $x^4 - x$

d) $x^5 - x^2$