Pólya-Szegő szakkör 2004. őszi félév
1. feladatsor
2004. szeptember 13., javított változat

1. Az $f(x)$ egész együtthatós polinom legalább négy egész helyen felveszi a $+1$-et. Igazoljuk, hogy ekkor semmilyen egész helyen nem veszi fel a -1-et.

2. Adott a síkban véges sok (de legalább 3) pont úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen és semelyik négy nincs egy körön. Igaz-e, hogy kiválasztható közülük három pont úgy, hogy az összes többi a körülírt körük
   (a) belsejében,
   (b) külsejében van?

3. Egy téglatest alakú ládát olyan egybevágó téglákkal akarunk megtölteni, amelyek éleinek aránya 1:2:4. Bizonyítsuk be, hogy ha ez megtehető, akkor megtehető úgy is, hogy az ugyanolyan hosszú téglaélek mind párhuzamosak.

4. Legyen a_n a w^n tag együtthatója $(1+w+w^2)^n$-ben. Igazoljuk, hogy ha $p > 3$ prím, akkor
$$a_p \equiv 1 \pmod{p}^2$$

5. Legyenek C, X, Y $n\times n$-es komplex mátrixok. Mutassuk meg, hogy annak, hogy az
$$XY - YX = C$$
egyenlet megoldható, szükséges és elégséges feltétele, hogy $\operatorname{tr} C = 0$!

6. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív, valós a, b, c-re
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$