$(A-\lambda\mathbb{I})e_{i,p_i-1} = 0$ és $(A-\lambda\mathbb{I})e_{i,j} = e_{i,j+1}$, ha $j < p_i - 1$, így csak azt kell megmutatnunk, hogy generátorrendszert alkotnak. Tegyük fel, hogy $(A-\lambda\mathbb{I})^r x = 0$. Ekkor x a λ-hoz tartozó általánosított sajátvektor, így az eddig bizonyítottak szerint felírható $x = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-1}\alpha_{i,j}e_{i,j}$ alakban. Mindkét oldalra alkalmazva $(A-\lambda\mathbb{I})^r$-et azt kapjuk, hogy $(A-\lambda\mathbb{I})^r x = 0 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{p_i-r-1}\alpha_{i,j}e_{i,j+r}$. Az itt szereplő $\alpha_{i,j}$ együtthatóknak a lineáris függetlenség miatt nullának kell lenni, ami igazolja az állítást. □

* **1.2.93. Következmény.** *Ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor van Jordan-bázis, amelyben A mátrixa Jordan-normálalakú.* □

1.3. Belső szorzat

1.3.1. Norma. Legyen X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett. Egy $x \mapsto \|x\|$ leképezését X-nek $\mathbb{R}$-be *normá*nak, az $(X, \|\ \|)$ párt pedig *normált tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett, ha

(1) $\|x\| \geq 0$ minden $x \in X$-re és $\|x\| = 0$ pontosan akkor, ha $x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ minden $x \in X$-re és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra (*abszolútérték-homogenitás*);

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ minden $x, y \in X$-re (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Megjegyezzük, hogy $\|\ \|$ helyett az $|\ |$ jelölés is szokásos. Normált tér bármely lineáris altere is normált tér. Egy $x \in X$ elemet *normált*nak nevezünk, ha $\|x\| = 1$. A normált terek *izomorfizmus*ai definíció szerint a lineáris és normatartó bijekciók. Bármely X véges dimenziós normált tér izomorf valamely alkalmas normával ellátott $\mathbb{K}^n$ térrel: Ha az X tér n-dimenziós, akkor tudjuk, hogy létezik egy $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ lineáris izomorfizmus. Legyen $\big\|\varphi(x)\big\| := \|x\|$, ha $x \in X$. Ezzel a normával $\big(\mathbb{K}^n, \|\ \|\big)$ normált tér, az előbbi φ pedig normatartó lineáris bijekció.

1.3.2. Példák. A $\mathbb{K}^n$ tér normált tér a

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n}|x_j| \quad \text{illetve} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n}|x_j|,$$

ha $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ normákkal.

A jelölés onnan ered, hogy akármilyen $1 \leq p < \infty$ valós számra az

$$x \mapsto \|x\|_p = \Big(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\Big)^{1/p}$$

leképezés norma $\mathbb{K}^n$-en (ez az úgynevezett p-norma): a $t \mapsto t^p$ leképezés konvexsége miatt

$$\Big(\frac{u}{u+v}z + \frac{v}{u+v}w\Big)^p \leq \frac{u}{u+v}z^p + \frac{v}{u+v}w^p,$$

ha $u, v, z, w \geq 0$, $u + v > 0$; az $u = \|x\|_p$, $v = \|y\|_p$, $z = |x_j|/\|x\|_p$, $w = |y_j|/\|y\|_p$ helyettesítés után j-re összegezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\big(\|x\|_p + \|y\|_p\big)^p} \sum_{j=1}^{n} \big(|x_j| + |y_j|\big)^p \leq 1,$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség, a többi feltétel teljesülése pedig triviális. A $\| \ \|_1$ a $p = 1$ speciális eset, $\| \ \|_\infty$-t pedig a $p \to \infty$ határérték adja.

1.3.3. Belső szorzat. Ha X lineáris tér $\mathbb{K}$ felett és adott egy $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ leképezése $X \times X$-nek $\mathbb{K}$-ba úgy, hogy minden $x, y, z \in X$-re és $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

(1) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ (*additivitás*);

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ (*homogenitás*);

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (*Hermite-szimmetria*);

(4) $\langle x, x\rangle > 0$, ha $x \neq 0$ (*pozitív definitség*);

akkor X-et *belső szorzat tér*nek nevezzük $\mathbb{K}$ felett. Az x és y elemek $\langle x, y\rangle$ *belső szorzat*ának vagy *skalárszorzat*ának jelölésére az (x, y), $(x|y)$, $\langle x|y\rangle$, $x \cdot y$, xy és $x \bullet y$ jelölések is szokásosak. A belső szorzat terek *izomorfizmus*ai definíció szerint a lineáris és belső szorzat tartó bijekciók.

(3)-ból bármely $x \in X$-re $\langle x, x\rangle = \overline{\langle x, x\rangle}$, tehát $\langle x, x\rangle$ valós. (1)-ből és (3)-ból

$$\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, y\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,$$

így a belső szorzás additív a második változóban is, és

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle,$$

így a második változóból $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetén nem a skalár, hanem a skalár konjugáltja emelhető ki. Megjegyezzük, hogy a fizikában a második változóban való linearitást szokás feltenni, ekkor az első változóból emelhető ki a skalár konjugáltja. (2)-ből $\langle 0, x\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle$ minden $x \in X$-re. Természetesen a konjugálásnak csak a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esetben van jelentősége; a valós esetben (3) egyszerűen a szimmetriát jelenti, és a belső szorzás szimmetrikus bilineáris forma, amelyhez tartozó kvadratikus forma (4) szerint pozitív definit.

1.3.4. Tétel. *Ha X belső szorzat tér $\mathbb{K}$ felett, akkor az x elem* normáját *a $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ összefüggéssel definiálva*

(1) $$\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\|y\| \qquad \textit{minden } x, y \in X\textit{-re}$$

(Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség), és X normált tér.

Bizonyítás. Az $x = 0 = y$ eset triviális. Ha például $y \neq 0$, akkor minden $\alpha \in \mathbb{K}$-ra

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle - \alpha\langle y, x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2,$$

amiből $\alpha = \langle x, y\rangle / \|y\|^2$ választással

$$0 \le \|x\|^2 - \frac{\left|\langle x, y\rangle\right|^2}{\|y\|^2},$$

tehát adódik (1). Ebből

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2,\end{aligned}$$

amiből adódik a háromszög-egyenlőtlenség. A többi norma tulajdonság triviális. □

1.3.5. Példa. Legyen $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$, ha $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Könnyű látni, hogy így egy belső szorzatot kapunk, amelyet $\mathbb{K}^n$ *szokásos belső szorzat*ának nevezünk. A belőle adódó norma az előző példában a $p = 2$ esetnek felel meg.

1.3.6. Megjegyzés. Egyszerű számolással adódik, hogy egy X belső szorzat térben teljesül az

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad \text{ha} \quad x, y \in X$$

paralelogramma-azonosság. Mivel $n > 1$ és $p \ne 2$ esetén ez az azonosság nem teljesül $\mathbb{K}^n$-en a $\| \ \|_p$ normára, az nem származhat belső szorzatból. Megmutatható, hogy egy norma pontosan akkor származik belső szorzatból, ha teljesül rá a paralelogramma-azonosság.

1.3.7. Szögek, euklidészi tér, unitér tér. Valós belső szorzat térben két nem nulla vektor által bezár *szög* alatt azt az egyetlen $0 \le \alpha \le \pi$ szöget értjük, amelyre $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos\alpha$. A véges dimenziós valós belső szorzat tereket *euklideszi tér*eknek, a véges dimenziós komplex belső szorzat tereket pedig *unitér tér*eknek is szokás nevezni. (Vannak, akik az unitér tereket, sőt, a végtelen dimenziós belső szorzat tereket is euklideszi térnek nevezik.)

1.3.8. Definíció. Legyen X belső szorzat tér. Ha $x, y \in X$, és $\langle x, y\rangle = 0$, akkor azt mondjuk, hogy x és y *merőleges*ek vagy *ortogonális*ak. Jelölése: $x \perp y$. Az $M, N \subset X$ halmazokat *ortogonális*aknak nevezzük, ha $x \perp y$ minden $x \in M$, $y \in N$-re. Jelölése: $M \perp N$. Egy $M \subset X$ halmaz *ortogonális komplementer*én az X összes olyan elemeinek halmazát értjük, amelyek ortogonálisak M minden elemére. Jelölése: $M^\perp$. Vegyük észre, hogy bármely halmaz ortogonális komplementere altér. Egy x_i, $i \in I$ rendszert *ortogonális rendszer*nek nevezünk, ha bármely két különböző eleme egymásra ortogonális, azaz ha $i, j \in I$, $i \ne j$, akkor $x_i \perp x_j$. Ha egy ortogonális rendszer minden eleme normált, akkor *ortonormált rendszer*ről beszélünk. Az $x \in X$ elemnek az x_i, $i \in I$ ortonormált rendszerre vonatkozó *Fourier-együttható*in az $\langle x, x_i\rangle$, $i \in I$ számokat értjük.