Pólya-Szegő szakkör 2004. őszi félév
Előfeladatsor
2004. szeptember

1. Egy 8×8-as sakktábla egyik mezőjét kivágtuk. Lefedhető-e a megmaradt 63 mező 21 darab 3×1-es lappal?

2. Egy minden valós számra értelmezett f függvény minden (x, y) számpárra kielégíti a következő egyenlőségeket:

$$f(x) \leq x, \qquad f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Bizonyítsuk be, hogy minden valós x-re $f(x) = x$.

3. Legyen c_n nemnegatív, korlátos számsorozat, $0 < \lambda < 1$ és

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_{n+k}$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

4. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{array}{rl} & .1 \\ + & .01 \\ + & .002 \\ + & .0003 \\ + & .00005 \\ + & .000008 \\ + & .0000013 \\ & \vdots \end{array}$$

végtelen összeg racionális számhoz konvergál.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan természetes szám, akkor $n | 2^{n!} - 1$.

6. Az $f(x, y) > 0$ függvény folytonos az

$$a \leq x \leq a', \quad b \leq y \leq b'$$

téglalapon. Mutassuk meg, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^{a'} \left(\int_b^{b'} [f(x,y)]^n \mathrm{d}y \right)^{-1} \mathrm{d}x \right]^{-1/n} = \min_x \max_y f(x, y).$$