Pólya–Szegő szeminárium 3.
0. feladatsor
2005. február 7.

1. Tegyük fel, hogy egy valós sor nem konvergens, és nem tart plusz vagy mínusz végtelenhez, de a részletösszegei nullához tartanak. Lássuk be, hogy a sorösszegek torlódási pontjai (véges vagy végtelen) intervallumot alkotnak.

2. Adjunk meg végtelen sok (m, n) számpárt úgy, hogy az m, n különböző egész számoknak ugyanazok legyenek a prímosztói, és az $m + 1$, $n + 1$ számoknak is ugyanazok legyenek a prímosztói.

3. Legyenek adva a $0 \leq p_{nk}$ számok minden $0 \leq k \leq n$ egészre oly módon, hogy $1 = p_{n0} + p_{n1} + \ldots + p_{nn}$. Ezek az s_n sorozatból a t_n sorozatot állítják elő a következőképpen: $t_n = p_{n0}s_0 + p_{n1}s_1 + \ldots + p_{nn}s_n$ bármely $0 \leq n$ egészre.

Azt mondjuk, hogy ez a transzformáció reguláris, ha minden s_n sorozatra az s_n és a t_n sorozatok egyszerre konvergensek vagy divergensek, és ha konvergensek, akkor egyenlő a határértékük. Bizonyítsuk be, hogy a transzformáció akkor és csak akkor reguláris, ha minden k-ra $0 = \lim_{n\to\infty} p_{nk}$.

4. a) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan a, b pozitív egész számokból álló pár van, amelyre a osztója $(b^2 + b + 1)$-nek, és b osztója $(a^2 + a + 1)$-nek.

b) Adjuk meg az összes ilyen párt.

5. Legyen az $f(x)$ valós függvény additív, azaz

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R},$$

továbbá f felülről korlátos valamely $[a, b]$ intervallumon. Bizonyítsuk be, hogy f lineáris (azaz $f(x) = cx$ valamely c konstanssal).

6. Legyen $1 \leq n$ egész. Ha az n-edfokú f polinom főegyütthatója 1, akkor

$$2^{-n+1} \leq \max_{-1<x<1} |f(x)|$$

Egyenlőség csak az $f(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$ polinomra állhat, ahol T_n a Csebisev-polinom, $T_n(\cos\vartheta) = \cos(n\vartheta)$.