Pólya–Szegő szeminárium 2.
3. feladatsor
2004. október 11.

1. Az f függvény az $[a,b]$ intervallumon korlátos és integrálható. Bármely intervallumon f integrálközepe egyenlő a végpontokon felvett értékek mértani közepével, vagyis bármely $a \le u < v \le b$ számokra

$$\frac{1}{v-u}\int_u^v f(x)\,dx = \sqrt{f(u)f(v)}$$

Adjuk meg az összes ilyen függvényt.

2. Számítsuk ki a következő determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_3 & a_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$$

3. Adott a síkon n piros és n kék pont úgy, hogy semelyik három nem esik egy egyenesbe. Bizonyítsuk be, hogy össze lehet kötni a pontokat n szakasszal úgy, hogy minden szakasz végpontjai különböző színűek legyenek, és semelyik két szakasznak ne legyen közös pontja.

4. Legyen $f(x)$ nem konstans egész együtthatós polinom. Lássuk be, hogy végtelen sok prím van, amely osztója $f(x)$-nek valamely egész x-re.

5. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény létezik, amelyre

$$[f(x)]^3 + 3f(x) = x$$

teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítsuk be továbbá, hogy f differenciálható, és adjuk meg $f'(0)$-t.

6. Számítsuk ki az

$$a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}\right]^n$$

sorozat határértékét.