Komplex számok

Határozza meg a $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3-2i$ és $z_2 = 2+i$

Megoldás: $\bar{z}_1 = 3+2i$, $\bar{z}_2 = 2-i$,

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{(6+4i+3i-2)}{(4+1)} = \frac{4+7i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

Vajon igaz-e, hogy $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$

Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

a.) $z_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

b.) $z_2 = \frac{2+i}{i(1-4i)}$

Megoldás:

$$z_1 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

c.) $z_2 = \frac{2+i}{i(1-4i)}$

Megoldás:

$$z_2 = \frac{2+i}{i(1-4i)} = \frac{2+i}{(i+4)} = \frac{(2+i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{8+4i-2i+1}{16+1} = \frac{9+2i}{17} = \frac{9}{17} + \frac{2}{17}i$$

Írja fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját

a) $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$

b) $z_2 = -4i$

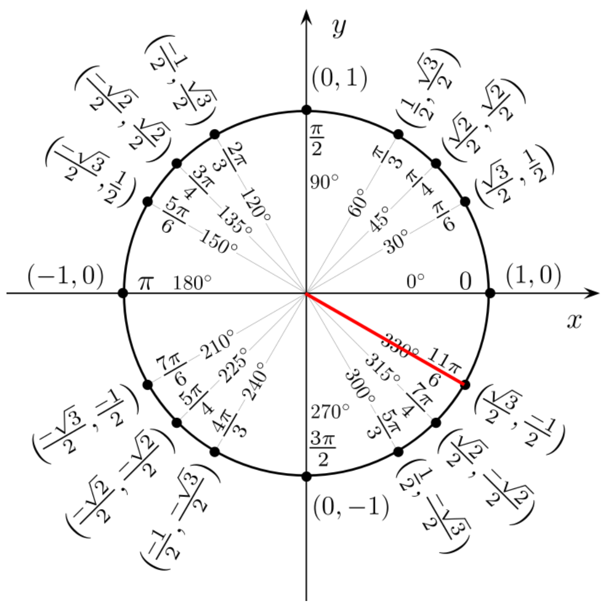
c) $z_3 = 8$

a. Megoldás:

$\left|z_1\right| = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, ha elosztjuk a komplex számot az abszolút értékével, akkor egy ugyanolyan irányszögű és egységnyi abszolút értékű számot kapunk.

Tehát, $\frac{z_1}{\left|z_1\right|} = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

Tehát azt a φ szöget keressük, melyre $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ és $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$



A keresett szög $\varphi_1 = \frac{11\pi}{6}$

Tehát $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

b.) Megoldás:

$z_2 = -4i$

$\left|z_2\right| = 4$ és irányszöge $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$,

tehát $z_2 = -4i = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

c.) Megoldás:

$$z_3 = 8 \qquad |z_3| = 8, \qquad \varphi_3 = 0$$

$$z_3 = 8(\cos 0 + i \sin 0)$$

---

4. Végezze el a következő gyökvonásokat:

a.) $\sqrt[3]{1}$

b.) $\sqrt[4]{-16}$

c.) $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$

5. Végezze el a következő hatványozásokat:

a.) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

b.) $(1+i)^8$

c.) $(1-i)^4$

6. Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $z^3 = 1+i$

b.) $|z| - z = 1+2i$

c.) $z^2 = \bar{z}$

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán! (Az eredményt algebrai alakban adja meg.)

a) $z^2 + (1+i)\overline{z} + 4i = 0$

b) $|z| - z = 1+2i$

c.) $z^2 = \overline{z}$

8. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív és a képzetes része negatív!

$$\frac{7i+3}{7-3i} z^4 + 8\left(\sqrt{3}+i\right) = 0$$