* **2.1.71. Metrikus terek.** Megvizsgálva az analízis alapfogalmainak (környezet, nyílt, zárt és kompakt halmazok, határérték, Cauchy-sorozat, stb.) definícióit és a tételek bizonyításait, mindenütt látható, hogy — közvetve vagy közvetlenül — a $\mathbb{K}^k$ pontjai közötti távolság bizonyos egyszerű tulajdonságait használtuk fel. Ezt figyelembe véve, az egész tárgyalást jóval általánosabban végezhetjük, ha bevezetjük a következő fogalmat: Az X halmazt *metrikus tér*nek nevezzük, ha bármely két x, y eleméhez hozzá van rendelve egy nemnegatív valós szám, az x és y *távolság*a úgy, hogy minden $x, y, z \in X$ esetén

(1) $d(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (*szimmetria*);

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

Ha egy metrikus térben minden Cauchy-sorozat konvergens, akkor *teljes*nek nevezzük. Metrikus terek izomorfizmusai az *izometriá*k, magyarul *távolságtartó leképezés*ek (*egybevágóság*ok). Segíthet a metrikus terek elképzelésében, ha tudjuk, hogy minden metrikus tér egybevágó valamely Banach-tér egy részhalmazával.

2.2. Differenciálszámítás

A differenciálás linearizálás.

Népköltemény

Figyelemre méltó, hogy a jelölés megkönnyíti a felfedezést: a legcsodálatosabban csökkenti az értelem munkáját.

Gottfried Wilhelm Leibniz

2.2.1. Lineáris operátorok normája. Tekintsünk egy-egy (ugyanúgy jelölt) normát a $\mathbb{K}^n$ illetve $\mathbb{K}^m$ tereken. Egy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$ lineáris leképezésre legyen

$$\|L\| = \sup_{|x| \leq 1} |Lx| \tag{1}$$

A szuprémum véges, mert L folytonos (mivel koordinátái elsőfokú polinomok) és így korlátos az egységgömbön. Mivel $Lx = |x| L\big(x/|x|\big)$, ahonnan $|Lx| \leq \|L\| |x|$ minden $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$-re, $\|L\|$ a legkisebb olyan szám, amelyre $|Lx| \leq \|L\| |x|$ minden $x \in \mathbb{K}^n$-re, azaz $\|L\| = \mathrm{Lip}(L)$. Nyilván $\|L\| \geq 0$ és $\|L\| = 0$ pontosan akkor, ha $L = 0$. Az is világos, hogy $\|\lambda L\| = |\lambda| \|L\|$. Ha $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^m)$, $|x| \leq 1$, akkor

$$\big|(L_1 + L_2)x\big| \leq |L_1 x| + |L_2 x| \leq \|L_1\| + \|L_2\|,$$

amiből a bal oldalon szuprémumot véve, azt kapjuk, hogy

$$\|L_1 + L_2\| \leq \|L_1\| + \|L_2\|,$$

így $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ normált tér. Az (1) összefüggéssel definiált normát a $\mathbb{K}^n$ és $\mathbb{K}^m$ tereken adott vektornormákhoz tartozó *operátornormá*nak (vagy ha a lineáris operátor mátrixáról van szó, *mátrixnormá*nak) nevezzük. Ha mást nem mondunk, akkor a belső szorzatból származó normákhoz tartozó operátornormát fogjuk használni. Ha kifejezésre akarjuk juttatni, hogy mindkét téren a p-normát ($1 \le p \le \infty$) használjuk, akkor a kapott operátornormát $\| \ \|_p$-vel jelöljük.

Nyilván $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$ esetén $|\lambda| \le \|L\|$ bármely λ sajátérték és bármely operátornorma esetén. A numerikus analízishez fontos tudni, hogy minden $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$-hez és minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\| \ \|$ norma $\mathbb{K}^n$-en, amelyre $\|L\| < \varrho(L) + \varepsilon$.

2.2.2. Feladat [8]. Mutassuk meg, hogy ha $[L]$ jelöli az $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ mátrixát a szokásos bázisban, akkor

$$\big\|[L]\big\|_\infty \le \|L\|_2 \le \big\|[L]\big\|_2.$$

→ **2.2.3. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy az operátornorma *szubmultiplikatív*, azaz ha $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ és $B \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^k,\mathbb{K}^n)$, akkor

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

→ **2.2.4. Feladat [6].** Mutassuk meg, hogy ha $A_k \to A$ a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ térben, és $x_k \to x$ a $\mathbb{K}^n$ térben, akkor $\mathbb{K}^m$-ben $A_k x_k \to Ax$.

→ **2.2.5. Feladat [10].** Határozzuk meg a kétdimenziós euklidészi tér azon lineáris transzformációjának normáját, amelynek mátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

* **2.2.6. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ esetén, ha L mátrixa a szokásos bázisban $(\ell_{i,j})$, akkor $\|L\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |\ell_{i,j}|$.

* **2.2.7. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ esetén, ha L mátrixa a szokásos bázisban $(\ell_{i,j})$, akkor $\|L\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |\ell_{i,j}|$.

* **2.2.8. Feladat [9].** Mutassuk meg, hogy $L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^m)$ esetén $\|L\|_2 = \varrho(A^*A)$.

2.2.9. Definíció. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akkor az f függvényt az x pontban akkor neveztük differenciálhatónak, ha létezik a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

határérték. Ez átfogalmazható úgy, hogy

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + r(h),$$

ahol r olyan függvény, amelyre $\lim_{h\to 0} r(h)/h = 0$. Ez azt jelenti, hogy az $f(x+h)-f(x)$ különbség előállítható egy h-ban lineáris „főtag” és egy kicsiny „maradéktag” összegeként. A derivált fogalmának ezt az alakját általánosíthatjuk többváltozós függvényekre.