3.3.5. Definíció. Egy X belső szorzat tér egy x_n sorozatát *teljes*nek nevezzük, ha nem bővíthető minden x_n-re ortogonális normált elemmel, azaz ha egyedül a 0 elem ortogonális minden x_n-re, vagy másként fogalmazva, az x_n-ek halmazának ortogonális komplementere $\{0\}$. Ha az x_n ortonormált sorozat zárt, akkor az előző tételből (1) miatt teljes is. A megfordítás nem minden belső szorzat térben igaz, de Hilbert-térben igen, mivel ott $x - \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$ egy előző tétel szerint ortogonális minden x_k-ra, tehát csak nulla lehet.

3.3.6. Az $\mathbb{L}^2$-tér. Legyen $H \subset \mathbb{R}^k$ egy mérhető halmaz. Ha $f : H \to \mathbb{K}$ minden $0 < c < +\infty$-re abszolút integrálható $H \cap [-c, c]^k$-n és az $\int_H |f|^2$ (impropriusz) integrál konvergens, akkor f-et *négyzetesen integrálható*nak fogjuk nevezni. Az ilyen függvények halmazát $\mathbb{L}^2(H)$ fogja jelölni. A négyzetesen integrálható függvények köréből nem vezet ki a $\mathbb{K}$ elemeivel való szorzás, a konjugált képzés és az összeadás sem, mert $|f + g| \leq 2\max\bigl\{|f|, |g|\bigr\}$, ahonnan $|f + g|^2 \leq 4\max\bigl\{|f|^2, |g|^2\bigr\} \leq 4\bigl(|f|^2 + |g|^2\bigr)$. Az $f, g \in \mathbb{L}^2(H)$ függvények *belső szorzat*án az

$$\langle f, g \rangle = \int_T f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

integrált értjük; vegyük észre, hogy $4f\overline{g} = (f + \overline{g})^2 + (f - \overline{g})^2$, így $f\overline{g}$ abszolút (impropriusz) integrálható. Az így definiált belső szorzat annak minden szükséges tulajdonságával rendelkezik, egyet kivéve: az $\|f\| = 0$ összefüggés nem csak akkor teljesül, ha $f = 0$, hanem pontosan akkor, ha f majdnem mindenütt nulla: ha f majdnem mindenütt nulla, akkor nyilván $\|f\| = 0$; megfordítva, ha $\|f\|^2 = 0$, akkor az

$$\Bigl\{x \in H : \bigl|f(x)\bigr|^2 \geq 1/n\Bigr\}$$

mérhető halmaz egyetlen $n \in \mathbb{N}^+$ra sem lehet pozitív mértékű, mivel abból $\int_H |f|^2 > 0$ következne, így tehát nullahalmaz, amiből ezen halmazok egyesítése, az

$$\Bigl\{x \in H : \bigl|f(x)\bigr|^2 > 0\Bigr\}$$

halmaz is nullahalmaz. Ezen úgy segíthetünk, hogy az f és g függvényeket azonosaknak tekintjük, ha majdnem mindenütt egyenlőek.

* **3.3.7. Az $\mathbb{L}^p$-tér.** Legyen $H \subset \mathbb{R}^k$ egy mérhető halmaz, és $1 \leq p < +\infty$. Ha $f : H \to \mathbb{K}$ minden $0 < c < +\infty$-re abszolút integrálható $H \cap [-c, c]^k$-n és az $\int_H |f|^p$ (impropriusz) integrál konvergens, akkor f-et *p hatványon integrálható*nak fogjuk nevezni. Az ilyen függvények halmazát $\mathbb{L}^p(H)$ fogja jelölni. Az $\mathbb{L}^p(H)$-ból nem vezet ki a $\mathbb{K}$ elemeivel való szorzás, a konjugált képzés és az összeadás sem, mert $|f + g| \leq 2\max\bigl\{|f|, |g|\bigr\}$, ahonnan $|f + g|^p \leq 2^p \max\bigl\{|f|^p, |g|^p\bigr\} \leq 2^p\bigl(|f|^p + |g|^p\bigr)$. Egy $f \in \mathbb{L}^p(H)$ függvény *p-normá*ján az

$$\|f\|_p = \Bigl(\int_H |f|^p\Bigr)^{1/p}$$

számot értjük.

A $p = \infty$ esetben álljon $\mathbb{L}^\infty(H)$ azon $f : H \to \mathbb{K}$ függvényekből, amelyek minden $0 < c < +\infty$-re abszolút integrálhatóak $H \cap [-c, c]^k$-n és amelyekhez van olyan $0 \le r$ valós szám, amelyre

$$\Big\{x \in H : \big|f(x)\big| \ge r\Big\}$$

nullahalmaz. Egy ilyen függvényre legyen $\|f\|_\infty$ az összes ilyen r valós számok infimuma. Vegyük észre, hogy $|f| \le \|f\|_\infty$ majdnem mindenütt, ugyanis ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor van olyan $r < \|f\|_\infty + 1/n$, amelyre

$$\Big\{x \in H : \big|f(x)\big| \ge r\Big\}$$

nullahalmaz, ahonnan

$$\Big\{x \in H : \big|f(x)\big| \ge \|f\|_\infty + 1/n\Big\}$$

is nullahalmaz, de

$$\Big\{x \in H : \big|f(x)\big| \ge \|f\|_\infty\Big\}$$

ezen nullahalmazok egyesítése, így maga is nullahalmaz.

Itt is az így definiált norma annak minden szükséges tulajdonságával rendelkezik (a háromszög-egyenlőtlenséget a következő tételben bizonyítjuk), kivéve hogy az $\|f\|_p = 0$ összefüggés nem csak akkor teljesül, ha $f = 0$, hanem pontosan akkor, ha f majdnem mindenütt nulla. Ezen ugyanúgy segíthetünk, mint az $\mathbb{L}^2$-tér esetén: az f és g függvényeket azonosaknak tekintjük, ha majdnem mindenütt egyenlőek.

* **3.3.8. Minkowski-egyenlőtlenség.** *Az előző definíció jelöléseivel, ha* $1 \le p \le \infty$ *és* $f, g \in \mathbb{L}^p(H)$, *akkor*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Bizonyítás. A $p = \infty$ és $\|f\|_p = 0$ vagy $\|g\|_p = 0$ esetek triviálisak. A $t \mapsto t^p$ függvény konvexsége miatt

$$\left(\frac{u}{u+v}y + \frac{v}{u+v}z\right)^p \le \frac{u}{u+v}y^p + \frac{v}{u+v}z^p,$$

ha $u, v, y, z \ge 0$, $u + v > 0$. Az $u = \|f\|_p$, $v = \|g\|_p$, $y = \big|f(x)\big|/\|f\|_p$, $z = \big|g(x)\big|/\|g\|_p$ helyettesítés után mindkét oldalt (impropriusz) integrálva, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \int_H \big(|f| + |g|\big)^p \le 1,$$

amiből adódik a keresett egyenlőtlenség.

3.3.9. Riesz–Fischer-tétel. *Az előző két definícióban definiált terek teljesek, azaz az* $\mathbb{L}^2(H)$ *tér Hilbert-tér, és az* $\mathbb{L}^p(H)$ *terek Banach-terek.*

* **Bizonyítás.** A bizonyítás a Lebesgue-integrál elméletét használja, lásd például a Járai [14] könyvet.