Pólya–Szegő szeminárium 2.
9. feladatsor
2004. december 6., javított

1. A Csebisev-polinomokat a következő módon definiáljuk ($1 \leq n$ egész):

$$T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta)$$

Lássuk be, hogy $T_n(x)$ n-edfokú polinom, melynek főegyütthatója 2^{n-1}, kivéve ha $n = 0$.

Lássuk be, hogy $n \neq m$ esetén

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x)\, dx = 0$$

2. Mutassuk meg, hogy ha a különböző pozitív egész számokból álló $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozatra a

$$0{,}(a_1)(a_2)\ldots$$

végtelen tizedes tört racionális számot állít elő, akkor a $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ sor konvergens.

3. Tegyük fel, hogy az F, G egész függvényeknek nincs közös gyökük. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan f, g egész függvények, hogy $f(x)F(x) + g(x)G(x) = 1$.

4. Bizonyítsuk be, hogy $kl + 1$ különböző egész szám közül kiválasztható $k + 1$ úgy, hogy mindegyik osztható az előzővel, vagy $l + 1$ úgy, hogy egyik sem osztható semelyik másikkal.

5. Egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ komplex mátrix elemei 1-nél kisebb vagy egyenlő abszolút értékűek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $|\det(\mathbf{A})| \leq n^{n/2}$. Mutassuk meg, hogy az egyenlőtlenség éles.

6. Vannak-e olyan, egy adott tartományon reguláris $f_1, \ldots, f_n, f$ függvények, amelyekre teljesül az

$$|f_1(x)| + \cdots + |f_n(x)| = |f(x)|$$

egyenlőség, de nem csak egy konstans szorzóban különböznek?