Pólya–Szegő szeminárium 2.
4. feladatsor
2004. október 18., javított változat

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & \cdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(A mátrixok négyzetesek.)

2. A másodfajú, illetve elsőfajú Stirling-számokról ismertek a következő rekurziók:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$
$$\left[{n \atop k} \right] = (n-1) \left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right]$$

Lássuk be ebből az alábbi azonosságokat:

$$x^n = \sum_{0 \le k \le n} \left\{ {n \atop k} \right\} x(x-1)\dots(x-k+1)$$
$$x(x+1)\dots(x+n-1) = \sum_{0 \le k \le n} \left[{n \atop k} \right] x^k$$

3. Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}}$$

4. Jelölje $V_{\mathbb{Q}}$ a $P(x) = x^5 - 2x$ polinomnak a $\mathbb{Q}$-n felvett értékeinek halmazát. Bizonyítsuk be, hogy $P : \mathbb{Q} \to V_{\mathbb{Q}}$ bijekció.

5. Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, melynek a főátlójában minden elem 0, míg azon kívül minden helyen $+1$ vagy -1 áll. Bizonyítsuk be, hogy A nem szinguláris, feltéve, hogy n páros.

6. Legyen $a_1, a_2, \dots$ és $b_1, b_2, \dots$ olyan végtelen sorozat, melyben minden elem a 2 és 3 számok egyike, és legyen

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dots = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_1 b_2 b_3} + \cdots$$

Bizonyítandó, hogy ekkor a két sorozat megegyezik.