Pólya–Szegő szeminárium 2.
6. feladatsor
2004. november 15., javított

1. Bizonyítsuk be, hogy ha tetszőleges x-re és adott a-ra

$$f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

teljesül, akkor $f(x)$ periodikus függvény!

2. Anna $2n$ fűszálat tart összeszorítva egyik markában. A fűszálak végei mindkét oldalon kilógnak, azt azonban nem lehet megállapítani, hogy melyik két vég tartozik ugyanahhoz a fűszálhoz. Mekkora a valószínűsége annak, hogy vaktában párosával összekötve a fűszálakat mindkét oldalon, egyetlen összefüggő hurkot kapunk? Mennyi ez a valószínűség aszimptotikusan?

3. Tegyük fel, hogy az $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ valós számsorozat $+\infty$-be tart. Legyen A adott, $A > l_1$.

Lássuk be, hogy van olyan n index amelyre minden $1 \leq k \leq n$ esetén

$$\frac{l_{n-k+1} + \ldots + l_{n-1} + l_n}{k} \leq A$$

egyszersmind minden $1 \leq l$ esetén

$$A \leq \frac{l_{n+1} + l_{n+2} + \ldots + l_{n+l}}{l}$$

4. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ számsorozatokat a következőképpen definiáljuk:

$a_1 = 1, \qquad b_1 = 2,$

$a_{n+1} = a_n - 2b_n, \quad b_{n+1} = b_n + 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Adjuk meg a_n-et és b_n-et is expliciten (kizárólag n függvényeként).

5. Legyen f folytonos valós függvény az (a, b) intervallumon, $f \not\equiv 0$. Feltéve, hogy

$$0 = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x f(x)\,dx = \ldots = \int_a^b x^{n-1} f(x)\,dx$$

lássuk be, hogy f legalább n-szer vált előjelet.

6. A B és C téglalap alakú mátrixok sorainak száma egyenlő. Jelölje A azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk, hogy C oszlopait leírjuk B oszlopai mellé. Bizonyítsuk be, hogy

$$\mathrm{Det}(A^*A) \leq \mathrm{Det}(B^*B)\,\mathrm{Det}(C^*C)$$