Pólya–Szegő szeminárium 2.
7. feladatsor
2004. november 22., javított

1. Lássuk be az alábbi azonosságot!

$$F_n(x+y|h) = F_n(x|h) + \binom{n}{1} F_{n-1}(x|h)F_1(y|h) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k} F_{n-k}(x|h)F_k(y|h) + \cdots + F_n(y|h)$$

Ahol

$$F_k(x|h) := x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(k-1)h)$$

(Ha $h = 0$, akkor a binomiális tételt kapjuk.)

2. A Gauss-féle binomiális együtthatókat definiáljuk a következőképpen:

$$G_{n,k}(q) := \frac{1-q^n}{1-q} \cdot \frac{1-q^{n-1}}{1-q^2} \cdots \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q^k}$$

Ha $k = 0$, akkor $G_{n,k}(q) = 1$; ha $k < 0$ vagy $k > n$, akkor $G_{n,k}(q) = 0$.
Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\prod_{1 \le k \le n} (1 + q^{k-1}x) = \sum_{0 \le k \le n} G_{n,k}(q) q^{k(k-1)/2} x^k$$

Ha $q \to 1$, akkor határértékben a binomiális tételt kapjuk.
Útmutatás: először beláthatjuk, hogy

$$G_{n+1,k}(q) = G_{n,k}(q) + q^{n-k+1} G_{n,k-1}(q)$$

3. Tekintsük azt a sorozatot, melyre $a_0 = 1$, továbbá $a_{2n+1} = a_n$ és $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$ teljesül minden $n \ge 0$ egész számra. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \; : \; n \ge 0 \right\}$$

halmazban valamennyi pozitív racionális szám előfordul.

4. Egy szabályos háromszög oldalait n egyenlő részre osztjuk. Az osztópontokon keresztül párhuzamosokat húzunk az oldalakkal. A háromszög kerületén lévő osztópontokat és a háromszög belsejében kialakult metszéspontokat kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n_0 egész szám, hogy ha $n \ge n_0$, akkor tetszőleges színezés esetén van három egyszínű pont, melyek az eredeti háromszög oldalaival párhuzamos oldalú szabályos háromszöget alkotnak.

Határozzuk meg n_0 minimális értékét.

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén igaz a következő egyenlőtlenség.

$$\sqrt{2}\sqrt[4]{4}\sqrt[8]{8}\ldots\sqrt[2^n]{2^n} \le n+1$$