Pólya–Szegő szeminárium 2.
2. feladatsor
2004. október 4.

1. Bizonyítsuk be, hogy
$$(n!)^{n+1} \mid (n^2)!$$

2. Legyen k egyenletes eloszlású az $1, 2, \ldots, n$ egészeken. Hova tart annak a valószínűsége, hogy $n \bmod k \geq k/2$, ha n a végtelenbe tart. (Itt $0 \leq n \bmod k < k$ a maradék, ha n-t osztjuk k-val.)

3. Legyenek a, d egészek, $d \neq 0$. Az
$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$$
sorozatból kiválasztható végtelen sok tag úgy, hogy azok prímosztói megegyeznek.

4. Legyen az
$$f(z) = \sum_{-\infty<n<\infty} a_k z^k$$
függvény reguláris az $r < |z| < R$ körgyűrűn. Bizonyítsuk be, hogy a körgyűrű képének területe (a többször fedett részeket többszörösen számítva)
$$\pi \sum_{-\infty<n<\infty} n|a_n|^2 (R^{2n} - r^{2n})$$

5. Egy gráfban két élt *teljesen független élnek* nevezünk, ha végpontjaik négyelemű halmazt alkotnak, és az ez által feszített részgráfban csak a két kiinduló él van. Legyen G egy legalább két élű gráf, amelyben nincs két teljesen független él. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \omega(G)^2$.

6. Descartes-féle előjelszbály. (Ennek a feladatnak érdemes több különböző megoldását ismerni.)

Azt mondjuk, hogy az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ valós számsorozatnak jelváltása van a k indexű tagnál, ha $0 \neq a_k$ ellenkező előjelű, mint az $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots$ tagok közül az első nullától különböző. Tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ (nem azonosan nulla) valós együtthatós polinomot.

Lássuk be, hogy f együtthatóinak sorozatában legalább annyi jelváltás van, ahány pozitív gyöke van f-nek.

Ha f-nek minden gyöke valós, akkor pontosan ugyanannyi jelváltás van, mint pozitív gyök.