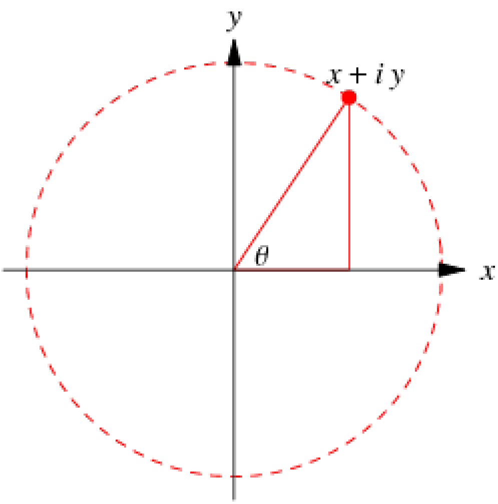
1. Komplex számok

1.2. A komplex számok algebrai alakja

1.2.1. Definíció: A *komplex szám algebrai alakja*: nem más, mint $z = x + iy$, ahol $x, y \in R$ és $i^2 = -1$. Az x-et szoktuk a komplex szám *valós részének* nevezni, míg y-t a komplex szám *képzetes* (vagy *imaginárius*) *részének*. Jelölésük: $\operatorname{Re} z = x$ és $Im\, z = y$.



A $z = x + iy$ komplex számnak két geometriai reprezentációja is van, az egyik az *xy*-sík $P(x, y)$ pontja, míg a másik ugyanebben a síkban az origóból a $P(x, y)$ pontba mutató $\overrightarrow{OP} = \underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$ vektor. Mindkét esetben az x-tengelyt *valós*, az y-tengelyt pedig *képzetes tengelynek* nevezzük, $\operatorname{Re} z$, illetve $\operatorname{Im} z$-vel jelöljük. A komplex számok geometriai reprezentációját gyakran *Argand-diagramként* is emlegetjük. Az ábrán szereplő θ szögre visszatérünk később, mikor a komplex számok más alakjával is megismerkedünk.

1.2.2. Példák: $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = -3 - 4i$, $z_4 = 3 - 4i$, $z_5 = 25$, $z_6 = 25i$.

1.2.3. Megjegyzés: Amint már előbb is említettük, a komplex számok $\mathbb{C} := \{x + yi \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ halmaza és a sík pontjai között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat létesíthető, azaz minden $z = x + iy$ komplex számhoz egyértelműen hozzárendelhető a sík egy $P(x, y)$ pontja és fordítva, a sík bármely $P(x, y)$ pontjához egyértelműen hozzárendelhetjük a $z = x + iy$ komplex számot.

1.2.4. Definíciók: A $z = x + iy$ komplex szám *ellentettje* nem más, mint $-z = -x - iy$, azaz tulajdonképpen az origóra vett szimmetrikus lesz. A $z = x + iy$ komplex szám *abszolút értéke* (akárcsak a valós számok esetén) nem más, mint az origótól vett távolság, azaz $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. A

$z = x + iy$ komplex szám *konjugáltja* a $\bar{z} = x - iy$, azaz nem más, mint az x-tengelyre vett szimmetrikus (ezek szerint $\bar{\bar{z}} = z$).

1.3. Műveletek algebrai alakban

Mivel a valós számok speciális komplex számok, ezért úgy kell a $\mathbb{C}$-beli számokra a műveleteket definiálnunk, hogy minden eddigi definíció, tétel, tulajdonság, ami a valós számokkal végzett műveletekre vonatkozik, érvényben maradjon.

1.3.1. Definíciók: Két, algebrai alakban megadott komplex számot úgy *adunk össze* (és *vonunk ki* egymásból), hogy a valós- és képzetes részekkel külön-külön elvégezzük az összeadást (kivonást). A kivonás itt is ellentettel való összeadást jelent. Tehát ha $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$, akkor $z_1 \pm z_2 := x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2)$. Továbbá $z_1 \cdot z_2 := x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, azaz két algebrai alakban megadott komplex számot úgy *szorzunk össze*, mint két zárójelet, minden tagot beszorzunk minden taggal, figyelembe véve, hogy $i^2 = -1$.

1.3.2. Megjegyzés: $\boxed{z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{C}}$.

1.3.3. Megjegyzés: *Osztáskor* pedig mindig bővítünk a nevező konjugáltjával, azaz

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

1.3.4. Megjegyzés: Mielőtt a hatványozásról szót ejtenénk, nézzük meg az i képzetes egység

hatványait: $\boxed{\begin{array}{l} i = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}}$ és így tovább, ezért i tetszőleges hatványának eredményét mindig a

hatványkitevő 4-gyel való maradékos osztása határozza meg.

1.3.5. Példa: Számítsuk ki: $1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{2009}$ értékét.

Megoldás: Az 1.2.8. megjegyzés miatt $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$, így megy ez végig $i + i^2 + i^3 + i^4 + ... + i^{2008} = 0$, mert 2008 osztható 4-gyel.
$i^{2009} = (i^4)^{502} \cdot i = 1 \cdot i = i$, emiatt a kért érték $1 + i$.

1.3.6. Megjegyzés: Nem tudunk tetszőleges komplex számot algebrai alakban hatványozni, emiatt is szükséges egy másik alak bevezetése. Ugyanez a helyzet a komplex n-edik gyökvonás esetén is. Azért nagyon speciális komplex számok esetén algebrai alakban is könnyű a hatványozás, mint például:

- az x-tengelyen van a komplex számunk, azaz valós szám, pl. $(-2+0\cdot i)^{10}=2^{10}(=2^{10}+0\cdot i)$,
- az y-tengelyen van a komplex számunk, pl. $(-2i)^{10}=2^{10}i^{10}=2^{10}i^{2}=-2^{10}$,
- valamelyik „szögfelezőn” helyezkedik el z, azaz x és y között csak előjel eltérés lehet, pl. $(1-i)^{100}=\left[(1-i)^2\right]^{50}=\left(1-2i+i^2\right)^{50}=(-2i)^{50}=2^{50}i^2=-2^{50}$.

Amennyiben z máshol helyezkedik el, algebrai alakban csak nagyon kis hatványt érdemes elvégezni. Szükségünk a komplex számok más alakjára is.

1.4. A komplex számok trigonometrikus és exponenciális alakja

Tekintsük a $z=x+iy$ komplex számot. Ennek egyértelműen megfeleltethetünk egy síkbeli $P(x,y)$ pontot és egy $\overrightarrow{OP}$ vektort. Az Argand-diagramot megnézve, amennyiben θ-val jelöljük az x-tengely és az $\overrightarrow{OP}$ vektor által bezárt szöget (az x-tengelytől óramutató járásával ellentétes irányban haladva), a következőket állapíthatjuk meg:

- ha csak a θ értéket rögzítjük, egy félegyenest kapunk a síkban,
- ha csak az $r:=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ abszolút értéket rögzítjük, akkor egy origó középpontú, r sugarú kört kapnánk a síkban,
- ha mindkét értéket rögzítjük, akkor egy egyértelműen meghatározott $P(x,y)$ pontot kapunk a komplex számsíkban (a kör és félegyenes egyelemű metszetét).

Felírhatjuk, hogy $\boxed{\cos\theta=\frac{x}{r},\ \sin\theta=\frac{y}{r},\text{ ahol } r=\sqrt{x^2+y^2}}$. Emiatt $\boxed{x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta}$.

Az algebrai alakból kiindulva kapjuk, hogy $z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

1.4.1. Definíció: A z komplex szám *trigonometrikus alakja* $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, ahol $r\geq 0$ az *abszolút érték,* $\theta\in[0,2\pi)$ pedig a *főargumentum*.

1.4.2. Megjegyzés: A fenti bekeretezett képletek biztosítják az átmenetet az algebrai és a trigonometrikus alak között.

1.4.3. Példák:

- Legyen $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Írjuk fel az algebrai alakot.

  Megoldás: $z=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos\frac{2\pi}{3}+i2\sin\frac{2\pi}{3}=2\left(-\frac{1}{2}\right)+2i\frac{\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$.

- Legyen $z=-\sqrt{3}-i$. Írjuk fel a trigonometrikus alakot.

Megoldás: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$, $\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{1}{2}$. Mivel mindkét érték negatív, ezért a harmadik negyedben van az argumentum, azaz $\theta=\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$.

Így $z=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

1.4.4. Tétel (Euler-formula): $\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$.

1.4.5. Definíció: A fentiek alapján felírhatjuk a komplex szám *exponenciális alakját*: $z=re^{i\theta}$, ahol $r\geq 0$ és $\theta\in[0,2\pi)$.

1.5. Műveletek exponenciális és trigonometrikus alakban

- Összeadást, kivonást csak algebrai alakban érdemes elvégezni.
- Szorzás: Legyen $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ és $z_2=r_2e^{i\theta_2}$. Ekkor a két szám szorzata: $z_1z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
- Osztás: A $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ és $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ komplex számok hányadosa: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.
- Hatványozás: tetszőleges $n\in\{1,2,3,...\}$ és tetszőleges $z=re^{i\theta}$ ($r\geq 0$ és $\theta\in[0,2\pi)$) esetén $z^n=r^ne^{i(n\theta)}$, ami azonnal következik a hatványok tulajdonságaiból.

1.5.1. Megjegyzés: Bármilyen műveletről is legyen szó, a végén ügyeljünk arra, hogy $\theta\in[0,2\pi)$.

1.5.2. Definíció: A $z\in\mathbb{C}$ *komplex szám n-edik gyökei* $(n\in\{1,2,3,...\})$ azok a $w\in\mathbb{C}$ *komplex számok*, melyekre $w^n=z$. Speciális eset: $\sqrt[n]{0}=0$. Minden más esetben az $\sqrt[n]{z}$ n különböző komplex számot takar.

- n-edik komplex gyökök:

1.5.3. Tétel: Legyen tetszőleges $n\in\{1,2,3,...\}$ és tetszőleges $z=re^{i\theta}$ ($r\geq 0$ és $\theta\in[0,2\pi)$). Ekkor

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$, ahol $k=0,1,,...,n-1$.

Bizonyítás: A fenti n számot n-edik hatványra emelve kapjuk, hogy

$$re^{i(\theta+2k\pi)}=r\left[\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)\right]=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}=z.$$

Előbbi számításban az Euler-formulát és a trigonometrikus függvények periodicitását használtuk. Ezek a komplex *n*-edik gyökök a síkban egy origó középpontú, $\sqrt[n]{r}$ sugarú körbe írható szabályos *n*-szög csúcsainak felelnek meg.

Trigonometrikus alakban átírva az eddigieket kapjuk a következőket:

- Összeadást, szorzást csak algebrai alakban érdemes elvégezni.
- Szorzás: Legyen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Ekkor $z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$ (ebből látszik, hogy a szorzás egy nyújtva forgatást jelent a síkban).
- Osztás: Legyen $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ és $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Ekkor $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$.
- Hatványozás: Hatványozás: tetszőleges $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ és tetszőleges $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r \geq 0$ és $\theta \in [0, 2\pi)$) esetén $z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$.

1.5.4. Megjegyzés: Bármilyen műveletről is legyen szó, a végén ügyeljünk arra itt is, hogy $\theta \in [0, 2\pi)$. Továbbá, amennyiben a trigonometrikus alakban végzett hatványozás képletének azt a speciális esetét tekintjük, mikor $r = 1$, a $\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$ képletet *De Moivre tételének* nevezzük.

1.5.5. Tétel: Legyen tetszőleges $n \in \{1, 2, 3, ...\}$ és tetszőleges $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ($r \geq 0$ és $\theta \in [0, 2\pi)$). Ekkor $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$, ahol $k = 0, 1, ..., n-1$.

Bizonyítás: A fenti n számot n-edik hatványra emelve kapjuk, hogy

$$r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] = r(\cos\theta + i\sin\theta) = z.$$

1.6. Az algebra alaptétele

1.6.1. Tétel (Az algebra alaptétele): A komplex számok körében minden n-edfokú $(n = 1, 2, 3, ...)$ $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 = 0$ alakú egyenletnek ($a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$) *pontosan n darab gyöke van,* amennyiben az m-szeres gyököket m-szer (azaz multiplicitással) számolunk.

1.6.2. Példa: Oldjuk meg a $z^3 - 1 = 0$ egyenletet *a komplex számok halmazán*. A megoldásokat algebrai alakban kérjük.

Megoldás: Az algebra alaptétele miatt tudjuk, három komplex megoldásunk lesz. Ezekből egyik az eddig ismert $z_1 = 1$, a másik két megoldást még ki kell számolnunk. Kétféleképpen kezdhetünk hozzá. Dolgozhatunk algebrai alakban (A) és trigonometrikus alakban (B), a komplex köbgyökök képleteit használva.

A) $z^3-1=(z-1)\left(z^2+z+1\right)$. Emiatt $z_1=1$ és a másik két gyököt a $z^2+z+1=0$ másodfokú egyenlet komplex megoldásából kapjuk. A megoldó képlet marad $z_{2,3}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, azzal a különbséggel, hogy itt komplex négyzetgyök szerepel a megoldó képletben, így ez eleve két számot jelent (itt jön be a $\pm$, mert a komplex számok halmazában $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$, ahol itt már valós $\sqrt{3}$ szerepel a jobb oldalon).

Tehát $z_{2,3}=\dfrac{-1+\sqrt{1^2-4}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

B) Az 1-gyet trigonometrikus alakban felírva kapjuk, hogy a

$z=\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1(\cos 0+i\sin 0)}=\cos\dfrac{0+2k\pi}{3}+i\sin\dfrac{0+2k\pi}{3}$ a gyökök, ahol $k=0,1,2$. Így

$z_0=\cos 0+i\sin 0=1$,

$z_1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$z_2=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.