Parabolikus feladatok dinamikus peremfeltétel mellett

Kovács Balázs és Christian Lubich

University of Tübingen

SFB 1173

BME Alkalmazott Analízis Szeminárium

2016. november 10., Budapest

Kivonat

- Néhány egyszerű példa
- Variációs formalizmus és további példák
- Térbeli diszkretizáció poligonális tartományok esetén
- Sima tartományok
- Idődiszkretizációk
- Numerikus kísérletek

Egyszerű parabolikus feladatok dinamikus peremfeltétellel

Hővezetési egyenlet dinamikus peremfeltétellel

Hővezetési egyenlet Wentzell-féle peremfeltételek mellett:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ \partial_t u = -u - \partial_\nu u & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ korlátos tartomány;
- $\Gamma = \partial\Omega$ peremmel – a felület;
- $\partial_\nu u$ normális derivált Γ-n;

Felület–tartomány diffúziós egyenlet

Tekintsük egy felületi diffúziót és a tartománybeli diffúziót csatoló feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ \partial_t u = \Delta_\Gamma u - \partial_\nu u & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

ahol Δ_Γ a Laplace–Beltrami operátor.

Variációs formalizmus és néhány további példa

Absztrakt variációs formalizmus – autonóm eset

Tekintsük a lineáris parabolikus feladatok szokásos absztrakt felírását: legyen V és H Hilbert-tér, $\|\cdot\|$ és $|\cdot|$ normákkal, továbbá a $V \subset H$ beágyazás legyen sűrű és folytonos.

Gelfand-hármas

Jelölje $(\cdot,\cdot)$ a skalárszorzatot H-n.

Legyen az $a(\cdot,\cdot)$ folytonos szimmetrikus bilineáris forma, amely teljesíti a Gårding-egyenlőtlenséget:

$$a(v,v) \geq \alpha\|v\|^2 - c|v|^2 \qquad \forall\, v \in V \qquad (\alpha > 0, c \in \mathbb{R}).$$

ld. [Thomée], [Lubich és Ostermann (1994)], [Simon L. (2014)], stb.

Absztrakt variációs formalizmus – autonóm eset

Ekkor az absztrakt parabolikus feladat az alábbi alakban írható fel

$$\begin{cases} (\dot u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \qquad \forall\, v \in V \qquad (0 < t \leq T) \\ u(0) = u_0 \, . \end{cases}$$

Tekinthető egy H-gradiens áramlásnak, azaz

$$(\dot u, v) = -E'(u)v \qquad v \in V,$$

az $E(v) = \frac{1}{2} a(v, v) \qquad v \in V$ energiafunkcionál mellett.
Ekkor teljesül a következő *a priori* energia becslés:

$$|u(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \leq e^{2ct} \Big(|u_0|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_*^2 \, \mathrm{d}s \Big).$$

[Daturay és Lions (1992)]

Klasszikus PDE-k

A hővezetési egyenlet homogén Dirichlet peremfeltétellel

Legyen $V = H_0^1(\Omega)$ és $H = L_2(\Omega)$, a bilineáris formák pedig

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x,$$
$$(u, v) = \int_\Omega uv \mathrm{d}x.$$

A fenti gradiens áramlás alapján

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ u = 0 & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

energia funkcionál: $E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}$.

Klasszikus PDE-k

A hővezetési egyenlet homogén Dirichlet peremfeltétellel

Legyen $V = H_0^1(\Omega)$ és $H = L_2(\Omega)$, a bilineáris formák pedig

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x,$$
$$(u, v) = \int_\Omega uv \mathrm{d}x.$$

A fenti gradiens áramlás alapján

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ u = 0 & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

energia funkcionál: $E(v) = \dfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}$.

Klasszikus PDE-k

A hővezetési egyenlet homogén Neumann peremfeltétellel

Legyen $V = \dot{H}^1(\Omega)$ és $H = L_2(\Omega)$, a bilineáris formák pedig

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x,$$
$$(u, v) = \int_\Omega uv \mathrm{d}x.$$

A fenti gradiens áramlás alapján

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ \partial_\nu u = 0 & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

energia funkcionál: $E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}$.

Hogyan illenek a fenti feladatok az absztrakt formalizmusba? – I.

Hővezetési egyenlet dinamikus peremfeltétellel

Legyen $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v \in H^1(\Gamma)\}$, H pedig izomorfikus $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$-val.

Bilineáris formák:

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \kappa \int_\Gamma (\gamma u)(\gamma v) + \beta \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v, \\ (u,v) &= \int_\Omega uv + \mu \int_\Gamma (\gamma u)(\gamma v) \end{aligned}$$

$\kappa \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ és $\mu > 0$.

Hogyan illenek a fenti feladatok az absztrakt formalizmusba? – II.

A gradiens áramlás alapján:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ \mu \partial_t u = \beta \Delta_\Gamma u - \kappa u - \partial_\nu u & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

energia funkcionál: $E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{2}\kappa \|\gamma v\|^2_{L_2(\Gamma)} + \frac{1}{2}\beta \|\nabla_\Gamma v\|^2_{L_2(\Gamma)}$.

Mitől lesz dinamikus egy peremfeltétlel?

Klasszikus hővezetési egyenlet

Hilbert-terek:

$$V = H_0^1(\Omega) \qquad \text{és} \qquad H = L_2(\Omega)$$

Bilineáris formák:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$
$$(u,v) = \int_\Omega uv$$

Energia funkcionálok:

$$E(v) = \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad .$$

Gradiens áramlás, $(\dot{u}, v) = -E'(u)v$, szerint:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ 0 = u & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

Mitől lesz dinamikus egy peremfeltétlel?

~~Klasszikus~~ hővezetési egyenlet dinamikus peremfeltétellel

Hilbert-terek:

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid \gamma v \in H^1(\Gamma)\} \quad \text{és} \quad H = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$$

Bilineáris formák:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \kappa \int_\Gamma (\gamma u)(\gamma v) + \beta \int_\Gamma \nabla_\Gamma u \cdot \nabla_\Gamma v$$

$$(u,v) = \int_\Omega uv + \mu \int_\Gamma (\gamma u)(\gamma v) \qquad (\kappa \in \mathbb{R},\ \beta \geq 0,\ \mu > 0),$$

Energia funkcionálok:

$$E(v) = \tfrac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\kappa\,\|\gamma v\|^2_{L_2(\Gamma)} + \tfrac{1}{2}\beta\,\|\nabla_\Gamma v\|^2_{L_2(\Gamma)}.$$

Gradiens áramlás, $(\dot{u}, v) = -E'(u)v$, szerint:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ \mu \partial_t u = \beta \Delta_\Gamma u - \kappa u - \partial_\nu u & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

Lineáris nem-autonóm rendszerek – I.

Legyen V és H mint korábban, ekvivalens időfüggő normákkal: $\|\cdot\|_t$ és $|\cdot|_t^2 = m(t;\cdot,\cdot)$. Legyen továbbá az a bilineáris forma is időfüggő, $a(t;\cdot,\cdot)$.
Szükség van továbbá plusz (természetes) korlátossági feltételekre:

$$m, \quad a, \quad \frac{\partial m}{\partial t} \quad \text{és} \quad \frac{\partial a}{\partial t} \quad \text{időben korlátos.}$$

[Dziuk, Lubich és Mansour (2012)]

Minden tulajdonság (norma ekvivalenciák, Gårding, korlátosság, stb.) időben egyenletesen teljesül.

Absztrakt nem-autonóm PDE:

$$m(t;\dot u(t),v) + a(t;u(t),v) = m(t;f(t),v) \qquad \forall\, v \in V \qquad (0 < t \le T)$$
$$u(0) = u_0.$$

Lineáris nem-autonóm rendszerek – II.

Például, hővezetési egyenlet nem-autonóm dinamikus peremfeltétellel:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u \\ \mu(x,t)\partial_t u(x,t) = -\kappa(x,t)u(x,t) + \nabla_\Gamma \cdot \big(\beta(x,t)\nabla_\Gamma u(x,t)\big) - \partial_\nu u(x,t) \end{cases}$$

Nemlineáris feladatok

Szemilineáris feladatok szintén hasonlóan kezelhetőek:

$$\begin{aligned} (\dot u(t), v) + a(u(t), v) &= (f(u(t)), v) \qquad \forall\, v \in V \qquad (0 < t \leq T) \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

ahol $f : V \to H$ egy kellően sima függvény.

Felületi reakció–diffúzió egyenlet csatolása a tartománybeli diffúzióhoz

Egy tipikus példa:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ \mu\, \partial_t u = \beta\, \Delta_\Gamma u + f(u) - \partial_\nu u & \Gamma\text{-n} = \partial\Omega \end{cases}$$

ahol $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2 függvény (f és f' lokálisan Lipschitz).

Allen–Cahn egyenlet dinamikus peremfeltétellel

Legyenek $W, W_\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények (tipikusan valamilyen potenciál, pl. $W(u) = (u^2 - 1)^2$). Ekkor az Allen–Cahn egyenlet

$$\partial_t u = \Delta u - W'(u) \qquad \Omega\text{-ban}$$

dinamikus peremfeltétellel:

$$\mu\, \partial_t u = \beta\, \Delta_\Gamma u - W_\Gamma'(u) - \partial_\nu u \qquad \Gamma\text{-n.}$$

ún. Allen–Cahn/Allen–Cahn csatolás

Sok fizikai cikk.

[Gal (2008); Liero (2013); Colli és Fukao (2015); ...]

Cahn–Hilliard egyenlet dinamikus peremfeltételekkel

Egy jól ismert mintázatképződési modell:
Tekintsük a Cahn–Hilliard egyenletet

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta w \\ w &= \Delta u - W'(u) \end{aligned} \qquad \Omega\text{-ban},$$

Allen-Cahn típusú dinamikus peremfeltétellel:

$$\begin{aligned} \mu\, \partial_t u &= \beta\, \Delta_\Gamma u - W_\Gamma'(u) - \partial_\nu u \\ \partial_\nu w &= 0 \end{aligned} \qquad \Gamma\text{-n}.$$

ún. Cahn-Hilliard/Allen-Cahn csatolás

Komplikált alapterek V és H.

[Cherfils, Petcu és Pierre (2010)]

[Kenzler et. al. (2011); Gal (2008); Goldstein, Miranville és Schimperna (2011); ...]

Lehetséges Cahn-Hilliard/Cahn-Hilliard csatolás is. (Még bonyolultabb alapterekkel.)

Térbeli szemidiszkretizáció

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \Omega\text{-ban} \\ \mu \partial_t u = \beta \Delta_\Gamma u - \kappa u - \partial_\nu u & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$

ahol $\kappa \in \mathbb{R}$, $\beta \geq 0$ és $\mu > 0$.

Végeselem módszer – lineáris bázisfüggvények

Keressük $u_h : [0, T] \to V_h$ szemidiszkrét megoldást úgy, hogy

$$
\begin{aligned}
(\dot u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) &= (f(t), v_h) \qquad && \forall\, v_h \in V_h \qquad (0 < t \leq T) \\
(u_h(0), v_h) &= (u_0, v_h) && \forall\, v_h \in V_h.
\end{aligned}
$$

ahol $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ a $V_h \subset V$ tér bázisfüggvényei.

Ekvivalens közdiff rendszer $(\mathbf{u}(t) = (u_i(t)))$:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{b}(t),$$

az alábbi tömeg és merevségi mátrixszal:

$$m_{ij} = (\varphi_j, \varphi_i), \qquad a_{ij} = a(\varphi_j, \varphi_i) \quad \text{és} \quad b_i(t) = (f(t), \varphi_i).$$

Előétel – Elsőrendű hibabecslések poliédereken – I.

Kulcs a szemidiszkrét energia becslés (nem csak poliéderen!):

$$|u_h(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_h(s)\|^2 \, ds \leq e^{2ct} \Big(|u_h(0)|^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(s)\|_*^2 \, ds \Big).$$

Továbbá a Ritz projekció (a-ortogonális projekció)

$$a(R_h u, v_h) = a(u, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \qquad (\kappa > 0)$$

Teljesíti az alábbi hibabecslést

$$\|u - R_h u\|^2 \leq Ch^2 \Big(\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \beta \|\gamma u\|_{H^2_{\mathrm{pw}}(\Gamma)}^2 \Big)$$

Előétel – Elsőrendű hibabecslések poliédereken – II.

Szemidiszkrét hibabecslés:

$$|u(t) - u_h(t)|^2 + \int_0^t \|u(t) - u_h(t)\|^2 \mathrm{d}t \leq Ch^2.$$

Bizonyítás: Ld. [V. Thomée]: Bontsuk fel a hibát

$$u_h - u = (u_h - R_h u) + (R_h u - u)$$

alakban. Előbbire energia becslés, utóbbira a fenti Ritz projekció hibabecslés.

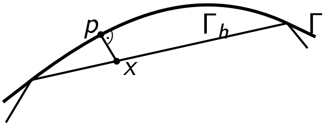
[...]

Sima felületek

Lift operátor

Sima felületek esetében elkerülhetetlen a felület és a tartomány approximációja, és így extra óvatosság is szükségeltetik, ld. [Dziuk, Elliott, Ranner, ... (1988–)].

$$V_h \not\subseteq V$$



Fontos(!):
Új interpolációs becslések: tartomány [Bernardi (1989), Elliott és Ranner (2013)], felület [Dziuk (1988)]
Egyéb geometrikus hibák megfelelő becslése.

Diszkrét bilineáris formák

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \kappa \int_{\Gamma_h} (\gamma_h u_h)(\gamma_h v_h) + \beta \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} v_h$$

$$m_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} u_h v_h + \mu \int_{\Gamma_h} (\gamma_h u_h)(\gamma_h v_h),$$

Geometriai hibák becslése: tetszőleges $v_h, w_h \in V_h$ esetén

$$|a(v_h^l, w_h^l) - a_h(v_h, w_h)| \leq Ch\|\nabla v_h^l\|_{L^2(B_h^l)} \|\nabla w_h^l\|_{L^2(B_h^l)} + Ch^2\|v_h^l\|\|w_h^l\|,$$

$$|m(v_h^l, w_h^l) - m_h(v_h, w_h)| \leq Ch\|v_h^l\|_{L^2(B_h^l)} \|w_h^l\|_{L^2(B_h^l)} + Ch^2|v_h^l||w_h^l|.$$

Fontos becslés [Elliott és Ranner (2013)]:

$$\|v\|_{L^2(B_h^l)} \leq Ch^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad (\forall v \in H^1(\Omega)). \tag{1}$$

Diszkrét bilineáris formák

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \kappa \int_{\Gamma_h} (\gamma_h u_h)(\gamma_h v_h) + \beta \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} v_h$$

$$m_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} u_h v_h + \mu \int_{\Gamma_h} (\gamma_h u_h)(\gamma_h v_h),$$

Geometriai hibák becslése: tetszőleges $v_h, w_h \in V_h$ esetén

$$|a(v_h^l, w_h^l) - a_h(v_h, w_h)| \leq Ch\|\nabla v_h^l\|_{L^2(B_h^l)} \|\nabla w_h^l\|_{L^2(B_h^l)} + Ch^2\|v_h^l\|\|w_h^l\|,$$

$$|m(v_h^l, w_h^l) - m_h(v_h, w_h)| \leq Ch\|v_h^l\|_{L^2(B_h^l)} \|w_h^l\|_{L^2(B_h^l)} + Ch^2|v_h^l||w_h^l|.$$

Fontos becslés [Elliott és Ranner (2013)]:

$$\|v\|_{L^2(B_h^l)} \leq Ch^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad (\forall v \in H^1(\Omega)). \tag{1}$$

Diszkrét bilineáris formák

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \kappa \int_{\Gamma_h} (\gamma_h u_h)(\gamma_h v_h) + \beta \int_{\Gamma_h} \nabla_{\Gamma_h} u_h \cdot \nabla_{\Gamma_h} v_h$$

$$m_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} u_h v_h + \mu \int_{\Gamma_h} (\gamma_h u_h)(\gamma_h v_h),$$

Geometriai hibák becslése: tetszőleges $v_h, w_h \in V_h$ esetén

$$|a(v_h^l, w_h^l) - a_h(v_h, w_h)| \leq Ch \|\nabla v_h^l\|_{L^2(B_h^l)} \|\nabla w_h^l\|_{L^2(B_h^l)} + Ch^2 \|v_h^l\| \|w_h^l\|,$$

$$|m(v_h^l, w_h^l) - m_h(v_h, w_h)| \leq Ch \|v_h^l\|_{L^2(B_h^l)} \|w_h^l\|_{L^2(B_h^l)} + Ch^2 |v_h^l| |w_h^l|.$$

Fontos becslés [Elliott és Ranner (2013)]:

$$\|v\|_{L^2(B_h^l)} \leq Ch^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \qquad (\forall v \in H^1(\Omega)). \tag{1}$$

Ritz leképezés sima tartományok esetén

Definiáljuk a Ritz leképezést $R_h : V \to V_h^l$ a következő módon:

$$a_h(\widetilde{R}_h u, v_h) = a(u, v_h^l) \qquad \forall v_h \in V_h$$

ekkor, legyen $R_h u := (\widetilde{R}_h u)^l \in V_h^l$.

Nincs Galjorkin ortogonalitás! Nem projekció, csak leképezés!

Ritz leképezés hibabecslése

- Elsőrendű becslés: $\|u - R_h u\|^2 \leq Ch^2 \left(\|u\|^2_{H^2(\Omega)} + \beta \|\gamma u\|^2_{H^2(\Gamma)} \right)$;
- Másodrendű becslés: $|.|$ normában, Aubin–Nitsche trükk.

Konvergencia becslések

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ egy sima tartomány ($d \leq 3$), továbbá legyen u a feladat megfelelően sima megoldása.
Ekkor a szemidiszkrét megoldás lineáris bázisfüggvények esetén teljesíti a következő elsőrendű hibabecslést:

$$|u_h(t) - u(t)|^2 + \int_0^t \|u_h(s) - u(s))\|^2 \mathrm{d}s \leq C_1 h^2,$$

Továbbá az alábbi másodrendű hibabecslés is teljesül:

$$\|u_h(t) - u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \mu\|\gamma(u_h(t) - u(t))\|^2_{H^{-\theta}(\Gamma)} \leq C_2 h^4,$$

ahol $\theta = 1/2$, ha $\beta = 0$ és $\theta = 0$, ha $\beta > 0$.

Általános PDE-k

Hasonló eredmények igazak

- szemilineáris problémák (lokálisan Lipschitz) $\longleftarrow$ jó trükk (?!),
- nem-autonóm feladatok (figyelem(!): $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(R_h(t)u(t)\Big) \neq R_h(t)\dot{u}(t)$),
- „*lumped mass*” végeselem módszer ($\rightsquigarrow$ exponenciális integrátorok),

esetén is.

Egy jó trükk – I.

Legyen f és f' lokálisan Lipschitz.

A szemilineáris feladat hibabecslésében szükség van a nemlineáris tag becslésére, ehhez pedig egy

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2r \qquad t^* \leq T$$

típusú becslésre (u-ról ez feltehető $t^* = T$ esetén is).

Legyen tehát $t^* \in [0, T]$ maximális úgy, hogy a fenti teljesül!

Igazoljuk először a hibabecslést $0 \leq t \leq t^*$ esetén, azaz

$$|u_h(t) - u(t)|^2 + \tfrac{1}{2} \int_0^t \|u_h(s) - u(s)\|^2 \,\mathrm{d}s \leq C' e^{CL(2r)t} h^4, \qquad 0 \leq t \leq t^*.$$

Ekkor már csak azt kéne megmutatnunk, hogy $t^* = T$ (kellően kis $h > 0$ esetén).

Egy jó trükk – I.

Legyen f és f' lokálisan Lipschitz.

A szemilineáris feladat hibabecslésében szükség van a nemlineáris tag becslésére, ehhez pedig egy

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le 2r \qquad t^* \le T$$

típusú becslésre (u-ról ez feltehető $t^* = T$ esetén is).

Legyen tehát $t^* \in [0, T]$ maximális úgy, hogy a fenti teljesül!

Igazoljuk először a hibabecslést $0 \le t \le t^*$ esetén, azaz

$$|u_h(t) - u(t)|^2 + \tfrac{1}{2} \int_0^t \|u_h(s) - u(s)\|^2 \, ds \le C' e^{CL(2r)t} h^4, \qquad 0 \le t \le t^*.$$

Ekkor már csak azt kéne megmutatnunk, hogy $t^* = T$ (kellően kis $h > 0$ esetén).

Egy jó trükk – I.

Legyen f és f' lokálisan Lipschitz.

A szemilineáris feladat hibabecslésében szükség van a nemlineáris tag becslésére, ehhez pedig egy

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2r \qquad t^* \leq T$$

típusú becslésre (u-ról ez feltehető $t^* = T$ esetén is).

Legyen tehát $t^* \in [0, T]$ maximális úgy, hogy a fenti teljesül!

Igazoljuk először a hibabecslést $0 \leq t \leq t^*$ esetén, azaz

$$|u_h(t) - u(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_h(s) - u(s)\|^2 \, \mathrm{d}s \leq C' e^{CL(2r)t} h^4, \qquad 0 \leq t \leq t^*.$$

Ekkor már csak azt kéne megmutatnunk, hogy $t^* = T$ (kellően kis $h > 0$ esetén).

Egy jó trükk – II.

Inverz becsléssel:

$$
\begin{aligned}
\|u_h\|_{L_\infty(\Omega)} &\leq \|u_h - I_h u\|_{L_\infty(\Omega)} + \|I_h u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq Ch^{-d/2}\|u_h - I_h u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq Ch^{-d/2}\|u_h - u\|_{L_2(\Omega)} + Ch^{-d/2}\|u - I_h u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq CC_2 h^{2-d/2} + Ch^{2-d/2}\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq \tfrac{3}{2} r.
\end{aligned}
$$

Azaz t^* nem lehetett maximális! $\quad \Rightarrow \quad t^* = T$

Időrdiszkretizációk

Klasszikus implicit módszerek

Ugyanazt az absztrakt formalizmust használjuk, amelyben a parabolikus feladatok idődiszkretizációja jól ismert: pl. BDF vagy algebrailag stabil implicit Runge–Kutta módszerek.

$$m(\partial_t^\tau u_h^n, v_h) + a(u_h^n, v_h) = m(f(t^n), v_h) \qquad \forall\, v_h \in V_h,$$

[Akrivis, Crouzeix, Lubich, Ostermann, Savaré, ..., ...]

Például, egy k lépéses BDF módszer ($k \leq 5$):

$$\Big(\frac{\delta_0}{\tau}\mathbf{M} + \mathbf{A}\Big)\mathbf{u}^n = \mathbf{b}(t^n) - \mathbf{M}\frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{k} \delta_j \mathbf{u}^{n-j}.$$

a klasszikus rendben konvergál.

Splitting módszerek – I.

Force splitting:
válasszuk el a tartományt és a felületet:

$$a(\cdot,\cdot) = a_\Omega(\cdot,\cdot) + a_\Gamma(\cdot,\cdot)$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\Omega + \mathbf{A}_\Gamma$$

1. $[t_0, t_{1/2}]$: $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{A}_\Gamma \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}_\Gamma(t_0)$,
   kezdeti feltétel: $\mathbf{u}^0$, megoldás: $\mathbf{u}^{1/2,-}$.
2. $[t_0, t_1]$: $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{A}_\Omega \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}_\Omega(t_{1/2})$,
   kezdeti feltétel: $\mathbf{u}^{1/2,-}$, megoldás: $\mathbf{u}^{1/2,+}$.
3. $[t_{1/2}, t_1]$: $\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{A}_\Gamma \mathbf{u}(t) + \mathbf{b}_\Gamma(t_1)$,
   kezdeti feltétel: $\mathbf{u}^{1/2,+}$, megoldás: $\mathbf{u}^1$.

Splitting módszerek – II.

Component splitting:
válasszuk el a belső és a perem pontokat:

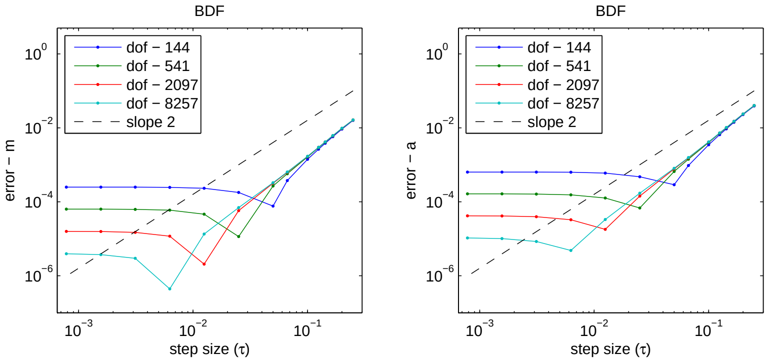
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} \\ \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \end{pmatrix}.$$

1. $[t_0, t_{1/2}]$: $\mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{u}}_1(t) = -\mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{A}_{10}\mathbf{u}_0^0 + \mathbf{b}_1(t_0)$,
   kezdeti feltétel: $\mathbf{u}_1^0$, megoldás: $\mathbf{u}_1^{1/2}$.
2. $[t_0, t_1]$: $\mathbf{M}_0 \dot{\mathbf{u}}_0(t) = -\mathbf{A}_{00}\mathbf{u}_0(t) - \mathbf{A}_{01}\mathbf{u}_1^{1/2} + \mathbf{b}_0(t_{1/2})$,
   kezdeti feltétel: $\mathbf{u}_0^0$, megoldás: $\mathbf{u}_0^1$.
3. $[t_{1/2}, t_1]$: $\mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{u}}_1(t) = -\mathbf{A}_{11}\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{A}_{10}\mathbf{u}_0^1 + \mathbf{b}_1(t_1)$,
   kezdeti feltétel: $\mathbf{u}_1^{1/2}$, megoldás: $\mathbf{u}_1^1$.

Numerikus kísérletek

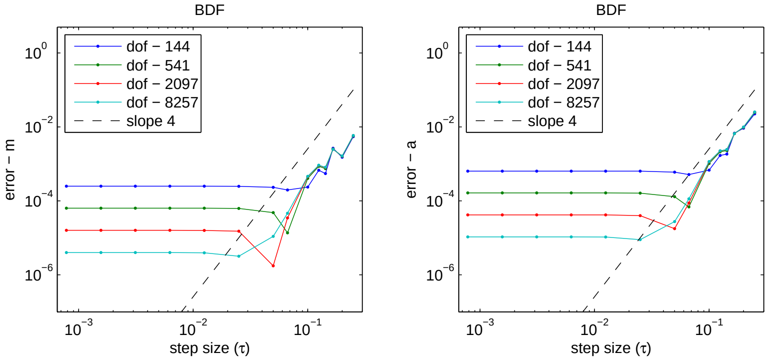
Allen–Cahn egyenlet dinamikus peremfeltételekkel – BDF2

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + f_\Omega & \Omega\text{-ban} \\ \mu\, \partial_t u = \beta\, \Delta_\Gamma u - \partial_\nu u + W_\Gamma'(u) + f_\Gamma & \Gamma\text{-n}, \end{cases}$$



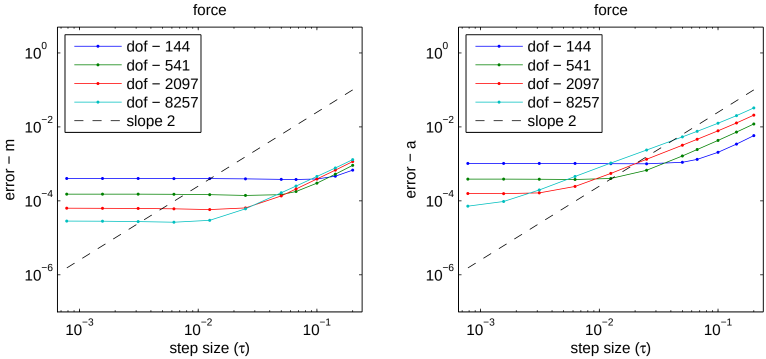
BDF2 módszer hibája $t = 1$ időpontban

Allen–Cahn egyenlet dinamikus peremfeltételekkel – BDF4



BDF4 módszer hibája $t = 1$ időpontban

Force splitting — Γ - Ω



Force splitting hibája $t = 1$ időpontban

Component splitting — 0 - 1

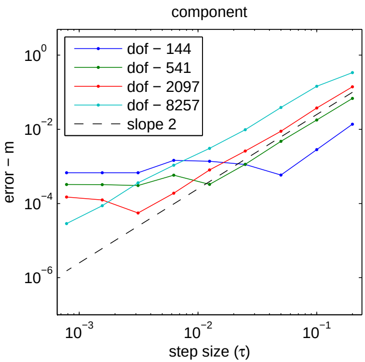


Figure: Component splitting hibája $t = 1$ időpontban

Összefoglalás

- általános absztrakt formalizmus;
- így a meglévő idődiszkretizációs eredmények direkt alkalmazhatóak;
- Ritz „projekció” nem a szokásos elliptikus formán alapul, hanem új, peremtagokat is tartalmaz, esetszétválasztás: $\beta = 0$, $\beta > 0$;
- sima felületek esetén a felület approximációja fontos;
- splitting(!!);

Köszönöm a figyelmet!

Egy jó trükk – I.

Legyen f és f' lokálisan Lipschitz.

A szemilineáris feladat hibabecslésében szükség van a nemlineáris tag becslésére, ehhez pedig egy

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2r \qquad t^* \leq T$$

típusú becslésre (u-ról ez feltehető $t^* = T$ esetén is).

Legyen tehát $t^* \in [0, T]$ maximális úgy, hogy a fenti teljesül!

Igazoljuk először a hibabecslést $0 \leq t \leq t^*$ esetén, azaz

$$|u_h(t) - u(t)|^2 + \tfrac{1}{2} \int_0^t \|u_h(s) - u(s)\|^2 \, ds \leq C' e^{CL(2r)t} h^4, \qquad 0 \leq t \leq t^*.$$

Ekkor már csak azt kéne megmutatnunk, hogy $t^* = T$ (kellően kis $h > 0$ esetén).

Egy jó trükk – I.

Legyen f és f' lokálisan Lipschitz.

A szemilineáris feladat hibabecslésében szükség van a nemlineáris tag becslésére, ehhez pedig egy

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2r \qquad t^* \leq T$$

típusú becslésre (u-ról ez feltehető $t^* = T$ esetén is).

Legyen tehát $t^* \in [0, T]$ maximális úgy, hogy a fenti teljesül!

Igazoljuk először a hibabecslést $0 \leq t \leq t^*$ esetén, azaz

$$|u_h(t) - u(t)|^2 + \tfrac{1}{2} \int_0^t \|u_h(s) - u(s)\|^2 \, ds \leq C' e^{CL(2r)t} h^4, \qquad 0 \leq t \leq t^*.$$

Ekkor már csak azt kéne megmutatnunk, hogy $t^* = T$ (kellően kis $h > 0$ esetén).

Egy jó trükk – I.

Legyen f és f' lokálisan Lipschitz.

A szemilineáris feladat hibabecslésében szükség van a nemlineáris tag becslésére, ehhez pedig egy

$$\|u_h(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2r \qquad t^* \leq T$$

típusú becslésre (u-ról ez feltehető $t^* = T$ esetén is).

Legyen tehát $t^* \in [0, T]$ maximális úgy, hogy a fenti teljesül!

Igazoljuk először a hibabecslést $0 \leq t \leq t^*$ esetén, azaz

$$|u_h(t) - u(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|u_h(s) - u(s)\|^2 \, ds \leq C' e^{CL(2r)t} h^4, \qquad 0 \leq t \leq t^*.$$

Ekkor már csak azt kéne megmutatnunk, hogy $t^* = T$ (kellően kis $h > 0$ esetén).

Egy jó trükk – II.

Inverz becsléssel kellően kis h esetén:

$$
\begin{aligned}
\|u_h\|_{L_\infty(\Omega)} &\leq \|u_h - I_h u\|_{L_\infty(\Omega)} + \|I_h u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq Ch^{-d/2}\|u_h - I_h u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq Ch^{-d/2}\|u_h - u\|_{L_2(\Omega)} + Ch^{-d/2}\|u - I_h u\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq CC_2 h^{2-d/2} + Ch^{2-d/2}\|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{L_\infty(\Omega)} \\
&\leq \tfrac{3}{2} r.
\end{aligned}
$$

Azaz t^* nem lehetett maximális! $\quad \Rightarrow \quad t^* = T$