Pólya–Szegő szeminárium 2.
5. feladatsor
2004. október 25.

1. Tegyük fel, hogy az a_n sorozat minden tagja pozitív, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, de az $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ sor divergens. Adjuk meg az

$$\{a_1\}, \{a_1 + a_2\}, \ldots, \{a_1 + \ldots + a_n\}, \ldots$$

sorozat torlódási pontjainak halmazát, ahol $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ az x törtrésze.

2. Konvergens-e az

$$x + \sin x + \sin\sin x + \sin\sin\sin x + \ldots$$

sor, ha $0 < x < \pi$?

3. Ha az $f(x)$ polinom értéke minden valós x-re nemnegatív, akkor felírható $f(x) = [a(x)]^2 + [b(x)]^2$ alakban, ahol a és b valós együtthatós polinomok.

4. Számítsuk ki a következő integrál értékét:

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$$

5. A másodfajú, illetve elsőfajú Stirling-számokat kétparaméteres sorozatnak tekintve lássuk be, hogy ezeknek az exponenciális generátorfüggvénye

$$\sum_{0\le n} \sum_{0\le k\le n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{z^n}{n!} w^k = e^{w(e^z-1)}$$

$$\sum_{0\le n} \sum_{0\le k\le n} \left[{n \atop k} \right] \frac{z^n}{n!} w^k = \frac{1}{(1-z)^w}$$

6. Tekintsünk egy természetes számokból álló monoton növő számtani sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k természetes számhoz található a sorozatnak k egymást követő tagja, melyek mindegyike összetett szám.