hogy

$$\big|f(x+h)-f(x)\big| \le \sup_{0<t<1}\big|\partial_h f(x+th)\big| \le |h| \sup_{0<t<1}\big\|f'(x+th)\big\|$$

illetve

$$\begin{aligned}\big|f(x+h)-f(x)-\partial_h f(x)\big| &\le \sup_{0<t<1}\big|\partial_h f(x+th)-\partial_h f(x)\big|\\ &\le |h| \sup_{0<t<1}\big\|f'(x+th)-f'(x)\big\|\end{aligned}$$

Bizonyítás. A $g(t)=f(x+th)-tc$ jelöléssel definíció szerint

$$g'(t)=\partial_h f(x+th)-c,$$

így a jobb oldali szuprémum $k=\sup_{0<t<1}\big|g'(t)\big|$, és azt kell megmutatnunk, hogy

$$\big|g(1)-g(0)\big| \le k, \quad \text{ha} \quad k<\infty.$$

Legyen $\varepsilon>0$ és $K>k$. Ha τ az

$$S=\Big\{0\le t\le 1 : \big|g(t)-g(0)\big| \le \varepsilon + Kt\Big\}$$

halmaz szuprémuma, akkor g-nek a 0-beli folytonossága miatt $\tau>0$ és S zártságából $\tau\in S$. Ha $\tau<1$ lenne, akkor

$$\lim_{t\to\tau}\frac{g(t)-g(\tau)}{t-\tau}=g'(\tau)$$

miatt a τ egy elég kis környezetéből vett bármely $t>\tau$-ra $\big|g(t)-g(\tau)\big|<K(t-\tau)$, ami ellentmond τ definíciójának. Így $\tau=1$, tehát $\big|g(1)-g(0)\big|\le\varepsilon+K$. Végül $\varepsilon\downarrow 0$, $K\downarrow k$ határátmenettel kapjuk az állítást. □

* **2.2.18. Következmény.** *Ha f' létezik és korlátos, $\|f'\|\le B$ egy K konvex halmazon, akkor f Lipschitz-függvény K-n és* $\mathrm{Lip}(f)\le B$.

Bizonyítás. Ha $\|f'\|\le B$ a K-n, akkor $x,y\in K$ esetén

$$\big|f(y)-f(x)\big| \le |y-x| \sup_{0<t<1}\Big\|f'\big(x+t(y-x)\big)\Big\| \le B|y-x|. \quad \square$$

2.2.19. Következmény. *Ha egy tartományon F_1 és F_2 az f primitív függvényei, akkor F_1-F_2 állandó.*

* **Bizonyítás.** $F=F_1-F_2$ deriváltja nulla, így a középérték-egyenlőtlenség szerint lokálisan állandó. Legyen egy adott pontban felvett érték c. Így azon pontok halmaza, ahol F értéke c, nyílt és nem üres. Hasonlóan, azon pontok halmaza, ahol az F értéke nem c, szintén nyílt, így ez utóbbi üres kell legyen. □