**Pólya–Szegő szeminárium 2.**
**8. feladatsor**
**2004. november 29., javított**

**1.** Legyen $a_1, a_2, \ldots$ olyan végtelen sorozat, melyben minden elem a 2 és 3 számok egyike. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \cdots$$

végtelen sorral előállított szám akkor és csak akkor racionális, ha az $a_i$-k sorozata valahonnan kezdve periodikus.

**2.** Lássuk be, hogy a

$$G_{n,k}(q) = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^k)}$$

Gauss-féle binomiális együttható (rögzített $0 \le k \le n$ egészekre) polinom $q$-ban.

**3.** Mutassuk meg, hogy az $n!e - \lfloor n!e \rfloor$ sorozatnak egyetlen torlódási pontja a nulla.

**4.** Tegyük fel, hogy $f$ reguláris $z_0$-ban, $f(z_0) \neq 0$, de $f'(z_0) = 0$. Tekintsük az $|f(z)|$ függvényt a $z_0$ pont környezetében. Lássuk be, hogy az $|f(z)| = |f(z_0)|$ szintvonalaknak a $z_0$ pontban $2n$ ága találkozik, amelyek egymással egyforma, $\pi/n$ szöget zárnak be. Az $|f(z)| - |f(z_0)|$ függvény az ágak között felváltva pozitív és negatív.

**5.** Számítsuk ki a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)(n^2+2)\ldots(n^2+n)}{(n^2-1)(n^2-2)\ldots(n^2-n)}$$

határértéket.

**6.** Legyen adott a $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *végtelenhez tartó* komplex sorozat, valamint minden $n$-hez a $w_{n,0}, w_{n,1}, \ldots, w_{n,m_n-1}$ számok. Lássuk be, hogy van olyan $f$ egész függvény, amire $f^{(k)}(z_n) = w_{n,k}$. (Tehát minden $z_n$ pontban adott a függvény értéke és az esetleg első néhány deriváltja is.)

**7.** Legyen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény, és $L$ egy zárt, önmagát nem metsző szintvonala $f$-nek (olyan görbe, amely mentén $|f(z)|$ állandó) olyan nyílt tartomány belsejében, ahol $f(z)$ reguláris. Bizonyítsuk be, hogy az $L$ által határolt zárt tartomány belsejében $f$-nek van gyöke, kivéve, ha $f$ konstans.